Éléments d'analyse et de géométrie complexes

M2 AAG, Septembre 2020 – H. Auvray

Les objets de départ en Analyse Complexe à Plusieurs Variables sont les *fonctions holomorphes de plusieurs variables complexes*, que l'on peut définir comme des fonctions continues, et holomorphes par rapport à chacune de leurs variables.

Comme en dimension (complexe) 1, une formule de Cauchy (itérée ici) donne l'analyticité, et en particulier la régularité C^∞, de telles fonctions. On peut en conséquence définir, par analogie avec le cas réel, la catégorie des *variétés complexes* (ou holomorphes) en toute dimension complexe.

On va alors disposer de méthodes géométriques, reposant en particulier sur le formalisme des *courants* (généralisation aux variétés de la notion de distribution), adaptées à l'étude d'un phénomène nouveau par rapport à la dimension 1, à savoir la possibilité dans de nombreux cas de pouvoir prolonger *toutes* les fonctions holomorphes d'un ouvert donné de $\mathbb{C}^n$ $(n \geq 2)$. Il s'agira plus précisément dans ce cours d'aborder la résolution de ce problème, consistant en une caractérisation des *« domaines d'holomorphie »*, ainsi que sa généralisation aux variétés. Cet enseignement peut donc naturellement être envisagé comme introduction aux cours de J.-B. Bost (*Introduction aux variétés complexes*) au 1^{er} semestre ; les notions d'Analyse harmonique abordées en feront également une première introduction aux thématiques liées à l'étude des EDP (elliptiques) – *cf.* entre autres cours de J.-F. Babadjian et de M. Léautaud. À travers son contenu, ce cours donnera également l'occasion de mettre en pratique des notions de Géométrie différentielle (*cf.* cours d'introdcution R. Leclercq, et cours d'application à la théorie de groupes de D. Monclair), ou d'apporter simplement quelques éléments de Géométrie complexe avant une orientation vers la Géométrie algébrique.

<u>Prérequis :</u> Analyse complexe en une variable, Théorie des Distributions (*cf.* poly de Th. Ramond, ch. 1 à 4), Géométrie Différentielle (bases).

Il y aura des notes écrites partielles ; pour un support exhaustif, consulter le chapitre 1 du livre de J.-P. Demailly, *Complex Analytic and Differential Geometry* (disponible sur sa page web).

Programme :

I - *Fonctions holomorphes à plusieurs variables et variétés (analytiques) complexes*

1) Définition (continuité et holomorphie séparée), formule de Cauchy et conséquences immédiates (analogues à la dimension 1 : développements en série entières, prolongement analytique, inversion locale).
2) Variétés (analytiques) complexes
   a) définition *via* un atlas (définition alternative/faisceautique en remarque) ; espaces tangent et cotangent, (bi)degré, structure complexe.
   b) Calcul différentiel/intégral sur les variétés (complexes) : cas réel : courants (notamment la formule $F^*[Z] = [F^{-1}(Z)]$, F submersion, Z sous-variété orientée) ; cas complexe : opérateurs ∂ et $\overline{\partial}$ (remarque : formes différentielles, intégration, lemme de Poincaré, cohomologie de de Rham : fait la semaine précédente par R. Leclercq).

II - *Étude locale des fonctions holomorphes : prolongements*

1) Théorème d'extension de Hartogs
   a) Énoncé du théorème, et démonstration modulo la résolution de l'équation $\overline{\partial}$ à support compact en dimension ≥ 2.
   b) Noyaux (Newton, Bochner-Martinelli), formule de Koppelman et résolution de l'équation $\overline{\partial}$ à support compact.
   c) Lemme de Dolbeault-Grothendieck.
2) Phénomène de Hartogs
   a) Figure de Hartogs ; prolongement *via* la formule de Cauchy.
   b) Théorème d'extension de Riemann.

III - *Domaines d'holomorphie I*

1) Définition domaine d'holomorphie ; exemples (ouverts convexes – exercice/digression sur la boule et le polydisque unité en guise de contre-exemple à l'application conforme en dimension ≥ 2 ?).
2) Enveloppe d'holomorphie et convexité holomorphe, propriétés élémentaires ; caractérisation I des domaines d'holomorphie.

IV - *Domaines d'holomorphie II et fonctions psh*

1) Définition fonction d'exhaustion. Caractérisation II des domaines d'holomorphie – et des variétés de Stein – *via* l'existence de fonctions d'exhaustion lisses pluri-sous-harmoniques (définies comme fonctions à hessien complexe positif).
2) Fonctions harmoniques. Noyau de Green et problème de Dirichlet.
3) Fonctions (pluri-)sous-harmoniques.
4) Démonstration des énoncés « un domaine d'holomorphie est (faiblement) pseudo-convexe », ainsi que « une variété de Stein est fortement pseudo-convexe » ; problème de Levi.

Elements of complex analysis and geometry

AAG M2, September 2020 – H. Auvray

Programme:

I - *Holomorphic functions of several variables and complex manifolds*

1) Definition (continuity and separate holomorphy), Cauchy formula and (analogous to complex dimension 1: power series expansions, analytic extension, local inversion).
2) Complex manifolds
   a) definition *via* an atlas (remark: alternative/sheaf-theoretic defintion); tangent and cotangent spaces, (bi)degree, complex structure.
   b) Integral and differential calculus on (complex) manifolds: real case: currents (in particular, formula $F^*[Z] = [F^{-1}(Z)]$, F submersion, Z oriented submanifold); complex case: ∂ and $\overline{\partial}$ operators; (remark: differential forms, integration, Poincaré lemma, de Rham cohomology: done the week before by R. Leclercq).

II - *Local study of holomorphic functions: extensions*

1) Hartogs' extension theorem
   a) Statement of the theorem, proof modulo resolution of $\overline{\partial}$ equation with compact support in dimension ≥ 2.
   b) Kernels (Newton, Bochner-Martinelli), Koppelman formula and resolution of $\overline{\partial}$ equation with compact support.
   c) Dolbeault-Grothendieck lemma.
2) Hartogs' phenomenon
   a) Hartogs' figure; extension *via* Cauchy formula.
   b) Riemann extension theorem.

III - *Domains of holomorphy I*

1) Definition; examples (convex open sets – exercise/digression on unit ball and polydisc as a counterexample of the Conformal Mapping in dimension ≥ 2).
2) Holomorphic hull and holomorphic convexity, basic properties; first characterisation of domains of holomorphy.

IV - *Domains of holomorphy II and psh functions*

1) Definition of exhaustion functions. Second characterisation of domains of holomorphy – and of Stein manifolds – *via* the existence of smooth plurisubharmonic exhaustion functions (*i.e.* functions with positive complex Hessian).
2) Harmonic functions. Green kernel and Dirichlet problem.
3) (Pluri-)Subharmonic functions.
4) Proofs of the statements "a domain of holomorphy is (weakly) pseudo convex", and "a Stein manifold is strongly pseudoconvex"; Levi problem.

There will be partial typewritten notes; most of these contents of the class may however be found in J.-P. Demailly's book, first chapter. Prerequisites are: Complex analysis (in one complex variable), Basic differential geometry, Distribution theory (see e.g. Th. Ramond's notes, chapters 1 to 4).