LM 256 - TD n°2

16 septembre 2011

Les numéros des exercices sont ceux de la feuille n°1.

Exercice 3. 1. On procède par encadrement. Pour tout x, $-1 \leq \cos x \leq 1$, donc $-3 \leq -2+\cos x \leq -1$ (ce qui nous dit au passage que $-2+\cos x$ ne s'annule jamais, et donc que f est bien définie), et en passant à l'inverse, puis en multipliant par x^2 qui est positif, il vient : $-x^2 \leq \frac{x^2}{-2+\cos x} \leq -\frac{x^2}{3}$. Les membres de droite et de gauche tendant vers $-\infty$, celui du milieu aussi (il aurait suffit de n'avoir que la majoration, mais qui peut le plus peut le moins). La fonction exp tendant vers 0 en $-\infty$, on en déduit par composition des limites que f tend vers 0 en $+\infty$.

2. On réécrit $g(x) = x\sqrt{\frac{1}{x^2}(1+x^2)} = \frac{x}{\sqrt{x^2}}\sqrt{1+x^2}$ pour $x \neq 0$. Or, $\sqrt{x^2} = |x|$ (attention !), et $x/|x| = \text{signe}(x)$, soit $g(x) = \text{signe}(x)\sqrt{1+x^2}$ pour x non nul. La racine tendant vers 1 lorsque x tend vers 0, g tend vers 1 en 0^+, et vers -1 en 0^-, et n'a donc pas de limite en 0.

Exercice 5. *Je propose de remplacer « $e^{1/x}-2$ » par « $e^{1/x}-1$ » dans la formule définissant f sur $\mathbb{R}^*$, pour éviter des problèmes inintéressants au dénominateur.* On remarque que f et g sont bien définies, car $e^{1/x} \neq 1$, et $e^{1/x^2+x^2} > 1 \geq -\cos(1/x)$ pour tout $x \neq 0$ (respectivement car $\frac{1}{x} \neq 0$ et $1/x^2+x^2 > 0$ pour tout $x \neq 0$). Cela dit, lorsque x tend vers 0 par valeurs négatives ($x \to 0^-$), $e^{1/x}$ tend vers 0, donc $f(x)$ tend vers $-2 \neq 0 = f(0)$; f n'est pas continue (à gauche) en 0. Toutefois lorsque x tend vers 0 par valeurs positives, $e^{1/x}$ tend vers $+\infty$, donc $f(x)$ tend vers 0, et f est continue à droite en 0.

Quant à g, on a que e^{1/x^2+x^2} tend vers $+\infty$ lorsque x tend vers 0 (indépendamment de son signe). Le dénominateur de g tend donc vers $+\infty$ lorsque x tends vers 0, puisque $\cos(1/x)$ est minoré (par -1). Le numérateur de g étant majoré (par 1) en valeur absolue, $g(x)$ tend donc vers 0 par encadrement lorsque x tend vers 0. Conclusion : g est continue en 0.

Exercice 7. 1. Rappelons l'énoncé précis : supposons que $v \circ u$ ait un sens, par exemple $u : I \to J$ et $v : J \to K$ avec I, J et K des intervalles de $\mathbb{R}$, et si u est dérivable en $x_0 \in I$ et v est dérivable en $u(x_0)$, alors $v \circ u$ est dérivable en x_0, de dérivée $u'(x_0) \cdot v'(u(x_0))$.

2. Soient u et v deux fonctions, réciproques l'une de l'autre, soit $u : I \to J$ et $v : J \to I$, I et J intervalles de $\mathbb{R}$ pour faire simple, et $v \circ u = \text{id}_I$, $u \circ v = \text{id}_J$.

Si alors u est dérivable en $x_0 \in I$, avec $u'(x_0) \neq 0$, alors v est dérivable en $u(x_0)$, et $v'(u(x_0)) = \frac{1}{u'(x_0)}$.

3. On se souvient que la fonction arctan est la réciproque de la fonction tan réduite à l'intervalle $]-\pi/2, \pi/2[$, qui a toujours une dérivée non nulle, puisque $\tan' = 1 + \tan^2 \geq 1 > 0$. Soit $y \in \mathbb{R}$. On pose $x = \arctan y \in]-\pi/2, \pi/2[$, soit $y = \tan x$. D'après l'énoncé ci-dessus, arctan est dérivable en y, et

$$\arctan'(y) = \arctan'\big(\tan(x)\big) = \frac{1}{1+\tan^2 x} = \frac{1}{1+y^2}.$$

On procède de même pour les dérivées de arcsin, réciproque de sin restreinte à $[-\pi/2, \pi/2]$, et de arccos, réciproque de cos restreinte à $[0, \pi]$. On obtient que arcsin et arccos sont dérivables sur $]-1, 1[$ (alors qu'elles sont définies sur $[-1, 1]$, attention), et que pour tout y dans cet intervalle,

$$\arcsin' y = -\arccos' y = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}.$$

4. Il s'agit de faire les calculs en utilisant le théorème de dérivation de fonctions composées, et les résultats du 3. ; on obtient :

(a) f est dérivable sur $]-1, 1[$, de dérivée arcsin ; par le théorème de la limite de la dérivée (f est continue sur $[-1, 1]$), elle est même dérivable en -1 et en 1, de dérivées respectives $\arcsin(-1) = -\pi/2$, et $\arcsin(1) = \pi/2$;

(b) f est dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée $x \mapsto \frac{1}{(1+x^2)^2}$;

(c) f est dérivable sur $]-1, 1[$, et tous calculs faits sa dérivée est donnée sur cet intervalle par : $x \mapsto \frac{-1}{2\sqrt{1-x^2}}$ (en fait on a $f = \frac{1}{2}\arccos$, ce qui ne saute pas yeux) ;

(d) f est dérivable sur $\left]-1-\sqrt{2}, \sqrt{2}-1\right[$, de dérivée $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{1-\left(\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{x^2-x+1}}$;

(e) f est dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$, de dérivée $x \mapsto \frac{1}{x(1+\ln^2 x)}$.

Exercice 10. 1. La première intégrale s'obtient facilement par le calcul $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = [\arctan x]_0^1 = \frac{\pi}{4}$ (ici il est donc question de connaître ses primitives, car même si à la rigueur on pourrait s'en sortir par le changement de variables $x = \tan\theta$, c'est bien la manière de procéder la plus rapide).

Pour la seconde, on utilise la *formule de linéarisation* $\sin^2 x = \frac{1-\cos(2x)}{2}$ valable pour tout x réel. Il vient alors $\int_0^{\pi/2} \sin^2 x\, dx = \int_0^{\pi/2} \frac{1-\cos(2x)}{2} dx = \left[\frac{x}{2} - \frac{\sin(2x)}{4}\right]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{4}$ (cet exemple illustre l'utilité des formules de trigonométrie, puisque par exemple des intégrations par parties ne sauraient nous tirer de ce mauvais pas ; pas besoin d'ailleurs de les connaître toutes par cœur, mais bien de maîtriser les formules de base du style $\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$, *etc.*, et de savoir vite retrouver les autres).

2. Procédons au changement de variable indiqué ; c'est l'occasion de revoir la rédaction pour cette méthode. Formellement, $dt = \frac{1}{2}(1+\tan^2(x/2)) = \frac{1}{2}(1+t^2)dx$, soit $dx = \frac{2}{1+t^2}dt$. Les bornes deviennent respectivement 0 et 1 ; $\cos x$ devient $\frac{1-t^2}{1+t^2}$ (exercice :

trouver pourquoi). L'intégrale à calculer devient

$$\int_0^1 \frac{1}{3+2(\frac{1-t^2}{1+t^2})}\frac{2dt}{1+t^2} = \int_0^1 \frac{2dt}{5+t^2},$$

soit $\left[\frac{2}{\sqrt{5}}\arctan(t/\sqrt{5})\right]_0^1 \approx 0,376$.

Exercice 12. 1. Un logarithme ne prenant que des arguments strictement positifs, f n'est définie que sur le domaine $\{(x,y)|\, x^2+y^2>1\}$. En coordonnées polaires, $x^2+y^2>1 \Leftrightarrow r^2>1 \Leftrightarrow r>1$; le domaine mis en évidence est donc l'extérieur (strict) du cercle unité.

2. De même, f n'est ici définie que sur le domaine $\{(x,y)|\, y>x^2\}$, qui correspond à la partie du plan située strictement au-dessus de la parabole d'équation $y=x^2$.

3. Une racine carrée n'est définie que des quantités positives. Par conséquent, f est définie sur $\{(x,y)|\, xy \leq 1\}$. On peut décrire ce domaine comme l'union disjointe :

$$\{(x,y)|\, x>0 \text{ et } y \leq 1/x\} \sqcup \{(x,y)|\, x<0 \text{ et } y \geq 1/x\} \sqcup \{(0,y)\}.$$

La première composante est la région strictement à droite ($x>0$) de l'axe des ordonnées située sous la branche d'hyperbole d'équation $\{y=\frac{1}{x}\}$ (et incluant cette branche), la deuxième, la région strictement à gauche ($x<0$) de l'axe des ordonnées située au-dessus de la branche d'hyperbole d'équation $\{y=\frac{1}{x}\}$, et la troisième est l'axe des ordonnées. Au final, le domaine considéré est la partie du plan situé entre les deux branches de l'hyperbole d'équation $\{y=\frac{1}{x},\ x\neq 0\}$ (inclautn l'hyperbole).

4. À cause de la racine carrée, f est définie là où le produit $(x+y+1)(x+y-1)$ est positif, c'est-à-dire là où $(x+y+1)$ et $(x+y-1)$ ont même signe, au sens large, soit :

- $x+y+1>0$ et $x+y-1\geq 0$;
- $x+y+1=0$;
- $x+y+1<0$ et $x+y-1\leq 0$.

Or si $x+y-1\geq 0$, *i.e.* $y\geq 1-x$, donc $x+y+1\geq 2$ et $x+y+1>0$ est automatique. En raisonnant à l'identique sur la troisième condition, on voit que le domaine de définition de est $\{(x,y)|\, x+y-1\geq 0 \text{ ou } x+y+1\leq 0\}$, c'est-à-dire la région du plan située au-dessus de la droite d'équation $y=1-x$, union celle située sous la droite (parallèle à la précédente) d'équation $y=-1-x$.

5. Il s'agit de voir où le polynôme en x, y au dénominateur s'annule. Le plus simple est de poser $x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$, $(r,\theta)\in\mathbb{R}^+\times[0,2\pi[$, et d'écrire $x^2+xy+y^2 = r^2(\cos^2\theta+\sin\theta\cos\theta+\sin^2\theta) = r^2\big(1+\frac{1}{2}\sin(2\theta)\big)$. La parenthèse $\big(1+\frac{1}{2}\sin(2\theta)\big)$ étant toujours $\geq \frac{1}{2}$, x^2+xy+y^2 ne s'annule que si $r=0$, soit $x=y=0$. Ainsi, f est définie sur le plan privé de l'origine.