LM 256 : Travaux dirigés - Feuille 1

Exercice 1 *Déterminer pour chacune des fonctions suivantes le domaine de définition et la limite au point x_0 indiqué.*

1. $\dfrac{2(1-\cos x)}{x^2}$ *en* $x_0 = \dfrac{\pi}{3}$
2. $\dfrac{(1-\cos x)\sin x}{x\tan^2 x}$ *en* $x_0 = 0$
3. $\dfrac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{2+\cos x}$ *en* $x_0 = +\infty$
4. $\dfrac{\sqrt[3]{x^2+x+8}+\sqrt{x^2+4x}-2}{x}$ *en* $x_0 = 0$

Exercice 2 *Montrer que la fonction définie sur* $\mathbb{R}$ *par :*

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}} & si\ x > 0 \\ 1 & si\ x = 0 \\ \dfrac{\mathrm{sh}\sqrt{-x}}{\sqrt{-x}} & si\ x < 0 \end{cases}$$

est continue.

Exercice 3

1. *Soit* $f(x) = \exp\left(\dfrac{x^2}{-2+\cos x}\right)$. *Calculer la limite de* f *en* $+\infty$.
2. *Soit* $g(x) = x\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}$, *pour* $x \neq 0$. *La fonction* g *admet-elle une limite en* 0 *?*

Exercice 4 *Soient* f *et* g *deux fonctions de* $\mathbb{R} - \{0\}$ *dans* $\mathbb{R}$, *définies par :*

$$f(x) = \sin\frac{1}{x}, \qquad g(x) = x\sin\frac{1}{x}$$

Peut-on prolonger f *et* g *par continuité en* 0 *?*

Exercice 5 *Etudier la continuité en 0 des fonctions suivantes :*

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{2}{e^{1/x}-2} & si\ x \neq 0 \\ 0 & si\ x = 0 \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin(1/x)}{\cos(1/x)+e^{(1/x^2+x^2)}} & si\ x \neq 0 \\ 0 & si\ x = 0 \end{cases}$$

Exercice 6 *1. Montrer que les fonctions* $f(x) = |x|$ *et* $g(x) = \dfrac{x}{1+|x|}$ *sont continues et dérivables sur* $\mathbb{R}^*$.

2. Etudier leur continuité et leur dérivabilité au point 0.

Exercice 7 *1. Donner la dérivée d'une fonction composée.*

2. Donner la dérivée d'une fonction réciproque.

3. Calculer la dérivée des fonctions réciproques suivantes : arcsin, arccos *et* arctan.

4. Pour chacune des fonctions suivantes, donner le domaine de définition et calculer la dérivée :

(a) $f(x) = x \arcsin x + \sqrt{1-x^2}$ *(b)* $f(x) = \dfrac{x}{1+x^2} + \arctan x$

(c) $f(x) = \arctan \sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$ *(d)* $f(x) = \arcsin \left(\dfrac{x+1}{\sqrt{2}}\right)$

(f) $f(x) = \arctan(\ln x)$

Exercice 8 *Calculer les développements limités des fonctions suivantes :*

1. $DL_4(0)$ *de* $f(x) = \ln^2(1+x)$ *2.* $DL_3(0)$ *de* $g(x) = e^{\sin x}$

3. $DL_3(0)$ *de* $h(x) = \dfrac{x}{e^x - 1}$ *4.* $DL_3(0)$ *de* $j(x) = \dfrac{\ln(\cos x)}{\cos x - 1}$

5. $DL_3(1)$ *de* $k(x) = \sqrt{x}$ *6.* $DL_7(0)$ *de* $l(x) = \dfrac{1}{1-x^2-x^3}$

Exercice 9 *Calculer les primitives des fonctions suivantes :*

1. $\dfrac{x-3}{(x+1)(x^2+4)}$, $x\sqrt{x^2+1}$, $\tan(2x)$

2. $\dfrac{6x-7}{3x^2-7x+11}$, $\dfrac{\sin 2x}{(1+\cos 2x)^2}$, $\dfrac{1}{\sqrt{16-9x^2}}$

3. $\dfrac{x}{x^4+16}$, $\dfrac{\sin 2x}{\sqrt{1+\cos^2 x}}$, $\dfrac{\sqrt{1+\ln x}}{x}$

4. xe^x, $x \sin x$, $\ln x$, $x^n \ln x$, $x \cos^2 x$, $\ln(x^2+1)$

5. $\sin^3 x$, $\tan^3 x$, $\dfrac{\sqrt{4-x^2}}{x^2}$

Exercice 10 *Calculer les intégrales suivantes :*
1.

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}, \quad \int_0^{\pi/2} \sin^2 x \; dx$$

2.

$$\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{3+2\cos x}$$ *(On pourra procéder au changement de variables $t = tan(x/2)$)*

Exercice 11 *Calculer l'aire des domaines suivants :*

1. $\{ \ (x,y) \mid 0 \le x, \ 0 \le y \ \textit{et} \ 1 \le x+y \le 2\}$

2. $\{ \ (x,y) \mid 1 \le x \le 2 \ \textit{et} \ x \le y \le \mathrm{sh} x\}$

3. $\{ \ (x,y) \mid 0 \le x \le \pi \ \textit{et} \ \sin^2 x \le y \le \sin x\}$

4. $\{ \ (r,\theta) \mid \frac{\pi}{2} \le x \le \frac{3\pi}{2} \ \textit{et} \ r \le 1\}$

Fonctions de plusieurs variables

Exercice 12 *Pour chacune des fonctions suivantes, déterminer son ensemble de définition D et donner une représentation graphique de D.*

1. $f(x,y) = \ln(x^2+y^2-1)$ 2. $f(x,y) = \ln(y-x^2)$

3. $f(x,y) = \sqrt{1-xy}$ 4. $f(x,y) = \sqrt{(x+y+1)(x+y-1)}$

5. $f(x,y) = \dfrac{\sin x + \cos y}{x^2+xy+y^2}$

Exercice 13 *Représenter la ligne de niveau c de la fonction f dans les cas suivants :*

1. $f(x,y) = 3x+2y \qquad c = 1, \ 2, \ 0$

2. $f(x,y) = y^2 \qquad c = -1, \ 0, \ 1, \ 4$

3. $f(x,y) = \ln(x+y) \qquad c = 0, \ 1$

Exercice 14 *Pour $f(x,y)$, c et m_0 donnés ci-dessous, donner l'équation de la courbe I^c de niveau c de f et celle de la tangente T à I^c au point m_0 :*

1. $f(x,y) = \ln(y - x^2)$ $\quad c = 0 \quad m_0 = (-1,2)$
2. $f(x,y) = 2xy - 3x + y + 3$ $\quad c = 6 \quad m_0 = (1,2)$
3. $f(x,y) = 2^{xy}$ $\quad c = 4 \quad m_0 = (1,2)$

Exercice 15 *Soit f la fonction définie par :*

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. *Etudier la continuité de f sur $\mathbb{R}^2$.*
2. *Calculer les dérivées partielles de f sur $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$. Que valent-elles en $(0,0)$?*

Exercice 16 *Pour chacune des fonctions suivantes, donner l'ensemble de définition et étudier la limite en $(0,0)$.*

1. $f(x,y) = \dfrac{1-\cos(xy)}{y^2}$
2. $f(x,y) = \dfrac{x^2+y^2}{x}$
3. $f(x,y) = \dfrac{x^2y}{x^2+y^2}$
4. $f(x,y) = (x+y^2)\sin\left(\dfrac{1}{xy}\right)$
5. $f(x,y) = (1+xy)^{1/x}$

Exercice 17 *On considère la fonction f définie par*

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x+y} & \text{si } x+y \neq 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Montrer que f n'est pas continue en $(0,0)$ mais que sa restriction à $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$ l'est.

Exercice 18 *Soit f la fonction définie par :*

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y}{x^4+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. *Soit $\mathcal{D}$ une droite quelconque passant par l'origine. Montrer que la restriction de f à $\mathcal{D}$ est continue en $(0,0)$.*
2. *Peut-on en déduire que f est continue en $(0,0)$?*

Exercice 19 *Soit f la fonction définie par :*

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{(x^2-1)y^3}{(x-1)^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (1,0) \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Etudier la continuité et la dérivabilité (différentiabilité) de f au point $(1,0)$.

Exercice 20 *Donner les dérivées partielles au premier ordre des fonctions suivantes :*

(a) $f(x,y,z) = x^3y + xyz + xz^3$ (b) $f(x,y) = x^{y^2}$

(c) $f(x,y,z) = \exp\left(\frac{x}{y}\right) + \exp\left(\frac{z}{y}\right)$ (d) $f(x,y) = \arcsin(x^2+y^2)$

Exercice 21 *Calculer les différentielles totales des fonctions suivantes :*

(a) $f(x,y) = \ln(xy)$ (b) $f(x,y,z) = x^2 + x^2y^2z^2 + \sin(yz)$

(c) $f(x,y,z) = \tan(3x-y) + 6^{y+z}$

Exercice 22 *Soit $f = exp(u-2v)$, où $u : (x,y) \longmapsto \sin x$ et $v : (x,y) \longmapsto x^3+y^2$. Calculer les dérivées partielles de f.*

Exercice 23 *Soit $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable et $f : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & x\varphi(\frac{y}{x}) \end{cases}$*
Montrer que : $x\dfrac{\partial f}{\partial x} + y\dfrac{\partial f}{\partial y} = f$.

Exercice 24 *Soit $m \in \mathbb{N}^*$ et soit $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction satifaisant à l'équation d'Euler : $x\dfrac{\partial f}{\partial x} + y\dfrac{\partial f}{\partial y} + z\dfrac{\partial f}{\partial z} = mf$.*

Pour (x,y,z) fixés, on pose $\varphi : \alpha \longmapsto \frac{1}{\alpha^m} f(\alpha x, \alpha y, \alpha z)$.
Montrer que $\varphi' = 0$ et en déduire que f est homogène de degré m.

Exercice 25
1. *Montrer que $f(x,y) = \ln(x^2+y^2)$ vérifie l'équation de Laplace : $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$.*

2. *On considère* $u = 1/r$, *où* $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. *Montrer que* u *satisfait l'équation de Laplace :* $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$.

Exercice 26 *Développer à l'ordre 1 les fonctions suivantes, au voisinage des points indiqués :*

(a) $f(x,y) = x^2 + y^2$	$(1,1)$, $(0,2)$, (a,b)
(b) $f(x,y,z) = x^2 + 3xyz - y^3 + z$	$(1,0,-1)$
(c) $f(x,y,z) = \sin x \cos y \tan z$	$\left(0, \pi, \dfrac{\pi}{4}\right)$

Dérivation partielle d'ordre 2

Exercice 27 *Déterminer les dérivées partielles jusqu'à l'ordre 2 des fonctions suivantes :*

1. $f(x,y) = x^2 + xy - y^3$. *Le théorème de symétrie de Schwarz est-il vérifié ?*
2. $f(x,y,z) = \cos(x + yz)$.

Exercice 28 *Soit* f *la fonction définie sur* $\mathbb{R}^2$ *de la manière suivante :*

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. *Montrer que* f *admet des dérivées partielles d'ordre 2,* $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ *et* $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$, *en* $(0,0)$ *et les calculer.*
2. *Que peut-on déduire de ces résultats ?*

Exercice 29 (Laplacien en coordonnées polaires) *Soit* $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ *une fonction qui admet en tout point de* $\mathbb{R}^2$ *des dérivées partielles jusqu'à l'ordre 2. On considère la fonction* $F : \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *définie par* $F(r,\theta) = f(r\cos\theta, r\sin\theta)$.

1. *Déterminer* $\dfrac{\partial F}{\partial r}$, $\dfrac{\partial F}{\partial \theta}$, $\dfrac{\partial^2 F}{\partial r^2}$ *et* $\dfrac{\partial^2 F}{\partial \theta^2}$.
2. *En déduire l'expression de Laplacien de* f : $\Delta f = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ *au point* $(r\cos\theta, r\sin\theta)$.

Exercice 30 *Montrer que l'équation* $x^5 + 3xy - y^6 = 1$ *définit* y *comme une fonction implicite de* x *au voisinage du point* $(1, 0)$. *En notant* $y = \varphi(x)$, *calculer* $\varphi'(1)$ *et* $\varphi''(1)$.

Exercice 31 *Montrer que l'équation* $xy + yz + xz + 2x + 2y - z = 0$ *définit implicitement une fonction* $(x, y) \longmapsto z = f(x, y)$ *au voisinage de* $(0, 0, 0)$ *et calculer le plan tangent en ce point à la surface considérée.*

Exercice 32 *Soit* $F(x, y) = x^2 + y^4 - 3xy + x - 1$. *Montrer qu'on peut appliquer à* F *le théorème des fonctions implicites au point* $(2, 1)$.

Soit $\varphi(x)$ *une fonction telle que dans un voisinage de* $(2, 1)$ *on ait l'équivalence :*

$$F(x, y) = 0 \Longleftrightarrow y = \varphi(x).$$

On a donc $\varphi(2) = 1$ *et* $F(x, \varphi(x)) = 0$ *dans le voisinage de* $x = 2$ *considéré. En dérivant deux fois cette dernière relation, puis en évaluant en* $x = 2$, *calculer* $\varphi'(2)$ *et* $\varphi''(2)$.

En déduire un développement limité de φ *à l'ordre 2 au point 2.*