LM 256 - TD n°12

2 décembre 2011

Les numéros des exercices sont ceux de la feuille n°3.

Exercice 8. a) En coordonnées cylindriques, *i.e.* avec $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$, z inchangé, le domaine V dont on doit calculer le volume est décrit par

$$\{r \in [0, \sqrt{2}], \theta \in [0, 2\pi],\ 4 \leq z \leq 10 - 3r^2\}.$$

Par conséquent (Fubini, et élément de volume égal à $rdrd\theta dz$),

$$\mathrm{Vol}(V) = \int_0^{\sqrt{2}} rdr \int_0^{2\pi} d\theta \int_4^{10-3r^2} dz = 2\pi \int_0^{\sqrt{2}} (6 - 3r^2) rdr = 6\pi.$$

b) On procède comme en a). On décrit le domaine V considéré par $\{r \in [0, 1], \theta \in [0, 2\pi],\ 3r^2 \leq z \leq 4 - r^2\}$, d'où

$$\mathrm{Vol}(V) = \int_0^2 rdr \int_0^{2\pi} d\theta \int_{3r^2}^{4-r^2} dz = 2\pi \int_0^2 4(1 - r^2) rdr = 2\pi.$$

c) En procédant toujours de la même manière, on a la description $V = \{r \in [0, 2],\ -2\sqrt{16 - r^2} \leq z \leq 2\sqrt{16 - r^2}\}$. Il vient donc (après intégration selon θ)

$$\mathrm{Vol}(V) = 2\pi \int_0^2 rdr \int_{-2\sqrt{16-r^2}}^{2\sqrt{16-r^2}} dz = 4\pi \int_0^2 2r\sqrt{16 - r^2}\, dr = \left(\frac{512}{3} - 64\sqrt{3}\right)\pi \approx 188.$$

Exercice 10. Rappelons rapidement les règles de calculs de la loi $\wedge$ sur les 1-formes ; si α, β, γ, δ sont des fonctions définies sur un domaine D du plan, alors pour tout (x, y) de ce domaine,

$$\begin{aligned}\Big(\alpha(x,y)dx + \beta(x,y)dy\Big)\wedge&\Big(\gamma(x,y)dx + \delta(x,y)dy\Big)\\ &= \alpha(x,y)\gamma(x,y)dx \wedge dx + \alpha(x,y)\delta(x,y)dx \wedge dy\\ &\quad + \beta(x,y)\gamma(x,y)dy \wedge dx + \beta(x,y)\delta(x,y)dy \wedge dy,\end{aligned}$$

soit, comme $dx \wedge dx = dy \wedge dy = 0$ et $dx \wedge dy = -dy \wedge dx$,

$$\begin{aligned}\Big(\alpha(x,y)dx + \beta(x,y)dy\Big)\wedge\Big(\gamma(x,y)dx + \delta(x,y)dy\Big) \\ = \Big(\alpha(x,y)\delta(x,y) - \beta(x,y)\gamma(x,y)\Big)dx \wedge dy\end{aligned}$$

sur le domaine considéré. De sorte que si $\alpha = \gamma$ et $\beta = \delta$, *i.e.* si l'on multiplie une 1-forme par elle-même avec $\wedge$, on obtient 0, d'où le résultat si en particulier la forme en question est une df avec f une fonction C^1 sur le plan.

Effectuons les calculs demandés. Pour le premier, on obtient

$$(x^2 + y^2(2x - 1))dx \wedge dy.$$

Pour le second (attention à l'ordre d'écriture !),

$$(1 + e^{x+y})dx \wedge dy.$$

Pour le dernier, on calcule d'abord $d(x^2 + 6xy + y^2) = (2x + 6y)dx + (2y + 6x)dy$ et $d(x^3 + y^3) = 3x^2dx + 3y^2dy$. Le résultat demandé est donc

$$6\Big((x + 3y)y^2 - (y + 3x)x^2\Big)dx \wedge dy.$$

Exercice 11. Remarquons que pour toutes les intégrales à calculer, nous sommes bien dans les situations comprises par le théorème du cours sur la formule de Green-Riemann (domaines sans trous, bords C^1 par morceaux, intégrandes C^1, *etc.*), ainsi que par le théorème de Fubini, que nous appliquerons pour passer d'intégrales doubles à intégrales simples emboîtées. Cela dit, en appliquant cette formule, et en appelant D les domaines délimités par les courbes considérées, on obtient :

- $$\begin{aligned}\int_{bD} x^2ydx + xy^3dy &= \iint_D \Big(\frac{\partial(xy^3)}{\partial x} - \frac{\partial(x^2y)}{\partial y}\Big)dxdy \\ &= \iint_{[0,2]^2} (y^3 - x^2)dxdy \\ &= 2\Big(\int_0^2 y^3dy - \int_0^2 x^2dx\Big) = \frac{8}{3}.\end{aligned}$$
- $$\begin{aligned}\int_C (x^2 + y^2)dx + 2xydy &= \iint_D \Big(\frac{\partial(2xy)}{\partial x} - \frac{\partial(x^2 + y^2)}{\partial y}\Big)dxdy \\ &= \iint_D (2y - 2y)dxdy \\ &= 0.\end{aligned}$$

- $\displaystyle\int_C 2xydx + y^5dy = \iint_D \left(\frac{\partial(y^5)}{\partial x} - \frac{\partial(2xy)}{\partial y}\right)dxdy$
$$= \iint_D 2xdxdy$$
$$= \int_0^2 dx \int_0^{x/2} 2xdy = \int_0^2 x^2dx = \frac{8}{3}.$$
- $\displaystyle\int_C x^2ydx - xy^5dy = \iint_D \left(\frac{\partial(-xy^5)}{\partial x} - \frac{\partial(x^2y)}{\partial y}\right)dxdy = \iint_{[-1,1]^2}(-y^5 - x^2)dxdy$
$$= -2\Big(\int_{-1}^1 y^5dy + \int_{-1}^1 x^2dx\Big) = -\frac{4}{3}.$$
- $\displaystyle\int_C (3y + e^{\sqrt{x}})dx + (2x + \cos^2 y)dy = \iint_D \left(\frac{\partial(2x + \cos^2 y)}{\partial x} - \frac{\partial(3y + e^{\sqrt{x}})}{\partial y}\right)dxdy$
$$= \iint_D (2-3)dxdy = -\int_0^1 dx \int_{x^2}^{\sqrt{x}} dy$$
$$= -\int_0^1 (\sqrt{x} - x^2)dx = -\frac{1}{3}.$$
- $\displaystyle\int_C (y^2 - \arctan x)dx - (3x + \sin y)dy$
$$= \iint_D \left(-\frac{\partial(3x + \sin y)}{\partial x} - \frac{\partial(y^2 - \arctan x)}{\partial y}\right)dxdy$$
$$= \iint_D (-3 - 2y)dxdy = -\int_{-2}^2 dx \int_{x^2}^4 (3 + 2y)dy$$
$$= -\int_{-2}^2 (12 - 3x^2 + 16 - x^4)dx$$
$$= -\Big(112 - 16 - \frac{64}{5}\Big) = -\frac{416}{5}.$$
- $\displaystyle\int_C x^2dx + 3y^2dy = \iint_D \left(\frac{\partial(3y^2)}{\partial x} - \frac{\partial(x^2)}{\partial y}\right)dxdy = 0.$
- $\displaystyle\int_C x^2ydx - 6y^2dy = \iint_D \left(\frac{\partial(-6y^2)}{\partial x} - \frac{\partial(x^2y)}{\partial y}\right)dxdy$
$$= -\iint_D x^2dxdy = -\iint_{[0,1]\times[0,2\pi]} r^2\cos^2\theta r dr d\theta$$
$$= -\Big(\int_0^1 r^3dr\Big)\Big(\int_0^{2\pi}\cos^2\theta d\theta\Big) = -\frac{\pi}{4},$$

en linéarisant $\cos^2\theta$ pour calculer $\int_0^{2\pi}\cos^2\theta d\theta$.

Une fois calculé le produit scalaire $\vec{V}\cdot d\vec{r}$ (je pense qu'il y a une faute de frappe et que le d a été oublié), l'intégrale suivante se ramène à :

$$\begin{aligned}\int_C x^3 y dx + 2x^4 dy &= \iint_D \Big(\frac{\partial(2x^4)}{\partial x} - \frac{\partial(x^3y)}{\partial y}\Big) dxdy \\ &= \iint_D (8x^3 - x^3) dxdy = 7 \iint_D x^3 dxdy\end{aligned}$$

À ce stade, il est clair que l'intégrale est nulle, puisque la fonction à intégrer est impaire en x, tandis que le domaine d'intégration est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées (voir un exemple de ce phénomène dans l'exercice 7, première intégrale).

Continuons, en appliquant cette fois la formule dans l'autre sens :

$$\begin{aligned}\iint_D xydxdy &= \iint_D \frac{\partial(x^2y/2)}{\partial x} dxdy \\ &= \int_{bD} \frac{x^2y}{2} dy \\ &= \frac{1}{2}\int_0^2 (2-y)^2 y dy = \frac{20}{3}\end{aligned}$$

en regardant les composantes de bD où l'on n'a pas identiquement $x = 0$ ou $y = 0$.

Enfin, de la même manière,

$$\begin{aligned}\iint_D \frac{dxdy}{(x+y)^2} &= \iint_D \frac{\partial}{\partial y}\Big(\frac{-1}{x+y}\Big) dxdy = \int_{bD} \frac{dx}{x+y} \\ &= \int_1^3 \frac{dx}{x+y} + \int_3^1 \frac{dx}{4} = \log(2) - \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

Exercice 23. La normale extérieure est vers le bas. Si l'on paramètre la surface par sa projection verticale sur le plan Oxy, il faudra donc faire un changement de signe, puisque le plan est naturellement (par défaut) orienté vers le haut. Ainsi, S se projette sur le cercle D de Oxy de centre O et de rayon $2\sqrt{2}$, d'où : $S = \{(x, y, \frac{x^2+y^2}{4}) | (x, y \in D)\}$.

On a donc, sur S, $dz = d\Big(\frac{x^2+y^2}{4}\Big) = \frac{xdx+ydy}{2}$, donc $\frac{dy\wedge dz}{x} = \frac{dy\wedge xdx}{2x} = -\frac{1}{2}dx \wedge dy$. L'intégrale à calculer vaut donc $\iint_D \frac{1}{2}dxdy$ (c'est ici que l'on fait le changement de signe, au moment d'enlever le $\wedge$ entre dx et dy), c'est-à-dire la moitié de l'aire de D, soit 4π.

Vous remarquerez que nous avons sauté beaucoup d'exercices. Il s'agit pour la plupart d'exercices calculatoires (en particulier les exercices 9, 12 à 15 et 17 à 22), que je vous recommande de faire par vous-même (seule la pratique personnelle peut vous faire gagner en aisance en calcul). Les corrigés seront en ligne d'ici la fin de la semaine prochaine.

Comme je vous ai demandé par ailleurs l'exercice 16 pour le 9 décembre, en voici le corrigé, à regarder après s'être essayé à la résolution.

Exercice 16. Le jacobien demandé vaut

$$\begin{vmatrix} 2u & 0 & 0 \\ 0 & 2v & 0 \\ 0 & 0 & 2w \end{vmatrix} = 8uvw$$

pour (u, v, w) dans $(\mathbb{R}^+)^3$, et plus particulièrement dans le domaine

$$A = \{(u, v, w) |\, u \geq 0, v \geq 0, w \geq 0,\ u + v + w \leq 2\}$$

pour la suite de l'exercice. Ainsi, le volume demandé vaut

$$\begin{aligned}
\iiint_A 8uvw\, dudvdw =& 8 \int_0^2 udu \int_0^{2-u} vdv \int_0^{2-u-v} wdw \\
=& 4 \int_0^2 udu \int_0^{2-u} (2-u-v)^2 vdv \\
=& 4 \int_0^2 udu \int_0^{2-u} \Big(v^3 - 2(2-u)v^2 + (2-u)^2 v\Big) dv \\
=& \frac{1}{3} \int_0^2 (2-u)^4 udu = \frac{2}{3} \int_0^2 (2-u)^4 du - \frac{1}{3} \int_0^2 (2-u)^5 du \\
=& \frac{2}{3} \cdot \frac{32}{5} - \frac{1}{3} \cdot \frac{64}{6} = \frac{32}{45}.
\end{aligned}$$