LM 256 - TD n°6

14 octobre 2011

Les numéros des exercices sont ceux de la feuille n°2.

Exercice 2. 1. Une des propriétés fondamentales du produit vectoriel de deux vecteurs est d'être orthogonal à ces deux vecteurs. Le plan passant par les points P, Q et R étant engendré par les vecteurs $\overrightarrow{PQ}$ et $\overrightarrow{PR}$ $\Big($ou bien $\overrightarrow{PQ}$ et $\overrightarrow{QR}$, ou encore $\overrightarrow{PR}$ et $\overrightarrow{QR}\Big)$, leur produit vectoriel sera bien perpendiculaire à ce plan. Or, un calcul direct donne $\overrightarrow{PQ} \wedge \overrightarrow{PR} = 5 \begin{pmatrix} -8 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix}$.

2. Si l'on note S le point $R + \overrightarrow{PQ}$ (c'est-à-dire le point obtenu en traçant $\overrightarrow{PQ}$ partant de R), on a que l'aire du parallélogramme $PQSR$ (attention à l'ordre des lettres) est le double de celle du triangle PQR. Or l'aire de ce parallélogramme est aussi (c'est une autre propriété du produit vectoriel) égale à la norme $\left\|\overrightarrow{PQ} \wedge \overrightarrow{PR}\right\|$, soit $5\Big((-8)^2+3^2+(-3^2)\Big)^{1/2} = 5\sqrt{82}$. L'aire du triangle est donc de $\frac{5}{2}\sqrt{82} \approx 22,6$.

3. Supposons, comme c'est le cas ici, que les trois vecteurs sont linéairement indépendants (sans quoi la question est réglée). Trois vecteurs sont coplanaires si et seulement si leur déterminant est nul ; or d'après l'exercice 1, le déterminant d'un triplet de vecteurs est égal à leur produit mixte, et donc trois vecteurs sont coplanaires si et seulement si leur produit mixte est nul. Une autre manière de l'expliquer est la suivante : le premier vecteur est dans le plan qu'engendrent les deux derniers si et seulement s'il est orthogonal à tout ce qui est orthogonal à ce plan, c'est-à-dire à ces deux derniers vecteurs ; or cet orthogonal est de dimension 1 (car on est dans l'espace à trois dimensions, et cet orthogonal est un supplémentaire du plan en question), et est donc engendré par le produit vectoriel des deux derniers vecteurs. Le premier vecteur est donc dans le plan qu'engendrent les deux derniers si et seulement s'il est orthogonal à leur produit vectoriel, *i.e.* si et seulement si son produit scalaire avec le produit vectoriel des deux autres est nul, ou encore si et seulement si le produit mixte des trois est nul.

Cela dit, le calcul donne $\vec{a} \wedge \vec{b} = \begin{pmatrix} 9 \\ -18 \\ -9 \end{pmatrix}$, puis $\left(\vec{a} \wedge \vec{b}\right) \cdot c = 0 + (-18) \cdot (-9) + (-9) \cdot 18 = 0$.

4. L'aire du parallélépipède construit sur les vecteurs $\vec{a}$, $\vec{b}$ et $\vec{c}$ (qui est une figure géométrique de dimension 3) est simplement la somme des aires des parallélogrammes que sont ses faces. Ces parallélogrammes (au nombre de 6, comme pour le cube qui est un parallélépipède particulier) sont engendrés deux à deux par $\vec{a}$ et $\vec{b}$, $\vec{b}$ et $\vec{c}$ et $\vec{a}$ et $\vec{c}$. Leur aire est donc respectivement $\left\|\vec{a} \wedge \vec{b}\right\|$, $\left\|\vec{b} \wedge \vec{c}\right\|$ et $\|\vec{a} \wedge \vec{c}\|$. Or $\vec{a} \wedge \vec{b} = \begin{pmatrix} -18 \\ 20 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{b} \wedge \vec{c} = \begin{pmatrix} -22 \\ -76 \\ -28 \end{pmatrix}$, et $\vec{a} \wedge \vec{c} = \begin{pmatrix} 30 \\ 42 \\ -5 \end{pmatrix}$, de normes carrées respectives 733, $2712 = 4 \cdot (678)$ et 2689. L'aire recherchée est donc $2\left(\sqrt{733} + \sqrt{2712} + \sqrt{2689}\right)$, ce qui vaut environ 262.

5. On refait la même chose ; $\overrightarrow{PQ} \wedge \overrightarrow{PR} = (-6, 0, 3)$ $\left(\text{de norme } 3\sqrt{5}\right)$, $\overrightarrow{PR} \wedge \overrightarrow{PS} = (12, 3, -6)$ $\left(\text{de norme } 3\sqrt{21}\right)$ et $\overrightarrow{PQ} \wedge \overrightarrow{PS} = (7, 7, 0)$ $\left(\text{de norme } 7\sqrt{2}\right)$. L'aire recherchée est donc $2\left(3\sqrt{5} + 3\sqrt{21} + 7\sqrt{2}\right)$, ce qui vaut dans les $60,7$.

Exercice 3. Si je trouve comment utiliser les logiciels de calcul formel que j'ai sous la main, je vous mettrai les dessins avec un petit commentaire...

Exercice 4. Tous les champs de vecteurs et fonctions de cet exercice étant C^∞ dans l'espace entier, on ne se posera plus la question de leur dérivabilité.

1. On applique la définition formelle de la divergence, $\operatorname{div} \vec{u} = \vec{\nabla} \cdot \vec{u}$, à $\vec{r} = (x, y, z)$, et l'on trouve $\operatorname{div} \vec{r} = \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial z} = 3$. De même pour le rotationnel, $\overrightarrow{\mathrm{rot}} \vec{r} = \vec{\nabla} \wedge \vec{r} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial z}{\partial y} - \frac{\partial y}{\partial z} \\ \frac{\partial x}{\partial z} - \frac{\partial z}{\partial x} \\ \frac{\partial y}{\partial x} - \frac{\partial x}{\partial y} \end{pmatrix} = 0$.

2. On trouve ici $\operatorname{div} \vec{u} = y + z + x$, et $\overrightarrow{\mathrm{rot}} \vec{u} = -{}^t(y, z, x)$.

3. En un point M de coordonnées (x, y, z), on a $\operatorname{div} \vec{w} = 2xy - 6y^2x^2 + xy^2$, ce qui en $(1, -1, 1)$ donne -7.

4. En un point M de coordonnées (x, y, z), on a $\overrightarrow{\mathrm{grad}} f = {}^t(6xy, 3x^2 - 3y^2z^2, -2zy^3)$, ce qui lorsque $M = (1, -2, -1)$ donne ${}^t(-12, -9, 16)$.