LM 256 - TD n°13 et TDA n°4

9 décembre 2011

Les numéros des exercices sont ceux de la feuille n°3.

Exercice 24. Si Δ est le disque fermé dans Oxy de centre l'origine et de rayon 2, la surface S dont on doit calculer l'aire est $\{(x, y, xy) | (x, y) \in \Delta\}$. Posons, pour $(x, y) \in \Delta$, $z(x, y) = xy$; d'après la proposition 5.3.1 du poly,

$$\begin{aligned}
\text{Aire}(S) &= \iint_{(x,y)\in\Delta} \Big(1 + (z'_x)^2 + (z'_y)^2\Big)^{1/2} dxdy \\
&= \iint_{(x,y)\in\Delta} \Big(1 + y^2 + x^2\Big)^{1/2} dxdy \\
&= \int_0^2 (1 + r^2)^{1/2} r\, dr \int_0^{2\pi} d\theta \quad \text{(passage en polaires et Fubini)} \\
&= 2\pi \left[\frac{1}{3}(1 + r^2)^{3/2}\right]_0^2 = 2\pi \frac{5\sqrt{5} - 1}{3} \approx 21,3.
\end{aligned}$$

Remarquons que l'intégrande de la première intégrale est bien $\|X'_x \wedge X'_y\|$ (norme euclidienne), où $X(x, y) = \big(x, y, z(x, y)\big) = (x, y, xy)$, $X'_x = (1, 0, y)$ et $X'_y = (0, 1, x)$ (ce qui est l'approche que j'ai utilisée en TD).

Exercice 25. Soit Δ le disque fermée dans Oxy, de centre $(2, 0)$ et de rayon 2, de sorte que le cylindre de l'énoncé soit le cylindre vertical au-dessus de Δ. La surface S considérée est donc la partie du cône $z^2 = x^2 + y^2$ au-dessus de Δ ; on a donc sur cette surface $z = \sqrt{x^2 + y^2} \geq 0$, d'où :

$$z'_x = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \quad \text{et} \quad z'_y = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

(en oubliant la légère singularité en l'origine, qui est juste au bord de Δ).

On en déduit :

$$\begin{aligned}\mathrm{Aire}(S) &= \iint_{(x,y)\in\Delta}\left(1+\frac{x^2}{x^2+y^2}+\frac{y^2}{x^2+y^2}\right)^{1/2}dxdy = \sqrt{2}\iint_{(x,y)\in\Delta}dxdy\\ &=\sqrt{2}\,\mathrm{Aire}(\Delta) = 4\pi\sqrt{2}\approx 17.8.\end{aligned}$$

Exercice 27. 1) Puisque l'on est dans le premier octant (x, y et $z \geq 0$), on peut décrire S par $\left\{(x, y, 6-3x-2y) | \, x \in [0,2],\ y \in \left[0, 3-\frac{3}{2}x\right]\right\}$. Sur S on a donc $z(x,y) = 6-3x-2y$, de sorte que l'élément de surface $d\sigma$ devient $(1+3^2+2^2)^{1/2}dxdy = \sqrt{14}\,dxdy$ (en supposant S orientée vers le haut). On a donc

$$\begin{aligned}\iint_S yz\,d\sigma &=\sqrt{14}\int_0^2 dx\int_0^{3-\frac{3}{2}x} y(6-3x-2y)dy\\ &=\frac{\sqrt{14}}{3}\int_0^2(6-3x)^3dx\\ &=36\sqrt{14}\approx 135.\end{aligned}$$

2) Une rapide analyse montre que S est la portion du plan $x+y+z=2$ comprise dans le premier octant. On a donc $S = \{(x, y, 2-x-y) | \, x\in[0,2],\ y\in[0,2-x]\}$; l'élément de surface $d\sigma$ devient quant à lui $\sqrt{3}\,dxdy$. Finalement,

$$\begin{aligned}\iint_S xz\,d\sigma &=\sqrt{3}\int_0^2 x\,dx\int_0^{2-x}(2-x-y)dy\\ &=\frac{\sqrt{3}}{2}\int_0^2 x(2-x)^2dx\\ &=\frac{2}{\sqrt{3}}\approx 1.15.\end{aligned}$$

3) Puisque sur S, $y'_x = 2x$ et $y'_z = 4$, on a $d\sigma = -(1+4x^2+16)^{1/2}dxdz$ dans ce calcul (en supposant S orientée vers la droite). Il vient :

$$\begin{aligned}\iint_S -x\,d\sigma &= \int_0^2 x(17+4x^2)^{1/2}dx\int_0^2 dz = \left[\frac{1}{12}(17+4x^2)^{3/2}\right]_0^2\cdot 2\\ &=\frac{1}{6}(33^{3/2}-17^{3/2})\approx 19,9.\end{aligned}$$

4) La surface S est au-dessus du disque fermé dans Oxy, de centre 0 et de rayon 2. Sur S, $z'_x = 0$, et $z'_y = 1$; ainsi, $d\sigma = \sqrt{2}dxdy$, en supposant S orientée

vers le haut. Par suite, on a

$$\begin{aligned}
\iint_S yz\,d\sigma =& \sqrt{2}\iint_\Delta y(y+6)dxdy\\
=& \sqrt{2}\iint_\Delta y^2dxdy \quad \text{car} \iint_\Delta ydxdy = 0\\
=& \sqrt{2}\int_0^2 r^3dr\int_0^{2\pi} d\theta \quad \text{(passage en polaires et Fubini)}\\
=& 8\pi\sqrt{2} \approx 35,5.
\end{aligned}$$

5) Il doit y avoir une faute d'énoncé, S étant d'après sa définition invariante selon z, donc en particulier non bornée, ce qui pose problème pour l'intégration demandée.

6) La surface S est au dessus du disque fermé Δ dans Oxy, de centre l'origine et de rayon 1 ; orientons-la vers le haut. On décrit S par $\Big\{\Big(x, y, (1-x^2-y^2)^{1/2}\Big) \,|\, (x,y)\in\Delta\Big\}$. On a donc, au-dessus de Δ (ou plus exactement au-dessus de son intérieur, soit hors de son bord qu'est le cercle unité de Oxy), $z'_x = \frac{x}{(1-x^2-y^2)^{1/2}}$, et $z'_y == \frac{y}{(1-x^2-y^2)^{1/2}}$, donc $1 + (z'_x)^2 + (z'_y)^2 = \frac{1}{1-x^2-y^2}$. Ainsi,

$$\begin{aligned}
\iint_S (x^2z + y^2z)\,d\sigma &= \iint_\Delta (x^2+y^2)(1-x^2-y^2)^{1/2}\frac{dxdy}{(1-x^2-y^2)^{1/2}}\\
&= \iint_\Delta (x^2+y^2)dxdy\\
&= \frac{\pi}{4} \quad \text{(en utilisant les coordonnées polaires).}
\end{aligned}$$

7) Les contraintes définissant S nous donnent facilement que celle-ci est la région de la sphère unité située au-dessus du disque fermé Δ dans Oxy, de centre 0 et de rayon $\frac{1}{\sqrt{2}}$. En effet, sur S on a $z \geq 0$, et $1 - x^2 - y^2 = z^2 \geq x^2 + y^2$, d'où $x^2 + y^2 \leq \frac{1}{2}$, et il est facile de voir que les conditions $x^2 + y^2 \leq \frac{1}{2}$ et $0 \leq z = (1 - x^2 - y^2)^{1/2}$ sont également suffisantes. Si S est orientée vers le haut, on sait déjà que $d\sigma$ devient $\frac{dxdy}{(1-x^2-y^2)^{1/2}}$. Néanmoins, un simple coup d'œil à l'intégrale demandée nous dit qu'elle est nulle par symétrie.

8) On peut voir S comme l'union (disjointe à une ensemble d'aire nulle près) des graphes $S_\pm$ de $(x,z) \to \pm(1-x^2)^{1/2}$ sur $\{x \in [-1,1],\, z \in [0,3]\} \subset Oxz$. Ainsi, si S est orientée vers l'extérieur, $d\sigma$ devient $\Big(1 + \frac{x^2}{1-x^2} + 0\Big)^{1/2} dxdz = \frac{1}{(1-x^2)^{1/2}}dxdz$ sur S_+, et

$$\iint_{S_+}(x^2y - z^2)d\sigma = \iint_{(x,z)\in[-1,1]\times[0,3]} \frac{x^2(1-x^2)^{1/2} - z^2}{(1-x^2)^{1/2}}\,dxdz.$$

De même,

$$\iint_{S_-} (x^2y - z^2)d\sigma = \iint_{(x,z)\in[-1,1]\times[0,3]} \frac{-x^2(1-x^2)^{1/2} - z^2}{(1-x^2)^{1/2}}\, dxdz.$$

car $y = -(1-x^2)^{1/2}$ sur S_-. Finalement

$$\begin{aligned}
\iint_S (x^2y - z^2)d\sigma &= \iint_{S_+} (x^2y - z^2)d\sigma + \iint_{S_-} (x^2y - z^2)d\sigma \\
&= -2 \iint_{(x,z)\in[-1,1]\times[0,3]} \frac{z^2}{(1-x^2)^{1/2}}\, dxdz \\
&= -2 \int_{-1}^{1} \frac{dx}{(1-x^2)^{1/2}} \int_0^3 z^2 dz \\
&= -18 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos\theta}{\cos\theta}\, d\theta \qquad \text{en posant } x = \sin\theta, \quad \theta \in \Big[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\Big] \\
&= -18\pi.
\end{aligned}$$

Exercice 28. a) On va utiliser la formule du déterminant (voir feuille sur le flux). La paramétrisation est simple ; on prend $(x,y) \in \Delta := [0,1]^2$ et $X(x,y) = (x, y, x^2 + y^2)$. On a alors $X'_x = (1,0,2x)$ et $X'_y = (0,1,2y)$, et $X'_x \wedge X'_y = (-2x, -2y, 1)$. Puisque le champ de vecteur dont on veut calculer le flux à travers S s'écrit $(-e^y, ye^x, xy)$, le produit mixte $V \cdot (X'_x \wedge X'_y)$ vaut $2xe^y + 2xye^x + x^2y$. Ainsi, le flux demandé vaut (d'après Fubini)

$$\begin{aligned}
\iint_{[0,1]^2} (2xe^y + 2xye^x + x^2y)\, dxdy =& \int_0^1 2xdx \int_0^1 e^y dy + \int_0^1 2xe^x dx \int_0^1 ydy \\
&+ \int_0^1 x^2 dx \int_0^1 ydy \\
=&(e-1) + 1 + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = e + \frac{1}{6}.
\end{aligned}$$

b) On procède de même : $(x,y) \in \Delta := [0,2] \times [0,1]$ et $X(x,y) = (x, y, x^2 + y^2 - 9)$, de sorte que $X'_x = (1,0,2x)$ et $X'_y = (0,1,2y)$, dont on a vu que le produit vectoriel était $(-2x, -2y, 1)$. Le champ de vecteur V s'écrivant $(-x^2y, 3xy^2, -4y^3)$, le produit mixte $V \cdot (X'_x \wedge X'_y)$ vaut en tout point $(-2x^3y + 6xy^3 + 4y^3)$. Finalement, en tenant compte des orientations, le flux demandé vaut (en utilisant Fubini)

$$\begin{aligned}\iint_{[0,1]\times[0,2]} &(-2x^3y + 6xy^3 + 4y^3)dxdy \\ &= -2\Big(\int_0^2 x^3dx\Big)\Big(\int_0^1 ydy\Big) + 6\Big(\int_0^2 xdx\Big)\Big(\int_0^1 y^3dy\Big) \\ &\quad + 4\Big(\int_0^2 dx\Big)\Big(\int_0^1 y^3dy\Big) \\ &=1.\end{aligned}$$

c) On paramètre S grâce aux coordonnées sphériques, ce qui donne $S = \{(4\cos\theta\sin\varphi, 4\sin\theta\sin\varphi, 4\cos\varphi) \,|\, (\theta,\varphi) \in [0,2\pi]\times[0,\pi/2]\}$. Ainsi, en reprenant les notations de la feuille, on a $X(\theta,\varphi) = (4\cos\theta\sin\varphi, 4\sin\theta\sin\varphi, 4\cos\varphi)$, donc

$$X'_\theta(\theta,\varphi) = (-4\sin\theta\sin\varphi, 4\cos\theta\sin\varphi, 0)$$

et

$$X'_\varphi(\theta,\varphi) = (4\cos\theta\cos\varphi, 4\sin\theta\cos\varphi, -4\sin\varphi),$$

d'où $(X'_\theta \wedge X'_\varphi)(\theta,\varphi) = -16(\cos\theta\sin^2\varphi, \sin\theta\sin^2\varphi, \sin\varphi\cos\varphi)$ (qui est orienté vers le bas). Ainsi, en tenant compte des orientations, le flux demandé vaut

$$\begin{aligned}-16\iint_{[0,2\pi]\times[0,\pi/2]} &\begin{pmatrix}\cos\theta\sin^2\varphi\\ \sin\theta\sin^2\varphi\\ \sin\varphi\cos\varphi\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}4\sin\theta\sin\varphi\\ -4\cos\theta\sin\varphi\\ -12\cos\varphi\end{pmatrix} d\theta d\varphi \\ &=192\iint_{[0,2\pi]\times[0,\pi/2]} \sin\varphi\cos^2\varphi d\theta d\varphi \\ &=192\Big(\int_0^{2\pi} d\theta\Big)\Big(\int_0^{\pi/2}\sin\varphi\cos^2\varphi d\varphi\Big) = 256\pi.\end{aligned}$$

Exercice 29. a) Un calcul direct donne immédiatement $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\vec{V} = 0$.

b) La courbe en question délimitant la surface S de l'exercice 26, on a en utilisant la formule de Stokes-Ampère (poly p.78) :

$$\oint_{bS} \vec{V}\cdot\overrightarrow{dM} = \iint_S \overrightarrow{\mathrm{rot}}\vec{V}\cdot\vec{n}_S dS,$$

quantité nulle d'après a) (à vrai dire, on pouvait s'en douter, puisque le seul résultat qui ne dépende pas du sens de parcours de bS, omis dans l'énoncé, est 0).

c) La question est beaucoup plus simple qu'il n'y paraît. En effet, $\vec{V}$ est C^1 et à rotationnel nul sur $\mathbb{R}^3$ qui est sans trou. C'est donc le gradient d'une fonction $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ (de classe C^2, disons). On pourrait chercher f avec la méthode habituelle ; on voit néanmoins facilement que $f : (x,y,z) \mapsto xyz$ convient.

Ainsi, la circulation de $\vec{V}$ la long d'un arc (a, b, c) à (a', b', c') est indépendante de ce chemin dès lors que celui-ci a ces extrémités, et vaut $f(a', b', c') - f(a, b, c) = a'b'c' - abc$.

d) Par un calcul direct, on a que la divergence de $\vec{V}$ est nulle.

e) Par Ostrogradsky (notre champ est C^1 dans toute la boule), p.79 du poly, ce flux est égal à l'intégrale de la divergence sur la boule de centre O et de rayon R, qui est nulle d'après la question précédente.

Exercice 31. a) D'après l'exercice 12 de la feuille 2 (applicable en dehors de l'origine si $\varphi : \mathbb{R}^{+*} \to \mathbb{R}$), $\overrightarrow{\text{rot}}\left(\vec{v}\right) = \vec{0}$ et $\text{div}\left(\vec{v}\right) = 0$ sur $\mathbb{R}^3 \backslash \{0\}$.

b) Paramétrons la sphère unité, disons S, par $S = \{X(\theta, \varphi) | \, \theta \in [0, 2\pi], \varphi \in [0, \pi]\}$, avec $X(\theta, \varphi) = (\sin\varphi \cos\theta, \sin\varphi \sin\theta, \cos\varphi)$. On a $X'_\theta \wedge X'_\theta = -(\sin\varphi) X(\theta, \varphi)$ après calculs, qui pointe donc vers l'intérieur. Par suite le flux $\mathcal{F}$ de $\vec{v}$ (égal à X sur S, puisque $r = 1$) est donné par :

$$\mathcal{F} = -\iint_{\{(\theta,\varphi)\in[0,2\pi]\times[0,\pi]\}} X \cdot (X'_\theta \wedge X'_\theta) d\theta d\varphi = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi} \sin\varphi \, d\varphi = 4\pi.$$

c) La formule d'Ostrogradsky (qui nous donnerait que le flux du b) est nul) ne s'applique pas à cause de la singularité de $\vec{v}$ en l'origine.

Exercice 32. Notons α la 2-forme $x^3 dy \wedge dz$ et $\beta = z^3 dx \wedge dz$. On remarque que $\beta = d\Big(-\frac{1}{4} z^4 dx\Big)$, donc $\iint_S \beta = 0$, car S n'a pas de bord ; l'intégrale demandée se restreint donc à $\iint_S x^3 dy \wedge dz + y^3 dz \wedge dx$. Par symétrie, ceci vaut $2 \iint_S \alpha$. D'après le théorème de Stokes, si B est la boule unité, on a $\iint_S \alpha = \iiint_B d\alpha = 3 \iiint_B x^2 dx \wedge dy \wedge dz = 3 \iiint_B x^2 dxdydz$ par définition de l'intégrale d'une 3-forme. Passons en coordonnée sphériques ; on a (avec Fubini)

$$\iiint_B x^2 dxdydz = \int_0^1 r^4 dr \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi} \sin\varphi \, d\varphi = \frac{4\pi}{5},$$

de sorte que l'intégrale demandée vaille $\frac{24\pi}{5}$.