



UNIVERSITÉ PARIS-SUD
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

Le Théorème des Nombres Premiers et le
Théorème de la Progression Arithmétique
via l'analyse harmonique

ANTHONY GAUVAN
ADRIEN PÉCHOT

Encadrant : HUGUES AUVRAY

ORSAY 2018

Avant-Propos

Dans le cadre de notre formation en M1 Mathématiques Fondamentales, nous devons réaliser un projet ayant pour objectif :

- de nous familiariser à la recherche,
- d’approfondir notre culture mathématique.

Nous avons choisi d’étudier, sous l’encadrement de Hugues Auvray, le Théorème des Nombres Premiers établi pour la première fois par Hadamard et de La Vallée-Poussin en 1896.

L’objectif principal de ce projet est d’étudier en particulier une démonstration due à Jean-Pierre Kahane [6] et détaillée par Jean-Benoit Bost [2]. Cette démonstration repose sur trois outils principaux : l’analyse complexe, les transformations de Fourier et les distributions tempérées. Le deuxième défi est d’essayer d’adapter la démonstration du Théorème des Nombres Premiers à un autre grand Théorème relatif aux nombres premiers : le Théorème de la Progression Arithmétique.

Nous souhaitons rédiger un document qui puisse être pris en main assez aisément par tout étudiant de niveau M1. C’est pourquoi le plan que nous choisissons de suivre contient une partie dédiée à l’outillage dont il est nécessaire de s’armer pour comprendre la démonstration.

Le plan s’articule en quatre parties principales :

1. Présentation du sujet
2. Outillage nécessaire pour aborder la démonstration
3. Démonstration du Théorème des Nombres Premiers
4. Adaptation au Théorème de la Progression Arithmétique

Sommaire

1	Présentation du sujet	3
1.1	Rappel historique	3
1.2	Spécificités de la démonstration étudiée	3
1.3	Schéma de la démonstration	3
2	Outillage nécessaire pour aborder la démonstration	6
2.1	Analyse complexe	6
2.1.1	"Le" logarithme complexe et sa détermination principale	6
2.1.2	Le logarithme d'une fonction holomorphe	6
2.1.3	Séries de Dirichlet	8
2.1.4	Fonction ζ de Riemann	10
2.2	Distributions	11
2.2.1	Introduction aux distributions	11
2.2.2	Transformées de Fourier et distributions tempérées	17
3	Démonstration du Théorème des Nombres Premiers	26
3.1	Les transformées de Fourier de la mesure μ et de la fonction $x \mapsto \exp(-x)\pi(\exp(x))$	26
3.1.1	Lier ζ et $\zeta_{\mathbb{P}}$	27
3.1.2	La fonction $t \mapsto \zeta_{\mathbb{P}}(1 + 2i\pi t)$ comme transformée de Fourier	29
3.1.3	La fonction $x \mapsto \frac{\pi(\exp(x))}{\exp(x)}$ comme transformée de Fourier (inverse)	31
3.2	La régularité de $\zeta_{\mathbb{P}}$ sur $1 + i\mathbb{R}$	32
3.3	Le Théorème lissé des Nombres Premiers puis l'équivalent $\pi(x) \sim \frac{x}{\log(x)}$	36
3.3.1	La version lissée du Théorème	36
3.3.2	La conquête du sommet : $\pi(x) \sim \frac{x}{\log(x)}$	37
4	Théorème de la Progression Arithmétique	40
4.1	Enoncé du théorème	40
4.2	Décomposition de $\pi_{m,a}$	40
4.3	Lier L_{χ} et f_{χ}	42
4.4	La fonction ℓ_{χ} comme transformée de Fourier	43
4.5	La régularité de f_{χ} sur $1 + i\mathbb{R}$	45
4.6	Conclusion	46
	Références	48

1 Présentation du sujet

1.1 Rappel historique

En notant, pour $x \in \mathbb{R}$, $\pi(x) = |\{p \in \mathbb{P} \mid p \leq x\}|$, (où \mathbb{P} désigne l'ensemble des nombres premiers) nous allons montrer l'équivalence suivante lorsque $x \rightarrow +\infty$

$$\pi(x) \sim \frac{x}{\log(x)}$$

Les nombres premiers ont toujours été au centre des considérations mathématiques. Les plus grands mathématiciens de l'Histoire ont essayé tour à tour de percer leurs mystères. Nous pouvons citer Euclide qui, plus de 2000 ans avant nous, a levé le voile sur leur infinité. Un autre mystère, bien plus profond, concerne la connaissance de leur répartition parmi les entiers naturels, autrement dit, la connaissance de l'équivalence énoncée ci-dessus.

Les premiers à avoir conjecturé l'équivalent de $\pi(x)$ ont été Gauss et Legendre à la fin du XVIII^e siècle. Cependant, les premières démonstrations de ce résultat n'arrivent que près d'un siècle plus tard, en 1896 précisément, grâce à Hadamard et La Vallée-Poussin qui y parviennent indépendamment. Leur preuve repose sur l'utilisation de la fonction ζ de Riemann exprimée sous forme de produit eulérien et notamment sur la propriété suivante : la fonction ζ se prolonge sur un ouvert contenant le demi-plan fermé $\{\operatorname{Re} \geq 1\}$ et ne s'annule pas sur la droite $1 + i\mathbb{R}$. Pendant près de cinquante ans, les preuves du Théorème des Nombres Premiers n'ont cessé de faire appel à des théorèmes d'analyse complexe et d'utiliser cette propriété fondamentale de la fonction de Riemann. Ce n'est qu'en 1949, grâce à Erdős et Selberg, qu'une première preuve « élémentaire », c'est-à-dire évitant tout recours à l'analyse complexe (mais ne rendant pas plus aisée la démonstration), a été établie.

1.2 Spécificités de la démonstration étudiée

La preuve que nous proposons est beaucoup plus récente puisqu'elle est due à Jean-Pierre Kahane [6]. Nous suivons dans une large mesure de l'article de Jean-Benoît Bost [2] pour les détails de la démonstration. Celle-ci repose, comme les démonstrations de Hadamard et La Vallée-Poussin, sur le développement en produit eulérien de la fonction ζ , son prolongement méromorphe au demi-plan fermé $\{\operatorname{Re} \geq 1\}$ (le prolongement à \mathbb{C} tout entier n'est pas nécessaire), ainsi que la non annulation de ζ sur la droite $1 + i\mathbb{R}$. Par ailleurs, elle fait appel à plusieurs notions fondamentales sur la transformée de Fourier et les distributions tempérées qui permettent d'obtenir une version lissée du théorème dont l'équivalent énoncé ci-dessus découle aisément.

Une manière d'illustrer la robustesse de cette preuve sera de l'adapter, dans la dernière partie de ce document, pour démontrer une version quantitative du Théorème de La Progression Arithmétique dont l'énoncé initial (non quantitatif) démontré par Dirichlet en 1838 est le suivant :

$$\text{Soit } \pi_{m,a}(x) = \#\{p \in \mathbb{P} \mid p \leq x, p \equiv a[m]\}. \text{ Alors } \pi_{m,a}(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} +\infty.$$

Le schéma de preuve sera identique à celui suivi par J-P. Kahane [6] pour le Théorème des Nombres Premiers.

Ainsi, de part la richesse des objets utilisés, nous avons choisi, avant d'aborder la démonstration, de faire un rappel d'analyse complexe et d'analyse réelle. Nous jugeons ce rappel, qui représente une section entière de ce document, suffisant pour se lancer sereinement dans la démonstration.

1.3 Schéma de la démonstration

Ci-dessous est représenté un schéma détaillé des liens entre toutes les propositions, lemmes et théorèmes qui interviennent dans la démonstration du Théorème des Nombres Premiers. Nous proposons cependant de choisir le schéma de preuve en trois parties présenté en page 6. Notons que les résultats obtenus en partie 1 reposent sur la théorie des distributions et des transformées de Fourier qui occupent comme nous pouvons le voir, une place centrale dans la démonstration à l'étude.

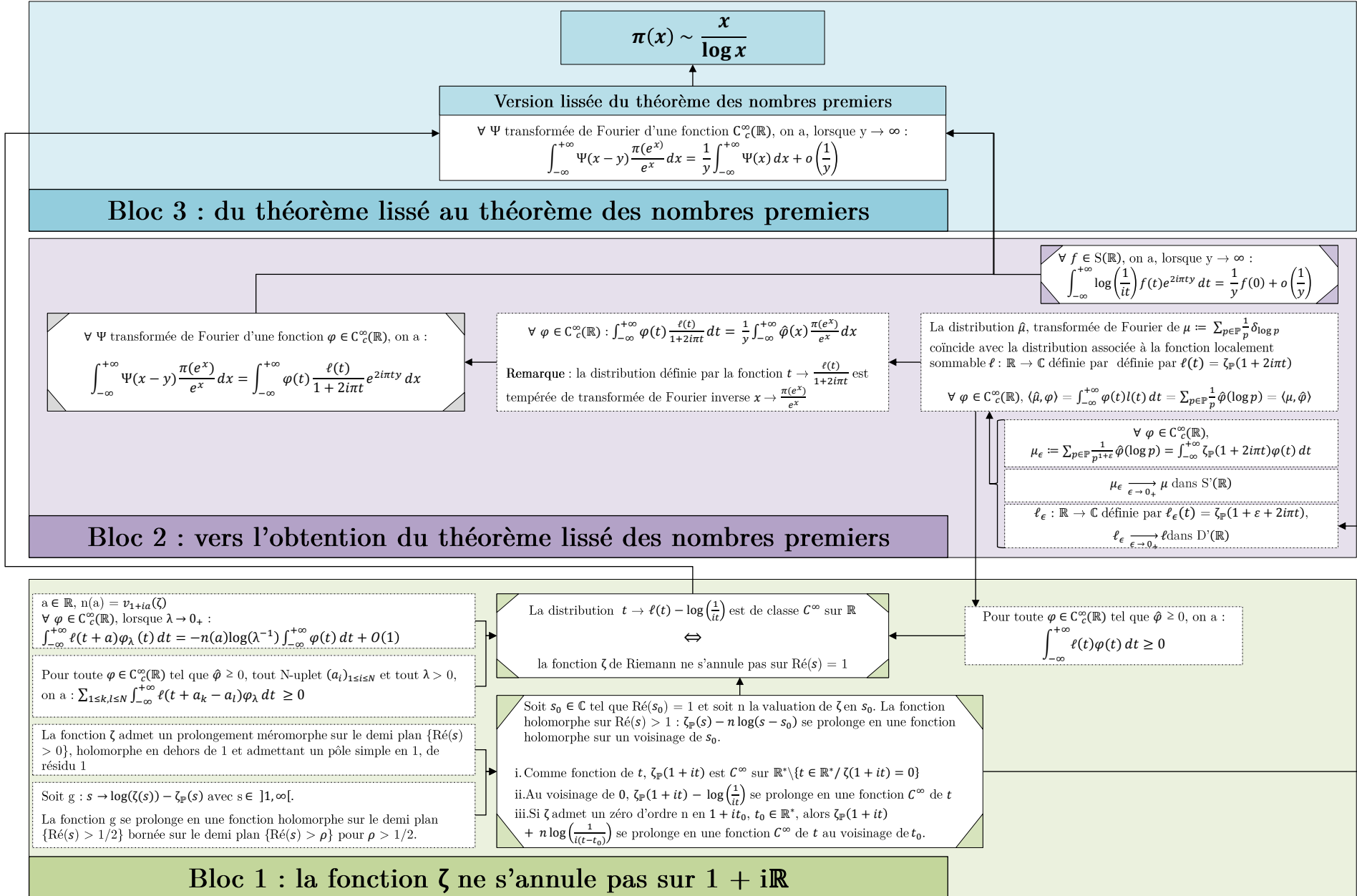
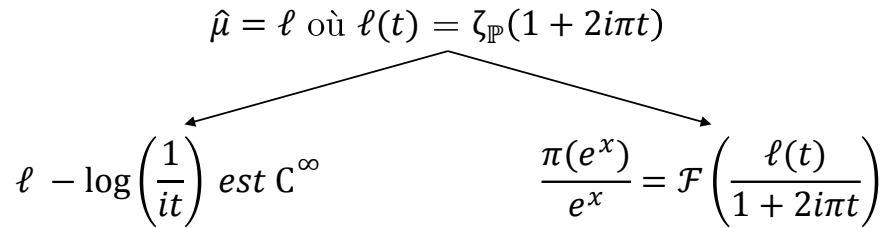


FIGURE 1 – détails des liens entre lemmes, propositions et théorèmes



Théorème des Nombres Premiers lissé :

$\forall \Psi$ transformée de Fourier d'une fonction $C_c^{\infty}(\mathbb{R})$, lorsque $y \rightarrow \infty$:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \Psi(x - y) \frac{\pi(e^x)}{e^x} dx = \frac{1}{y} \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi(x) dx + o\left(\frac{1}{y}\right)$$



Théorème des Nombres Premiers

$$\pi(x) \sim \frac{x}{\log x}$$

57

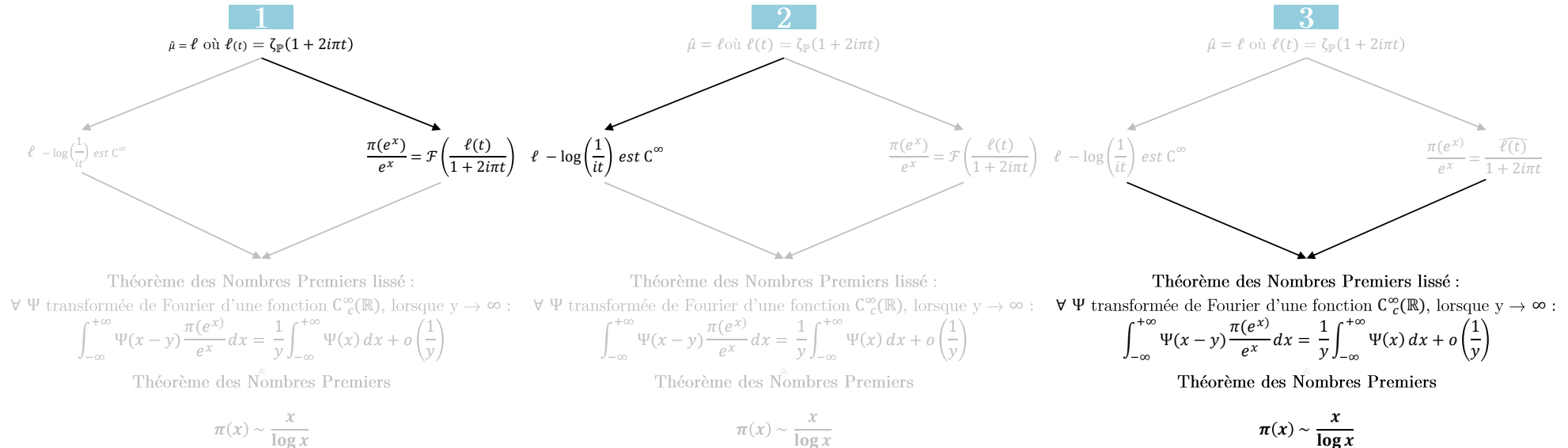


FIGURE 2 – Schéma de preuve en 3 parties

2 Outillage nécessaire pour aborder la démonstration

Ce rappel d'analyse complexe et réelle repose sur les polycopiés de cours rédigés par plusieurs enseignants de l'Université Paris Sud. Il s'agit des polycopiés [5], [3], [4].

2.1 Analyse complexe

2.1.1 "Le" logarithme complexe et sa détermination principale

La fonction logarithme est définie, sur \mathbb{R}_+^* , comme fonction réciproque de la fonction exponentielle. Dans le domaine complexe cependant, l'exponentielle n'est plus une bijection mais seulement une surjection de \mathbb{C} dans \mathbb{C}^* . Pour $z \in \mathbb{C}^*$, il existe donc $\alpha = x + iy \in \mathbb{C}$ ($x, y \in \mathbb{R}$) tel que :

$$z = \exp(\alpha) := \exp(x) \exp(iy).$$

Mais il est clair qu'en posant $\alpha' = x + i(y + 2\pi)$ on a aussi :

$$z = \exp(\alpha').$$

Plus généralement, il suffit de choisir x' et y' dans \mathbb{R} tels que :

$$\exp(x') = |z| \text{ et } \arg(z) \equiv y' [2\pi]$$

pour avoir :

$$z = \exp(x' + iy').$$

On constate qu'il n'y a pas unicité de l'antécédent pour la fonction exponentielle. On ne peut donc pas définir de façon naturelle une fonction réciproque de l'exponentielle. Cependant, si l'on impose une condition sur la partie imaginaire de l'antécédent (l'argument de z , le y) on peut définir une fonction réciproque. Précisément, il faut et il suffit qu'on se restreigne à *choisir* l'argument de z dans un intervalle de longueur 2π fixé à l'avance. Par exemple, la restriction de la fonction $\exp : \{\alpha \in \mathbb{C} \mid -\pi < \text{Im}(\alpha) := y < \pi\} \rightarrow \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$ est biholomorphe et donc on peut définir :

Définition 2.1. *L'application réciproque $l_\pi : \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_- \rightarrow \{\alpha \in \mathbb{C} \mid -\pi < \text{Im}(\alpha) < \pi\}$ est biholomorphe. On l'appelle détermination principale du logarithme.*

Définition 2.2. *Soit Ω un ouvert de \mathbb{C}^* . Une application $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ est une détermination continue du logarithme lorsque :*

- ◆ f est continue ;
- ◆ $\forall z \in \Omega, z = (\exp \circ f)(z)$.

2.1.2 Le logarithme d'une fonction holomorphe

La démonstration du Théorème des Nombres Premiers nous amène à considérer un logarithme de la fonction ζ . Or, considérer un logarithme d'une fonction (ne s'annulant pas) nécessite de prendre des précautions que nous détaillons ci-dessous.

Soit Ω un ouvert connexe non vide et f une fonction holomorphe sur Ω ne s'annulant pas. On dit qu'une fonction holomorphe $g : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ est un **logarithme** de f si $f = \exp \circ g$ sur Ω .

Proposition 2.3. *Il existe un logarithme de f sur Ω si et seulement si pour tout lacet γ de classe \mathcal{C}^1 tracé dans Ω on a*

$$\int_\gamma \frac{f'(w)}{f(w)} dw = 0.$$

Démonstration.

\Rightarrow : Si f admet un logarithme g sur Ω , alors $f' = g' \cdot \exp g$ donc $g' = \frac{f'}{f}$ sur Ω . Ainsi $\frac{f'}{f}$ admet une primitive holomorphe sur Ω et donc $\int_\gamma \frac{f'}{f} = 0$ pour tout lacet γ de classe \mathcal{C}^1 tracé dans Ω .

\Leftarrow : Fixons $z_0 \in \Omega$. Pour $z \in \Omega$, posons $\tilde{g}(z) = \int_{\gamma_z} \frac{f'(w)}{f(w)} dw$ où γ_z est un chemin de classe \mathcal{C}^1 reliant z_0 à z . Notons que la fonction \tilde{g} est indépendante du chemin reliant z_0 à z . En effet, considérons un autre chemin δ_z reliant z_0 à z . Appelons δ_z^* le chemin δ_z parcouru à rebours et ε_z un lacet en z tracé dans Ω , dont la vitesse initiale est égale à la vitesse de γ_z et la vitesse finale est égale à l'opposée de la vitesse finale de δ_z . On obtient ainsi par concaténation que $\gamma_z \cup \varepsilon_z \cup \delta_z^*$ est un lacet de classe \mathcal{C}^1 .

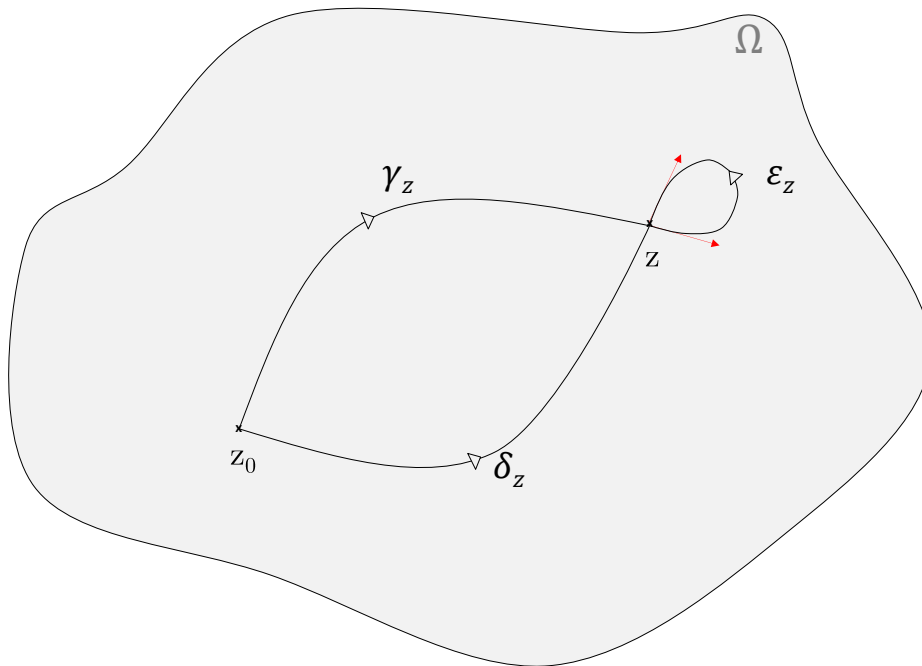


FIGURE 3 – \tilde{g} ne dépend pas de γ_z

On a alors :

$$\int_{\gamma_z \cup \varepsilon_z \cup \delta_z^*} \frac{f'(w)}{f(w)} dw = 0 \text{ i.e. } \int_{\gamma_z} \frac{f'(w)}{f(w)} dw = \int_{\delta_z} \frac{f'(w)}{f(w)} dw$$

puisque, ε_z étant un lacet de classe \mathcal{C}^1 et $\frac{f'}{f}$ holomorphe sur ce lacet, $\int_{\varepsilon_z} \frac{f'(w)}{f(w)} dw = 0$.

Pour montrer que \tilde{g} est holomorphe sur Ω , il suffit de savoir que \tilde{g} est dérivable dans Ω . Pour $h \in \mathbb{C}^*$ tel que le disque fermé centré en z et de rayon h noté $\overline{D}(z, |h|)$ soit inclus dans Ω , on a :

$$\begin{aligned} \tilde{g}(z+h) &= \int_{\gamma_z \cup [z, z+h]} \frac{f'(w)}{f(w)} dw \\ &= \int_{\gamma_z} \frac{f'(w)}{f(w)} dw + \int_{[z, z+h]} \frac{f'(w)}{f(w)} dw \\ &= \tilde{g}(z) + \int_{[0,1]} \frac{f'(z+th)}{f(z+th)} h dt. \end{aligned}$$

D'où, finalement :

$$\frac{\tilde{g}(z+h) - \tilde{g}(z)}{h} = \int_{[0,1]} \frac{f'(z+th)}{f(z+th)} dt.$$

Or, $\frac{f'}{f}$ est continue au point z . Par conséquent, $t \in [0, 1] \mapsto \frac{f'(z+th)}{f(z+th)}$ converge uniformément vers $\frac{f'(z)}{f(z)}$ lorsque h tend vers 0 en module. Autrement dit, \tilde{g} est holomorphe en z et $\tilde{g}'(z) = \frac{f'(z)}{f(z)}$.

Conclusion de la réciproque :

$f \exp(-\tilde{g})$ est holomorphe sur Ω . En dérivant, on obtient : $(f \exp(-\tilde{g}))' = 0$ d'où $f \exp(-\tilde{g}) = \exp(\alpha)$ ($\alpha \in \mathbb{C}^*$).

De sorte que $f = \exp(\alpha + \tilde{g}) = \exp(g)$ en posant $g = \alpha + \tilde{g}$ holomorphe sur Ω . \square

Lors de la démonstration du Théorème des Nombres Premiers, nous pourrions donc appliquer cette proposition à la fonction ζ . En effet, nous allons voir au paragraphe 2.1.4 (page 10) que (i) ζ est holomorphe sur $\{\text{Ré}(s) > 1\}$ (ii) ζ ne s'annule pas sur $\{\text{Ré}(s) > 1\}$. Le quotient $[\zeta'/\zeta]$ est donc holomorphe sur le demi-plan $\{\text{Ré}(s) > 1\}$ qui est un ouvert *simplement* connexe. L'intégrale de $[\zeta'/\zeta]$ le long de tout lacet tracé dans le demi-plan est donc nulle.

Nous allons voir que ζ est une fonction qui se définit comme une *série de Dirichlet* : le paragraphe suivant est l'occasion de présenter quelques résultats sur ces séries. On pourra ensuite les appliquer à la fonction ζ .

2.1.3 Séries de Dirichlet

Soit $(a_n)_{n \geq 1}$ une suite de nombres complexes. On appelle *série de Dirichlet* une série de la forme

$$\sum_{n \geq 1} \frac{a_n}{n^s}$$

où $s \in \mathbb{C}$. À l'instar des séries entières, le domaine de définition des séries de Dirichlet est particulier.

Théorème 2.4. *Supposons que la série de Dirichlet*

$$\sum_{n \geq 1} \frac{a_n}{n^s}$$

converge pour un $s_0 \in \mathbb{C}$. Alors la série converge sur le demi-plan $\{\text{Ré}(s) > \text{Ré}(s_0)\}$. De plus, la série converge uniformément sur tout domaine de la forme :

$$\Delta_\alpha = \{s \in \mathbb{C} \mid \text{Ré}(s) > \text{Ré}(s_0), |\arg(s - s_0)| < \alpha\} \text{ où } 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}.$$

La preuve utilise la majoration suivante élémentaire.

Lemme 2.5. *Soient $0 < \alpha < \beta$. Alors pour tout $z \in \{\text{Ré} > 0\}$ on a :*

$$|\exp(-\alpha z) - \exp(-\beta z)| \leq \frac{|z|}{\text{Ré}(z)} (\exp(-\alpha x) - \exp(-\beta x)).$$

Démonstration.

Nous savons que :

$$\exp(-\alpha z) - \exp(-\beta z) = z \int_\alpha^\beta \exp(-tz) dt$$

En se rappelant alors que $|\exp(s)| = \exp(\text{Ré}(s))$, nous obtenons l'inégalité attendue :

$$\begin{aligned} |\exp(-\alpha z) - \exp(-\beta z)| &\leq |z| \int_\alpha^\beta |\exp(-tz)| dt \\ &= \int_\alpha^\beta \exp(-t \text{Ré}(z)) dt \\ &= \frac{|z|}{\text{Ré}(z)} (\exp(-\alpha x) - \exp(-\beta x)) \end{aligned}$$

\square

Dotés de ce lemme, nous pouvons désormais faire la preuve du théorème.

Démonstration.

Soit $s \in \{\text{Ré} > \text{Ré}(s_0)\}$. Posons $u_n = a_n n^{-s_0}$, $v_n = n^{s_0-s}$, et pour $q \geq p$

$$S_{p,q} = \sum_{n=p}^q u_n v_n = \sum_{n=p}^q \frac{a_n}{n^s}$$

et

$$U_{p,q} = \sum_{n=p}^q u_n = \sum_{n=p}^q \frac{a_n}{n^{s_0}}.$$

On se prépare à faire une transformation d'Abel.

Soit $\epsilon > 0$, par hypothèse (suite convergente = suite de Cauchy car \mathbb{C} est un espace complet) il existe $N(\epsilon)$ tel que $q \geq p \geq N(\epsilon)$ implique $|U_{p,q}| < \epsilon$.

De plus, si $\text{Ré} > \text{Ré}(s_0)$, on a :

$$|v_n| = \frac{1}{n^{\text{Ré}(s) - \text{Ré}(s_0)}} < 1.$$

En posant $U_{p,p-1} = 0$ on peut entamer le calcul suivant (transformation d'Abel)

$$S_{p,q} = \sum_{n=p}^q (U_{p,n} - U_{p,n-1})v_n = U_{p,q}v_q + \sum_{n=p}^{q-1} U_{p,n}(v_n - v_{n+1})$$

après avoir séparé la somme en deux et réindiqué convenablement. Pour $q > p \geq N(\epsilon)$, on a donc :

$$|S_{p,q}| \leq \epsilon |v_q| + \epsilon \sum_{n=p}^{q-1} |v_n - v_{n+1}| \leq \epsilon \left(1 + \sum_{n=p}^{q-1} |v_n - v_{n+1}|\right).$$

Or, on a également, en appliquant l'inégalité démontrée précédemment et où $\sigma = \text{Ré}(s)$ et $\sigma_0 = \text{Ré}(s_0)$:

$$|v_n - v_{n+1}| = |\exp(\log(n)(s - s_0)) - \exp(\log(n+1)(s - s_0))| \leq \frac{|s - s_0|}{\sigma - \sigma_0} \left(\frac{1}{n^{\sigma - \sigma_0}} - \frac{1}{(n+1)^{\sigma - \sigma_0}} \right)$$

Puis, par télescopage :

$$|S_{p,q}| < \epsilon \left[1 + \frac{|s - s_0|}{\sigma - \sigma_0} \left(\frac{1}{p^{\sigma - \sigma_0}} - \frac{1}{q^{\sigma - \sigma_0}} \right) \right],$$

et comme $q > p$ et $\sigma - \sigma_0 > 0$:

$$|S_{p,q}| < \epsilon \left[1 + \frac{|s - s_0|}{\sigma - \sigma_0} \right].$$

Ceci montre que la suite des sommes partielles $\sum \frac{a_n}{n^s}$ vérifie le critère de Cauchy et donc la série converge en s . De plus, si s est dans un domaine Δ_α , on a la majoration (exercice visuel) suivante :

$$\frac{\sigma - \sigma_0}{|s - s_0|} > \cos(\alpha)$$

et donc la suite des sommes partielles vérifie :

$$|S_{p,q}| < \epsilon \left(1 + \frac{1}{\cos(\alpha)} \right),$$

c'est-à-dire un critère de Cauchy uniforme, d'où la convergence uniforme de la série sur Δ_α . \square

Il n'est alors pas difficile de montrer que pour une série $\sum a_n n^{-s}$ de Dirichlet, il existe $\sigma_c \in [-\infty, +\infty]$ tel que la série converge pour $s \in \{\text{Ré} > \sigma_c\}$ et diverge pour $s \in \{\text{Ré} < \sigma_c\}$. On ne peut en général rien dire sur le comportement d'une série entière sur sa frontière de définition $\{\text{Ré} = \sigma_c\}$.

L'énoncé suivant précise la régularité d'une série de Dirichlet sur son domaine de convergence.

Théorème 2.6. *Soit*

$$F(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{n^s}, \quad \text{Ré}(s) > \sigma_c.$$

La fonction F est holomorphe sur le demi-plan $\{\text{Ré} > \sigma_c\}$.

Démonstration.

Pour cette démonstration, nous invoquons une conséquence importante du théorème de Morera : si $(f_n)_n$ est une suite de fonctions holomorphes sur un ouvert Ω du plan complexe et si $(f_n)_n$ converge uniformément vers une fonction f sur tout compact $K \subset \Omega$ alors la fonction f est holomorphe sur Ω . Ici, la suite $(f_n)_n$ est celle des sommes partielles de la série, fixons un compact K de $\{\text{Ré} > \sigma_c\}$. Par compacité, il existe un angle $\alpha < \frac{\pi}{2}$ tel que $K \subset \Delta_\alpha$. En effet, soit $r = \min\{\text{Ré}(z), z \in K\}$, on a $r > \sigma_c$ (car un point de K atteint ce minimum et ce point est dans $\{\text{Ré} > \sigma_c\}$). Soit aussi $t = \max\{|\text{Im}(z)|, z \in K\}$, on a $t < +\infty$ car K est borné. Le point $z_0 := r + 2it$ fournit un argument, que l'on note α_0 , tel que $K \subset \Delta_{\alpha_0}$. Nous savons alors que la suite des sommes partielles converge uniformément vers F sur Δ_{α_0} donc sur K . Ainsi, F est holomorphe sur $\{\text{Ré} > \sigma_c\}$. \square

2.1.4 Fonction ζ de Riemann

Maintenant que nous avons en tête les propriétés générales sur les séries de Dirichlet, attardons-nous sur la fonction ζ de Riemann. Par définition, pour $s \in \mathbb{C}$ avec $\text{Ré}(s) > 1$:

$$\zeta(s) := \sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{n^s}.$$

La fonction ζ est donc la série de Dirichlet associée à la suite constante égale à 1. Que dire de l'abscisse de convergence (simple ou absolue) de cette série ? Puisque pour tout $\epsilon > 0$:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{1+\epsilon}} < +\infty.$$

On peut affirmer que ζ est définie (au moins) sur le demi-plan $\{\text{Ré} > 1\}$. On va montrer que ζ admet un prolongement méromorphe sur le demi-plan $\{\text{Ré} > 0\}$ avec un unique pôle en 1.

Commençons par étendre le domaine de définition de ζ , de sorte que ce domaine contienne la droite qui nous intéresse dans le cadre de la démonstration du Théorème des Nombres Premiers (théorème 3.7, page 32), $1 + i\mathbb{R}$.

Proposition 2.7. *La fonction ζ admet un prolongement méromorphe sur $\{\text{Ré} > 0\}$ avec pour unique pôle (simple et de résidu égal à 1) le point 1. Autrement dit, la fonction $s \mapsto \zeta(s) - \frac{1}{s-1}$ se prolonge en un fonction holomorphe sur $\{\text{Ré} > 0\}$.*

Démonstration.

Soit $s \in \{\text{Re} > 1\}$. Pour étudier la fonction ζ , notons qu'on peut exprimer $\frac{1}{s-1}$ comme une intégrale :

$$\int_1^{+\infty} x^{-s} dx = \left[\frac{x^{1-s}}{1-s} \right]_1^{+\infty} = \frac{1}{s-1}.$$

On peut ainsi écrire la différence $\zeta(s) - \frac{1}{s-1}$ de la manière suivante :

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s} - \int_1^{+\infty} x^{-s} dx &= \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n^s} - \int_n^{n+1} x^{-s} dx \right) \\ &=: \sum_{n=1}^{+\infty} \varphi_n(s). \end{aligned}$$

Or, φ_n est holomorphe sur $\{\text{Ré} > 0\}$ (même \mathbb{C} en fait). Il suffit donc de vérifier que $\sum \varphi_n$ converge normalement sur tout compact de $\{\text{Ré} > 0\}$ pour conclure (conséquence du théorème de Morera). Pour cela, constatons que :

$$\begin{aligned}
|\varphi_n(s)| &\leq \int_n^{n+1} |n^{-s} - x^{-s}| dx \\
&\leq \sup_{t \in [n, n+1]} |n^{-s} - t^{-s}| \\
&\leq |s| n^{-\operatorname{Ré}(s)-1} \quad [\text{Inégalité des accroissements finis}].
\end{aligned}$$

Si l'on fixe un compact K de $\{\operatorname{Ré} > 0\}$, on est en mesure de trouver $\eta > 1$ tel que $K \subset \{\operatorname{Ré} \geq \eta\}$ et il y a donc clairement convergence normale de la série $\sum_{n \geq 1} \varphi_n$ sur K , comme annoncé. \square

\triangle Nous avons certes montré que ζ admet un prolongement méromorphe sur $\{\operatorname{Ré} > 0\}$, mais cela ne nous permet pas pour autant d'écrire que pour tout $s \in \{\operatorname{Ré} > 0\}$, $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s}$. Cette écriture n'a un sens que pour $s \in \{\operatorname{Ré} > 1\}$.

Nous allons maintenant faire apparaître plus clairement le lien entre ζ et les nombres premiers en écrivant ζ sous forme de produit eulérien.

Remarque : le prolongement méromorphe de ζ à \mathbb{C} (avec un unique pôle en 1) est possible, mais pas utile dans la démonstration du Théorème des Nombres Premiers.

Théorème 2.8. *Pour $s \in \{\operatorname{Ré} > 1\}$, on a l'égalité suivante : $\zeta(s) = \prod_{p \in \mathbb{P}} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1}$.*

Démonstration.

Le produit infini est bien convergent car, si $\operatorname{Ré}(s) > 1$, $\left| \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1} - 1 \right| \leq 2|p^{-s}|$ et :

$$\begin{aligned}
\sum_{p \in \mathbb{P}} |p^{-s}| &= \sum_{p \in \mathbb{P}} |p^{-\operatorname{Ré}(s)}| \\
&\leq \sum_{n=1}^{+\infty} n^{-\operatorname{Ré}(s)} \\
&< \infty.
\end{aligned}$$

De plus, si $\eta > 1$ est fixé, la convergence précédente est uniforme sur $\{\operatorname{Ré} > \eta\}$. Maintenant, comme pour $p \in \mathbb{P}$, on a (série géométrique) $\sum_{k=0}^{+\infty} (p^{-s})^k = (1 - p^{-s})^{-1}$ alors pour $N \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}
\prod_{p \in \mathbb{P}, p \leq N} (1 - p^{-s})^{-1} &= \prod_{p \in \mathbb{P}, p \leq N} \sum_{k=0}^{+\infty} (p^{-s})^k \\
&= \sum_{n \in \mathcal{E}(N)} n^{-s}
\end{aligned}$$

où $\mathcal{E}(N) = \{n \in \mathbb{N} \mid \text{les diviseurs premiers de } n \text{ sont inférieurs à } N\}$. Or, avec l'inclusion évidente $\{1, \dots, N\} \subset \mathcal{E}(N)$ nous obtenons finalement :

$$\begin{aligned}
|\zeta(s) - \prod_{p \in \mathbb{P}, p \leq N} (1 - p^{-s})^{-1}| &\leq \sum_{n > N} n^{-\operatorname{Ré}(s)} \\
&\xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0.
\end{aligned}$$

\square

2.2 Distributions

2.2.1 Introduction aux distributions

La démonstration du Théorème des Nombres Premiers que nous étudions diffère de celle de Hadamard et de La Vallée-Poussin par l'utilisation de la *transformée de Fourier* sur l'espace des *distributions tempérées*. Dans cette section, nous effectuons une synthèse des résultats

principaux sur les *distributions* et la *transformée de Fourier*. Nous considérons que cette synthèse est suffisamment exhaustive pour aborder ensuite le Théorème des Nombres Premiers. Comme les distributions sont peut-être méconnues pour le lecteur, nous nous permettons de les aborder en citant un passage introductif du livre (voir le chapitre 4 de [1]) de Jean-Michel Bony :

« *La représentation systématique, introduite au XVIIIe siècle, des phénomènes physiques étendus dans l'espace ou l'espace-temps par des fonctions de plusieurs variables, et l'expression des lois physiques en termes d'équations aux dérivées partielles, ont été un progrès considérable auquel il n'est bien sûr pas question de renoncer. Cependant, cette représentation par une fonction au sens mathématique du terme, assignant une valeur en chaque point, pose problème.*

On sait bien, par exemple, que la température en un point, ou même la température moyenne dans un volume de petites dimensions devant le libre parcours moyen des molécules, est dépourvue de sens. Néanmoins, la propagation de la chaleur est régie par une équation aux dérivées partielles que nous étudierons et qui fournit, à l'échelle macroscopique, des résultats conformes à l'expérience.

Une autre critique, qui nous fera progresser, est la suivante. Sans remettre en cause la représentation des phénomènes physiques par des fonctions, il est clair que les valeurs ponctuelles de celles-ci sont inaccessibles à l'expérience. Un appareil de mesure, qui a nécessairement une certaine étendue spatiale, ne pourra jamais fournir la valeur $f(x_0)$ d'une fonction f en un point. Le mieux que l'on puisse en espérer est de nous fournir une moyenne pondérée $\int f(x)\varphi(x)dx$ au lieu de $f(x_0)$, la fonction φ qui caractérise l'appareil ayant un support "proche" de x_0 et une intégrale proche de 1 pour un appareil précis et bien réglé. »

En un mot, une distribution f est une *fonction* dont les points sur lesquels elle est définie ne sont pas *spatiaux* mais *fonctionnels*. Détaillons cela : fixons un ouvert Ω de \mathbb{R}^n . On peut par exemple prendre $\Omega = \mathbb{R}$ et $n = 1$ pour que la suite soit plus claire. Une distribution sera définie sur les fonctions appartenant à $C^\infty(\Omega, \mathbb{C})$ mais dont *le support est compact*. De telles fonctions existent (ce n'est pas immédiat mais très accessible) et on note alors $C_c^\infty(\Omega, \mathbb{C})$ l'ensemble de ces fonctions (on vérifie sans peine que c'est un espace vectoriel). Comme annoncé, une distribution f est une fonction :

$$f : C_c^\infty(\Omega, \mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{C}$$

qui vérifie deux propriétés : f est linéaire et continue. La linéarité des fonctions de $C_c^\infty(\Omega, \mathbb{C})$ dans \mathbb{C} est clairement définie alors que la continuité ne l'est pas. En effet : de quelle topologie munit-on $C_c^\infty(\Omega, \mathbb{C})$? Cette question est assez délicate : pour y répondre complètement, il faudrait construire la topologie de $C_c^\infty(\Omega, \mathbb{C})$ explicitement (chose faite dans des livres plus spécialisés, voir [9] par exemple). Nous nous contenterons de dire la chose suivante : il existe une topologie \mathcal{T} sur $C_c^\infty(\Omega, \mathbb{C})$ ayant les propriétés suivantes (i) \mathcal{T} n'est pas métrisable (ii) une suite $(\varphi_n)_{n \geq 1}$ de $C_c^\infty(\Omega, \mathbb{C})$ converge vers φ si et seulement si les supports des fonctions $(\varphi_n)_{n \geq 1}$ et φ sont inclus dans un seul et même compact K de Ω et que n'importe quelle suite dérivée $(\varphi_n^{(k)})_{n \geq 1}$ converge uniformément vers $\varphi^{(k)}$. Si l'on note maintenant $C_c^\infty(\Omega, \mathbb{C}) := \mathcal{D}(\Omega)$ muni de la topologie \mathcal{T} alors une *distribution* f est un élément de $\mathcal{D}'(\Omega)$, le dual topologique de $\mathcal{D}(\Omega)$. L'espace $\mathcal{D}'(\Omega)$ est naturellement muni d'une topologie que l'on note \mathcal{T}' . On a donc une notion de convergence (simple) pour les distributions. C'est de la notion de convergence simple dont nous nous servirons pas la suite, sans aucune mention de la topologie sous jacente.

La construction précédente est satisfaisante mais elle est assez complexe à décrire. Or, il se trouve qu'une définition *équivalente* d'une distribution existe sans passer par la notion de topologie : comme elle est plus simple à appréhender, nous allons partir de cette définition :

Définition 2.9. *Soit Ω un ouvert de \mathbb{R}^n . Une distribution sur Ω est une application linéaire T de $\mathcal{D}(\Omega) := C_c^\infty(\Omega)$ dans \mathbb{C} telle que pour tout compact K de Ω :*

$$\exists m \in \mathbb{N}, \exists C > 0, \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega), \text{supp } \varphi \subset K \Rightarrow |\langle T, \varphi \rangle| \leq C \sup_{0 \leq k \leq m} |\partial^k \varphi|.$$

On note $\mathcal{D}'(\Omega)$ l'ensemble des distributions sur Ω .

L'énoncés suivant montre que les distributions ainsi définies sont exactement les formes linéaires continues pour la convergence sur $\mathcal{D}(\Omega)$.

Proposition 2.10. Soit $T \in E$ et soit une suite $(\varphi_n)_{n \geq 1}$ de $\mathcal{C}_c^\infty(\Omega, \mathbb{C})$ qui converge sur $\mathcal{D}(\Omega)$ vers φ . Alors on a :

$$\langle T, \varphi_n \rangle \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \langle T, \varphi \rangle.$$

Réciproquement, si T est une forme linéaire sur $\mathcal{D}(\Omega)$ telle que pour toute suite $(\varphi_n)_{n \geq 1}$ de $\mathcal{D}(\Omega)$ qui converge vers φ on a :

$$\langle T, \varphi_n \rangle \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \langle T, \varphi \rangle,$$

alors T est une distribution.

Le lecteur assidu vérifiera cette proposition : un sens est facile tandis que l'autre, moins évident, repose sur un raisonnement par l'absurde.

En tant qu'espace de fonction, il y a une notion de convergence simple sur $\mathcal{D}(\Omega)$ et comme on l'a déjà dit, c'est de cette notion qu'on se sert dans la suite. Explicitement on dit que :

Définition 2.11. Une suite de distributions $(T_n)_{n \geq 1}$ converge simplement vers une distribution T lorsque pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$:

$$\langle T_n, \varphi \rangle \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \langle T, \varphi \rangle.$$

On note alors $T_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} T$.

Il y a évidemment unicité et linéarité de la limite. Finalement, on récupère la notion de convergence (seulement simple) sur \mathcal{D}' et la notion de continuité pour les distributions sans faire appel à la topologie.

Voici comment on peut construire simplement une distribution sur un intervalle ouvert I : pour $f \in L^1_{\text{loc}}(I)$ (i.e. f mesurable sur I et intégrable sur tout segment de I) on définit :

$$T_f : \varphi \in \mathcal{D}(I) \mapsto \int_I f \varphi.$$

Alors $T_f \in \mathcal{D}'(I)$. En effet, la linéarité de T_f est claire et en considérant $a, b \in I$ avec $a < b$, $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(I)$ et $\text{supp } \varphi \subset [a, b]$ on vérifie la propriété de continuité ainsi :

$$\begin{aligned} |\langle T_f, \varphi \rangle| &\leq \int_a^b |f(t)\varphi(t)| dt \\ &\leq \|\varphi\|_\infty \int_a^b |f(t)| dt. \end{aligned}$$

Le reste de la section aborde les points suivants : dérivée d'une distribution définition d'une distribution tempérée, convergence de distributions, convoluée d'une distribution tempérée avec une fonction dans l'espace de Schwartz / d'une distribution et d'une distribution à support compact, transformée de Fourier (directe et inverse) d'une distribution tempérée. Cela fait, nous serons prêts pour attaquer le Théorème des Nombres Premiers.

Les distributions sont faites pour être dérivées. En un sens, ce sont des fonctions continues automatiquement dérivables. On pose ainsi la définition suivante :

Définition 2.12. Soit $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$. La forme linéaire

$$T' : \varphi \in \mathcal{D}(\Omega) \mapsto -\langle T, \varphi' \rangle$$

est une distribution sur Ω . On l'appelle la distribution dérivée de T .

Voici deux exemple fondamentaux faisant intervenir la dérivée d'une distribution. Nous nous reposerons sur ces deux exemples pour la démonstration d'un lemme crucial de la démonstration du Théorème des Nombres Premiers :

◆ Fonction de Heaviside :

Soit H la fonction de Heaviside, localement intégrable, définie comme suit :

$$H : \begin{cases} \mathbb{R} & \rightarrow \mathbb{R} \\ x & \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x \geq 0; \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \end{cases}$$

Soit $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$, $\text{supp } \varphi \subset [a, b]$ et nous pouvons supposer que $b \geq 0$. Alors :

$$\begin{aligned} \langle T'_H \varphi \rangle &= -\langle T_H \varphi' \rangle \\ &= -\int_{\mathbb{R}^+} \varphi'(t) dt \\ &= -\int_0^b \varphi'(t) dt \\ &= -\varphi(b) + \varphi(0) \\ &= \varphi(0). \end{aligned}$$

Donc :

$$T'_H = \delta_0. \quad (1)$$

◆ Le logarithme népérien :

Soit $f : x \mapsto \log(|x|)$, ($x \neq 0$). f (définie presque partout) est localement intégrable sur \mathbb{R} car $x \mapsto \log(x)$ est intégrable au voisinage de 0^+ (en effet, au voisinage de 0 , $\log(x) = o(\frac{1}{\sqrt{x}})$).

Soit $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$ et $a > 0$ tel que $\text{supp } \varphi \subset [-a, a]$, alors :

$$\begin{aligned} \langle T'_f, \varphi \rangle &= -\langle T_f, \varphi' \rangle \\ &= -\int_{\mathbb{R}} \log(|x|) \varphi'(x) dx \\ &= -\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \left(\int_{-\infty}^{-\epsilon} \log(-x) \varphi'(x) dx + \int_{\epsilon}^{+\infty} \log(x) \varphi'(x) dx \right) \\ &= -\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{\epsilon}^{+\infty} \log(x) (\varphi'(x) + \varphi'(-x)) dx \\ &= -\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{\epsilon}^a \log(x) (\varphi'(x) + \varphi'(-x)) dx \\ &\text{[Intégration Par Parties]} \\ &= -\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \left([\log(x)(\varphi(x) + \varphi(-x))]_{\epsilon}^a - \int_{\epsilon}^a \frac{\varphi(x) - \varphi(-x)}{x} dx \right) \\ &= -\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} ([\log(a)(\varphi(a) + \varphi(-a)) - \log(\epsilon)(\varphi(\epsilon) + \varphi(-\epsilon))] + \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \left(\int_{|x| > \epsilon} \frac{\varphi(x)}{x} dx \right)). \end{aligned}$$

Comme $\log(\epsilon)(\varphi(\epsilon) + \varphi(-\epsilon)) = \epsilon \log(\epsilon) \left(\frac{\varphi(\epsilon) - \varphi(0)}{\epsilon} + \frac{\varphi(-\epsilon) - \varphi(0)}{-\epsilon} \right) \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0^+} 0$

(car $\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \frac{\varphi(\epsilon) - \varphi(0)}{\epsilon} = \varphi'(0)$ et $\epsilon \log(\epsilon) \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0^+} 0$), nous obtenons finalement, en notant $\text{vp}\left(\frac{1}{x}\right)$ la valeur principale de $\frac{1}{x}$:

$$\langle T'_f, \varphi \rangle = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \left(\int_{|x| > \epsilon} \frac{\varphi(x)}{x} dx \right) = \langle \text{vp}\left(\frac{1}{x}\right), \varphi \rangle.$$

D'où :

$$T'_f = T_{x \mapsto \log(|x|)}' = \text{vp}\left(\frac{1}{x}\right). \quad (2)$$

Les notions de distribution et de distribution dérivée ayant été présentées, nous pouvons désormais aborder les distributions *tempérées* qui sont des distributions qui « s'étendent » à l'espace de Schwartz. Puisque la transformée de Fourier peut leur être appliquée, ce sont bien les distributions tempérées qui nous intéresseront le plus dans la démonstration du Théorème des

Nombres Premiers. Avant de présenter les distributions tempérées, il convient de rappeler ce qu'est l'espace de Schwartz :

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) = \{\varphi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n) \mid \forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{N}^n \times \mathbb{N}^n, \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |x^\alpha \partial^\beta \varphi(x)| < \infty\}.$$

Par ailleurs, pour $q \in \mathbb{N}$, on définit N_q , norme sur $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, de la manière suivante :

$$N_q : \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \mapsto N_q(\varphi) = \sup_{\alpha \leq q, \beta \leq q} \|x^\alpha \partial^\beta \varphi(x)\|_\infty.$$

Nous pouvons citer, comme exemple d'élément de $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, la fonction $\varphi : x \mapsto \exp(-x^2)$.

Définition 2.13. Une distribution $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ est dite tempérée s'il existe $C > 0$ et $k, l \in \mathbb{N}$ tels que :

$$\forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n), |\langle T, \varphi \rangle| \leq C \sum_{|\alpha| \leq k, |\beta| \leq l} \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |x^\alpha \partial^\beta \varphi(x)|.$$

On note $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ l'ensemble¹ des distributions tempérées sur \mathbb{R}^n .

Voici deux exemples de distributions tempérées :

- ◆ Si $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, alors $T_f : \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \mapsto \int_{\mathbb{R}^n} f \varphi$ est une distribution tempérée. En effet : $|\langle T_f, \varphi \rangle| \leq \|f\|_1 \|\varphi\|_\infty$.

Remarque : On peut généraliser cet exemple à toute fonction $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ avec $1 \leq p \leq +\infty$ puisqu'alors T_f sera une distribution tempérée. Mais en général, pour $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$, T_f n'est pas tempérée. Prenons comme exemple la fonction localement sommable $g : t \mapsto \exp(t^2)$. T_g est bien une distribution car g est L^1_{loc} . Cependant en considérant la fonction $h : t \mapsto \exp(-\frac{t^2}{2})$, on constate que $\int_{\mathbb{R}} g(x)h(x) dx = +\infty$, justifiant ainsi que T_g n'est pas tempérée.

- ◆ « Peigne de Dirac » : soit $D = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta_k : \varphi \mapsto \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \varphi(k)$, alors $D \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$. En effet, en prenant $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ et N un entier supérieur à 1, on obtient :

$$\begin{aligned} \sum_{k=-N}^{+N} |\varphi(k)| &= \sum_{k=-N}^{+N} \frac{1}{1+k^2} |(1+k^2)\varphi(k)| \\ &\leq \sup_{x \in \mathbb{R}} |(1+x^2)\varphi(x)| \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+k^2} \\ &\leq C(\|\varphi\|_\infty + \sup_{x \in \mathbb{R}} |(1+x^2)\varphi(x)|) \\ &\leq C \sum_{|\alpha| \leq 2, |\beta|=0} \sup_{x \in \mathbb{R}} |x^\alpha \partial^\beta \varphi(x)|. \end{aligned}$$

$$\text{En particulier, } \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} \varphi(k) \text{ existe et } \left| \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} \varphi(k) \right| \leq C \sum_{|\alpha| \leq 2, |\beta|=0} \sup_{x \in \mathbb{R}} |x^\alpha \partial^\beta \varphi(x).$$

À présent, forts de ces deux exemples, nous pouvons justifier qu'une certaine mesure, utilisée abondamment dans la démonstration du Théorème des Nombres Premiers, est une distribution tempérée. Il s'agit de la mesure suivante :

$$\mu := \sum_{p \in \mathbb{P}} \frac{1}{p} \delta_{\log(p)}. \quad (3)$$

1. De même que pour \mathcal{D} , on pourrait munir \mathcal{S} d'une certaine topologie \mathcal{T} qui vérifierait (i) \mathcal{T} n'est pas normable (ii) une suite $(s_n)_{n \geq 1}$ de \mathcal{S} converge vers un élément s si et seulement si on a convergence pour toute les normes N_q . On pourrait alors définir les distributions tempérées comme les éléments de \mathcal{S}' . Mais comme pour \mathcal{D}' , c'est plutôt la notion de convergence simple qui nous intéresse et on peut donc se contenter de la définition 2.13.

Pour cela, nous allons procéder comme pour l'exemple du « peigne de Dirac » en prenant $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ et N un entier supérieur à 1 :

$$\begin{aligned} \sum_{p \in \mathbb{P}, p \leq N} \left| \frac{1}{p} \varphi(\log(p)) \right| &= \sum_{p \in \mathbb{P}, p \leq N} \frac{1}{p \log^2(p)} |\log^2(p) \varphi(\log(p))| \\ &\leq \sup_{x \in [2, +\infty[} |\log^2(x) \varphi(\log(x))| \sum_{p \in \mathbb{P}} \frac{1}{p \log^2(p)} \\ &\leq C \sup_{x \in \mathbb{R}} |x^2 \varphi(x)| \\ &\leq C \sum_{|\alpha| \leq 2, |\beta| = 0} \sup_{x \in \mathbb{R}} |x^\alpha \partial^\beta \varphi(x)|. \end{aligned}$$

Remarque : nous avons bien $C = \sum_{p \in \mathbb{P}} \frac{1}{p \log^2(p)} \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n \log^2(n)} < +\infty$ par comparaison avec les séries de Bertrand.

En particulier, $\sum_{p \in \mathbb{P}} \frac{1}{p} \varphi(\log(p))$ existe et $\left| \sum_{p \in \mathbb{P}} \frac{1}{p} \varphi(\log(p)) \right| \leq C \sum_{|\alpha| \leq 2, |\beta| = 0} \sup_{x \in \mathbb{R}} |x^\alpha \partial^\beta \varphi(x)|$.

Au cours la démonstration du Théorème des Nombres Premiers, nous serons amenés à utiliser la notion de *convergence* de distributions, qu'elles soient dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ ou dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$, en particulier pour démontrer la proposition 3.5 (page 30). Nous en donnons donc la définition ci-dessous.

Définition 2.14. Soit $I \subset \mathbb{R}$ intervalle ouvert. $(T_n)_n \in \mathcal{D}'(I)^\mathbb{N}$, $T \in \mathcal{D}'(I)$.

On dit que $(T_n)_n$ converge vers T dans $\mathcal{D}'(I)$, noté $T_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} T$ dans $\mathcal{D}'(I)$ si :

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(I), \langle T_n, \varphi \rangle \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \langle T, \varphi \rangle.$$

Voici un exemple de convergence dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ de distributions que nous réutiliserons pour montrer la proposition 3.5 (page 30) :

Soit $\mu_\epsilon := \sum_{p \in \mathbb{P}} \frac{1}{p^{1+\epsilon}} \delta_{\log p}$. C'est une distribution tempérée au même titre que μ (voir équation (3)).

Montrons que $\mu_\epsilon \rightarrow \mu$ dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$. c'est-à-dire $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \sum_{p \in \mathbb{P}} \frac{1}{p^{1+\epsilon}} \varphi(\log p) = \sum_{p \in \mathbb{P}} \frac{1}{p} \varphi(\log p)$ pour tout

$\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. Comme $\left| \frac{1}{p^{1+\epsilon}} \varphi(\log p) \right| \leq \frac{1}{p(\log p)^2} (\log p)^2 |\varphi(\log p)| \leq \frac{1}{p(\log p)^2} \sup_{x \in \mathbb{R}} |x^2 \varphi(x)|$, nous pouvons utiliser le théorème de convergence dominée, et obtenir ainsi que :

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \sum_{p \in \mathbb{P}} \frac{1}{p^{1+\epsilon}} \varphi(\log p) = \sum_{p \in \mathbb{P}} \frac{1}{p} \varphi(\log p).$$

Nous souhaitons conclure cette introduction aux distributions en présentant très succinctement la convoluée :

- ◆ d'une distribution tempérée avec une fonction de l'espace de Schwartz ;
- ◆ d'une distribution avec une distribution à support compact.²

Remarque : ces deux cas de convolutions seront d'une importance non négligeable dans la démonstration car ils permettront de créer des fonctions non triviales de type positif (voir les constructions de fonctions de type positif en 3.2, page 33). Ces fonctions seront utilisées pour (i) montrer que la fonction ζ ne s'annule pas sur la droite $1 + i\mathbb{R}$ et (ii) passer de la version lissée du Théorème des Nombres Premiers à l'équivalent attendu.

Commençons par présenter le cas plus simple de la convoluée d'une distribution avec une fonction $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

2. Il ne s'agit en aucun cas de détailler toute la théorie relative à la convolution de distributions qui est bien plus vaste que la définition, restreinte à un cas particulier de convolution (distribution à support compact), que nous donnons.

Définition 2.15. Soient $\varphi, \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ et $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. On définit $\varphi * T$ de la manière suivante : $\langle \varphi * T, \psi \rangle := \langle T, (\sigma\varphi) * \psi \rangle$ où $\sigma : \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \mapsto \{\sigma\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) : x \mapsto \varphi(-x)\}$ est l'application antipodale. Ainsi définie, $\varphi * T$ est bien une distribution tempérée.

Passons désormais au cas particulier de convoluée de deux distributions. Pour cela, définissons tout d'abord le *support* d'une distribution :

Définition 2.16. Le support d'une distribution T est le complémentaire de l'union de tous les ouverts U tels que $\langle T, \varphi \rangle = 0$ pour toute fonction $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ avec $\text{supp } \varphi \subset U$. On le note $\text{supp } T$.

Par exemple, le support de la distribution de Dirac δ_a est le singleton $\{a\}$.

Définition 2.17. La convoluée $T * S$ d'une distribution $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ et d'une distribution à support compact S est définie par :

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n), \langle T * S, \varphi \rangle = \langle T, \psi \rangle \text{ où } \psi : x \mapsto \langle S, \varphi(x + \cdot) \rangle \text{ avec } \psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n).$$

Voici un exemple simple de convoluée de distributions qui s'inscrit dans le cadre de la définition ci-dessus. Cet exemple est capital puisqu'une méthode pour créer des fonctions non triviales de type positif repose essentiellement sur la convolution de deux masses de Dirac. Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, alors :

$$\begin{aligned} \langle \delta_a * \delta_b, \varphi \rangle &= \langle \delta_a, \langle \delta_b, \varphi(x + \cdot) \rangle \rangle \\ &= \langle \delta_a, \varphi(x + b) \rangle \\ &= \varphi(a + b) \\ &= \langle \delta_{a+b}, \varphi \rangle. \end{aligned}$$

D'où $\delta_a * \delta_b = \delta_{a+b}$.

2.2.2 Transformées de Fourier et distributions tempérées

Transformation de Fourier dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$

Définition 2.18. ³ Soit $\varphi \in L^1(\mathbb{R}^n)$. On définit la transformée de Fourier de φ :

$$\mathcal{F}(\varphi) : \begin{cases} \mathbb{R}^n & \longrightarrow \mathbb{C} \\ \xi & \longmapsto \int_{\mathbb{R}^n} \exp(-i\langle x, \xi \rangle) \varphi(x) dx. \end{cases}$$

Remarques :

$$\blacklozenge \langle x, \xi \rangle = \sum_{j=1}^n x_j \xi_j ;$$

$$\blacklozenge |\exp(-i\langle x, \xi \rangle) \varphi(x)| \leq |\varphi(x)| \text{ et } \varphi \in L^1(\mathbb{R}^n) \text{ donc } \mathcal{F}(\varphi) \in L^\infty(\mathbb{R}^n) \text{ (et même } \mathcal{C}_b^0(\mathbb{R}^n)\text{)}.$$

L'exemple très important qu'il convient de connaître et que nous réutiliserons pour démontrer la formule de la transformée de Fourier inverse est celui de la gaussienne.

Soit $\lambda > 0$ et $G_\lambda : x \mapsto \exp\left(-\frac{\lambda \|x\|^2}{2}\right)$. Alors $G_\lambda \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ et :

$$\mathcal{F}(G_\lambda)(\xi) = \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^{\frac{n}{2}} G_{\frac{1}{\lambda}}(\xi). \quad (4)$$

Effectuons la preuve (en dimension 1) à l'aide du prolongement analytique. Pour cela, posons

$F : z \in \mathbb{C} \mapsto \int_{\mathbb{R}} \exp(-zx) \exp\left(-\frac{\lambda x^2}{2}\right) dx$ et $f : (z, x) \in \mathbb{C} \times \mathbb{R} \mapsto \exp(-zx) \exp\left(-\frac{\lambda x^2}{2}\right)$. Nous constatons que :

3. Plusieurs définitions alternatives existent selon la convention choisie. La conséquence de choisir une convention plutôt qu'une autre est l'apparition d'un facteur multiplicatif constant. Dans la démonstration du théorème des nombres premiers, la convention adoptée sera différente de celle présentée ici. En effet, nous effectuerons le changement de variable suivant : $[\xi = 2\pi v]$.

- ◆ $\forall z \in \mathbb{C}, x \mapsto f(z, x)$ est continue ;
- ◆ $\forall x \in \mathbb{R}, z \mapsto f(z, x)$ est holomorphe comme composée de fonctions holomorphes ;
- ◆ $\forall M > 0 \forall x \in \mathbb{R}, \forall z$ tels que $|z| < M, |f(z, x)| \leq \exp(-\frac{\lambda x^2}{2}) \exp(M|x|)$ et $x \mapsto \exp(-\frac{\lambda x^2}{2}) \exp(M|x|)$ est intégrable sur \mathbb{R} .

D'après le théorème d'holomorphie sous le signe intégrale, nous pouvons conclure que F est holomorphe sur \mathbb{C} . En outre, le calcul explicite de F sur \mathbb{R} , nous donne, pour $t \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}
F(t) &= \exp\left(\frac{t^2}{2\lambda}\right) \int_{\mathbb{R}} \exp\left(-\frac{\lambda}{2}\left(x + \frac{t}{\lambda}\right)^2\right) dx \\
&\left[\begin{array}{l} (i) : \text{Changement de variable } w = \sqrt{\frac{\lambda}{2\pi}}\left(x + \frac{t}{\lambda}\right) \text{ et } (ii) : \int_{\mathbb{R}} \exp(-\pi x^2) dx = 1 \end{array} \right] \\
&= \sqrt{\frac{2\pi}{\lambda}} \exp\left(\frac{t^2}{2\lambda}\right) \\
&=: g(t).
\end{aligned}$$

Les fonctions F et g , toutes deux holomorphes, coïncident sur l'axe réel. Elles sont donc égales sur \mathbb{C} d'après le théorème du prolongement analytique. Mais alors, pour $\xi \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}(G_\lambda)(\xi) &= F(i\xi) \\
&= \sqrt{\frac{2\pi}{\lambda}} \exp\left(\frac{-\xi^2}{2\lambda}\right) \\
&= \sqrt{\frac{2\pi}{\lambda}} G_{\frac{1}{\lambda}}(\xi).
\end{aligned}$$

Sans plus attendre, mentionnons le théorème de Riemann-Lebesgue qui nous donne une information sur le comportement de la transformée de Fourier d'une fonction dans $L^1(\mathbb{R}^n)$. Nous serons amenés à l'utiliser.

Lemme 2.19. (c.f. [7], proposition 3.5.)

Soit $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Alors $\mathcal{F}(f)(x) \xrightarrow{|x| \rightarrow \infty} 0$.

Rappelons quelques caractéristiques utiles de la transformée de Fourier dans l'espace de Schwartz :

Proposition 2.20.

- ◆ **Stabilité de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$**
Soit $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Alors : $\mathcal{F}(\varphi) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.
- ◆ **Formule d'échange**
Soient $\varphi, \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Alors : $\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(\xi) \mathcal{F}(\psi)(\xi) d\xi = \int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{F}(\varphi)(\xi) \psi(\xi) d\xi$.
- ◆ **Translation**
Soit $a \in \mathbb{R}^n, \tau_a : \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \mapsto \tau_a \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) : x \mapsto \varphi(x - a)$. Alors : $\forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n),$
 $\mathcal{F}(\tau_a \varphi)(\xi) = \exp(-i\langle a, \xi \rangle) \mathcal{F}(\varphi)(\xi);$
 $\mathcal{F}(\exp(i\langle a, x \rangle) \varphi)(\xi) = \tau_a \mathcal{F}(\varphi)(\xi) = \mathcal{F}(\varphi)(\xi - a).$
- ◆ **Dilatation**
 $\mathcal{F}(\varphi(\frac{\cdot}{\lambda}))(\xi) = \frac{1}{\lambda} \mathcal{F}(\varphi)(\frac{\xi}{\lambda}).$
- ◆ **Transformée de Fourier d'une dérivée et dérivée d'une transformée de Fourier**
 $\mathcal{F}(\partial^\alpha \varphi) = (i\xi)^\alpha \mathcal{F}(\varphi);$
 $\partial^\alpha \mathcal{F}(\varphi) = \mathcal{F}[(-ix)^\alpha \varphi].$
- ◆ **Transformée de Fourier d'une convoluée**
Soient $\varphi, \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Alors : $\mathcal{F}(\varphi * \psi) = \mathcal{F}(\varphi) \mathcal{F}(\psi).$

Théorème 2.21. Formule d'inversion de Fourier sur $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ (c.f. [7], Théorème 5.2.)

Soit $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Alors on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \varphi(x) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^n \int_{\mathbb{R}^n} \exp(i\langle x, \xi \rangle) \mathcal{F}(\varphi)(\xi) d\xi = \mathcal{F}(\mathcal{F}(\varphi))(-x).$$

Corollaire 2.22. $\mathcal{F} : \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \mapsto \mathcal{F}(\varphi) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ est un isomorphisme, d'inverse donnée par :

$$\mathcal{F}^{-1} = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^n \mathcal{F} \circ \sigma = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^n \sigma \circ \mathcal{F}.$$

Maintenant que ce rappel sur la transformée de Fourier dans \mathcal{S} est fait, intéressons-nous à la transformée de Fourier dans \mathcal{S}' . Comme pour dériver une distribution, on définit la transformée de Fourier sur \mathcal{S}' par *dualité*. Cet opérateur hérite alors, comme nous allons le voir, des propriétés vues dans \mathcal{S} .

Transformation de Fourier dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$

Définition 2.23. Soit $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. On définit la transformée de Fourier de T comme la forme linéaire suivante :

$$\mathcal{F}(T) : \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \mapsto \langle T, \mathcal{F}(\varphi) \rangle.$$

Cette forme linéaire $\mathcal{F}(T)$ vérifie :

$$\exists k, l \in \mathbb{N}, \exists C > 0, \forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n), |\langle \mathcal{F}(T), \varphi \rangle| \leq C \sum_{|\alpha| \leq k, |\beta| \leq l} \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |x^\alpha \partial^\beta \varphi(x)|.$$

C'est donc un élément de \mathcal{S}' .

Proposition 2.24. La fonction (opérateur de Fourier) $\mathcal{F} : \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ est bijective d'inverse

$$\left(\frac{1}{2\pi}\right)^n \sigma \circ \mathcal{F} = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^n \mathcal{F} \circ \sigma$$

où $\sigma : T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \mapsto \sigma T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) : \varphi \mapsto \langle T, \sigma \circ \varphi \rangle$.

Démonstration.

Soit $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. Il s'agit de montrer que $\left(\frac{1}{2\pi}\right)^n \mathcal{F} \circ \sigma \circ \mathcal{F}(T) = T = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^n \sigma \circ \mathcal{F} \circ \mathcal{F}(T)$.

Or :

$$\begin{aligned} \forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n), \left\langle \left(\frac{1}{2\pi}\right)^n \mathcal{F} \circ \sigma \circ \mathcal{F}(T), \varphi \right\rangle &= \langle \sigma \circ \mathcal{F}(T), \left(\frac{1}{2\pi}\right)^n \mathcal{F}(\varphi) \rangle \\ &= \langle \mathcal{F}(T), \left(\frac{1}{2\pi}\right)^n \sigma \circ \mathcal{F}(\varphi) \rangle \\ &= \langle T, \left(\frac{1}{2\pi}\right)^n \mathcal{F} \circ \sigma \circ \mathcal{F}(\varphi) \rangle \\ &= \left[\left(\frac{1}{2\pi}\right)^n \mathcal{F}(\varphi) \circ \sigma = \mathcal{F}^{-1}(\varphi) \right] \\ &= \langle T, \varphi \rangle. \end{aligned}$$

□

Remarque : si $T_n \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ converge vers T , alors $\mathcal{F}(T_n) \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ converge vers $\mathcal{F}(T)$.

La transformée de Fourier de la convolution de deux fonctions dans l'espace de Schwartz (voir proposition 2.20, page 18) se généralise à la transformée de Fourier de la convolution entre une distribution tempérée et une fonction de l'espace de Schwartz.

Soient $\varphi \in \mathcal{S}(\mathcal{R}^n)$ et $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. On a alors $\mathcal{F}(\varphi * T) = \mathcal{F}(T)\mathcal{F}(\varphi)$. En effet, pour $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, on a :

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{F}(\varphi * T), \psi \rangle &= \langle \varphi * T, \mathcal{F}(\psi) \rangle \\ &= \langle T, (\sigma\varphi) * \mathcal{F}(\psi) \rangle \\ &= \langle \mathcal{F}(T), \left(\frac{1}{2\pi}\right)^n \sigma \circ \mathcal{F}((\sigma\varphi) * \mathcal{F}(\psi)) \rangle \\ &= \langle \mathcal{F}(T), \sigma \circ \mathcal{F} \circ \sigma\varphi \cdot \left(\frac{1}{2\pi}\right)^n \sigma \circ \mathcal{F} \circ \mathcal{F}(\psi) \rangle \\ &= \langle \mathcal{F}(T), \mathcal{F}(\varphi)\psi \rangle \\ &= \langle \mathcal{F}(T)\mathcal{F}(\varphi), \psi \rangle. \end{aligned}$$

La même démarche nous conduit aux résultats suivants, pour $\varphi, \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ et $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$:

- ◆ $\mathcal{F}^{-1}(\varphi\psi) = \mathcal{F}^{-1}(\varphi) * \mathcal{F}^{-1}(\psi)$;
- ◆ $\mathcal{F}^{-1}(T\varphi) = \mathcal{F}^{-1}(\varphi) * \mathcal{F}^{-1}(T)$.

De même que pour la convoluée, nous pouvons étendre les formules « dérivée d'une transformée de Fourier » et « transformée de Fourier d'une dérivée » vues en proposition 2.13. aux distributions.

Nous obtenons alors pour $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$:

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(\partial^\alpha T) &= (i\xi)^\alpha \mathcal{F}(T), \\ \partial^\alpha \mathcal{F}(T) &= \mathcal{F}[(-ix)^\alpha T].\end{aligned}$$

Pour conclure ce rappel d'analyse réelle, nous proposons de démontrer le lemme suivant qui est central pour démontrer une version lissée du Théorème des Nombres Premiers (Proposition 3.11, page 36) :

Lemme 2.25. *Pour toute fonction $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, on a, lorsque y tend vers $+\infty$:*

$$\int_{\mathbb{R}} \log\left(\frac{1}{it}\right) \psi(t) \exp(2i\pi ty) dt = \frac{1}{y} \psi(0) + o\left(\frac{1}{y}\right). \quad (5)$$

Nous souhaitons effectuer trois démonstrations de ce lemme. La première est celle suivie par J.-B. Bost [2] et utilise toutes les notions de distributions et de transformées de Fourier vues jusqu'à présent. La seconde, légèrement plus rapide, est celle suivie par J.-P. Kahane [6]. Cette dernière utilise toute la puissance des distributions avec notamment l'apparition des formules (1) et (2) pour démontrer le lemme très efficacement via une intégration par parties. La dernière démonstration que nous proposons n'utilise pas la théorie des distributions. Nous verrons alors que cette dernière démonstration, bien entendu moins conceptuelle, demande cependant plus d'effort de calculs et pourrait justifier à elle seule le recours aux distributions dans la démonstration du Théorème des Nombres Premiers que nous étudions.

Démonstration. Première méthode [2].

Soit $T = \frac{d}{dt} T_f$ où $f : t \in \mathbb{R} \mapsto \log\left(\frac{1}{it}\right)$; T_f est bien une distribution car f est $L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$. Il s'agit de :

1. Montrer que T est une distribution tempérée.
2. Montrer que sa transformée de Fourier inverse est la fonction $g = -2\pi i \cdot 1_{\mathbb{R}^+}$.
3. Déterminer $\lim_{y \rightarrow \infty} \langle \mathcal{F}^{-1}(T), \mathcal{F}(t \mapsto \psi(t) \exp(2\pi iy)) \rangle$ avec ψ dans l'espace de Schwartz.

1. Pour établir que T est une distribution tempérée, suivons les rappels effectués précédemment (2.12, page 13). Nous savons qu'il suffit de se limiter à montrer que la distribution T_f est tempérée.

Soit $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. Alors :

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} \left| \log \frac{1}{it} \varphi(t) \right| dt &\leq \int_{\mathbb{R}} \frac{\sqrt{(\log |t|)^2 + \frac{\pi^2}{4}}}{1+t^2} (1+t^2) |\varphi(t)| dt \\ &\left[C = \int_{\mathbb{R}} \frac{\sqrt{(\log |t|)^2 + \frac{\pi^2}{4}}}{1+t^2} dt \right] \\ &\leq C (\|\varphi\|_\infty + \sup_{t \in \mathbb{R}} |t^2 \varphi(t)|) \\ &\leq C \sum_{|\alpha| \leq 2, |\beta| \leq 0} \sup_{t \in \mathbb{R}} |t^\alpha \partial^\beta \varphi(t)|.\end{aligned}$$

2. Pour obtenir la transformée de Fourier inverse de T , montrons tout d'abord que la distribution tempérée associée à $f_\epsilon : t \mapsto \log \frac{1}{it + \epsilon}$ converge dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ vers T_f . Notons que f_ϵ est bien tempérée car f_ϵ est \mathcal{C}^1 . Profitons-en pour annoncer que $\frac{d}{dt} f_\epsilon$ est également tempérée puisque

$\frac{d}{dt}f_\epsilon$ est dans L^2 .

Soit $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. Au voisinage de 0 et pour ϵ petit, $\left| \log \left(\frac{1}{it + \epsilon} \right) \right| = \frac{1}{2} \sqrt{\log(\epsilon^2 + t^2)^2 + \pi^2} \leq \frac{1}{2} \sqrt{\log(t^2)^2 + \pi^2}$ (en supposant ϵ suffisamment petit pour que $t^2 + \epsilon^2 \leq 1$). Par ailleurs, au voisinage de l'infini, en considérant par exemple $\epsilon \leq 1$, $\left| \log \left(\frac{1}{it + \epsilon} \right) \varphi(t) \right| \leq \frac{\varphi(t)}{2} \sqrt{\log(t^2)^2 + \pi^2}$ d'où $\log \left(\frac{1}{it + \epsilon} \right) \varphi(t) = o \left(\frac{1}{t^2} \right)$.

Le théorème de convergence dominée nous permet alors d'écrire la relation suivante :

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{\mathbb{R}} \log \frac{1}{it + \epsilon} \varphi(t) dt = \int_{\mathbb{R}} \log \frac{1}{it} \varphi(t) dt.$$

Cette relation est l'exacte traduction de la convergence de $T_{\tilde{f}_\epsilon}$ vers $T_{\tilde{f}}$ dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ ou, autrement dit, que : $\forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}), \langle T_{\tilde{f}}, \varphi \rangle = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \langle T_{\tilde{f}_\epsilon}, \varphi \rangle$.

En outre, la définition 2.12 (page 13) nous dit que pour toute distribution tempérée T , et toute fonction $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$: $\langle \frac{d}{dt}T, \varphi \rangle = -\langle T, \frac{d}{dt}\varphi \rangle$. Alors :

$$\begin{aligned} \langle T, \varphi \rangle &= -\langle T_f, \frac{d}{dt}\varphi \rangle \\ &= -\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \langle T_{f_\epsilon}, \frac{d}{dt}\varphi \rangle \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \langle T_{\frac{d}{dt}f_\epsilon}, \varphi \rangle \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \left\langle \frac{-1}{t - i\epsilon}, \varphi \right\rangle \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \left\langle \frac{-2i\pi}{2i\pi t + 2\pi\epsilon}, \varphi \right\rangle. \end{aligned}$$

Soit $H_\epsilon : x \mapsto 2i\pi \cdot 1_{\mathbb{R}_+}(x) \exp(-2\pi\epsilon x)$. La fonction H_ϵ est dans $L^1(\mathbb{R})$ et donc T_{H_ϵ} définit une distribution tempérée. En effet, $\int_{\mathbb{R}} |H_\epsilon(t)| dt = \frac{1}{\epsilon}$. Pour calculer sa transformée de Fourier, suivons les définitions précédentes. Dotons-nous d'une fonction $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ et calculons :

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{F}(T_{H_\epsilon}), \varphi \rangle &= \langle T_{H_\epsilon}, \mathcal{F}(\varphi) \rangle \\ &= \int_{\mathbb{R}} H_\epsilon(x) \left(\int_{\mathbb{R}} \varphi(t) \exp(-2i\pi xt) dt \right) dx \\ &= 2i\pi \int_0^\infty \exp(2\pi x\epsilon) \left(\int_{\mathbb{R}} \varphi(t) \exp(-2i\pi xt) dt \right) dx \\ &\text{[Théorème de Fubini]} \\ &= 2i\pi \int_{\mathbb{R}} \varphi(t) \left(\int_0^\infty \exp(-2\pi x(\epsilon + it)) dx \right) dt \\ &= \int_{\mathbb{R}} \varphi(t) \frac{2i\pi}{2\pi(\epsilon + it)} dt \\ &= \left\langle \frac{2i\pi}{2i\pi t + 2\pi\epsilon}, \varphi \right\rangle. \end{aligned}$$

Donc, nous pouvons poursuivre le calcul de $\langle T_f, \varphi \rangle$ entamé précédemment :

$$\begin{aligned} \langle T, \varphi \rangle &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \left\langle \frac{-2i\pi}{2i\pi t + 2\pi\epsilon}, \varphi \right\rangle \\ &= -\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \langle \mathcal{F}(T_{H_\epsilon}), \varphi \rangle. \end{aligned}$$

Nous n'avons plus qu'à appliquer le théorème 2.24 (page 19) pour conclure le point 2 :

$$\begin{aligned}
\langle \mathcal{F}^{-1}(T), \varphi \rangle &= \left\langle \frac{1}{2\pi} \sigma \circ \mathcal{F}(T), \varphi \right\rangle \\
&= - \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \left\langle \frac{1}{2\pi} \sigma \circ \mathcal{F} \circ \mathcal{F}(T_{H_\epsilon}), \varphi \right\rangle \\
&= \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \langle -T_{H_\epsilon}, \varphi \rangle \\
&= \langle -2i\pi \cdot 1_{\mathbb{R}^+}, \varphi \rangle.
\end{aligned}$$

Ainsi, $\mathcal{F}^{-1}(T) = 2i\pi \cdot 1_{\mathbb{R}^+}$.

3. Effectuons un calcul direct :

$$\begin{aligned}
\langle \mathcal{F}^{-1}(T), \mathcal{F}(t \mapsto \psi(t) \exp(2\pi i y)) \rangle &= \langle \mathcal{F}^{-1}(T), \mathcal{F}(\psi)(\cdot - y) \rangle \\
&= -2\pi i \int_0^{+\infty} \mathcal{F}(\psi)(x - y) dx \\
&\quad [\text{Changement de variable } t = x - y] \\
&= -2\pi i \int_{-y}^{+\infty} \mathcal{F}(\psi)(t) dt.
\end{aligned}$$

Comme $\lim_{y \rightarrow \infty} -2\pi i \int_{-y}^{+\infty} \mathcal{F}(\psi)(t) dt = -2\pi i \int_{\mathbb{R}} \mathcal{F}(\psi)(t) dt = -2\pi i \mathcal{F}^{-1} \circ \mathcal{F}(\psi)(0) = -2\pi i \psi(0)$, nous concluons que :

$$\lim_{y \rightarrow \infty} \langle \mathcal{F}^{-1}(T), \mathcal{F}(t \mapsto \psi(t) \exp(2\pi i y)) \rangle = -2\pi i \psi(0).$$

Reformulons le lemme pour comprendre comment conclure naturellement :

Soit $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. en réécrivant :

$$\int_{\mathbb{R}} \log\left(\frac{1}{it}\right) \psi(t) \exp(2\pi i y t) dt = \langle T_{f\psi}, t \mapsto \exp(2\pi i y t) \rangle,$$

il nous reste donc à montrer que :

$$\langle T_{f\psi}, t \mapsto \exp(2\pi i y t) \rangle \underset{y \rightarrow +\infty}{=} \frac{1}{y} \psi(0) + o\left(\frac{1}{y}\right). \quad (6)$$

Partons du membre de gauche de l'équation (6) et ayons recours à la dérivation des distributions et au lemme de Riemann-Lebesgue (voir énoncé 2.19, page 18) :

$$\begin{aligned}
\langle T_{f\psi}, t \mapsto \exp(2\pi i y t) \rangle &= - \left\langle \frac{d}{dt} T_{f\psi}, t \mapsto \frac{1}{2\pi i y} \exp(2\pi i y t) \right\rangle \\
&= - \frac{1}{2\pi i y} \int_{\mathbb{R}} \frac{d}{dt} \left(\log\left(\frac{1}{it}\right) \right) \psi(t) \exp(2\pi i y t) dt \\
&\quad - \frac{1}{2\pi i y} \int_{\mathbb{R}} \log\left(\frac{1}{it}\right) \psi'(t) \exp(2\pi i y t) dt \\
&= - \frac{1}{2\pi i y} \langle T, t \mapsto \psi(t) \exp(2\pi i y t) \rangle - \frac{1}{2\pi i y} \mathcal{F}^{-1}(f\psi')(y) \\
&= - \frac{1}{2\pi i y} \langle \mathcal{F}^{-1}(T), \mathcal{F}(t \mapsto \psi(t) \exp(2\pi i y t)) \rangle - \frac{1}{2\pi i y} \mathcal{F}^{-1}(f\psi')(y) \\
&= \frac{2\pi i \psi(0)}{2\pi i y} - \frac{1}{2\pi i y} \mathcal{F}^{-1}(f\psi')(y) \\
&\quad [\text{Lemme de Riemann-Lebesgue appliqué à } f\psi' \text{ intégrable sur } \mathbb{R}] \\
&\underset{y \rightarrow +\infty}{=} \frac{1}{y} \psi(0) + o\left(\frac{1}{y}\right).
\end{aligned}$$

□

Démonstration. Deuxième méthode - [6].

Cette seconde preuve est plus rapide si le lecteur a en tête les distributions T'_H (voir (1), H : Heaviside) et $T'_{t \rightarrow \log(|t|)}$ (voir (2)). Armés de ces deux distributions, nous pouvons effectuer une intégration par parties directement sur le membre de gauche de l'équation (5) :

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} \log\left(\frac{1}{it}\right) \psi(t) \exp(2\pi ity) dt &= \left[\log\left(\frac{1}{it}\right) \psi(t) \frac{1}{2\pi iy} \exp(2\pi ity) \right]_{-\infty}^{+\infty} \\ &\quad - \frac{1}{2\pi iy} \int_{\mathbb{R}} \frac{d}{dt} \left(\log\left(\frac{1}{it}\right) f(t) \right) \exp(2\pi ity) dt \\ & \text{[Annulation du terme entre crochet car } \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})\text{]} \\ &= -\frac{1}{2\pi iy} \left[\int_{\mathbb{R}} \frac{d}{dt} \left(\log\left(\frac{1}{it}\right) \right) \psi(t) \exp(2\pi ity) dt \right] \\ &\quad + \frac{1}{2\pi iy} \left[\int_{\mathbb{R}} \log\left(\frac{1}{it}\right) \psi'(t) \exp(2\pi ity) dt \right]. \end{aligned}$$

Nous appliquons alors le lemme de Riemann-Lebesgue à la fonction $t \mapsto \log\left(\frac{1}{it}\right) \psi'(t)$. On poursuit alors le calcul précédent avec y au voisinage de l'infini :

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} \log\left(\frac{1}{it}\right) \psi(t) \exp(2\pi ity) dt &\underset{y \rightarrow +\infty}{=} -\frac{1}{2\pi iy} \int_{\mathbb{R}} \frac{d}{dt} \left(\log\left(\frac{1}{it}\right) \right) \psi(t) \exp(2\pi ity) dt + o\left(\frac{1}{y}\right) \\ &\underset{y \rightarrow +\infty}{=} -\frac{1}{2\pi iy} \int_{\mathbb{R}} \frac{d}{dt} \left(-\log(|t|) - i \operatorname{signe}(t) \frac{\pi}{2} \right) \psi(t) \exp(2\pi ity) dt + o\left(\frac{1}{y}\right) \\ &\underset{y \rightarrow +\infty}{=} \frac{1}{2\pi iy} \langle T'_{t \rightarrow \log(|t|)}, t \mapsto f(t) \exp(2\pi ity) \rangle \\ &\quad + \frac{1}{2\pi iy} \frac{i\pi}{2} \langle T'_{\operatorname{signe}}, t \mapsto \psi(t) \exp(2\pi ity) \rangle + o\left(\frac{1}{y}\right) \\ & \left[\operatorname{signe}(t) = H(t) - H(-t) \text{ donc } T'_{\operatorname{signe}} = 2\delta_0; T'_{t \rightarrow \log(|t|)} = \operatorname{vp}\left(\frac{1}{t}\right) \right] \\ &\underset{y \rightarrow +\infty}{=} \frac{1}{2\pi iy} \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{|t| > \epsilon} \frac{\psi(t)}{t} \exp(2\pi ity) dt + \frac{1}{2y} f(0) + o\left(\frac{1}{y}\right) \\ &\underset{y \rightarrow +\infty}{=} \frac{1}{2\pi iy} \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \left(\int_{|t| > \epsilon} \frac{\psi(t) - \psi(0)}{t} \exp(2\pi ity) dt \right) \\ &\quad + \frac{1}{2\pi iy} \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \left(\int_{|t| > \epsilon} \frac{\psi(0)}{t} \exp(2\pi ity) dt \right) \\ &\quad + \frac{1}{2y} \psi(0) + o\left(\frac{1}{y}\right) \\ &\underset{y \rightarrow +\infty}{=} \frac{1}{2\pi iy} (A(y) + B(y)) + \frac{1}{2y} \psi(0) + o\left(\frac{1}{y}\right). \quad (a) \end{aligned}$$

La fonction $g : t \mapsto \frac{\psi(t) - \psi(0)}{t}$ étant intégrable sur \mathbb{R} , nous pouvons lui appliquer le lemme de Riemann-Lebesgue pour conclure que $A(y) = 0$. Quant à $B(y)$, nous pouvons encore poursuivre

les calculs jusqu'à obtenir un valeur précise de l'intégrale :

$$\begin{aligned}
B(y) &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{|t| > \epsilon} \frac{\psi(0)}{t} \exp(2\pi ity) dt \\
&= \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{-\infty}^{-\epsilon} \frac{\psi(0)}{t} \exp(2\pi ity) dt + \int_{\epsilon}^{+\infty} \frac{\psi(0)}{t} \exp(2\pi ity) dt \\
&= \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} 2i\psi(0) \int_{\epsilon}^{+\infty} \frac{\exp(2\pi ity) - \exp(-2\pi ity)}{2it}, dt \\
&= \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} 2i\psi(0) \int_{\epsilon}^{+\infty} \frac{\sin(2\pi ty)}{t} dt \\
&\text{[Changement de variable } u = 2\pi ty\text{]} \\
&= \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} 2i\psi(0) \int_{2\pi\epsilon y}^{+\infty} \frac{\sin(u)}{u} du \\
&= \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} 2i\psi(0) \left(\int_{2\pi\epsilon y}^1 \frac{\sin(u)}{u} du + \int_1^{+\infty} \frac{\sin(u)}{u} du \right) \\
&\left[t \mapsto \frac{\sin(t)}{t} \text{ est continue au voisinage de } 0 \right] \\
&= 2i\psi(0) \int_0^{+\infty} \frac{\sin(u)}{u} du \\
&\left[\text{Voir [3] pour le calcul de cette intégrale } \left(= \frac{\pi}{2} \right). \right] \\
&= i\pi\psi(0). \tag{b}
\end{aligned}$$

En combinant (a) et (b), nous obtenons finalement que :

$$\int_{\mathbb{R}} \log\left(\frac{1}{it}\right) \psi(t) \exp(2\pi ity) dt \underset{y \rightarrow +\infty}{=} \frac{1}{y} \psi(0) + o\left(\frac{1}{y}\right).$$

□

Démonstration. Troisième méthode - Sans usage de la théorie des distributions

Nous allons voir que sans recours à la théorie des distributions, l'obtention du lemme 2.25 est plus ardue.

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} \log\left(\frac{1}{it}\right) \psi(t) \exp(2\pi ity) dt &= \int_{\mathbb{R}} \left(-\log(|t|) - i \operatorname{signe}(t) \frac{\pi}{2} \right) \psi(t) \exp(2\pi ity) dt \\
&= \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{-\infty}^{-\epsilon} \left(-\log(-t) + i \frac{\pi}{2} \right) \psi(t) \exp(2\pi ity) dt \\
&\quad + \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{\epsilon}^{+\infty} \left(-\log(t) - i \frac{\pi}{2} \right) \psi(t) \exp(2\pi ity) dt.
\end{aligned}$$

Il s'ensuit une intégration par partie dont nous appellerons $A_{\epsilon, y}$ la partie intégrée et $B_{\epsilon, y}$ le

deuxième terme de l'intégration par partie. Calculons $A_{\epsilon, y}$ et $B_{\epsilon, y}$:

$$\begin{aligned}
\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} A_{\epsilon, y} &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \left(\left[\left(-\log(-t) + i\frac{\pi}{2} \right) \psi(t) \frac{1}{2\pi iy} \exp(2\pi ity) \right]_{-\infty}^{-\epsilon} \right) \\
&\quad + \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \left(\left[\left(-\log(t) - i\frac{\pi}{2} \right) \psi(t) \frac{1}{2\pi iy} \exp(2\pi ity) \right]_{\epsilon}^{+\infty} \right) \\
&= \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \frac{1}{2\pi iy} \left(\left(-\log(\epsilon) + i\frac{\pi}{2} \right) \psi(-\epsilon) \exp(-2\pi iy\epsilon) - \left(-\log(\epsilon) - i\frac{\pi}{2} \right) \psi(\epsilon) \exp(2\pi iy\epsilon) \right) \\
&= \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \frac{1}{4y} (\psi(-\epsilon) \exp(-2\pi iy\epsilon) + \psi(\epsilon) \exp(2\pi iy\epsilon)) \\
&\quad + \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \frac{1}{2\pi iy} \log(\epsilon) (\psi(\epsilon) \exp(2\pi iy\epsilon) - \psi(-\epsilon) \exp(-2\pi iy\epsilon)) \\
&\text{[Développement limité à l'ordre 0 dans la seconde limite]} \\
&= \frac{1}{2y} \psi(0) + \frac{1}{2\pi iy} \log(\epsilon) ((\psi(0) + o(1)) \exp(2\pi iy\epsilon) - (\psi(0) + o(1)) \exp(2\pi iy\epsilon)) \\
&= \frac{1}{2y} \psi(0) + \frac{1}{2\pi iy} \log(\epsilon) (2i\psi(0) \sin(2\pi y\epsilon) + 2i \sin(2\pi y\epsilon) o(1)) \\
&\quad \left[\text{avec } y \neq 0, \sin(2\pi y\epsilon) \log(\epsilon) \underset{\epsilon \rightarrow 0^+}{=} o(1) \right] \\
&\underset{y \rightarrow +\infty}{=} \frac{1}{2y} \psi(0) + o\left(\frac{1}{y}\right).
\end{aligned}$$

Le deuxième terme de l'intégration par partie, $B_{\epsilon, y}$ se traite en ayant recours au lemme de Riemann-Lebesgue (lemme 2.19, page 18) :

$$\begin{aligned}
\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} B_{\epsilon, y} &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \frac{1}{2\pi iy} \left(\int_{-\infty}^{-\epsilon} \frac{d}{dt} \left[\left(\log(-t) - i\frac{\pi}{2} \right) \psi(t) \right] \exp(2\pi ity) dt \right) \\
&\quad + \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \frac{1}{2\pi iy} \left(\int_{\epsilon}^{+\infty} \frac{d}{dt} \left[\left(\log(t) + i\frac{\pi}{2} \right) \psi(t) \right] \exp(2\pi ity) dt \right) \\
&= \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \frac{1}{2\pi iy} \left(\int_{-\infty}^{-\epsilon} \left(\log(-t) - i\frac{\pi}{2} \right) \psi'(t) \exp(2\pi ity) dt + \int_{-\infty}^{-\epsilon} \frac{1}{t} \psi(t) \exp(2\pi ity) dt \right) \\
&\quad + \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \frac{1}{2\pi iy} \left(\int_{\epsilon}^{+\infty} \left(\log(t) + i\frac{\pi}{2} \right) \psi'(t) \exp(2\pi ity) dt + \int_{\epsilon}^{+\infty} \frac{1}{t} \psi(t) \exp(2\pi ity) dt \right) \\
&= \frac{1}{2\pi iy} \int_{\mathbb{R}} \log(it) \psi'(t) \exp(2\pi ity) dt \\
&\quad + \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \frac{1}{2\pi iy} \left(\int_{|t|>\epsilon} \frac{\psi(t) - \psi(0)}{t} \exp(2\pi ity) dt + \int_{|t|>\epsilon} \frac{\psi(0)}{t} \exp(2\pi ity) dt \right) \\
&\quad \left[\text{Lemme de Riemann-Lebesgue appliqué à } t \mapsto \log(it)\psi'(t) \text{ et à } t \mapsto \frac{\psi(t) - \psi(0)}{t} \right] \\
&\underset{y \rightarrow +\infty}{=} \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \frac{1}{2\pi iy} \int_{|t|>\epsilon} \frac{\psi(0)}{t} \exp(2\pi ity) dt + o\left(\frac{1}{y}\right) \\
&\text{[voir (b) obtenu au cours de la seconde démonstration]} \\
&\underset{y \rightarrow +\infty}{=} \frac{1}{2y} \psi(0) + o\left(\frac{1}{y}\right).
\end{aligned}$$

On trouve finalement :

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} \log\left(\frac{1}{it}\right) \psi(t) \exp(2\pi ity) dt &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} (A_{\epsilon, y} + B_{\epsilon, y}) \\
&\underset{y \rightarrow +\infty}{=} \frac{1}{y} \psi(0) + o\left(\frac{1}{y}\right).
\end{aligned}$$

□

3 Démonstration du Théorème des Nombres Premiers

L'idée de cette démonstration est de donner une formulation *continue* du Théorème des Nombres Premiers grâce à la théorie des distributions. Pour obtenir une telle formulation, on introduit une mesure positive μ qui sera un lien entre la fonction π et la fonction ζ . Cela permettra d'énoncer la formulation continue du théorème. Détaillons un peu plus l'approche proposée : concrètement, on définit la mesure positive réelle suivante :

$$\mu = \sum_{p \in \mathbb{P}} \frac{\delta_{\log(p)}}{p} \quad (\text{déjà vue : (3)}).$$

On a alors pour $y \geq 0$ l'égalité suivante :

$$\int_{\mathbb{R}} e^x 1_{\mathbb{R}_+}(y-x) d\mu(x) = \sum_{p \in \mathbb{P}} \frac{e^{\log(p)}}{p} 1_{\mathbb{R}_+}(y - \log(p)) = \pi(e^y)$$

et en posant $g(x) = e^{-x} 1_{\mathbb{R}_+}(x)$ on a alors envie d'écrire :

$$\frac{\pi(e^y)}{e^y} = (g * \mu)(y).$$

D'autre part, on a (pour s dans un sous-domaine de \mathbb{C} à déterminer) :

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-su} d\mu(u) = \sum_{p \in \mathbb{P}} \frac{e^{-s \log(p)}}{p} = \sum_{p \in \mathbb{P}} \frac{1}{p^{1+s}}.$$

Cette fonction $(\sum_{p \in \mathbb{P}} \frac{1}{p^{1+s}})$ nous rappelle la fonction ζ de Riemann, on décide de la noter $\zeta_{\mathbb{P}}$: nous verrons en 3.1.1 à quel point elles sont liées. Comme la transformée de Fourier d'un produit de convolution est égale au produit (simple) des transformées de Fourier (voir 2.20, page 18), a alors aussi envie d'écrire :

$$\widehat{\frac{\pi(e^y)}{e^y}} = \zeta_{\mathbb{P}} \cdot \widehat{g}.$$

Ces deux identités suggèrent que la mesure μ est pertinente pour étudier π : nous les reverrons par la suite mais *au sens des distributions*. Cela nous permettra alors d'établir l'identité suivante : pour tout $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty$, en notant $\psi = \widehat{\varphi}$ on a lorsque $y \rightarrow +\infty$:

$$\int_{\mathbb{R}} \psi(x-y) \frac{\pi(\exp(x))}{\exp(x)} dx = \frac{1}{y} \int_{\mathbb{R}} \psi(x) dx + o\left(\frac{1}{y}\right).$$

Si nous pouvions choisir $\psi = \delta_0$ (ce qui outrepassé clairement les règles), aurions alors le Théorème des Nombres Premiers. Nous contournerons cela en utilisant des approximations de l'unité.

3.1 Les transformées de Fourier de la mesure μ et de la fonction $x \mapsto \exp(-x)\pi(\exp(x))$

Dans cette première partie, nous allons montrer que :

- ◆ La fonction $\ell : t \mapsto \zeta_{\mathbb{P}}(1 + 2i\pi t)$ est la transformée de Fourier d'une certaine mesure/distribution sur \mathbb{R} que nous notons μ .
- ◆ La distribution définie par la fonction $t \mapsto \frac{\ell(t)}{1 + 2\pi i t}$ est tempérée de transformée de Fourier inverse $x \mapsto \frac{\pi(x)}{\exp(x)}$.

Ce nouveau point de vue sur $\zeta_{\mathbb{P}}$ portera ses fruits dans la deuxième partie, où sera montré que ζ ne s'annule pas sur $1 + i\mathbb{R}$. Par ailleurs, nous remarquons au passage, et ce n'est pas anecdotique, que nous avons relié ζ à π qui est la fonction de comptage qui apparaît dans le Théorème des Nombres Premiers.

Cependant, pour établir les deux points ci-dessus, il est nécessaire que nous fassions le lien entre ζ et $\zeta_{\mathbb{P}}$ au moyen d'une fonction appropriée .

3.1.1 Lier ζ et $\zeta_{\mathbb{P}}$

Profitions de l'écriture de ζ en produit eulérien pour construire une fonction g intéressante :

Proposition 3.1. *Posons pour tout $s \in \{\text{Ré} > 1\}$, $g(s) := \log(\zeta(s)) - \zeta_{\mathbb{P}}(s)$. Alors la fonction g ainsi définie se prolonge en une fonction holomorphe sur le demi-plan $\{\text{Ré} > \frac{1}{2}\}$, et est bornée, pour tout $\rho > \frac{1}{2}$, sur le demi-plan $\{\text{Ré} \geq \rho\}$.*

△ Avant de faire la démonstration de cette proposition, il convient de clarifier ce que nous entendons par $\log(\zeta(s))$. Posons $u(s) := -\sum_{p \in \mathbb{P}} \log\left(1 - \frac{1}{p^s}\right)$ en considérant par \log la détermination principale du logarithme (puisque pour tout $s \in \{\text{Ré} > 1\}$, $1 - \frac{1}{p^s}$ appartient au disque ouvert centré en 1 et de rayon 1). Montrons que u est holomorphe sur $\{\text{Ré} > 1\}$:

- ◆ $s \mapsto \log(1 - \frac{1}{p^s})$ est bien holomorphe sur $\{\text{Ré} > 1\}$;
- ◆ Soit s_0 avec $\text{Ré}(s_0) > 1$. Alors, pour tout s avec $\text{Ré}(s) \geq \text{Ré}(s_0)$, d'après l'inégalité des accroissements finis appliquée à la fonction $t \in D(1, \frac{1}{2}) \mapsto \log(t)$, on a :

$$\left| \log\left(1 - \frac{1}{p^s}\right) - \log\left(1 - \frac{1}{p^{s_0}}\right) \right| \leq 2 \left| 1 - \frac{1}{p^s} - 1 + \frac{1}{p^{s_0}} \right| = 2p^{-\text{Ré}(s)}$$

Ainsi, u converge uniformément sur tout compact du demi-plan $\{\text{Ré}(s) > 1\}$. L'holomorphie de u sur le demi-plan $\{\text{Ré}(s) > 1\}$ est donc démontrée. Montrons alors que $\zeta = \exp(u)$ pour tout $s \in \{\text{Ré}(s) > 1\}$. Pour cela, il suffit de montrer que $\log(\zeta) = u$ sur $]1, +\infty[$ où l'on voit \log comme le logarithme népérien qui est continu :

$$\begin{aligned} \log(\zeta(x)) &= \log\left(\lim_{N \rightarrow +\infty} \prod_{p \in \mathbb{P}, p \leq N} \frac{1}{1 - \frac{1}{p^x}}\right) \\ &= \lim_{N \rightarrow +\infty} \log\left(\prod_{p \in \mathbb{P}, p \leq N} \frac{1}{1 - \frac{1}{p^x}}\right) \\ &= \lim_{N \rightarrow +\infty} \left(-\sum_{p \in \mathbb{P}, p \leq N} \log\left(1 - \frac{1}{p^x}\right)\right) \\ &= u(x). \end{aligned}$$

Le logarithme de la fonction ζ étant clarifié, nous pouvons aborder la démonstration de la proposition 3.1.

Démonstration. Le développement eulérien de ζ montre que pour $s \in \{\text{Ré} > 1\}$:

$$g(s) = \sum_{p \in \mathbb{P}} \left[-\log\left(1 - \frac{1}{p^s}\right) - \frac{1}{p^s} \right].$$

Si $p \in \mathbb{P}$ et $s \in \{\text{Ré} > 1\}$ alors $|p^s| = p^{\text{Ré}(s)} > 1$ donc $\frac{1}{p^s} \in D(0, 1)$, le disque unité ouvert.

Montrons que si $s \in \{\text{Ré} > \frac{1}{2}\}$, la série définissant g converge, et que cette série converge encore normalement sur $\{\text{Ré} \geq \frac{1}{2} + \eta\}$ pour tout $\eta > 0$. Puisque $\log(1 - u) + u$ est une fonction holomorphe de $u \in D(0, 1)$ qui vaut, ainsi que sa dérivée, 0 en 0, on sait qu'il existe une constante $C > 0$ telle que :

$$|u| < \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow |\log(1 - u) + u| \leq C |u|^2.$$

Soit $\eta > 0$. Pour tout $s \in \{\text{Ré} \geq 1/2 + \eta\}$ et tout $p \in \mathbb{P}$, $\left|\frac{1}{p^s}\right| \leq p^{-\frac{1}{2}-\eta} \leq 2^{-1/2}$ et donc :

$$\left| \log\left(1 - \frac{1}{p^s} + \frac{1}{p^s}\right) \right| \leq C p^{-2(\frac{1}{2}+\eta)}$$

Ceci prouve la convergence normale de la série sur $\{\text{Ré} \geq 1/2 + \eta\}$ puisque $2(1/2 + \eta) > 1$ donc $\sum_{p \in \mathbb{P}} p^{-2(1/2+\eta)} < +\infty$. □

Forts de cette proposition, nous sommes maintenant en mesure de décrire $\zeta_{\mathbb{P}}$ (dans quelle mesure y est-elle définie? si oui quelle est sa régularité? etc.) sur sa frontière de définition, $1 + i\mathbb{R}$. Nous allons plus concrètement voir que cela est lié aux zéros de ζ sur $1 + i\mathbb{R}$. Précisément, on a la proposition suivante :

Proposition 3.2. *Soit $s_0 \in 1 + i\mathbb{R}$ et soit $n = \nu_{s_0}(\zeta)$, la valuation de ζ en s_0 . La fonction $s \mapsto \zeta_{\mathbb{P}}(s) - n \log(s - s_0)$, holomorphe sur $\{\text{Ré} > 1\}$, se prolonge en une fonction holomorphe sur un voisinage de s_0 .*

Remarque : Dans cette proposition, \log désigne la détermination principale du logarithme.

Démonstration.

Pour $s \in \{\text{Ré} > 1\}$, posons :

$$\begin{aligned} h(s) &:= \exp(\zeta_{\mathbb{P}}(s) - n \log(s - s_0)) \\ &= (s - s_0)^{-n} \exp(\zeta_{\mathbb{P}}(s)) \\ &= [(s - s_0)^{-n} \zeta(s)] [\exp(-g(s))] \end{aligned}$$

Le choix de l'entier n assure que le premier crochet ne s'annule pas au voisinage de s_0 . En effet, n étant la valuation de ζ en s_0 , nous pouvons écrire ζ , au voisinage de s_0 , de la manière

suivante : $\zeta(s) = \sum_{k=n}^{+\infty} a_k (s - s_0)^k$ avec a_n non nul. Mais alors, en multipliant ζ par $(s - s_0)^{-n}$,

nous obtenons $(s - s_0)^{-n} \zeta(s) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_{k+n} (s - s_0)^k$. Le second crochet est également non nul car

c'est une exponentielle et que g est définie sur un voisinage de s_0 . La fonction h se prolonge donc en une fonction holomorphe ne s'annulant pas sur un petit disque ouvert centré en s_0 : $D(s_0, r)$. Sur ce disque, d'après la proposition 2.3, page 6, le prolongement s'écrit $\exp \circ \varphi$, où φ est holomorphe sur $D(s_0, r)$, car :

- ◆ h ne s'annule pas sur $D(s_0, r)$.
- ◆ $D(s_0, r)$ est simplement connexe.

Donc, pour tout $s \in D(s_0, r) \cap \{\text{Ré} > 1\}$:

$$(\exp \circ \varphi)(s) = \exp(\zeta_{\mathbb{P}}(s) - n \log(s - s_0)).$$

Il existe alors $r_s \in \mathbb{Z}$ tel que $\varphi(s) + 2i\pi r_s = \zeta_{\mathbb{P}}(s) - n \log(s - s_0)$. Ce r_s dépend-il de s ? Non, car $s \mapsto \varphi(s) - \zeta_{\mathbb{P}}(s) + n \log(s - s_0)$ est continue et à valeurs dans $2i\pi\mathbb{Z}$. Son image est donc un singleton (partie connexe de $2i\pi\mathbb{Z}$), disons $\{r_1\}$, car $D(s_0, r) \cap \{\text{Ré} > 1\}$ est connexe (l'image continue d'un connexe est connexe). Ceci conclut la preuve, le prolongement recherché étant $\varphi + 2i\pi r_1$. \square

Une simple relecture de cette proposition permet d'énoncer le corollaire suivant, peut-être plus simple à appréhender. Mais avant de l'énoncer, essayons de visualiser le comportement de ζ sur $1 + i\mathbb{R}$. La fonction ζ peut-elle avoir beaucoup de zéros sur cette droite? *A priori* peut-être, et dans ce cas ces zéros peuvent-ils être très rapprochés? Non car si ζ avait un zéro d'accumulation sur $1 + i\mathbb{R}$, comme ζ se prolonge en une fonction méromorphe sur un ouvert contenant $1 + i\mathbb{R}$, le principe des zéros isolés imposerait que ζ soit nulle sur cet ouvert, ce qui n'est pas le cas. On sait donc que pour tout $s_0 \in 1 + i\mathbb{R}$, il existe $r > 0$ tel que ζ ne s'annule pas sur $D(s_0, r) \setminus \{s_0\}$.

Corollaire 3.3.

- (i) Sur $\mathbb{R}^* \setminus \{t \in \mathbb{R} \mid \zeta(1 + it) = 0\}$, la fonction $u \mapsto \zeta_{\mathbb{P}}(1 + iu)$ est C^∞ .
- (ii) Au voisinage de 0, la fonction $(u \mapsto \zeta_{\mathbb{P}}(1 + iu)) + \log(iu)$ se prolonge en une fonction C^∞ .
- (iii) Si ζ admet un zéro d'ordre n en $1 + it_0$, alors la fonction $u \mapsto \zeta_{\mathbb{P}}(1 + iu) + n \log(\frac{1}{i(u-t_0)})$ se prolonge en une fonction C^∞ au voisinage de t_0 .

Démonstration.

(i) Dans ce cas $n(s_0)$ vaut 0.

(ii) On rappelle que $n(1 + i0) = n(1) = -1$ car 1 est un pôle simple de ζ .

(iii) Ici, $n(1 + it_0)$ vaut n par définition, il suffit d'appliquer la proposition précédente.

Il suffit alors d'appliquer la proposition précédente. \square

Avec ce corollaire, nous connaissons la régularité de $\zeta_{\mathbb{P}}$ en un point de la droite $1 + i\mathbb{R}$ lorsque nous savons si ζ s'annule ou non en ce point. Réciproquement, savoir que $\zeta_{\mathbb{P}}$ est définie et holomorphe au voisinage d'un point de $1 + i\mathbb{R}$ assure que ζ ne s'annule pas en ce point. Nous sommes maintenant curieux de savoir dans quelle mesure nous retrouvons le cas (i) ou (iii) du corollaire. Nous allons en fait montrer que le cas (iii) **ne se produit jamais** ce qui revient à démontrer que la fonction ζ **ne s'annule pas** sur $1 + i\mathbb{R}$. Cela viendra dans la deuxième partie de la démonstration du Théorème des Nombres Premiers. En effet, pour ce faire, nous allons tout d'abord effectuer un détour par la théorie des distributions, avec l'introduction de la mesure μ .

3.1.2 La fonction $t \mapsto \zeta_{\mathbb{P}}(1 + 2i\pi t)$ comme transformée de Fourier

Rappelons (voir (3)) que μ , mesure positive sur \mathbb{R} , est définie par $\mu := \sum_{p \in \mathbb{P}} \frac{1}{p} \delta_{\log(p)}$.

La proposition suivante met en lumière quelques propriétés de μ :

Proposition 3.4.

(i) Soit $\epsilon > 0$ fixé, alors $\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{x^{1+\epsilon}} d\mu(x) < +\infty$.

(ii) Soit $\lambda \in \{\text{Re} > 0\}$ fixé, alors :

◆ $x \mapsto e^{-\lambda x}$ est μ -intégrable.

◆ $\int_{\mathbb{R}} e^{-\lambda x} d\mu(x) = \zeta_{\mathbb{P}}(1 + \lambda)$.

(iii) Soit $y \in \mathbb{R}$ fixé, alors : $\int_{\mathbb{R}} \exp(x) 1_{\mathbb{R}^+}(y - x) d\mu(x) = \pi(\exp(y))$.

Démonstration.

(i) Par comparaison avec les séries de Bertrand :

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} x^{-1-\epsilon} d\mu(x) &= \sum_{p \in \mathbb{P}} \frac{1}{p \log(p)^{1+\epsilon}} \\ &\leq \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{n \log(n)^{1+\epsilon}} \\ &< +\infty. \end{aligned}$$

(ii) Pour $\lambda > 0$:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} \exp(-\lambda x) d\mu(x) &= \sum_{p \in \mathbb{P}} \frac{\exp(-\lambda \log(p))}{p} \\ &= \sum_{p \in \mathbb{P}} \frac{1}{p^{1+\lambda}} \\ &= \zeta_{\mathbb{P}}(1 + \lambda) \\ &< +\infty. \end{aligned}$$

Or, si $s \in \{\text{Ré} > 0\}$, puisque $|\exp(-sx)| = \exp(-\text{Ré}(s)x)$, le calcul précédent prouve que $x \mapsto \exp(-sx)$ est μ -intégrable. En reprenant ce calcul, nous obtenons l'égalité suivante :

$$\int_{\mathbb{R}} \exp(-sx) d\mu(x) = \zeta_{\mathbb{P}}(1 + s).$$

(iii) Pour $y \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}_+} \exp(x) 1_{\mathbb{R}}(y-x) d\mu(x) &= \sum_{p \in \mathbb{P}} \frac{1}{p} \exp(\log(p)) 1_{\mathbb{R}_+}(y - \log(p)) \\ &= \sum_{p \in \mathbb{P}} 1_{\mathbb{R}_+}(y - \log(p)) \\ &= \pi(\exp(y)). \end{aligned}$$

En effet, $1_{\mathbb{R}_+}(y - \log(p)) = 0$ si et seulement si $\log(p) > y$ c'est à dire $p > \exp(y)$. \square

Remarques : nous avons déjà montré que μ est tempérée (voir (3), page 15). Le point (i) le montre également. Les points (ii) et (iii), quant à eux, montrent le lien entre μ , $\zeta_{\mathbb{P}}$ et la fonction de comptage π , lorsque l'on considère des fonctions μ -intégrables appropriées. Plus précisément, mais moins formellement, le point (ii) suggère que la transformée de Fourier de μ est $\lambda \mapsto \zeta_{\mathbb{P}}(1 + 2\pi\lambda)$ (ajout du terme multiplicatif 2π). Nous allons rendre cela plus formel dans la suite. Le point (iii), lui, peut se réinterpréter en disant que $\pi \circ \exp$ est le produit de convolution entre $\exp \cdot \mu$ et la fonction $f := 1_{\mathbb{R}_+}$.

La proposition suivante formalise l'intuition précédente.

Proposition 3.5. *La distribution $\widehat{\mu}$ coïncide avec la distribution associée à la fonction localement sommable $\ell : t \mapsto \zeta_{\mathbb{P}}(1 + 2i\pi t)$, c'est-à-dire :*

$$\forall \varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}), \int_{\mathbb{R}} \varphi(t) \ell(t) dt = \sum_{p \in \mathbb{P}} \frac{1}{p} \widehat{\varphi}(\log(p)).$$

Démonstration.

Soit $\epsilon > 0$ fixé. Soit μ_ϵ mesure sur \mathbb{R} telle que nous l'avons définie dans les rappels sur les distributions (voir paragraphe 2.2.1), c'est à dire : $\mu_\epsilon = \sum_{p \in \mathbb{P}} \frac{1}{p^{1+\epsilon}} \delta_{\log(p)}$. Enfin, définissons également $\ell : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ avec $\ell(t) = \zeta_{\mathbb{P}}(1 + \epsilon + 2\pi it)$.

Pour mener à bien cette preuve, nous avons besoin de :

1. Connaître que, pour $\epsilon > 0$, $\widehat{\mu}_\epsilon = \ell_\epsilon$.
2. Connaître que μ_ϵ tend vers μ dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ lorsque ϵ tend vers 0_+ .
3. Connaître que ℓ_ϵ tend vers ℓ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ lorsque ϵ tend vers 0_+ .

Le deuxième point a déjà été démontré dans les rappels sur les distributions.

Le premier point repose sur l'utilisation du théorème de Fubini. En effet, en prenant $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$, nous savons que

$$\widehat{\varphi}(\log(p)) = \int_{\mathbb{R}} \exp(-2\pi it \log(p)) \varphi(t) dt = \int_{\mathbb{R}} p^{-2\pi it} \varphi(t) dt.$$

Si l'utilisation du théorème de Fubini (mesures de Lebesgue et de comptage considérées) est licite dans ce cas, alors :

$$\sum_{p \in \mathbb{P}} \frac{\widehat{\varphi}(\log(p))}{p^{1+\epsilon}} = \int_{\mathbb{R}} \sum_{p \in \mathbb{P}} \frac{\varphi(t)}{p^{1+\epsilon+2i\pi t}} dt = \int_{\mathbb{R}} \zeta_{\mathbb{P}}(1 + \epsilon + 2\pi it) \varphi(t) dt.$$

Cette utilisation est bien autorisée puisque :

$$\sum_{p \in \mathbb{P}} \int_{\mathbb{R}} |p^{-1-\epsilon-2i\pi t} \varphi(t)| dt = \zeta_{\mathbb{P}}(1 + \epsilon) \|\varphi\|_{L^1} < +\infty.$$

Enfin, pour établir le troisième point, il suffit de montrer que pour tout $[a, b] \subset \mathbb{R}$, la quantité $\int_a^b |\ell_\epsilon(t) - \ell(t)| dt = \int_a^b |\zeta_{\mathbb{P}}(1 + \epsilon + 2i\pi t) - \zeta_{\mathbb{P}}(1 + 2i\pi t)| dt$ tend vers 0 lorsque ϵ tend vers 0.

Avec $s_0 \in 1 + i\mathbb{R}$ et n la valuation de ζ en s_0 , nous savons, d'après le corollaire 3.3., que la fonction $f : s \mapsto \zeta_{\mathbb{P}}(s) - n \log(s - s_0)$ est de classe \mathcal{C}^∞ sur un voisinage \mathcal{V}_{s_0} de s_0 et donc converge uniformément sur tout compact (noté K) de ce voisinage :

$$\forall \epsilon > 0, \exists \eta > 0 \forall (x, y) \in K, |x - y| < \eta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \epsilon.$$

Montrons alors que $\lim_{(x, y) \in K, |x - y| \rightarrow 0_+} |\zeta_{\mathbb{P}}(x) - \zeta_{\mathbb{P}}(y)| = 0$, ce qui conclura la preuve. Soit $\epsilon > 0$ fixé, K un compact de \mathcal{V}_{s_0} et $(x, y) \in K$:

$$\begin{aligned} |\zeta_{\mathbb{P}}(x) - \zeta_{\mathbb{P}}(y)| &= |\zeta_{\mathbb{P}}(x) - n \log(x - s_0) + n \log(x - s_0) - n \log(y - s_0) + n \log(y - s_0) - \zeta_{\mathbb{P}}(y)| \\ &\leq |\zeta_{\mathbb{P}}(x) - n \log(x - s_0) + n \log(y - s_0) - \zeta_{\mathbb{P}}(y)| + |n \log(x - s_0) - n \log(y - s_0)| \\ &= |f(x) - f(y)| + \left| n \log \left(1 + \frac{x - y}{y - s_0} \right) \right| \\ &\leq |f(x) - f(y)| + |n| \left| \frac{x - y}{y - s_0} \right| \\ &\text{[en prenant } (x, y) \text{ avec } |x - y| < \eta \text{ pour un } \eta \text{ convenable]} \\ &< \epsilon. \end{aligned}$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} \lim_{\epsilon \rightarrow 0_+} \int_a^b |\zeta_{\mathbb{P}}(1 + \epsilon + 2i\pi t) - \zeta_{\mathbb{P}}(1 + 2i\pi t)| dt &= \int_a^b \lim_{\epsilon \rightarrow 0_+} |\zeta_{\mathbb{P}}(1 + \epsilon + 2i\pi t) - \zeta_{\mathbb{P}}(1 + 2i\pi t)| dt \\ &= 0. \end{aligned}$$

La proposition en découle directement par unicité de la limite. \square

3.1.3 La fonction $x \mapsto \frac{\pi(\exp(x))}{\exp(x)}$ comme transformée de Fourier (inverse)

La proposition suivante, qui conclut cette partie, explicite le lien entre ℓ et la fonction de comptage π .

Proposition 3.6. *La distribution définie par la fonction $t \mapsto \frac{\ell(t)}{1 + 2i\pi t}$ est tempérée. Sa transformée de Fourier inverse est la fonction $x \mapsto \frac{\pi(\exp(x))}{\exp(x)}$, c'est-à-dire :*

$$\forall \varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}), \int_{\mathbb{R}} \widehat{\varphi}(x) \frac{\pi(\exp(x))}{\exp(x)} dx = \int_{\mathbb{R}} \varphi(t) \frac{\ell(t)}{1 + 2i\pi t} dt.$$

Démonstration.

Montrons tout d'abord que la distribution associée à $t \mapsto \frac{\ell(t)}{1 + 2i\pi t}$ est tempérée. Nous savons que ℓ est tempérée car c'est la transformée de Fourier de μ qui est tempérée (voir (3), page 15). Ensuite, pour toute fonction $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, $t \mapsto \frac{\varphi(t)}{1 + 2i\pi t}$ est également dans $\mathcal{S}(\mathbb{R})$. Ainsi, $T_{t \mapsto \frac{\ell(t)}{1 + 2i\pi t}}$ est bien tempérée.

Montrons maintenant la deuxième partie de la proposition : Soit φ une fonction de $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$ et posons $\psi(t) := \frac{\varphi(t)}{1 + 2i\pi t}$, une fonction qui est aussi dans $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$. Commençons par calculer la transformée de Fourier inverse de $h : x \mapsto e^x 1_{\mathbb{R}_-}(x)$. Ce calcul peut être effectué au sens des distributions tempérées (car h est bien intégrable). Soit une fonction ξ dans l'espace de Schwartz.

Alors :

$$\begin{aligned}
\langle \mathcal{F}^{-1}(T_h), \xi \rangle &= \langle T_h, \mathcal{F}(\xi) \rangle \\
&= \int_{\mathbb{R}} h(t) \left(\int_{\mathbb{R}} \xi(x) \exp(-2\pi ixt) dx \right) dt \\
&\quad [\text{Théorème de Fubini licite car } (x, t) \mapsto h(t)\xi(x) \exp(2\pi itx) \text{ est intégrable}] \\
&= \int_{\mathbb{R}} \xi(x) \left(\int_{-\infty}^0 \exp(t(1 + 2\pi ix)) dt \right) dx \\
&= \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{1 + 2\pi ix} \xi(x) dx.
\end{aligned}$$

D'où :

$$\mathcal{F}^{-1}(T_h) = x \mapsto \frac{1}{1 + 2\pi ix} := g.$$

Ce calcul assure que, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}(\psi)(x) &= \mathcal{F}(g\varphi)(x) \\
&= (\mathcal{F}(g) * \mathcal{F}(\varphi))(x) \\
&= (h * \mathcal{F}(\varphi))(x) \\
&= \int_{\mathbb{R}} h(x - y) \widehat{\varphi}(y) dy \\
&= \exp(x) \int_{\mathbb{R}} \exp(-y) 1_{[x, +\infty[}(y) \widehat{\varphi}(y) dy.
\end{aligned}$$

D'autre part, comme $\ell = \widehat{\mu}$:

$$\int_{\mathbb{R}} \ell(t) \psi(t) dt = \sum_{p \in \mathbb{P}} \frac{\mathcal{F}(\psi)(\log(p))}{p}.$$

C'est-à-dire (en injectant l'expression de $\mathcal{F}(\psi)$) :

$$\int_{\mathbb{R}} \ell(t) \psi(t) dt = \sum_{p \in \mathbb{P}} \int_{\mathbb{R}} \exp(-y) 1_{[\log(p), +\infty[}(y) \widehat{\varphi}(y) dy.$$

Pour terminer la preuve, il suffit de justifier l'interversion somme-intégrale du dernier calcul, puisque par définition de π , on a $\pi(\exp(y)) = \sum_{p \in \mathbb{P}} 1_{[\log(p), +\infty[}(y)$. Une telle intervention est licite

puisque $\widehat{\varphi}$ est dans L^1 ($\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$ donc $\widehat{\varphi} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}) \subset L^1$) et d'après le théorème de Fubini-Tonelli :

$$\int_{\mathbb{R}} \sum_{p \in \mathbb{P}} |\exp(-y) 1_{[\log(p), +\infty[}(y) \widehat{\varphi}(y)| dy = \int_{\mathbb{R}} \pi(\exp(y)) \exp(-y) |\widehat{\varphi}(y)| dy \leq \int_{\mathbb{R}} 1 \cdot |\widehat{\varphi}(y)| dy = \|\widehat{\varphi}\|_{L^1}.$$

Ce calcul justifie l'utilisation du théorème de Fubini pour intervertir somme et intégrale. \square

Nous nous servons de cette identité en fin de démonstration : mettons-la de côté pour le moment. Dans la section suivante, nous allons considérer des fonctions non triviales dites de *type positif* pour montrer que ζ ne s'annule pas sur $1 + i\mathbb{R}$.

3.2 La régularité de $\zeta_{\mathbb{P}}$ sur $1 + i\mathbb{R}$

L'objectif de cette partie est de montrer le théorème suivant qui sera nécessaire dans les derniers calculs menant au fameux équivalent du théorème des nombres premiers.

Théorème 3.7. *La distribution $t \mapsto \ell(t) + \log(it)$ est \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R} .*

Remarques :

- ◆ L'ajout du logarithme permet de quantifier l'irrégularité de $\zeta_{\mathbb{P}}$ près de 0.

◆ Avec ce théorème à disposition, il devient clair que ζ ne s'annule pas sur $1 + i\mathbb{R}$. En effet, le logarithme est C^∞ sur $i\mathbb{R}^*$ donc ℓ l'est bien sur \mathbb{R}^* . Par ailleurs, si ζ admet un zéro d'ordre n en $1 + 2\pi it_0$, $t_0 \in \mathbb{R}^*$, alors $t \mapsto \ell(t) + n \log\left(\frac{1}{i(t-t_0)}\right)$ est C^∞ au voisinage de t_0 (grâce au corollaire 3.3, page 28). Or, sachant grâce à ce théorème que ℓ est $C^\infty(\mathbb{R}^*)$, il est nécessaire que n soit nul puisqu'au voisinage de $t_0 : t \mapsto \log\left(\frac{1}{i(t-t_0)}\right)$ explose.

Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$. On dit que f est de *type positif* lorsque $\widehat{f} \geq 0$. Nous allons utiliser de telles fonctions pour démontrer le théorème. Montrons tout d'abord que de telles fonctions, non triviales, existent. Nous proposons trois constructions élémentaires.

(1) Soit $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$. On définit $\tilde{\varphi}$ par : $\tilde{\varphi}(x) = \overline{\sigma\varphi(x)}$, où σ est l'application antipodale que nous avons introduite dans les rappels sur la transformée de Fourier. Il est clair que $\tilde{\varphi}$ est dans $C_c^\infty(\mathbb{R})$ donc également $f := \varphi * \tilde{\varphi}$. Or, $\widehat{f} = \widehat{\tilde{\varphi}}$ donc $\widehat{f} = |\widehat{\varphi}|^2 \geq 0$. La fonction f est donc bien de type positif.

(2) Soient a_1, \dots, a_N N réels et $\alpha_1, \dots, \alpha_N$ N complexes fixés. On définit les deux distributions suivantes :

$$R = \sum_{i=1}^N \alpha_i \delta_{a_i} \text{ et } S = \sum_{i=1}^N \overline{\alpha_i} \delta_{-a_i}.$$

Comme $\delta_x * \delta_y = \delta_{x+y}$ (voir définition 2.17 et exemple associé, page 17), on a alors par linéarité :

$$R * S = \sum_{1 \leq k, l \leq N} \alpha_k \overline{\alpha_l} \delta_{a_k - a_l}.$$

Par ailleurs, $\widehat{\delta_x} = \exp(-2ix\pi)$. En effet, pour $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$:

$$\begin{aligned} \langle \widehat{\delta_x}, \varphi \rangle &= \langle \delta_x, \widehat{\varphi} \rangle \\ &= \int_{\mathbb{R}} \varphi(t) \exp(-2\pi itx) dt. \end{aligned}$$

On a alors, par linéarité de la transformée de Fourier :

$$\begin{aligned} \widehat{R * S} &= \sum_{1 \leq k, l \leq N} \alpha_k \overline{\alpha_l} \widehat{\delta_{a_k - a_l}} \\ &= \sum_{1 \leq k, l \leq N} \alpha_k \overline{\alpha_l} \exp(-2i(a_k - a_l)\pi) \\ &= \sum_{k=1}^N \alpha_k \exp(-2ia_k\pi) \overline{\sum_{l=1}^N \alpha_l \exp(-2ia_l\pi)} \\ &= \left| \sum_{k=1}^N \alpha_k \exp(-2ia_k\pi) \right|^2 \\ &\geq 0. \end{aligned}$$

Cette distribution permet de créer beaucoup de fonctions de type positif : en effet, si $f \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ est de type positif, alors $g := R * S * f$ est également de type positif puisque :

$$g(x) = \sum_{1 \leq k, l \leq N} \alpha_k \overline{\alpha_l} f(x + a_l - a_k) \text{ et alors } \widehat{g} = \widehat{R * S} \widehat{f} \geq 0.$$

(3) Voyons une dernière façon d'obtenir une fonction de type positif : si f est de type positif, pour tout $\lambda > 0$, en posant $f_\lambda := \frac{1}{\lambda} f(\frac{\cdot}{\lambda})$ alors f_λ est de type positif (voir section 2.20, page 18).

En plus d'assurer l'existence de fonctions de type positif, nous allons utiliser ces constructions de manière judicieuse dans la suite. Le lemme suivant montre l'action de ℓ sur les fonctions de type positif.

Lemme 3.8. Soit $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$. Si $\widehat{\varphi} \geq 0$, alors on a $\langle \ell, \varphi \rangle \geq 0$.

Démonstration.

En effet :

$$\begin{aligned} \langle \ell, \varphi \rangle &= \langle \widehat{\mu}, \varphi \rangle \\ &= \langle \mu, \widehat{\varphi} \rangle \\ &= \sum_{p \in \mathbb{P}} \frac{\widehat{\varphi}(\log(p))}{p} \\ &[\widehat{\varphi} \geq 0] \\ &\geq 0. \end{aligned}$$

□

On va appliquer ce lemme avec des fonctions bien choisies : celles qu'on a construites précédemment.

Les trois constructions précédentes permettent d'obtenir le lemme suivant.

Lemme 3.9. Soit $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R})$ tel que $\widehat{\varphi} \geq 0$. Dans ces conditions, pour tout N -uplet $(a_i)_{1 \leq i \leq N} \in \mathbb{R}^N$ et tout $\lambda > 0$:

$$\sum_{1 \leq k, l \leq N} \int_{-\infty}^{+\infty} \ell(t + a_k - a_l) \varphi_\lambda(t) dt \geq 0.$$

Démonstration.

Avec les notations précédentes, il suffit de considérer la fonction :

$$f := R * S * \varphi_\lambda$$

qui est, d'après le travail effectué précédemment, de type positif et :

$$\begin{aligned} \langle \mu, \widehat{f} \rangle &= \langle \widehat{\mu}, f \rangle \\ &= \langle \ell, f \rangle \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \ell(t) \sum_{1 \leq k, l \leq N} \alpha_k \overline{\alpha_l} \varphi_\lambda(t + a_l - a_k) dt \\ &[\text{Prendre pour tout } k \leq N, \alpha_k = \overline{\alpha_k} = 0] \\ &= \sum_{1 \leq k, l \leq N} \int_{-\infty}^{+\infty} \ell(t) \varphi_\lambda(t + a_l - a_k) dt \\ &[\text{changement de variable } u = t + a_l - a_k] \\ &= \sum_{1 \leq k, l \leq N} \int_{-\infty}^{+\infty} \ell(u + a_k - a_l) \varphi_\lambda(u) du \\ &[\text{Utilisation lemme 3.8}] \\ &\geq 0. \end{aligned}$$

□

Le lemme suivant nous apporte une information sur le comportement, lorsque λ tend vers 0_+ des intégrales du membre de gauche du lemme 3.9. C'est le dernier résultat dont nous avons besoin avant de montrer que la fonction ζ ne s'annule pas sur la droite $1 + i\mathbb{R}$.

Lemme 3.10. Soit $a \in \mathbb{R}$ et notons $n(a) = \nu_{1+ia}(\zeta)$ (l'ordre du zéro éventuel). Pour toute fonction $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$, on a, quand $\lambda \rightarrow 0_+$:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \ell(t + a) \varphi_\lambda(t) dt = -n(a) \log\left(\frac{1}{\lambda}\right) \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t) dt + O(1).$$

Démonstration.

D'après le corollaire 3.3 sur la description de la régularité de $\zeta_{\mathbb{P}}$, il existe $\epsilon > 0$ et une fonction f continue et bornée, telle que pour $t \in]a - \epsilon, a + \epsilon[$:

$$\ell(t) = n(a) \log(it - a) + f(t - a)$$

Considérons $\lambda > 0$ assez petit pour que le support de φ_λ soit inclus dans $] - \epsilon, \epsilon[$. Concrètement, supposons que $\text{supp } \varphi \subset [-A, A]$. Pour $\lambda > 0$, $\text{supp}(\varphi_\lambda) \subset [-A\lambda, A\lambda]$. Donc, pour $\lambda < \frac{\epsilon}{2A}$, $\text{supp}(\varphi_\lambda) \subset] - \epsilon, \epsilon[$. Il vient alors :

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} \ell(t + a) \varphi_\lambda(t) dt &= \int_{\mathbb{R}} [n(a) \log(it) + f(t)] \varphi_\lambda(t) dt \\ &\quad \left[\text{changement de variable } u = \frac{t}{\lambda} \right] \\ &= \int_{\mathbb{R}} [n(a) \log(iu\lambda) + f(u\lambda)] \varphi(u) du \\ &= -n(a) \log\left(\frac{1}{\lambda}\right) \int_{\mathbb{R}} \varphi(u) du + \int_{\mathbb{R}} [n(a) \log(iu) + f(u\lambda)] \varphi(u) du. \end{aligned}$$

La deuxième intégrale est bornée indépendamment de λ par :

$$|n(a)| \int_{\mathbb{R}} |\log(iu)| |\varphi(u)| du + \|f\|_\infty \int_{\mathbb{R}} |\varphi(u)| du.$$

Comme $u \mapsto |\log(iu)|$ est intégrable au voisinage de 0, la première intégrale est bien finie. La deuxième l'est donc également. \square

On peut maintenant démontrer que ζ ne s'annule pas sur $1 + i\mathbb{R}$, c'est à dire montrer le théorème 3.7 (page 32) :

Démonstration. - Théorème 3.7

Soit $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$ non nulle (en particulier, $\widehat{\varphi}$ est non identiquement nulle aussi car la transformée de Fourier est bijective de $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{S}(\mathbb{R})$) et telle que $\widehat{\varphi} \geq 0$ (nous avons montré que de telles fonctions existent). Soit $y_0 \in \mathbb{R}$ tel que $\widehat{\varphi}(y_0) > 0$ c'est-à-dire $\int_{\mathbb{R}} \varphi(t) \exp(-2i\pi y_0 t) dt > 0$. $\tilde{\varphi} : t \mapsto \varphi(t) \exp(-2i\pi y_0 t)$ est aussi dans $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$ et de type positif. En effet, d'après la section 2.20, page 18, $\widehat{\tilde{\varphi}}(\xi) = \widehat{\varphi}(\xi + y_0) \geq 0$. Par ailleurs, $\widehat{\tilde{\varphi}}(0) > 0$.

Si a_1, \dots, a_N sont des réels, on a alors pour tout $\lambda > 0$:

$$\sum_{1 \leq k, l \leq N} \int_{-\infty}^{+\infty} \ell(t + a_k - a_l) \tilde{\varphi}_\lambda(t) dt \geq 0.$$

Également, par linéarité, lorsque λ tend vers 0_+ :

$$\sum_{1 \leq k, l \leq N} \int_{-\infty}^{+\infty} \ell(t + a_k - a_l) \tilde{\varphi}_\lambda(t) dt = \sum_{1 \leq k, l \leq N} n(a_k - a_l) \log(\lambda) \int_{\mathbb{R}} \tilde{\varphi}(u) du + O(1).$$

La première inégalité et le fait que (i) $\log(\lambda) \xrightarrow{\lambda \rightarrow 0_+} -\infty$ puis (ii) $\int_{\mathbb{R}} \varphi(u) du > 0$ imposent que :

$$\sum_{1 \leq k, l \leq N} n(a_k - a_l) \leq 0.$$

Déduisons de cette inégalité le fait que $n(a) = 0$ pour $a \neq 0$. Nous savons déjà que $n(a) \geq 0$. De plus, en remarquant que $\zeta(\bar{s}) = \zeta(s)$, il vient $n(-a) = n(a)$. On applique alors l'inégalité précédente avec $N = 3$ et $(a_1, a_2, a_3) = (-a, 0, a)$. Comme $n(0) = -1$ (1 est un pôle simple de ζ , voir proposition 2.7, page 10) :

$$\sum_{1 \leq k, l \leq 3} n(a_k - a_l) = 3n(0) + 4n(a) + 2n(2a) \leq 0.$$

D'où :

$$4n(a) + 2n(2a) \leq 3.$$

Mais alors, si $n(a) \geq 1$ i.e. $n(a) \neq 0$:

$$4 \leq 4n(a) + 2n(2a) \leq 3,$$

soit $4 \leq 3$ ce qui est absurde. □

Nous venons donc de démontrer que ζ ne s'annule pas sur la droite $1 + i\mathbb{R}$ et donc la fonction ℓ est \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R}^* : nous allons utiliser cette régularité (de manière très concise) dans la phase finale de la démonstration qui débute maintenant.

3.3 Le Théorème lissé des Nombres Premiers puis l'équivalent $\pi(x) \sim \frac{x}{\log(x)}$

3.3.1 La version lissée du Théorème

Proposition 3.11. Version lissée du Théorème des Nombres Premiers

Pour toute fonction ψ , transformée de Fourier d'une fonction $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$, on a, lorsque $y \rightarrow +\infty$:

$$\int_{\mathbb{R}} \psi(x-y) \frac{\pi(\exp(x))}{\exp(x)} dx = \frac{1}{y} \int_{\mathbb{R}} \psi(x) dx + o\left(\frac{1}{y}\right).$$

Remarque : Si l'on pouvait choisir $\psi = \delta_0$ dans l'égalité, ce qui outrepasserait clairement nos hypothèses puisque le Dirac n'est pas \mathcal{C}^∞ , on aurait exactement, lorsque $y \rightarrow \infty$:

$$\frac{\pi(e^y)}{e^y} = \frac{1}{y} + o\left(\frac{1}{y}\right)$$

ce qui est le Théorème des Nombres Premiers. C'est la raison pour laquelle cette proposition est nommée *version lissée du Théorème des Nombres Premiers*. Nous contournerons cette difficulté via une approximation de l'unité.

Pour parvenir à démontrer cette proposition, nous allons utiliser le lemme crucial (2.25 de la page 20).

Démonstration.

Pour $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$, on sait que (voir Proposition 3.6, page 31) :

$$\int_{\mathbb{R}} \widehat{\varphi}(x) \frac{\pi(\exp(x))}{\exp(x)} dx = \int_{\mathbb{R}} \ell(t) \frac{\varphi(t)}{1 + 2i\pi t} dt$$

Pour $y \in \mathbb{R}$ fixé, en appliquant l'identité précédente à $t \mapsto \varphi(t) \exp(2i\pi ty)$, on a alors :

$$\int_{\mathbb{R}} \widehat{\varphi}(x-y) \frac{\pi(\exp(x))}{\exp(x)} dx = \int_{\mathbb{R}} \ell(t) \frac{\varphi(t) \exp(2i\pi ty)}{1 + 2i\pi t} dt$$

Partons du membre de droite de cette égalité et isolons la quantité $\log\left(\frac{1}{it}\right)$:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} \ell(t) \frac{\varphi(t) \exp(2i\pi ty)}{1 + 2i\pi t} dt &= \int_{\mathbb{R}} \left[\ell(t) - \log\left(\frac{1}{it}\right) \right] \frac{\varphi(t) \exp(2i\pi ty)}{1 + 2i\pi t} dt + \int_{\mathbb{R}} \left[\log\left(\frac{1}{it}\right) \right] \frac{\varphi(t) \exp(2i\pi ty)}{1 + 2i\pi t} dt \\ &= A(y) + B(y) \end{aligned}$$

La fonction A est la transformée de Fourier inverse de la fonction $t \mapsto \left[\ell(t) - \log\left(\frac{1}{it}\right) \right] \frac{\varphi(t)}{1 + 2i\pi t}$ qui est dans $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$. En effet :

- ◆ $t \mapsto \frac{\varphi(t)}{1 + 2i\pi t}$ est dans $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$;
- ◆ $t \mapsto \ell(t) - \log\left(\frac{1}{it}\right)$ est dans $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ d'après le théorème 3.7, page 32.

La fonction A est donc dans $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ et ainsi $A(y) \underset{y \rightarrow \infty}{=} o\left(\frac{1}{y}\right)$.

Quant à B , le lemme crucial nous donne l'égalité suivante :

$$B(y) = \frac{1}{y}\varphi(0) + o\left(\frac{1}{y}\right)$$

Maintenant, en notant $\widehat{\varphi} := \psi$, $\varphi(0) = \int_{\mathbb{R}} \psi(x) dx$ et donc :

$$\int_{\mathbb{R}} \psi(x-y) \frac{\pi(\exp(x))}{\exp(x)} dx = \frac{1}{y} \int_{\mathbb{R}} \psi(x) dx + o\left(\frac{1}{y}\right)$$

□

Reste à atteindre le célèbre équivalent pour conclure la démonstration.

3.3.2 La conquête du sommet : $\pi(x) \sim \frac{x}{\log(x)}$

Pour l'atteindre, il va s'agir, en utilisant la version lissée du Théorème des Nombres Premiers ainsi qu'une famille de fonctions tests, de montrer :

$$\limsup_{y \rightarrow +\infty} \frac{y}{\exp(y)} \pi(\exp(y)) \leq 1 \text{ et } \liminf_{y \rightarrow +\infty} \frac{y}{\exp(y)} \pi(\exp(y)) \geq 1,$$

autrement dit, que $\pi(\exp(y)) \sim \frac{\exp(y)}{y}$. En prenant finalement $y = \log(x)$ (possible puisque \log est une bijection de \mathbb{R}_+^* dans \mathbb{R} et $\log(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\rightarrow} +\infty$) on obtient l'équivalent attendu.

Pour ce faire, considérons ψ , transformée de Fourier d'une certaine fonction $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$ telle que :

- ◆ $\psi \geq 0$;
- ◆ $\int_{\mathbb{R}} \psi(t) dt = 1$.

Remarque : Pour obtenir une telle fonction ψ , il suffit de partir d'une fonction φ de type positif (qui existe d'après les constructions exhibées page 33) et de considérer $\frac{\widehat{\varphi}}{\int_{\mathbb{R}} \widehat{\varphi}(t) dt}$.

D'après la construction 3 de la page 33, ψ_λ satisfait aux mêmes conditions que ψ . Par ailleurs, pour $\epsilon > 0$ fixé, il vient, par changement de variable $u = \frac{t}{\lambda}$:

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0_+} \int_{|t| \geq \epsilon} \psi_\lambda(t) dt = \lim_{\lambda \rightarrow 0_+} \int_{|u| \geq \frac{\epsilon}{\lambda}} \psi(u) du = 0. \quad (7)$$

De même :

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0_+} \int_{|t| \geq \epsilon} |t| \psi_\lambda(t) dt = \lim_{\lambda \rightarrow 0_+} \lambda \int_{|u| \geq \frac{\epsilon}{\lambda}} |u| \psi(u) du = 0. \quad (8)$$

La version lissée du Théorème des Nombres Premiers appliquée à cette fonction ψ_λ donne :

$$\int_{\mathbb{R}} \psi_\lambda(x-y) \frac{\pi(\exp(x))}{\exp(x)} dx = \frac{1}{y} + o\left(\frac{1}{y}\right).$$

1. $\limsup_{y \rightarrow +\infty} \frac{y}{\exp(y)} \pi(\exp(y)) \leq 1$:

Minorons le membre de gauche de la version lissée ci-dessus.

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} \psi_\lambda(x-y) \frac{\pi(\exp(x))}{\exp(x)} dx &\geq \int_{y-\epsilon}^{y+\epsilon} \psi_\lambda(x-y) \frac{\pi(\exp(x))}{\exp(x)} dx \\ &\geq \frac{\pi(\exp(y-\epsilon))}{\exp(y+\epsilon)} \int_{y-\epsilon}^{y+\epsilon} \psi_\lambda(x-y) dx \\ &[\text{changement de variable } t = x - y] \\ &= \frac{\pi(\exp(y-\epsilon))}{\exp(y+\epsilon)} \int_{-\epsilon}^{\epsilon} \psi_\lambda(t) dt. \end{aligned}$$

Par ailleurs, toujours pour le même ϵ fixé, il existe, d'après (7), λ_ϵ tel que :

$$\int_{-\epsilon}^{\epsilon} \psi_{\lambda_\epsilon}(t) dt \geq 1 - \epsilon.$$

En reprenant la minoration amorcée précédemment, on obtient :

$$\frac{\pi(\exp(y - \epsilon))}{\exp(y + \epsilon)}(1 - \epsilon) \leq \int_{\mathbb{R}} \psi_{\lambda_\epsilon}(x - y) \frac{\pi(\exp(x))}{\exp(x)} dx = \frac{1}{y} + o\left(\frac{1}{y}\right).$$

Il existe M_ϵ tel que, pour tout $y \geq M_\epsilon$, tel que :

$$\frac{\pi(\exp(y - \epsilon))}{\exp(y + \epsilon)}(1 - \epsilon)^2 \leq \frac{1}{y}.$$

En procédant à un changement de variable $[y \leftarrow y + \epsilon]$, on obtient alors :

$$\frac{\pi(\exp(y))}{\exp(y + 2\epsilon)}(1 - \epsilon)^2 y \leq \frac{y}{y + \epsilon}.$$

En passant à la lim sup, il vient :

$$\limsup_{y \rightarrow +\infty} \frac{y}{\exp(y)} \pi(\exp(y)) \leq \frac{\exp(2\epsilon)}{(1 - \epsilon)^2}.$$

Puis, en faisant tendre ϵ vers 0_+ (puisque ϵ a été pris quelconque >0) :

$$\limsup_{y \rightarrow +\infty} \frac{y}{\exp(y)} \pi(\exp(y)) \leq 1.$$

Cela signifie que pour $N > 1$, il n'y a qu'un ensemble bornée de $x \in \mathbb{R}_+$ tel que $\pi(\exp(x)) > N \frac{\exp(x)}{x + 1}$. En prenant alors un N suffisamment grand :

$$\forall x \geq 0, \pi(\exp(x)) \leq N \frac{\exp(x)}{x + 1}.$$

2. $\liminf_{y \rightarrow +\infty} \frac{y}{\exp(y)} \pi(\exp(y)) \geq 1$:

La démarche à suivre est similaire, sauf que nous allons désormais majorer le terme de gauche de la version lissée (et non plus le minorer comme précédemment). Soit $\epsilon > 0$ fixé, alors pour tout $y > \epsilon$, comme $\pi(\exp(x)) = 0$ si $x \leq 0$:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} \psi_\lambda(x - y) \frac{\pi(\exp(x))}{\exp(x)} dx &= \left(\int_0^{y-\epsilon} + \int_{y-\epsilon}^{y+\epsilon} + \int_{y+\epsilon}^{+\infty} \right) \psi_\lambda(x - y) \frac{\pi(\exp(x))}{\exp(x)} dx \\ &\leq \int_0^{y-\epsilon} \frac{N}{x + 1} \psi_\lambda(x - y) dx \quad (a) \\ &\quad + \frac{\pi(\exp(y + \epsilon))}{\exp(y - \epsilon)} \int_{y-\epsilon}^{y+\epsilon} \psi_\lambda(x - y) dx \quad (b) \\ &\quad + \int_{y+\epsilon}^{+\infty} \frac{N}{x + 1} \psi_\lambda(x - y) dx. \quad (c) \end{aligned}$$

Majorons (a), (b), (c) :

(a) : soit $f : x \mapsto \frac{1}{x + 1}$. La fonction f est convexe et donc pour tout $x \in [0, y]$, la courbe de f sur $[0, y]$ est en dessous de la corde reliant $f(0) = 1$ à $f(y)$. Soit $ax + b$ l'équation de cette corde : en $x = 0$, $ax + b = 1$, c'est-à-dire $b = 1$; en $x = y$, $ax + 1 = f(y)$, c'est-à-dire $a = \frac{f(y) - 1}{y} = -f(y)$. Ainsi :

$$\forall x \in [0, y], \frac{1}{x + 1} \leq \frac{y - x + 1}{y + 1}.$$

On peut donc majorer (a) de la manière suivante :

$$\begin{aligned} \int_0^{y-\epsilon} \frac{N}{x+1} \psi_\lambda(x-y) dx &\leq \int_0^{y-\epsilon} \frac{N}{y+1} (y-x+1) \psi_\lambda(x-y) dx \\ &\quad [\text{changement de variable } t = x-y] \\ &= \frac{N}{y+1} \int_{-y}^{-\epsilon} (1-t) \psi_\lambda(t) dt \\ &\leq \frac{N}{y+1} \int_{-\infty}^{-\epsilon} (1+|t|) \psi_\lambda(t) dt. \end{aligned}$$

(b) : la majoration est claire :

$$\frac{\pi(\exp(y+\epsilon))}{\exp(y-\epsilon)} \int_{y-\epsilon}^{y+\epsilon} \psi_\lambda(x-y) dx \leq \frac{\pi(\exp(y+\epsilon))}{\exp(y-\epsilon)} \int_{\mathbb{R}} \psi_\lambda(t) dt = \frac{\pi(\exp(y+\epsilon))}{\exp(y-\epsilon)}.$$

(c) : on procède exactement comme avec (a) pour obtenir :

$$\int_{y+\epsilon}^{+\infty} \frac{N}{x+1} \psi_\lambda(x-y) dx \leq \frac{N}{y+1} \int_{\epsilon}^{+\infty} (1+|t|) \psi_\lambda(t) dt.$$

Par ailleurs, d'après (8), pour $\epsilon > 0$ fixé, il existe λ_ϵ tel que $\int_{|t| \geq \epsilon} (1+|t|) \psi_\lambda(t) dt \leq \epsilon$.

En reprenant la majoration amorcée précédemment, nous obtenons :

$$\int_{\mathbb{R}} \psi_{\lambda_\epsilon}(x-y) \frac{\pi(\exp(x))}{\exp(x)} dx = \frac{1}{y} + o\left(\frac{1}{y}\right) \leq \frac{\pi(\exp(y+\epsilon))}{\exp(y-\epsilon)} + \frac{N}{y+1} \epsilon.$$

Finalement, comme précédemment, en passant à la \liminf puis en faisant tendre ϵ vers 0_+ , il vient :

$$\liminf_{y \rightarrow +\infty} \frac{y}{\exp(y)} \pi(\exp(y)) \geq 1.$$

Le Théorème des Nombres Premiers est ainsi démontré.

4 Théorème de la Progression Arithmétique

4.1 Enoncé du théorème

Nous souhaitons conclure ce document par une illustration de la robustesse de la démonstration du Théorème des Nombres Premiers élaborée par J.-P. Kahane [6] puis reprise par J.-B. Bost [2]. Il s'agit, en suivant la même structure de preuve et en s'appuyant sur le chapitre 6 du *Cours d'Arithmétique* de J.-P. Serre [8], de donner une version quantitative du théorème de la progression arithmétique.

On fixe un entier m et on voudrait, *cette fois*, estimer la proportion de nombres premiers dans une suite de la forme :

$$(a + km)_{k \in \mathbb{N}}$$

où a est un entier fixé. Il n'est pas difficile de voir que lorsque m et a ne sont pas premiers entre eux, la suite précédente ne contient qu'au plus un nombre premier et ce cas n'est donc pas très intéressant. Dans la suite, on ne s'intéressera donc qu'au cas où m et a sont premiers entre eux (et fixés). Pour répondre à la question posée, nous allons donner un équivalent à la quantité suivante pour $x \rightarrow +\infty$:

$$\pi_{m,a}(x) = \#\{p \in \mathbb{P} | p \leq x, p \equiv a[m]\}.$$

A proprement parler, le théorème de la progression arithmétique (Dirichlet - 1838) indique que $\pi_{m,a}(x) \rightarrow +\infty$ lorsque $x \rightarrow +\infty$. Nous donnons ici une version quantitative de ce résultat à savoir :

Théorème 4.1. - *Version quantitative du Théorème de la Progression Arithmétique*
Lorsque $x \rightarrow +\infty$ et avec φ l'indicatrice d'Euler, on a l'équivalent suivant :

$$\pi_{m,a}(x) \sim \frac{1}{\varphi(m)} \frac{x}{\log(x)}$$

Remarque : il y a évidemment une infinité d'entiers a premiers avec m et donc *a priori* une infinité de fonction $\pi_{m,a}$. On est donc peut-être perplexe devant le fait que l'asymptotique de droite de dépende pas de l'entier a . En fait, il faut comprendre que puisqu'on donne une estimation de $\pi_{m,a}$ lorsque x tend vers $+\infty$, ce n'est pas l'entier a qui est déterminant mais sa classe dans le groupe $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$. De plus, on garde à l'esprit qu'on a choisi a premier à m et donc que a est en fait dans $(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^*$ et que ce groupe (le groupe des inversibles de $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$) a exactement $\varphi(m)$ éléments. Le théorème montre ainsi que les nombres premiers se *répartissent* de manière uniforme parmi les $\varphi(m)$ progressions arithmétiques de raison m . La démonstration de ce théorème utilise le groupe des caractères du groupe $(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^*$. Rappelons quelques généralités : si G est un groupe abélien fini, noté multiplicativement, on appelle alors caractère de G tout homomorphisme de G dans le groupe multiplicatif \mathbb{C}^* . Les caractères de G forment un groupe $\text{Hom}(G, \mathbb{C}^*)$ noté \widehat{G} et que l'on appelle le dual de G (groupe des caractères de G). Une propriété non immédiate, que l'on appelle *propriété de séparabilité*⁴, est la suivante : si $g \in G$ n'est pas l'élément neutre (noté 1_G), il existe un caractère $\chi \in \widehat{G}$ tel que $\chi(g) \neq 1$. Cette propriété nous permet alors d'obtenir la relation d'orthogonalité (présentée au paragraphe suivant) qui est capitale pour la preuve du Théorème de la Progression Arithmétique.

4.2 Décomposition de $\pi_{m,a}$

Proposition 4.2. - *Relation d'orthogonalité*

Soit G un groupe abélien fini et \widehat{G} le dual de G . On a alors :

$$\sum_{\chi \in \widehat{G}} \chi(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \neq 1_G ; \\ |\widehat{G}| & \text{sinon.} \end{cases}$$

4. La preuve est faite au chapitre 6 de [8]. L'idée est la suivante : on montre que le dual de tout groupe cyclique H d'ordre n est isomorphe au groupe des racines n -ième de l'unité, faisant ainsi de \widehat{H} un groupe cyclique d'ordre n . Ainsi, en considérant le sous-groupe $\langle g \rangle$ de G , nous avons clairement l'existence d'un caractère χ de $\langle g \rangle$ tel que $\chi(g) \neq 1$. Il s'agit ensuite, de prolonger χ en un caractère de G .

Démonstration. Si $x = 1_G$, la relation est évidente. Sinon, il existe un caractère ν tel que $\nu(x) \neq 1$ (propriété de séparabilité). Alors :

$$\sum_{\chi \in \widehat{G}} \chi(x) = \sum_{\chi \in \widehat{G}} \nu \chi(x) \sum_{\chi \in \widehat{G}} \nu(x) \chi(x)$$

car $\chi \mapsto \nu \chi$ est bijective. D'où :

$$(1 - \nu(x)) \sum_{\chi \in \widehat{G}} \chi(x) = 0.$$

Comme $1 - \nu(x) \neq 0$, on a bien le résultat voulu. \square

On peut en fait montrer que G et \widehat{G} sont isomorphes, ce qui implique en particulier que $|G| = |\widehat{G}|$. Dans notre cas, nous considérons $G = (\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^*$ et nous notons $\widehat{G} = G(m)$ (notation tirée de [8]). Le lecteur aura peut-être reconnu ce que l'on appelle le groupe des caractères de Dirichlet modulo m . Rappelons alors qu'il y a deux définitions équivalentes de ce groupe. La première vient d'être donnée. La deuxième est la suivante : une fonction $f : \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{C}$ est un caractère de Dirichlet modulo m lorsqu'elle vérifie : (i) $f(1) = 1$ (ii) $f(ab) = f(a)f(b)$ pour tout $a, b \in \mathbb{N}^*$ (iii) $f(a) = 0$ lorsque a et m ne sont pas premiers entre eux et enfin (iv) f est m périodique. Si on note $F(m)$ l'ensemble des fonctions qui vérifient ces quatre points, on peut montrer qu'il existe une bijection entre $G(m)$ et $F(m)$: on verra dans la suite comment identifier ces deux ensembles.

Nous allons maintenant décomposer la fonction $\pi_{m,a}$ grâce à la relation d'orthogonalité : on sait que le cardinal de G (donc de $G(m)$ et donc de $F(m)$) vaut $\varphi(m)$. Pour $y \in \mathbb{R}_+$, on peut alors écrire :

$$\varphi(m)\pi_{m,a}(\exp(y)) = \sum_{\substack{p \in \mathbb{P} \\ p \leq \exp(y) \\ p \equiv a[m]}} \varphi(m)$$

et, en écrivant $\varphi(m) = \sum_{\chi \in G(m)} \chi(1_G)$, on a :

$$\varphi(m)\pi_{m,a}(\exp(y)) = \sum_{\substack{p \in \mathbb{P} \\ p \leq \exp(y) \\ p \equiv a[m]}} \sum_{\chi \in G(m)} \chi(1)$$

mais comme $p \equiv a[m]$ si et seulement si $pa^{-1} \equiv 1[m]$, on a, en intervertissant les sommes :

$$\varphi(m)\pi_{m,a}(\exp(y)) = \sum_{\chi \in G(m)} \chi(a^{-1}) \sum_{p \in \mathbb{P}, p \leq \exp(y)} \chi(p).$$

Posons alors pour $x \in \mathbb{R}_+$ et $\chi \in G(m)$:

$$c_\chi(x) = \sum_{p \in \mathbb{P}, p \leq x} \chi(p).$$

On vient de montrer que :

$$\varphi(m)\pi_{m,a}(\exp(y)) = \sum_{\chi \in G(m)} \chi(a^{-1})c_\chi(\exp(y)).$$

Cette décomposition de $\pi_{m,a}$ est le point de départ de notre démonstration. En effet, le Théorème des Nombres Premiers assure que (où 1 désigne le caractère principal) :

$$c_1(\exp(y)) \underset{y \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\exp(y)}{y}.$$

Il suffit donc de montrer que pour $\chi \in G(m)$ non principal, on a l'estimation asymptotique suivante :

$$c_\chi(\exp(y)) = o\left(\frac{\exp(y)}{y}\right)$$

pour obtenir le Théorème de la Progression Arithmétique : en effet, $G(m)$ étant fini, on obtiendra :

$$\varphi(m)\pi_{m,a}(\exp(y)) = c_1(\exp(y)) + o(c_1(\exp(y))),$$

c'est-à-dire le Théorème en tenant compte de l'équivalent précédent. La démonstration de cette estimation repose sur les mêmes techniques que celles du Théorème des Nombres Premiers. Nous allons appliquer les idées de la première démonstration aux fonctions c_χ . Pour $\chi \in G(m)$, on définit $\tilde{\chi}$ une fonction de \mathbb{Z} dans \mathbb{C} ainsi : si $n \in \mathbb{Z}$ n'est pas premier avec m alors $\tilde{\chi}(n) = 0$, sinon (on identifie n à sa classe modulo m) $\tilde{\chi}(n) = \chi(n)$. Ce procédé de relèvement est injectif et on a $\tilde{\chi} \in F(m)$: dans la suite, on identifiera donc $\tilde{\chi}$ et χ . Posons :

$$\mu_\chi = \sum_{p \in \mathbb{P}} \frac{\chi(p)\delta_{\log(p)}}{p}.$$

On considère cette mesure complexe car d'une part on peut exprimer c_χ à travers l'égalité (de convolution) suivante :

$$\int_{\mathbb{R}} e^x \mathbf{1}_{\mathbb{R}^+}(y-x) d\mu_\chi(x) = c_\chi(e^y)$$

et d'autre part, la transformée de Fourier de μ_χ vaut (pour $s \in \{\text{Ré} > 1\}$) :

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-sx} d\mu_\chi(x) = \sum_{p \in \mathbb{P}} \frac{\chi(p)}{p^{1+s}}.$$

Ces deux identités nous incitent à considérer les deux séries de Dirichlet suivantes :

$$L_\chi(s) = \sum_{n \geq 1} \frac{\chi(n)}{n^s}$$

et

$$f_\chi(s) = \sum_{p \in \mathbb{P}} \frac{\chi(p)}{p^s}.$$

Si l'on garde à l'esprit la démonstration du Théorème des Nombres Premiers, l'analogie ici va être assez claire : nous allons mener deux études. La première visera le couple (L_χ, f_χ) et cette étude sera *identique* à celle faite sur le couple $(\zeta, \zeta_{\mathbb{P}})$. La deuxième étude portera sur la mesure μ_χ et là encore, cette étude sera *identique* à celle faite sur μ . Il y a cependant une différence essentielle qui vient du fait suivant : la mesure μ est positive alors que les mesures μ_χ sont complexes. Or, on se souvient que la positivité de μ intervenait de manière cruciale pour démontrer que la fonction ζ ne s'annulait pas sur $1 + i\mathbb{R}$. Nous verrons en temps voulu comment contourner cette difficulté.

4.3 Lier L_χ et f_χ

Proposition 4.3. *Soit $\chi \in G(m)$. Posons pour $s \in]1, +\infty[$:*

$$g_\chi(s) = \log(L_\chi(s)) - f_\chi(s).$$

La fonction g_χ ainsi définie se prolonge en une fonction holomorphe sur le demi-plan $\{\text{Ré} > \frac{1}{2}\}$, bornée sur le demi-plan $\{\text{Ré} > \rho\}$ pour tout $\rho > \frac{1}{2}$.

Démonstration.

Le développement eulérien de L_χ ⁵ à savoir (pour $s \in \{\text{Ré} > 1\}$) :

$$L_\chi(s) = \prod_{p \in \mathbb{P}} \left(1 - \frac{\chi(p)}{p^s}\right)^{-1}$$

5. Le développement eulérien de L_χ est une généralisation du développement eulérien de la fonction ζ . La démonstration est identique à celle effectuée pour le théorème 2.8, page 11.

et la définition de f_χ permettent d'écrire pour tout $s \in]1, +\infty[$:

$$g_\chi(s) := \sum_{p \in \mathbb{P}} \left[-\log \left(1 - \frac{\chi(p)}{p^s} \right) - \frac{\chi(p)}{p^s} \right]$$

où le log désigne ici la détermination principale du logarithme. Observons que pour tout $p \in \mathbb{P}$ et $s \in \{\text{Ré} > 0\}$, on a :

$$\left| \frac{\chi(p)}{p^s} \right| < 1.$$

Montrons que si $s \in \{\text{Ré} > \frac{1}{2}\}$, alors $\sum_{p \in \mathbb{P}} [-\log(1 - \frac{\chi(p)}{p^s}) - \frac{\chi(p)}{p^s}]$ converge normalement sur $\{\text{Ré} > \rho\}$ où $\rho > \frac{1}{2}$ est fixé (ce qui démontrera le théorème). On sait qu'il existe $C > 0$, une constante, telle que :

$$\forall u \in \mathbb{C}, |u| < \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow |\log(1 - u) + u| < Cu^2.$$

Soit $\rho > \frac{1}{2}$. Pour tout $s \in \{\text{Ré} > \rho\}$, tout $p \in \mathbb{P}$, on a les inégalités suivantes :

$$\left| \frac{\chi(p)}{p^s} \right| \leq \frac{1}{p^\rho} \leq \frac{1}{\sqrt{2}},$$

donc on a :

$$\left| \log \left(1 - \frac{\chi(p)}{p^s} \right) + \frac{\chi(p)}{p^s} \right| \leq \frac{C}{p^\rho}.$$

ce qui conclut, le membre de droite étant le terme général d'une série convergente. \square

Proposition 4.4. Soit $\chi \in G(m)$, soit $s_0 \in \mathbb{C}$ tel que $\text{Ré}(s_0) = 1$ et notons $n := \nu_{s_0}(L_\chi)$. Dans ces conditions, la fonction holomorphe sur $\{\text{Ré} > 1\}$:

$$s \mapsto f_\chi(s) - n \log(s - s_0)$$

se prolonge en une fonction holomorphe sur un voisinage de s_0 .

Démonstration.

Pour $s \in \{\text{Ré} > 1\}$, on a :

$$e^{f_\chi(s) - n \log(s - s_0)} = (s - s_0)^{-n} e^{f_\chi(s)} = [(s - s_0)^{-n} L_\chi(s)] [e^{-g_\chi(s)}]$$

Le premier crochet ne s'annule pas près de s_0 , grâce au choix de n . Le deuxième crochet n'est pas nul près de s_0 . Il existe donc un voisinage V simplement connexe de s_0 (un petit disque par exemple) où les deux crochets sont non nuls, d'où l'existence d'un logarithme, que l'on note φ , de la fonction $s \mapsto e^{f_\chi(s) - n \log(s - s_0)}$ sur V . Sur ce voisinage, $e^{f_\chi(s) - n \log(s - s_0)}$ se réécrit donc $e^{\varphi(s)}$. A une constante près, c'est le prolongement recherché. \square

Cela montre que l'on peut définir pour presque tout $t \in \mathbb{R}$ la fonction de la variable réelle (pour $\chi \in G(m)$) :

$$\ell_\chi(t) := \lim_{\epsilon \rightarrow 0} f_\chi(1 + \epsilon + 2i\pi t)$$

et cette fonction est localement intégrable. On peut donc considérer la distribution associée que l'on note ℓ_χ .

4.4 La fonction ℓ_χ comme transformée de Fourier

Proposition 4.5. Soit $\chi \in G(m)$, on a égalité entre les distributions $\widehat{\mu_\chi}$ et ℓ_χ .

Démonstration.

Fixons $\epsilon > 0$ et définissons alors $\mu_{\chi, \epsilon}$ et $\ell_{\chi, \epsilon}$ les deux objets suivants :

$$\mu_{\chi, \epsilon} := \sum_{p \in \mathbb{P}} \frac{\chi(p) \delta_{\log(p)}}{p^{1+\epsilon}}$$

qui est une mesure complexe *perturbée* qui approche μ_χ dans \mathcal{S}' et :

$$\ell_{\chi,\epsilon}(t) := f_\chi(1 + \epsilon + 2i\pi t)$$

qui est une fonction (lisse) définie sur \mathbb{R} . Il n'est pas difficile de démontrer les faits suivants : (i) $\mu_{\chi,\epsilon}$ est une distribution tempérée (ii) $\mu_{\chi,\epsilon} \rightarrow \mu_\chi$ dans \mathcal{S}' lorsque $\epsilon \rightarrow 0$ (iii) $\ell_{\chi,\epsilon} \rightarrow \ell_\chi$ dans \mathcal{D}' lorsque $\epsilon \rightarrow 0$. De plus, un calcul formel et légitime grâce au théorème de Fubini indique qu'on a égalité entre :

$$\widehat{\mu_{\chi,\epsilon}} = \ell_{\chi,\epsilon}.$$

Par unicité de la limite dans \mathcal{D}' et continuité de la transformée de Fourier, on obtient :

$$\widehat{\mu_\chi} = \ell_\chi,$$

comme annoncé. □

La proposition suivante exploite l'égalité entre $\widehat{\mu_\chi}$ et ℓ_χ pour expliciter la transformée de Fourier de la distribution $d_\chi : x \mapsto c_\chi(e^x)e^{-x}$.

Proposition 4.6. *Soit $\chi \in \mathbf{G}(m)$, la distribution d_χ est tempérée et sa transformée de Fourier est la distribution $q_\chi : t \mapsto \frac{\ell_\chi(t)}{1+2i\pi t}$.*

Démonstration.

Notons, pour $x \in \mathbb{R}$, $f_0(x) := \frac{1}{1+2i\pi x}$. Soit $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$ et à partir de cette fonction posons :

$$\psi := \varphi \cdot f_0.$$

On obtient sans difficulté la transformée de Fourier de f_0 :

$$\widehat{f_0}(y) = e^y 1_{\mathbb{R}_-}(y).$$

Le calcul de la transformée de Fourier de ψ peut alors être effectué :

$$\widehat{\psi}(y) = \widehat{\varphi \cdot f_0}(y) = \widehat{\varphi}(y) * \widehat{f_0}(y)$$

où l'étoile désigne le produit de convolution, donc finalement :

$$\widehat{\psi}(y) = e^y \int_{\mathbb{R}} e^{-x} 1_{[y, +\infty[}(x) \widehat{\varphi}(x) dx.$$

On a alors par définition de la transformée de Fourier *d'une distribution* :

$$\langle \widehat{\mu_\chi}, \psi \rangle := \langle \mu_\chi, \widehat{\psi} \rangle = \sum_{p \in \mathbb{P}} \chi(p) \int_{\mathbb{R}} e^{-x} 1_{[\log(p), +\infty[}(x) \widehat{\varphi}(x) dx.$$

Mais comme $\widehat{\mu_\chi} = \ell_\chi$ on a aussi :

$$\langle \widehat{\mu_\chi}, \psi \rangle = \langle \ell_\chi, \psi \rangle = \int_{\mathbb{R}} \frac{\ell_\chi(t)}{1+2i\pi t} \varphi(t) dt.$$

Il suffit de pouvoir intervertir somme et intégrale pour conclure car

$\sum_{p \in \mathbb{P}} \chi(p) e^{-x} 1_{[\log(p), +\infty[} = \chi(p) c_\chi(x)$. Or ceci est possible car le théorème de Fubini est applicable, ce qui amène à :

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{\ell_\chi(t)}{1+2i\pi t} \varphi(t) dt = \int_{\mathbb{R}} \frac{c_\chi(e^y)}{e^y} \widehat{\varphi}(y) dy,$$

ce qu'on voulait. □

4.5 La régularité de f_χ sur $1 + i\mathbb{R}$

A ce stade, on a relié (voir 4.3) la régularité de f_χ sur la droite $1 + i\mathbb{R}$ aux zéros de L_χ sur cette même droite : mais en dehors de cette *relation* (purement hypothétique), on ne sait pas ce qui se passe *réellement* sur cette droite. Dans le cas du Théorème des Nombres Premiers, on a montré que ζ (la fonction analogue à L_χ) ne s'annulait pas sur cette droite. On se servait alors de la positivité de la mesure μ comme on l'a rappelé plus haut. Or ici, la mesure μ_χ est complexe. L'idée est de se ramener à une mesure positive via un principe assez simple : moyenner. Concrètement notons, pour $s \in \{\text{Ré} > 1\}$, $\zeta_m(s)$ la fonction définie par :

$$\zeta_m(s) = \prod_{\chi \in G(m)} L_\chi(s).$$

Cette fonction se prolonge en une fonction méromorphe sur le demi-plan $\{\text{Ré} > 0\}$ avec un seul pôle simple situé au point 1 (voir le chapitre 6 de [8] pour plus de détail sur la fonction ζ_m). Nous allons montrer que la fonction ζ_m ne s'annule pas sur la droite $1 + i\mathbb{R}$ et *donc* que les fonctions L_χ ne s'annulent pas sur $1 + i\mathbb{R}$. Puisque pour $\chi \in G(m)$ on a défini :

$$\mu_\chi = \sum_{p \in \mathbb{P}} \frac{\chi(p) \delta_{\log(p)}}{p}$$

on sait donc (grâce à la relation d'orthogonalité) que la mesure *a priori* complexe suivante :

$$\mu_m := \sum_{\chi \in G(m)} \mu_\chi = \sum_{p \in \mathbb{P}} \left[\sum_{\chi \in G(m)} \chi(p) \right] \frac{\delta_{\log(p)}}{p}$$

est en fait une mesure *positive* sur \mathbb{R} . En continuant d'appliquer ce principe de moyennisation, on pose :

$$\ell_m := \sum_{\chi \in G(m)} \ell_\chi.$$

On a maintenant les bons objets en mains pour travailler sur ζ_m . En effet, un calcul heuristique suggère la relation suivante entre ζ_m et ℓ_m :

$$\log(\zeta_m) \approx \sum_{\chi \in G(m)} \log(L_\chi) \approx \sum_{\chi \in G(m)} f_\chi$$

et donc sur la droite $1 + i\mathbb{R}$ on a :

$$\log(\zeta_m) \approx \sum_{\chi \in G(m)} \ell_\chi := \ell_m.$$

Commençons par énoncer le lemme suivant :

Lemme 4.7. *Soit $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ telle que $\widehat{\varphi} \geq 0$, on a alors l'inégalité suivante :*

$$\int_{\mathbb{R}} \ell_m(t) \varphi(t) dt \geq 0.$$

Démonstration.

En se laissant porter par les calculs, on a :

$$\langle \ell_m, \varphi \rangle = \sum_{\chi \in G(m)} \langle \ell_\chi, \varphi \rangle = \sum_{\chi \in G(m)} \langle \widehat{\mu}_\chi, \varphi \rangle = \sum_{\chi \in G(m)} \langle \mu_\chi, \widehat{\varphi} \rangle = \langle \mu_m, \widehat{\varphi} \rangle \geq 0$$

car $\widehat{\varphi} \geq 0$ et que μ_m est une mesure positive. □

Notons $\varphi_\lambda := \frac{1}{\lambda} \varphi(\frac{\cdot}{\lambda})$. En continuant de suivre la même démarche que celle appliquée au Théorème des Nombres Premiers, nous obtenons alors deux lemmes déjà vus auparavant (les lemmes 3.9 et 3.10) :

Lemme 4.8. Soit $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$ telle que $\widehat{\varphi} \geq 0$. Pour tout $N \in \mathbb{N}^*$, tout $a_1, \dots, a_N \in \mathbb{R}$ et tout $\lambda > 0$, on a l'inégalité suivante :

$$\sum_{1 \leq k, l \leq N} \int_{\mathbb{R}} \ell_m(t + a_k - a_l) \varphi_\lambda(t) dt \geq 0.$$

Lemme 4.9. Soit $a \in \mathbb{R}$ et notons $n(a) := \nu_{1+ia}(\zeta_m)$. Pour toute fonction $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$, on a lorsque $\lambda \rightarrow 0^+$ l'égalité suivante :

$$\int_{\mathbb{R}} \ell_m(t + a) \varphi_\lambda(t) dt = n(a) \log(\lambda) \int_{\mathbb{R}} \varphi + O(1).$$

Démonstration.

Par multiplicativité de la valuation, on a $n(a) = \sum_{\chi \in G(m)} \nu_{1+ia}(L_\chi)$. D'après la descriptions des fonctions ℓ_χ , on sait qu'il existe $\epsilon > 0$ (fixé à partir de maintenant) tel que pour tout $\chi \in G(m)$ la fonction de la variable réelle :

$$\Delta_\chi t := \ell_\chi(t) + \nu_{1+ia}(L_\chi) \log \frac{1}{i(t-a)}$$

soit bornée sur $]a - \epsilon, a + \epsilon[$. Pour λ assez petit, on a l'inclusion :

$$\text{supp}(\varphi_\lambda) \subset]a - \epsilon, a + \epsilon[$$

et il vient alors (pour un tel λ) :

$$\int_{\mathbb{R}} \ell_m(t + a) \varphi_\lambda(t) dt = \int_{\mathbb{R}} \sum_{\chi \in G(m)} (-\nu_{1+ia}(L_\chi) \log \frac{1}{i(t-a)} + \Delta_\chi(t)) \varphi_\lambda(t) dt,$$

soit :

$$\int_{\mathbb{R}} \ell_m(t + a) \varphi_\lambda(t) dt = n(a) \log(\lambda) \int_{\mathbb{R}} \varphi + \int_{\mathbb{R}} (-n(a) \log \frac{1}{ia} + \sum_{\chi \in G(m)} \Delta_\chi(\lambda u)) \varphi(u) du,$$

où le deuxième membre est bornée lorsque $\lambda \rightarrow 0^+$, comme annoncé. \square

Cette proposition combinée au lemme précédent permet de montrer que pour tout $a_1, \dots, a_N \in \mathbb{R}$:

$$\sum_{1 \leq k, l \leq N} n(a_k - a_l) \leq 0$$

On peut alors démontrer le théorème désiré, à savoir :

Théorème 4.10. La fonction ζ_m ne s'annule pas sur $1 + i\mathbb{R}$.

Démonstration.

Il suffit de montrer que pour tout $a > 0$, on a $n(a) = 0$. En effet, on sait que (i) $n(0) = -1$ (ii) $\overline{L_\chi}(s) = L_{\overline{\chi}}(\overline{s})$ donc $(\overline{\chi} = \chi^{-1}) \overline{\zeta_m}(s) = \zeta_m(\overline{s})$ et donc $n(a) = n(-a)$. On applique alors l'inégalité qu'on a sur n avec $N = 3$, $-a, 0$ et a et on en déduit $n(a) = 0$. \square

4.6 Conclusion

Soit $\chi \in G(m)$, $\chi \neq 1$. On rappelle qu'on note, pour $x \in \mathbb{R}^+$,

$$c_\chi(x) = \sum_{p \in \mathbb{P}, p \leq x} \chi(p).$$

On est maintenant en mesure d'énoncer et de démontrer la proposition suivante, qui suffit pour démontrer le théorème :

Proposition 4.11. *On a l'estimation suivante lorsque $x \rightarrow +\infty$:*

$$c_\chi(e^x) = o\left(\frac{e^x}{x}\right).$$

Avant d'entamer la démonstration de la proposition, faisons un commentaire. Rappelons que $\pi_{m,a}$ se décompose ainsi :

$$\varphi(m)\pi_{m,a}(e^y) = \sum_{\chi \in G(m)} \chi(a^{-1})c_\chi(e^y).$$

Par ailleurs, (i) le Théorème de Nombres Premiers indique que le terme $1(a^{-1})c_1(e^y)$ apporte une contribution (un poids) de $(\frac{e^y}{y})$ tandis que (ii) la proposition que nous sommes sur le point de démontrer indique que les autres termes sont négligeables devant ce poids $(\frac{e^y}{y})$. Cette différence de poids est dûe au fait suivant : la fonction L_1 a un pôle simple au point 1 **alors que** les fonctions L_χ ($\chi \neq 1$) n'en ont pas. Reprenons le fil de la démonstration : l'estimation de c_χ , quantité discrète, se déduit d'une estimation continue (comme pour le Théorème des Nombres Premiers).

Proposition 4.12. *Soit $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$ telle que $\psi := \widehat{\varphi} \geq 0$. On a lorsque $x \rightarrow +\infty$ l'estimation suivante :*

$$\int_{\mathbb{R}} \psi(u-x) \frac{c_\chi(e^u)}{e^u} du = o\left(\frac{1}{x}\right).$$

Démonstration.

On applique l'identité :

$$\langle \widehat{d}_\chi, \cdot \rangle = \langle q_\chi, \cdot \rangle$$

à la fonction de la variable réelle (pour $x \in \mathbb{R}$) :

$$u \mapsto \varphi(u)e^{2i\pi ux}$$

ce qui donne :

$$\int_{\mathbb{R}} \psi(u-x) \frac{c_\chi(e^u)}{e^u} du = \int_{\mathbb{R}} \frac{\ell_\chi(u)}{1+2i\pi u} \varphi(u) e^{2i\pi ux} du.$$

Nous allons calculer le membre de droite par intégration par parties. Pour $A > 0$, on a :

$$\int_{[-A,A]} \frac{\ell_\chi(u)\varphi(u)}{1+2i\pi u} e^{2i\pi ux} du = [fg]_{-A}^A + \frac{1}{x} \int_{[-A,A]} f'(u) \frac{ie^{2i\pi ux}}{2\pi} du,$$

où $f : t \mapsto \frac{\ell_\chi(t)\varphi(t)}{1+2i\pi t}$ et $g : t \mapsto \exp(2i\pi t)$. Comme $f \in \mathcal{C}_c^\infty$, le crochet tend vers 0 lorsque $A \rightarrow +\infty$ et donc :

$$\int_{\mathbb{R}} \psi(u-x) \frac{c_\chi(e^u)}{e^u} du = \frac{1}{x} \int_{\mathbb{R}} f'(u) \frac{ie^{2i\pi ux}}{2\pi} u.$$

Mais puisqu'on a montré que $\ell_\chi \in \mathcal{C}^\infty$, il est clair que $f' \in \mathcal{C}_c^\infty$ et donc le lemme de Riemann-Lebesgue appliqué à la fonction $\frac{-1}{2\pi i} f'$ assure que $\int_{\mathbb{R}} f'(u) \frac{ie^{2i\pi ux}}{2\pi} u$ est un $o(1)$, ce qui conclut la preuve. \square

Pour conclure cette démonstration du Théorème de la Progression Arithmétique, nous allons appliquer une dernière fois la formule d'orthogonalité : pour $f \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$ telle que $\psi := \widehat{f} \geq 0$, sommions les quantités $\chi(a^{-1}) \int_{\mathbb{R}} \psi(u-x) \frac{c_\chi(e^u)}{e^u} du$ pour obtenir :

$$\begin{aligned} \sum_{\chi \in G(m)} \chi(a^{-1}) \int_{\mathbb{R}} \psi(u-x) \frac{c_\chi(e^u)}{e^u} du &= \varphi(m) \int_{\mathbb{R}} \psi(u-x) \frac{\pi_{m,a}(e^u)}{e^u} du \\ &= \frac{1}{x} \int_{\mathbb{R}} \psi(u) du + o\left(\frac{1}{x}\right). \end{aligned}$$

Nous sommes donc ramenés à la version lissée du Théorème des Nombres Premiers (voir 3.11, page 36). On a alors l'équivalent annoncé à savoir :

$$\pi_{m,a}(x) = \frac{1}{\varphi(m)} \frac{x}{\log(x)} + o\left(\frac{x}{\log(x)}\right).$$

Références

- [1] J.-M. Bony, *Cours d'analyse*. Ed. Éc. Polytech., Palaiseau, 2001.
- [2] J.-B. Bost, *Le Théorème des Nombres Premiers et la transformation de Fourier*. La fonction zêta, 1–35, Ed. Éc. Polytech., Palaiseau, 2003.
- [3] J.-B. Bost, *Fonctions analytiques d'une variable complexe*. Polycopié de cours L3 MFA - Université Paris-Sud.
- [4] . P. Gérard, *Distributions and Partial Differential Equations*. Polycopié de cours M1 MF - Université Paris-Sud.
- [5] D. Hulin, *Fonctions holomorphes*. Polycopié de cours L3MFA - Université Paris-Sud.
- [6] J.-P. Kahane, *Une formule de Fourier sur les nombres premiers*, Gazette des Mathématiciens (Société Mathématique de France, 67, Janvier 1996) 3–9.
- [7] J. Merker, *Transformation de Fourier sur \mathbb{R}* . Polycopié de cours L3 MFA - Université Paris-Sud.
- [8] J.-P. Serre, *Cours d'arithmétique*. Deuxième édition revue et corrigée. Le Mathématicien, No. 2. Presses Universitaires de France, Paris, 1977.
- [9] C. Zuily, *Elements de distributions et d'équations aux dérivées partielles*. Collection : Science Sup, Dunod, 2002.