



Comprendre le monde,  
construire l'avenir®

PROJET DE MAGISTÈRE

---

# **Une démonstration élémentaire du Théorème des Nombres Premiers**

---

Réalisé par Alexandre Goyer et Émile Séguret

Encadré par Hugues Auvray

Année universitaire 2016-2017

# Sommaire

|                                                               |           |
|---------------------------------------------------------------|-----------|
| <b>Introduction</b>                                           | <b>2</b>  |
| <b>1 La fonction zêta de Riemann et les nombres premiers</b>  | <b>4</b>  |
| A Un peu d'histoire . . . . .                                 | 4         |
| B Propriétés fondamentales de la fonction zêta . . . . .      | 6         |
| C Le produit d'Euler . . . . .                                | 8         |
| <b>2 Majorations</b>                                          | <b>12</b> |
| A Non-annulation de la fonction zêta . . . . .                | 12        |
| B La fonction de Mangoldt . . . . .                           | 14        |
| C Majoration en vue du dernier chapitre . . . . .             | 16        |
| <b>3 La formule de Perron</b>                                 | <b>22</b> |
| A Un premier calcul d'intégrale . . . . .                     | 22        |
| B Une intégrale intermédiaire . . . . .                       | 26        |
| C Sommation . . . . .                                         | 27        |
| <b>4 La démonstration du TNP</b>                              | <b>29</b> |
| A Combinaison des résultats précédemment établis . . . . .    | 29        |
| B Conclusion . . . . .                                        | 31        |
| <b>Annexes</b>                                                | <b>36</b> |
| A Résolution du problème de Bâle par Leonhard Euler . . . . . | 36        |
| B Sur l'ordre du $k$ -ième nombre premier . . . . .           | 41        |
| <b>Bibliographie</b>                                          | <b>43</b> |
| <b>Notes</b>                                                  | <b>44</b> |

# Introduction



Amateur de mathématiques ou non, nous avons tous déjà été confrontés aux nombres premiers. Pour exemple, imaginez que vous devez partager de façon équitable un paquet de bonbons. Il s'agit de se demander si le nombre de bonbons est un multiple du nombre de gourmands. Si quel que soit le nombre de gourmands, différent de un et de celui des bonbons, il est impossible de partager équitablement le paquet, on dit alors que le nombre de bonbons est un nombre premier.

Cette notion naturelle a donc logiquement été introduite très tôt. Dès l'Antiquité, Euclide a même constaté que les nombres premiers sont plus nombreux que n'importe quelle quantité finie fixée à l'avance, autrement dit, il en existe une infinité, comme nous le démontrerons dans le premier chapitre (THÉORÈME 1.5). Puis, pendant près de deux millénaires, aucune avancée générale notable n'a été effectuée concernant ces nombres mystérieux. L'arithmétique, et en particulier l'étude des nombres premiers, est un domaine à la fois sublime et terrifiant pour la même raison : il regorge de problèmes dont la difficulté de la solution, si toutefois elle existe, est démesurée par rapport à la simplicité de l'énoncé. Pour n'en citer qu'un : on ne sait toujours pas si les couples de nombres premiers séparés par un seul entier, comme par exemple 11 et 13, sont en nombre fini. D'ailleurs, il est bien souvent déraisonnable, lorsque le nombre est très grand, de tester tous ces diviseurs potentiels donc savoir reconnaître un nombre premier est un enjeu majeur qui peut se révéler très ardu.

Une autre question très naturelle est celle de leur répartition. Peut-on trouver une formule qui permette de décrire la distribution des nombres premiers ? Aucune formule n'a été découverte pour le moment, et l'avis des mathématiciens sur la question est souvent pessimiste. D'après Leonhard Euler : « *Certains mystères échapperont toujours à l'esprit humain. Pour nous en convaincre, il suffit de jeter un œil aux tableaux des nombres premiers, et l'on verra qu'il n'y règne ni ordre ni règle* ». Pour illustrer cette citation, voici la liste des 35 nombres premiers inférieurs à 150 :

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97,  
101, 103, 107, 109, 113, 127, 131, 137, 139, 149

À première vue, les nombres premiers semblent se raréfier mais ils le font de manière chaotique ; en effet, on remarque par exemple qu'il n'y a aucun nombre premier compris strictement entre 113 et 127, alors que 137 et 139 sont deux nombres premiers, séparés par un seul entier. Il fallut attendre la fin XVIII<sup>e</sup> siècle pour que la première conjecture sur la répartition des nombres premiers apparaisse. C'est le mathématicien allemand Carl Friedrich Gauß qui émit l'hypothèse que le nombre de nombres premiers de 1 à  $N$  est à peu près  $N/\log(N)$ . En termes plus rigoureux le Théorème des Nombres Premiers (TNP) affirme que le nombre de nombres premiers inférieurs ou égaux à  $x$  est (asymptotiquement) équivalent à  $x/\log(x)$ , quand  $x$  tend vers l'infini. C'est à dire, de façon équivalente (voir l'annexe B), que le  $k$ -ième nombre premier est (asymptotiquement) équivalent à  $k\log(k)$ . De nombreux mathématiciens ont contribué à l'élaboration d'une preuve du TNP et ce n'est qu'en 1896 que deux mathématiciens, le Français Jacques Hadamard et le Belge Charles-Jean de la Vallée Poussin, en donnèrent finalement, de façon indépendante, une démonstration complète. Leurs démonstrations reposent sur l'application de la théorie des fonctions holomorphes, comme suggéré

par Bernhard Riemann quarante ans plus tôt. L'histoire de ce théorème est riche en anecdotes, et il n'est pas difficile de trouver de la littérature sur ce sujet [Der07].

La démonstration dont l'exposé détaillé est l'objet de notre projet est traditionnellement qualifiée d'élémentaire, mais ce mot n'a de sens que si l'on précise quels sont les « éléments de mathématiques » que nous nous autorisons. La plupart des résultats sont issus de l'analyse réelle et de la théorie des fonctions arithmétiques. Nous invoquerons également quelques résultats concernant les transformées de Fourier, notamment dans  $L^2$ . Nous nous sommes en grande partie inspirés de la preuve de Xavier Gourdon [Gou08].

Cette preuve est divisée en quatre chapitres : le premier est consacré aux séries et surtout à la fonction zêta de Riemann et son lien avec les nombres premiers ; le second établit divers résultats sur certaines fonctions arithmétiques importantes dans le but d'apporter un maillon crucial pour le TNP ; le troisième montre LA FORMULE DE PERRON 3.4 qui fait le lien entre la fonction sommatoire d'une suite complexe et sa série de Dirichlet ; enfin le dernier chapitre termine l'argumentation en rassemblant les résultats des chapitres 2 et 3.

# Chapitre 1

## La fonction zêta de Riemann et les nombres premiers



Parmi les découvertes les plus surprenantes concernant les nombres premiers figure sans doute le lien qu'ils entretiennent avec une certaine fonction définie comme une somme infinie portant sur l'ensemble des entiers naturels. À ce jour, on ne connaît d'ailleurs aucune démonstration du Théorème des Nombres Premiers n'invoquant pas cette correspondance. Ce chapitre a pour but d'introduire cette célèbre fonction et d'exhiber la pertinence de son étude vis-à-vis de la distribution des nombres premiers.

### A Un peu d'histoire

L'étude des sommes infinies débute à la fin du Moyen-Âge avec les *Questions sur la Géométrie d'Euclide* (1360) [Ore61] de l'érudit français Nicole Oresme. Il y propose une règle permettant de calculer la somme d'une série géométrique, ainsi qu'une démonstration de la divergence de la série harmonique. Voici en quoi consistait sa preuve. Nous noterons traditionnellement, pour  $N \geq 1$ ,

$$H_N = \sum_{n=1}^N \frac{1}{n}$$

la somme partielle de la série harmonique. Oresme remarqua alors que chaque paquet de la forme

$$H_{2^{N+1}} - H_{2^N} = \sum_{n=2^N+1}^{2^{N+1}} \frac{1}{n} \geq (2^{N+1} - 2^N) \frac{1}{2^{N+1}} = \frac{1}{2}$$

dépasse un demi. Le nombre de tels paquets étant infini, il s'en déduit en effet que :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} = +\infty.$$

À la fin du XIV<sup>e</sup> siècle, les séries acquièrent progressivement un statut mathématique à part entière, bien qu'elles n'aient encore que très peu d'applications. Il faudra attendre près de trois siècles

pour voir cette théorie se développer notablement, suite à deux avancées majeures : l'introduction des logarithmes par John Neper [Nep14] puis Henry Briggs [Bri24], et le développement du calcul intégral par Bonaventura Cavalieri et John Wallis.

Le prêtre italien Pietro Mengoli, élève de Cavalieri, proposa en 1647 une nouvelle démonstration de la divergence de la série harmonique<sup>1</sup>. Il calcula en 1659 la somme de la série alternée mais ne parvint qu'à majorer la somme de la série des inverses des carrés des entiers. Le calcul exact de cette dernière somme, connu sous le nom de *problème de Bâle*<sup>2</sup>, résista à de nombreux mathématiciens pendant 80 ans<sup>3</sup>. C'est le jeune Suisse Leonhard Euler qui fut le premier, en 1735, à résoudre ce problème. Les idées d'Euler sont exposées dans l'annexe A ; nous en présenterons ici une démonstration plus moderne, s'appuyant sur un résultat d'analyse harmonique, théorie introduite par Joseph Fourier quelques décennies plus tard. Considérons la fonction  $2\pi$ -périodique égale à l'identité sur  $]-\pi, \pi[$ , nulle en  $\pi$ , et calculons ses coefficients de Fourier, pour  $n \neq 0$  (par parité,  $c_0 = 0$ ) :

$$c_n \stackrel{\text{déf}}{=} \int_{-\pi}^{\pi} t e^{-int} \frac{dt}{2\pi} \stackrel{\text{IPP}}{=} \frac{1}{2\pi} \left[ \frac{i}{n} t e^{-int} \right]_{-\pi}^{\pi} - \frac{i}{2n\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-int} dt = \frac{i(-1)^n}{n}.$$

On obtient alors, d'après l'identité de Parseval :

$$2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} t^2 dt = \frac{\pi^2}{3}$$

et donc finalement, la somme des inverse des carrés :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Euler, très fier de son résultat<sup>4</sup>, poursuivit sur sa lancée et calcula la valeur aux entiers pairs de la fonction  $\zeta$  définie pour tout réel  $x$  strictement plus grand que un par la formule :

$$\zeta(x) \stackrel{\text{déf}}{=} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}.$$

Par ailleurs, Euler exprima les valeurs de la fonction  $\zeta$  sous la forme d'un produit infini, dévoilant ainsi le lien intime qu'entretiennent les nombres premiers avec la fonction  $\zeta$ , que nous développerons dans la section sur le produit d'Euler.

Cette fonction sera par la suite appelée plus traditionnellement la « fonction  $\zeta$  de Riemann » pour la raison suivante. Bernhard Riemann, influencé par les travaux de ses maîtres Carl Friedrich Gauß et surtout Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet<sup>5</sup>, eut l'idée géniale de rassembler la formule du produit infini d'Euler avec des résultats d'analyse. Ses travaux furent présentés dans son article fondateur *Sur le nombre de nombres premiers inférieurs à une grandeur donnée*<sup>6</sup> où il étend la fonction  $\zeta$ , introduite par Euler, à tout le domaine ouvert  $D$  des nombres complexes de partie réelle strictement plus grande que un,

$$D \stackrel{\text{déf}}{=} \{s = \sigma + it \in \mathbb{C}, \sigma > 1\}.$$

La notation inhabituelle du nombre complexe sous la forme  $\sigma + it$  est la trace de son article, généralement adoptée dans l'étude de la fonction  $\zeta$ . Cette remarque montre à quel point les idées présentes dans le texte de Riemann ont révolutionné la théorie des nombres et continue d'influencer les mathématiciens de notre époque.

## B Propriétés fondamentales de la fonction zêta

### DÉFINITION-PROPRIÉTÉ 1.1

La fonction  $\zeta$  de Riemann définie par :

$$\forall s \in D, \quad \zeta(s) \stackrel{\text{déf}}{=} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s}$$

est continue sur  $D$  et vérifie :

$$\forall s = \sigma + it \in D, \quad |\zeta(s)| \leq \frac{\sigma}{\sigma - 1}.$$

**DÉMONSTRATION** La fonction  $\zeta$  est bien définie et continue sur  $D$  car la série qui la définit est normalement convergente sur tout compact de  $D$ . En effet, pour  $\sigma_0 > 1$ , notons :

$$D_{\sigma_0} \stackrel{\text{déf}}{=} \{s = \sigma + it \in \mathbb{C}, \sigma \geq \sigma_0\} \subset D.$$

On a alors, pour tout  $s = \sigma + it \in D_{\sigma_0}$ , la majoration de

$$\left| \frac{1}{n^s} \right| = \frac{1}{n^\sigma} \leq \frac{1}{n^{\sigma_0}}$$

par le terme général, indépendant de  $s$ , d'une série positive convergente car  $\sigma_0 > 1$ . Tout compact de  $D$  étant inclus dans un  $D_{\sigma_0}$  pour  $\sigma_0$  assez proche de 1, par continuité de  $\sigma + it \mapsto \sigma$ , le résultat s'en déduit.

Pour obtenir la majoration du module de  $\zeta(s)$ , on passe par les intégrales : soient  $N \geq 2$  et  $s = \sigma + it \in D$ , on a :

$$\sum_{n=1}^N \left| \frac{1}{n^s} \right| = 1 + \sum_{n=2}^N \frac{1}{n^\sigma} \leq 1 + \sum_{n=2}^N \int_{n-1}^n \frac{dt}{t^\sigma}$$

et donc :

$$\sum_{n=1}^N \left| \frac{1}{n^s} \right| \leq 1 + \int_1^N \frac{dt}{t^\sigma} = 1 + \frac{1}{\sigma - 1} \left( 1 - \frac{1}{N^{\sigma-1}} \right) \leq \frac{\sigma}{\sigma - 1}.$$

Ceci étant valable quel que soit  $N \geq 2$ , on en déduit par inégalité triangulaire que :

$$|\zeta(s)| \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \left| \frac{1}{n^s} \right| \leq \frac{\sigma}{\sigma - 1}. \quad \blacksquare$$

On verra dans la suite d'autres fonctions de la famille des « séries de Dirichlet » dont la fonction  $\zeta$  de Riemann fait partie. Une série de Dirichlet  $f$  correspond à la donnée d'une suite de nombres complexes  $(a_n)_{n \geq 1}$  par la définition formelle suivante :

$$f(s) \stackrel{\text{déf}}{=} \sum_{n \geq 1} \frac{a_n}{n^s}.$$

La fonction  $\zeta$  de Riemann est alors la série de Dirichlet associée à la suite constante égale à 1.

Établissons une expression fondamentale du reste de la série définissant la fonction  $\zeta$ . Cette formule nous sera bien utile pour la suite.

**FORMULE DU RESTE 1.2**

$$\forall s \in D, \forall N \geq 1, \quad \zeta(s) - \sum_{n=1}^N \frac{1}{n^s} = s \int_N^{+\infty} \frac{1/2 - \{x\}}{x^{s+1}} dx + \frac{N^{1-s}}{s-1} - \frac{N^{-s}}{2}$$

où  $\{x\} = x - \lfloor x \rfloor$  désigne la partie fractionnaire du réel  $x$ .

**DÉMONSTRATION** Soient  $N \geq 1, n \geq N$  et  $s \in D$ . Faisons une intégration par partie préliminaire :

$$s \int_n^{n+1} \frac{1/2 - x + n}{x^{s+1}} dx = \left[ -\frac{1/2 - x + n}{x^s} \right]_n^{n+1} - \int_n^{n+1} \frac{dx}{x^s} = \frac{1}{2(n+1)^s} + \frac{1}{2n^s} - \int_n^{n+1} \frac{dx}{x^s}.$$

Comme  $\Re(s) > 1$ , on peut sommer de  $N$  à l'infini :

$$\sum_{n=N}^{+\infty} s \int_n^{n+1} \frac{1/2 - x + n}{x^{s+1}} dx = \sum_{n=N}^{+\infty} \left( \frac{1}{2(n+1)^s} + \frac{1}{2n^s} \right) - \sum_{n=N}^{+\infty} \int_n^{n+1} \frac{dx}{x^s}.$$

Lorsque  $x \in [n, n+1[$ , on a  $\{x\} = x - \lfloor x \rfloor = x - n$ , et ainsi :

$$s \int_N^{+\infty} \frac{1/2 - \{x\}}{x^{s+1}} dx = \frac{1}{2N^s} + \sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{1}{n^s} - \int_N^{+\infty} \frac{dx}{x^s} = \zeta(s) - \sum_{n=1}^N \frac{1}{n^s} + \frac{1}{2N^s} + \frac{N^{1-s}}{1-s}.$$

La formule en découle. ■

**PROPRIÉTÉ DE PROLONGEMENT 1.3**

$\zeta$  est prolongeable en une fonction continue sur  $\overline{D} \setminus \{1\}$  où  $\overline{D} = \{s \in \mathbb{C}, \Re(s) \geq 1\}$ .  
Plus précisément, il existe  $\eta : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  continue sur  $\overline{D}$  telle que :

$$\forall s \in \overline{D} \setminus \{1\}, \quad \zeta(s) = \eta(s) + \frac{1}{s-1}.$$

**DÉMONSTRATION** La FORMULE DU RESTE 1.2 avec  $N = 1$  donne :

$$\forall s \in D, \quad \zeta(s) - 1 = s \int_1^{+\infty} \frac{1/2 - \{x\}}{x^{s+1}} dx + \frac{1}{s-1} - \frac{1}{2}.$$

Ainsi pour  $s \in D$ , on peut poser :

$$\eta(s) := \zeta(s) - \frac{1}{s-1} = \frac{1}{2} + s \int_1^{+\infty} \frac{1/2 - \{x\}}{x^{s+1}} dx.$$

Mais cette expression de  $\eta$  est en réalité valable sur tout  $\overline{D}$  et définit une fonction continue sur cet ensemble. Pour montrer cela, il suffit d'établir que :  $s \mapsto \eta(s) - \frac{1}{2}$  est définie et continue sur  $\overline{D}$ .

On est ainsi ramené à vérifier les hypothèses du théorème de continuité sous la signe intégrale.

À  $x \geq 1$  fixé, l'application :  $s \mapsto \frac{1/2 - \{x\}}{x^{s+1}} = (1/2 - \{x\}) e^{-(s+1)\log(x)}$  est continue sur  $\mathbb{C}$  donc sur  $\overline{D}$ .

De plus, la partie fractionnaire d'un nombre étant toujours comprise entre 0 et 1 (strictement), on a la majoration pour tout  $s \in \overline{D}$  et  $x \geq 1$  par une fonction intégrable sur  $[1, +\infty[$  :

$$\left| \frac{1/2 - \{x\}}{x^{s+1}} \right| \leq \frac{1/2}{x^{\Re(s)+1}} \leq \frac{1}{2x^2}.$$

Par produit et somme de fonction continues, on conclut que  $\eta$  est continue sur  $\overline{D}$ .

Enfin, comme  $s \mapsto \frac{1}{s-1}$  est définie et continue sur  $\overline{D} \setminus \{1\}$ , on peut affirmer que l'expression :  
 $\zeta(s) = \eta(s) + \frac{1}{s-1}$  permet de prolonger  $\zeta$  en une fonction continue sur  $\overline{D} \setminus \{1\}$ . ■

On continuera à noter  $\zeta$  le prolongement continu précédemment établi.

#### DÉFINITION - PROPRIÉTÉ 1.4

Pour une fonction  $s \mapsto f(s)$  de la variable complexe  $s = \sigma + it$  on désigne par  $f'(s)$  la dérivée en  $x = \sigma$  de la fonction d'une variable réelle :  $x \mapsto f(x + it)$ .  
 Dans ce cadre :  $\zeta$  est dérivable sur  $\overline{D} \setminus \{1\}$  de dérivée continue.

**DÉMONSTRATION** Bien entendu, on va utiliser le prolongement précédent :

$$\forall s \in \overline{D} \setminus \{1\}, \quad \zeta(s) = \eta(s) + \frac{1}{s-1}.$$

Une somme de fonctions dérivables de dérivées continues est encore dérivable de dérivée continue.  
 En premier lieu :  $s \mapsto \frac{1}{s-1}$  est dérivable sur  $\overline{D} \setminus \{1\}$  de dérivée  $s \mapsto -\frac{1}{(s-1)^2}$  continue sur  $\overline{D} \setminus \{1\}$ .

En second lieu :  $\eta(s) = \frac{1}{2} + s \int_1^{+\infty} \frac{1/2 - \{x\}}{x^{s+1}} dx$  est dérivable de dérivée continue sur  $\overline{D}$  tout entier.  
 Pour montrer cela, on va utiliser le théorème de dérivation et continuité sous la signe intégrale.

L'application :  $\sigma \mapsto \frac{1/2 - \{x\}}{x^{\sigma+it+1}}$  est continument dérivable sur  $[1, +\infty[$  pour tout  $x \in [1, +\infty[$   
 de dérivée :  $\sigma \mapsto -\log(x) \frac{1/2 - \{x\}}{x^{\sigma+it+1}}$  qui est majorée en module pour tout  $\sigma \in [1, +\infty[$  par :  
 $x \mapsto \frac{\log(x)}{2x^2}$  intégrable sur  $[1, +\infty[$ , car égale à un  $\underset{x \rightarrow +\infty}{o} \left( \frac{1}{x^{3/2}} \right)$ .

Par théorème :  $\eta$  est continument dérivable sur  $\overline{D}$ . On obtient le résultat annoncé par somme. ■

Remarquons que si  $f : \mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^2$  est une fonction holomorphe, la limite du taux d'accroissement complexe existe et coïncide avec la dérivée partielle par rapport à l'axe réel :

$$\forall z = r + it \in \mathbb{C}, \quad \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h \in \mathbb{C}^*}} \left( \frac{f(z+h) - f(z)}{h} \right) = \frac{\partial f}{\partial r}(r + it).$$

La définition précédente est donc cohérente avec la théorie des fonctions holomorphes, non utilisée ici.

Pour obtenir davantage de propriétés sur la fonction  $\zeta$ , nous allons présenter le lien qu'Euler avait soulevé entre elle et les nombres premiers. Ce pont entre analyse et arithmétique justifie l'importance de la fonction  $\zeta$  dans la preuve du TNP.

## C Le produit d'Euler

Commençons par rappeler une propriété fondamentale due à Euclide.

**THÉORÈME 1.5**

L'ensemble des nombres premiers est infini. On notera  $(p_k)_{k \geq 1}$  la suite croissante de ces nombres.

**DÉMONSTRATION** Raisonnons par l'absurde. Supposons qu'il existe un nombre fini  $N$  de nombres premiers :  $p_1, \dots, p_N$ . Soit alors :

$$Q = \prod_{i=1}^N p_i + 1.$$

L'existence de la décomposition en facteurs premiers permet de trouver au moins un  $p_i$  qui divise  $Q$ . Comme  $p_i$  divise également  $\prod_{i=1}^N p_i$  alors  $p_i$  divise la différence, à savoir 1. Ce qui est impossible. Donc  $Q$  n'a pas de facteur premier strict, donc est premier et manifestement différent de tous les  $p_i$ , on a ainsi construit un nouveau nombre premier. Cela contredit l'hypothèse. ■

Venons-en à l'identité fondamentale qui fait le lien entre la fonction zêta de Riemann et les nombres premiers. Elle nous permettra, presque sans effort, de montrer que  $\zeta$  ne s'annule pas sur  $D$ , l'ensemble des nombres complexes de partie réelle strictement plus grande que 1.

**IDENTITÉ D'EULER 1.6**

$$\forall s \in D, \quad \zeta(s) = \prod_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{1 - p_k^{-s}}$$

**DÉMONSTRATION** On écrit :  $s = \sigma + it$  avec  $\sigma > 1$ . Comme  $p_k > 1$  :

$$\forall k \geq 1, \left| \frac{1}{p_k^s} \right| = \frac{1}{p_k^\sigma} < 1.$$

Dans ce cas :

$$\frac{1}{1 - p_k^{-s}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{p_k^{ns}}.$$

Fixons  $m, M \geq 1$  et  $s$  dans  $D$ , on développe :

$$\prod_{k=1}^m \sum_{i_k=0}^M \frac{1}{(p_k^{i_k})^s} = \sum_{i_1=0}^M \dots \sum_{i_m=0}^M \frac{1}{(p_1^{i_1} \dots p_m^{i_m})^s} = \sum_{0 \leq i_1, \dots, i_m \leq M} \frac{1}{(p_1^{i_1} \dots p_m^{i_m})^s} = \sum_{n \in A_{m,M}} \frac{1}{n^s}$$

où on a noté :  $A_{m,M} = \{n \in \mathbb{N}^*, n = p_1^{i_1} \dots p_m^{i_m}, i_1, \dots, i_m \in \llbracket 1, M \rrbracket\}$ .

À présent, considérons  $N \geq 1$ . Soit  $p_{m_0}$  et  $M_0$  respectivement le plus grand nombre premier  $p_i$  et la plus grande des puissances  $i_k$  apparaissant dans toutes les décompositions en facteurs premiers des  $N$  premiers entiers :  $1, \dots, N$ .

Explicitement, on a :  $p_{m_0} = \sup\{p \text{ premier}, p \leq N\}$ .

Ce qui permet de constater que :  $p_{m_0} \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} +\infty$ , et donc :  $m_0 \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} +\infty$ .

Soient :  $m \geq m_0$  et  $M \geq M_0$ , on a alors les inclusions suivantes :  $\llbracket 1, N \rrbracket \subset A_{m_0, M_0} \subset A_{m, M}$ . Ce qui permet d'écrire, pour tout  $s = \sigma + it \in D$  :

$$\left| \zeta(s) - \prod_{k=1}^m \sum_{i_k=0}^M \frac{1}{(p_k^{i_k})^s} \right| = \left| \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s} - \sum_{n \in A_{m,M}} \frac{1}{n^s} \right| = \left| \sum_{n \geq 1, n \notin A_{m,M}} \frac{1}{n^s} \right| \leq \sum_{n \geq 1, n \notin A_{m,M}} \frac{1}{n^\sigma} \leq \sum_{n \geq N} \frac{1}{n^\sigma}.$$

La dernière inégalité découle de l'inclusion :  $\mathbb{N} \setminus A_{m,M} \subset \llbracket N, +\infty \rrbracket$ .

L'inégalité étant vraie pour tout  $M \geq M_0$  on peut faire tendre  $M$  vers l'infini. Comme le produit sur  $k$  est fini, on obtient :

$$\left| \zeta(s) - \prod_{k=1}^m \sum_{i_k=0}^{+\infty} \frac{1}{(p_k^{i_k})^s} \right| \leq \sum_{n \geq N} \frac{1}{n^\sigma}.$$

Et grâce à la remarque du début de preuve :

$$\left| \zeta(s) - \prod_{k=1}^m \frac{1}{1 - p_k^{-s}} \right| \leq \sum_{n \geq N} \frac{1}{n^\sigma}.$$

Fixons dorénavant  $\sigma_0 > 1$  et prenons  $s \in D_{\sigma_0}$ . On a alors la majoration suivante, indépendante de  $s$  :

$$\left| \zeta(s) - \prod_{k=1}^m \frac{1}{1 - p_k^{-s}} \right| \leq \sum_{n \geq N} \frac{1}{n^{\sigma_0}}.$$

On passe au supremum sur  $D_{\sigma_0}$  :

$$\sup_{s \in D_{\sigma_0}} \left| \zeta(s) - \prod_{k=1}^m \frac{1}{1 - p_k^{-s}} \right| \leq \sum_{n \geq N} \frac{1}{n^{\sigma_0}}.$$

Le terme de droite est le reste d'une série convergente, donc tend vers 0 lorsque  $N$  tend vers l'infini. En remarquant que  $m \geq m_0 \xrightarrow[N \rightarrow +\infty]{} +\infty$ , on obtient finalement en passant à la limite :

$$\sup_{s \in D_{\sigma_0}} \left| \zeta(s) - \prod_{k=1}^m \frac{1}{1 - p_k^{-s}} \right| \xrightarrow{m \rightarrow +\infty} 0.$$

Ainsi :  $\prod_{k \geq 1} \frac{1}{1 - p_k^{-s}}$  converge uniformément vers  $\zeta(s)$  sur  $D_{\sigma_0}$  pour tout  $\sigma_0 > 1$ . On a donc convergence uniforme sur  $D$  tout entier et l'identité d'Euler en découle. ■

### CONSÉQUENCE 1.7

$$\forall s \in D, \quad \zeta(s) \neq 0$$

**DÉMONSTRATION** Soient  $s = \sigma + it \in D$  et  $k \geq 1$  fixés.

L'inégalité triangulaire donne :  $|1 - p_k^{-s}| \leq 1 + p_k^{-\sigma}$ . Par croissance et concavité du logarithme, on a :

$$\frac{\log(|1 - p_k^{-s}|)}{p_k^{-\sigma}} \leq \frac{\log(1 + p_k^{-\sigma})}{p_k^{-\sigma}} \leq 1.$$

L'ensemble des nombres premiers s'injecte dans l'ensemble des entiers naturels, donc :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} p_k^{-\sigma} \leq \sum_{n=1}^{+\infty} n^{-\sigma} < +\infty.$$

Cela entraîne la convergence de la série  $\sum_{k \geq 1} \log(|1 - p_k^{-s}|)$  pour tout  $s \in D$ .

Si on note  $L_s \in \mathbb{R}$  sa limite, on obtient :

$$\log \left( \prod_{k=1}^K |1 - p_k^{-s}| \right) \xrightarrow{K \rightarrow +\infty} L_s,$$

c'est-à-dire :

$$\left| \prod_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{1 - p_k^{-s}} \right| = \lim_{K \rightarrow +\infty} \left| \prod_{k=1}^K \frac{1}{1 - p_k^{-s}} \right| = e^{-L_s} > 0.$$

En invoquant l'Identité d'Euler 1.6, il vient donc que :

$$\forall s \in D, \quad |\zeta(s)| = e^{-L_s} > 0. \quad \blacksquare$$

À ce stade de l'argumentation on commence à se convaincre de l'importance la fonction  $\zeta$  dans la compréhension des nombres premiers. Une étude plus approfondie de cette fonction va maintenant être déterminante en vue des chapitres 3 et 4.

La dérivée logarithmique de  $\zeta$  fait naturellement apparaître la fonction  $\Lambda$  de Mangoldt. Évaluer le comportement de  $\zeta$  permet donc d'estimer celui de la série de Dirichlet associée à  $\Lambda$ . C'est précisément le but du second chapitre. Si l'on ajoute à cela LA FORMULE DE PERRON 3.4 établie dans le troisième chapitre, on aboutit presque directement au comportement asymptotique de la fonction sommatoire  $\psi$  de  $\Lambda$ . C'est dans le quatrième chapitre que cette synthèse magistrale a lieu. C'est également dans ce chapitre que nous expliciterons la relation entre la fonction  $\psi$  et le nombre de nombres premiers inférieurs à une grandeur donnée, ce qui terminera la preuve.

# Chapitre 2

## Majorations



es préliminaires du premier chapitre vont nous permettre d'établir différents résultats concernant le comportement de la fonction  $\zeta$  sur  $\overline{D} \setminus \{1\}$  et en particulier sur la bande

$$B \stackrel{\text{déf}}{=} \{s \in \mathbb{C}, 1 \leq \Re(s) \leq 2\}$$

privée de 1. Dans ce second chapitre on introduit également la fonction de Mangoldt et sa série de Dirichlet  $Z$  pour obtenir une majoration de la fonction  $F = Z - \zeta$ , primordiale pour la démonstration du TNP.

### A Non-annulation de la fonction zêta

Le but est maintenant d'aboutir à un résultat plus général que celui de la CONSÉQUENCE 1.7 : la fonction  $\zeta$  ne s'annule pas la droite  $\Re = 1$ , privée de 1. À cette fin, nous allons avoir besoin d'une inégalité importante sur la fonction  $\zeta$ . Pour l'obtenir, montrons d'abord un lemme. L'inégalité suivra à l'aide de l'Identité d'Euler 1.6.

#### LEMME 2.1

$$\forall x > 1, \forall s = \sigma + it \in D, \quad \log |1 - x^{-s}| = - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(nt \log(x))}{n x^{n\sigma}}$$

**DÉMONSTRATION** Utilisons le développement en série entière de la détermination principale du logarithme sur la boule ouverte de centre 0 et de rayon 1 :

$$\forall |z| < 1, \quad \log(1 - z) = - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^n}{n}.$$

Soit  $x > 1$  et  $s = \sigma + it \in D$ . On a :

$$\log |1 - x^{-s}| = \frac{1}{2} \log \left( (1 - x^{-s})(1 - \overline{x^{-s}}) \right) = \frac{1}{2} \log(1 - x^{-s}) + \frac{1}{2} \log(1 - x^{-\bar{s}}).$$

Le fait que  $|x^{-s}| = x^{-\sigma} < 1$  permet d'écrire :

$$\log |1 - x^{-s}| = -\frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{-ns}}{n} - \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{-n\bar{s}}}{n} = -\frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{-ns} + \overline{x^{-ns}}}{n} = -\frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2\Re(e^{-ns \log(x)})}{n}.$$

Comme  $e^{-ns \log(x)} = e^{-n\sigma \log(x)} (\cos(-nt \log(x)) + i \sin(-nt \log(x)))$ , on obtient le résultat :

$$\log |1 - x^{-s}| = - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{-n\sigma} \cos(-nt \log(x))}{n} = - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(-nt \log(x))}{nx^{n\sigma}}. \quad \blacksquare$$

Montrons à présent une inégalité qui nous servira plusieurs fois.

**PROPRIÉTÉ 2.2**

$$\forall \sigma > 1, \forall t \in \mathbb{R}, \quad |\zeta(\sigma)|^3 |\zeta(\sigma + it)|^4 |\zeta(\sigma + 2it)| \geq 1$$

**DÉMONSTRATION** Soit  $\theta \in \mathbb{R}$ . Remarquons que :

$$3 + 4 \cos(\theta) + \cos(2\theta) = 3 + 4 \cos(\theta) + 2 \cos^2(\theta) - 1 = 2(1 + 2 \cos(\theta) + \cos^2(\theta)) = 2(1 + \cos(\theta))^2 \geq 0$$

Soit  $p$  un nombre premier et  $\sigma > 1$ . Pour tout  $t \in \mathbb{R}$ , on a, d'après le LEMME 2.1 précédent :

$$\begin{aligned} & \log(|1 - p^{-\sigma}|^3 |1 - p^{-\sigma-it}|^4 |1 - p^{-\sigma-2it}|) \\ &= 3 \log |1 - p^{-\sigma}| + 4 \log |1 - p^{-\sigma-it}| + \log |1 - p^{-\sigma-2it}| \\ &= - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3 + 4 \cos(nt \log(p)) + \cos(2nt \log(p))}{np^{n\sigma}} \\ &\leq 0 \end{aligned}$$

car d'après la remarque précédente, le numérateur de la somme est positif. Ainsi :

$$|1 - p^{-\sigma}|^3 |1 - p^{-\sigma-it}|^4 |1 - p^{-\sigma-2it}| \leq 1,$$

et donc :

$$\frac{1}{|1 - p^{-\sigma}|^3} \frac{1}{|1 - p^{-\sigma-it}|^4} \frac{1}{|1 - p^{-\sigma-2it}|} \geq 1.$$

Cela est vrai pour tout nombre premier  $p$ . En prenant le produit infini et en utilisant la formule d'Euler, on obtient l'inégalité attendue :

$$\forall \sigma > 1, \forall t \in \mathbb{R}, \quad |\zeta(\sigma)|^3 |\zeta(\sigma + it)|^4 |\zeta(\sigma + 2it)| \geq 1. \quad \blacksquare$$

Venons-en maintenant à la seconde conséquence de l'IDENTITÉ D'EULER 1.6, qui généralise la première.

**CONSÉQUENCE 2.3**

$$\forall s \in \overline{D} \setminus \{1\}, \quad \zeta(s) \neq 0$$

**DÉMONSTRATION** On a déjà montré que  $\zeta$  ne s'annule pas sur  $D$ . Il s'agit donc de montrer que pour tout  $s \neq 1$  tel que  $\Re(s) = 1$ ,  $\zeta(s)$  ne s'annule pas. Pour cela on raisonne par l'absurde. Supposons qu'il existe  $\tau \neq 0$  tel que :  $\zeta(1 + i\tau) = 0$ .

On sait, d'après le premier chapitre, que  $\zeta$  est dérivable en  $1 + i\tau$ . En particulier :

$$\frac{\zeta(\sigma + i\tau) - \zeta(1 + i\tau)}{\sigma - 1} \xrightarrow{\sigma \rightarrow 1^+} \zeta'(1 + i\tau).$$

Sachant que :  $\zeta(1 + i\tau) = 0$ , on obtient :  $\zeta(\sigma + i\tau) = O_{\sigma \rightarrow 1^+}(\sigma - 1)$ .

De plus, la majoration :  $|\zeta(\sigma)| \leq \frac{\sigma}{\sigma - 1}$  donne :  $\zeta(\sigma) = O_{\sigma \rightarrow 1^+}\left(\frac{1}{\sigma - 1}\right)$ . Ensuite la continuité de  $\zeta$  en  $1 + 2i\tau$  permet d'avoir :  $\zeta(\sigma + 2i\tau) = O_{\sigma \rightarrow 1^+}(1)$ .

En regroupant ces trois comportements asymptotiques, il vient :

$$|\zeta(\sigma)|^3 |\zeta(\sigma + i\tau)|^4 |\zeta(\sigma + 2i\tau)| = O_{\sigma \rightarrow 1^+}\left(\frac{1}{(\sigma - 1)^3}\right) O_{\sigma \rightarrow 1^+}((\sigma - 1)^4) O_{\sigma \rightarrow 1^+}(1) = O_{\sigma \rightarrow 1^+}(\sigma - 1).$$

Cette quantité peut donc être rendue arbitrairement petite lorsque  $\sigma \rightarrow 1^+$ , ce qui contredit l'inégalité précédente. Conclusion : l'application  $t \neq 0 \mapsto \zeta(1 + it)$  ne s'annule jamais. ■

## B La fonction de Mangoldt

### DÉFINITION 2.4

La fonction de Mangoldt est définie pour tout  $n \geq 1$  par :

$$\Lambda(n) \stackrel{\text{déf}}{=} \begin{cases} \log(p) & \text{si } n = p^k \text{ avec } k \in \mathbb{N}^* \text{ et } p \text{ premier,} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Cette fonction va jouer un rôle important dans la démonstration du Théorème des Nombres Premiers. En effet : grâce à la formule de Perron établie dans le chapitre 3, on obtiendra le comportement asymptotique de la fonction sommatoire  $\psi : y \mapsto \sum_{1 \leq n \leq y} \Lambda(n)$ . Le TNP découlera alors du lien entre  $\psi$  et  $\pi$ .

Mais avant d'en arriver là, introduisons la série de Dirichlet de  $\Lambda(n)$  et exprimons-la en fonction de  $\zeta$ .

### DÉFINITION - PROPRIÉTÉ 2.5

Notons, pour tout  $s \in D$  de partie réelle strictement supérieure à 1 :

$$Z(s) \stackrel{\text{déf}}{=} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^s}$$

la série de Dirichlet de la fonction de Mangoldt. On a alors :

$$\forall s \in D, \quad \zeta(s)Z(s) = -\zeta'(s).$$

**DÉMONSTRATION** Montrons dans un premier temps que  $Z$  est bien définie et continue sur  $D$ . Soient  $\sigma_0 > 1$  et  $s \in D_{\sigma_0}$  fixés. Soit  $n > 0$  :

Toutes les applications  $s \mapsto \frac{1}{n^s}$  sont continues sur  $D$ .

S'il existe  $k > 0$  et  $p$  premier tel que :  $n = p^k$ , alors :  $\log(n) = k \log(p)$ .

Donc :  $\Lambda(n) = \frac{\log(n)}{k} \leq \log(n)$ . Sinon :  $\Lambda(n) = 0 \leq \log(n)$ . Ainsi :  $\left| \frac{\Lambda(n)}{n^s} \right| \leq \frac{\log(n)}{n^{\sigma_0}}$  donc :

$$\sup_{s \in D_{\sigma_0}} \left| \frac{\Lambda(n)}{n^s} \right| \leq \frac{\log(n)}{n^{\sigma_0}}.$$

On a ainsi majoré par le terme générale d'une série de Bertrand convergente (car  $\sigma_0 > 1$ ).

La série  $\sum_{n \geq 1} \frac{\Lambda(n)}{n^s}$  converge donc normalement sur  $D_{\sigma_0}$ . Ainsi  $Z$  est bien définie et continue sur  $D_{\sigma_0}$

pour tout  $\sigma_0 > 1$ , donc est bien définie et continue sur  $D$  tout entier.

Montrons maintenant l'égalité entre  $\zeta$ ,  $Z$  et  $\zeta'$ .

Soit  $s \in D$ . Connaissant la définition de  $\Lambda$ , on peut sommer seulement sur les entiers de la forme  $p^j$  avec  $j > 0$  et  $p$  premier :

$$Z(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^s} = \sum_{k=1}^{+\infty} \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{\log(p_k)}{(p_k^j)^s} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\log(p_k)}{p_k^s} \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{1}{(p_k^s)^j} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\log(p_k)}{p_k^s} \frac{1}{1 - p_k^{-s}},$$

série qui converge normalement (donc uniformément) vers  $Z(s)$  sur  $D_{\sigma_0}$  pour tout  $\sigma_0 > 1$ .

Notons dorénavant :

$$\forall s \in D, \forall n \geq 1, \quad P_n(s) = \prod_{k=1}^n \frac{1}{1 - p_k^{-s}}.$$

On a vu dans la preuve de l'identité d'Euler que  $(P_n)_{n \geq 1}$  converge uniformément vers  $\zeta$  sur  $D_{\sigma_0}$  pour tout  $\sigma_0 > 1$ .

La question qui se pose alors est la suivante : la suite  $(P'_n)_{n \geq 1}$  converge-t-elle uniformément vers  $\zeta'$  sur  $D_{\sigma_0}$  pour tout  $\sigma_0 > 1$  ?

Nous allons montrer que oui et l'égalité annoncée du même coup.

Commençons par dériver  $P_n$ .

Rappelons la formule de la dérivée logarithmique d'un produit :

Si  $f_1, \dots, f_n$  sont  $n$  fonctions dérivables qui ne s'annulent pas, alors :

$$\frac{(\prod_{k=1}^n f_k)'}{\prod_{k=1}^n f_k} = \sum_{k=1}^n \frac{f'_k}{f_k}.$$

$P_n$  est un produit fini de fonctions dérivables sur  $D$  qui ne s'y annulent pas, donc est dérivable sur  $D$  et ne s'annule pas. Et on a surtout :

$$\frac{P'_n(s)}{P_n(s)} = \sum_{k=1}^n \frac{-\frac{\log(p_k)p_k^{-s}}{(1 - p_k^{-s})^2}}{\frac{1}{1 - p_k^{-s}}} = \sum_{k=1}^n -\frac{\log(p_k)p_k^{-s}}{1 - p_k^{-s}}.$$

D'où :

$$P'_n(s) = -P_n(s) \sum_{k=1}^n \frac{\log(p_k)p_k^{-s}}{1 - p_k^{-s}}.$$

On a ainsi exprimé  $P'_n$  comme un produit de deux fonctions dont on sait qu'elles convergent uniformément respectivement vers  $-\zeta$  et  $Z$  sur tout  $D_{\sigma_0}$  avec  $\sigma_0 > 1$ . Pour conclure correctement, utilisons le principe selon lequel :

*Si  $(f_n)$  et  $(g_n)$  sont deux suites d'applications sur une partie  $A$  de  $\mathbb{C}$  qui convergent uniformément vers  $f$  et  $g$  respectivement avec  $f$  et  $g$  bornées sur  $A$ , alors :  $(f_n g_n)$  converge uniformément vers  $f g$  sur  $A$ .*

Il reste donc à borner  $\zeta$  et  $Z$  sur tout  $D_{\sigma_0}$  avec  $\sigma_0 > 1$ .

Soit  $s = \sigma + it \in D_{\sigma_0}$ , la première propriété du chapitre 1 offre :

$$|\zeta(s)| \leq \frac{\sigma}{\sigma - 1} = 1 + \frac{1}{\sigma - 1} \leq 1 + \frac{1}{\sigma_0 - 1} = \frac{\sigma_0}{\sigma_0 - 1} < +\infty.$$

Passons à  $Z$ . Comme :  $\left| \frac{\Lambda(n)}{n^s} \right| \leq \frac{\log(n)}{n^{\sigma_0}}$ , alors toujours grâce aux séries de Bertrand :

$$|Z(s)| \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\log(n)}{n^{\sigma_0}} < +\infty.$$

On peut alors appliquer le lemme à :  $A = D_{\sigma_0}$ ,  $f_n(s) = -P_n(s)$  et  $g_n(s) = \sum_{k=1}^n \frac{\log(p_k)p_k^{-s}}{1 - p_k^{-s}}$ .

On obtient que :  $(P'_n(s))$  converge uniformément vers  $-\zeta(s)Z(s)$  sur  $D_{\sigma_0}$ .

Mais comme  $(P_n)$  converge simplement vers  $\zeta$  sur  $D_{\sigma_0}$  (car uniformément), alors par théorème :  $\zeta' = -\zeta Z$  sur  $D_{\sigma_0}$  et cela pour tout  $\sigma_0 > 1$ . Conclusion :  $\zeta' = -\zeta Z$  sur  $D$  tout entier. ■

### CONSÉQUENCE 2.6

$Z$  est prolongeable en une fonction continue sur  $\overline{D} \setminus \{1\}$  par la formule :

$$\forall s \in \overline{D} \setminus \{1\}, \quad Z(s) = -\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}.$$

**DÉMONSTRATION** D'après ce qui précède :

$$\forall s \in D, \quad \zeta(s)Z(s) = -\zeta'(s).$$

Et comme l'a montré la CONSÉQUENCE 1.7 :

$$\forall s \in D, \quad \zeta(s) \neq 0.$$

Ce qui permet d'écrire :

$$\forall s \in D, \quad Z(s) = -\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} \quad (\star).$$

La propriété de PROLONGEMENT 1.3 et la CONSÉQUENCE 2.3 ont montrés que  $\zeta$  est une fonction continue sur  $\overline{D} \setminus \{1\}$  qui ne s'annule pas. Et d'après la DÉFINITION - PROPRIÉTÉ 1.4 :  $\zeta'$  est une fonction continue sur  $\overline{D} \setminus \{1\}$ . Par quotient :  $Z$  est se prolonge en une fonction continue sur  $\overline{D} \setminus \{1\}$  par l'égalité  $(\star)$ . ■

## C Majoration en vue du dernier chapitre

Établissons enfin la majoration fondamentale de ce chapitre (proposition 2.9). Pour l'obtenir nous devons évaluer le comportement asymptotique de  $\zeta$  et  $\zeta'$  sur la bande  $B = \{s \in \mathbb{C}, 1 \leq \Re(s) \leq 2\}$ . C'est précisément l'objet de la proposition suivante.

### PROPRIÉTÉ 2.7

$$\begin{aligned} \exists M_1 > 0, \exists T_1 > 0, \forall \sigma \in [1, 2], \forall |t| \geq T_1, & \quad |\zeta(\sigma + it)| \leq M_1 \log |t|, \\ \exists M_2 > 0, \exists T_2 > 0, \forall \sigma \in [1, 2], \forall |t| \geq T_2, & \quad |\zeta'(\sigma + it)| \leq M_2 \log^2 |t|. \end{aligned}$$

**DÉMONSTRATION** Rappelons la formule du reste.

$$\forall s \in D, \forall N \geq 1, \quad \zeta(s) - \sum_{n=1}^N \frac{1}{n^s} = s \int_N^{+\infty} \frac{1/2 - \{x\}}{x^{s+1}} dx + \frac{N^{1-s}}{s-1} - \frac{N^{-s}}{2}$$

La preuve de la propriété de prolongement a montré que, pour  $N = 1$ , cette expression est valable pour  $s \in \overline{D} \setminus \{1\}$ . Il est facile de voir que le même raisonnement vaut pour tout  $N \geq 1$ . La formule

du reste est donc vraie sur  $\overline{D} \setminus \{1\}$ , donc en particulier sur  $B \setminus \{1\}$ .

Soit donc :  $s = \sigma + it \in B \setminus \{1\}$ . Par inégalité triangulaire, on a :

$$|\zeta(s)| \leq \sum_{n=1}^N \left| \frac{1}{n^s} \right| + |s| \int_N^{+\infty} \left| \frac{1}{2x^{s+1}} \right| dx + \left| \frac{N^{1-s}}{s-1} \right| + \left| \frac{N^{-s}}{2} \right|.$$

Comme  $\sigma \geq 1$ , il vient :

$$|\zeta(s)| \leq \sum_{n=1}^N \frac{1}{n} + |s| \int_N^{+\infty} \frac{1}{2x^2} dx + \left| \frac{1}{s-1} \right| + \frac{1}{2}.$$

Or :  $\sum_{n=1}^N \frac{1}{n} \leq \log(N) + 1$  et  $\int_N^{+\infty} \frac{1}{2x^2} dx = \frac{1}{2N}$ .

Alors :

$$|\zeta(s)| \leq \log(N) + 1 + \frac{|s|}{2N} + \left| \frac{1}{s-1} \right| + \frac{1}{2}.$$

Pour  $|t| \geq 2$ , on a :  $\left| \frac{1}{s-1} \right| \leq \frac{1}{|t|} \leq \frac{1}{2}$ .

Tout cela étant vrai pour tout  $N \geq 1$ , on prend  $N = \lfloor |t| \rfloor$  de manière à avoir, par croissance du logarithme :

$$|\zeta(s)| \leq \log(\lfloor |t| \rfloor) + 1 + \frac{|\sigma + it|}{2\lfloor |t| \rfloor} + 1 \leq \log(|t|) + \frac{|\sigma + it|}{2\lfloor |t| \rfloor} + 2.$$

Sachant que  $1 \leq \sigma \leq 2$  et que  $|t| \geq 2$ , on a :

$$\left( \frac{|\sigma + it|}{2\lfloor |t| \rfloor} \right)^2 \leq \frac{4 + t^2}{4(|t| - 1)^2} \xrightarrow{|t| \rightarrow +\infty} \frac{1}{4},$$

donc :

$$\frac{|\sigma + it|}{2\lfloor |t| \rfloor} = O_{|t| \rightarrow +\infty}(1).$$

Cette majoration permet de se défaire de la dépendance en  $\sigma$ . Il existe donc une constante  $C > 0$  telle que pour tout  $1 \leq \sigma \leq 2$  et pour  $|t|$  suffisamment grand :

$$|\zeta(s)| \leq \log(|t|) + C + 2.$$

Ce qui se réécrit :  $\zeta(s) = O_{|t| \rightarrow +\infty}(\log |t|)$ .

Passons à la seconde égalité.

Écrivons à nouveau la formule du reste :

$$\forall s \in \overline{D} \setminus \{1\}, \forall N \geq 1, \quad \zeta(s) = \sum_{n=1}^N \frac{1}{n^s} + s \int_N^{+\infty} \frac{1/2 - \{x\}}{x^{s+1}} dx + \frac{N^{1-s}}{s-1} - \frac{N^{-s}}{2}.$$

Si on reprend la démonstration du fait que  $\eta$  est continument dérivable, on remarque qu'intégrer de 1 à  $+\infty$  n'est en rien utile dans le raisonnement. On peut tout à fait montrer, à l'aide du théorème de dérivabilité continue sous le signe intégrale, que l'application :  $s \mapsto \int_N^{+\infty} \frac{1/2 - \{x\}}{x^{s+1}} dx$  est dérivable de dérivée continue sur  $\overline{D} \setminus \{1\}$ .

Comme il en est de même des autres termes, on conclut que pour tout  $s \in B \setminus \{1\}$  on peut dériver la formule du reste :

$$\zeta'(s) = - \sum_{n=1}^N \frac{\log(n)}{n^s} + \int_N^{+\infty} \frac{1/2 - \{x\}}{x^{s+1}} dx + s \int_N^{+\infty} -\frac{1/2 - \{x\}}{x^{s+1}} \log(x) dx$$

$$+ \frac{-\log(N)N^{1-s}(s-1) - N^{s-1}}{(s-1)^2} - \frac{-\log(N)N^{-s}}{2},$$

soit :

$$\zeta'(s) = - \sum_{n=1}^N \frac{\log(n)}{n^s} + \int_N^{+\infty} \frac{1/2 - \{x\}}{x^{s+1}} (1 - s \log(x)) dx - \frac{\log(N)N^{1-s}}{s-1} - \frac{N^{1-s}}{(s-1)^2} + \frac{\log(N)N^{-s}}{2}.$$

Comme  $1 \leq \sigma \leq 2$  et que l'on prend  $|t| \geq 2$ , alors, comme pour la majoration de  $|\zeta(s)|$ , on a :

$$|\zeta'(s)| \leq \sum_{n=2}^N \frac{\log(n)}{n} + \int_N^{+\infty} \frac{1 + |s| \log(x)}{2x^2} dx + \frac{\log(N)}{2} + \frac{1}{4} + \frac{\log(N)}{2N}.$$

La décroissance de  $x \mapsto \frac{\log(x)}{x}$  sur  $[3, +\infty[$  permet d'obtenir la majoration :

$$\sum_{n=4}^N \frac{\log(n)}{n} \leq \int_3^N \frac{\log(x)}{x} dx \leq \int_1^N \frac{\log(x)}{x} dx.$$

Cela permet d'avoir :

$$|\zeta'(s)| \leq \frac{\log(2)}{2} + \frac{\log(3)}{3} + \int_1^N \frac{\log(x)}{x} dx + \int_N^{+\infty} \frac{dx}{2x^2} + \int_N^{+\infty} \frac{|s| \log(x)}{2x^2} dx + \frac{1}{4} + \frac{\log(N)}{2} + \frac{\log(N)}{2N}.$$

Ensuite on calcule les trois intégrales et on majore grossièrement les deux dernier termes par  $\log(N)$  :

$$|\zeta'(s)| \leq \frac{\log(2)}{2} + \frac{\log(3)}{3} + \frac{\log^2(N)}{2} + \frac{1}{2N} + \frac{|s|}{2} \frac{1 + \log(N)}{N} + \frac{1}{4} + \log(N).$$

En majorant  $\frac{1}{2N}$  par 1 et en notant  $K = \frac{\log(2)}{2} + \frac{\log(3)}{3} + 1 + \frac{1}{4}$ , on obtient :

$$|\zeta'(s)| \leq K + \frac{\log^2(N)}{2} + \frac{|s|}{2} \frac{1 + \log(N)}{N} + \log(N).$$

Choisissons à nouveau  $N = \lfloor |t| \rfloor$ . Comme  $\log$  et  $\log^2$  croissent, on a, pour  $|t|$  grand :

$$|\zeta'(s)| \leq K + \frac{3}{2} \log^2(|t|) + \frac{|\sigma + it|}{2} \frac{1 + \log(|t|)}{|t| - 1}.$$

Cependant pour  $1 \leq \sigma \leq 2$  et  $|t|$  grand :

$$\left( \frac{|\sigma + it|}{2} \frac{1 + \log(|t|)}{|t| - 1} \right)^2 \leq \frac{4 + t^2}{4(|t| - 1)^2} (\log(|t|) + 1)^2 = O_{|t| \rightarrow +\infty}(\log^2 |t|).$$

Inégalité qui est uniforme en  $\sigma$ .

Finalement, pour  $|t|$  grand :

$$|\zeta'(\sigma + it)| \leq O_{|t| \rightarrow +\infty}(\log^2 |t|),$$

ce que l'on voulait. ■

Nous aurons également besoin de la proposition suivante, où l'on évalue cette fois l'asymptotique de l'inverse de  $\zeta$  sur  $B$ .

#### PROPRIÉTÉ 2.8

$$\exists m_0 > 0, \exists T > 0, \forall 1 \leq \sigma \leq 2, \forall |t| \geq T, \quad |\zeta(\sigma + it)| \geq \frac{m_0}{\log^7 |t|}.$$

**DÉMONSTRATION** Utilisons la PROPRIÉTÉ 2.7 précédente :

$$\exists M_1 > 0, \exists T_1 > 0, \forall \sigma \in [1, 2], \forall |t| \geq T_1, \quad |\zeta(\sigma + it)| \leq M_1 \log |t|; \quad (1)$$

$$\exists M_2 > 0, \exists T_2 > 0, \forall \sigma \in [1, 2], \forall |t| \geq T_2, \quad |\zeta'(\sigma + it)| \leq M_2 \log^2 |t| \quad (2).$$

Ainsi pour  $T = \max(T_1, T_2, 2)$  :

$$\exists M_1 > 0, \exists M_2 > 0, \forall \sigma \in [1, 2], \forall |t| \geq T, \quad |\zeta(\sigma + it)| \leq M_1 \log |t|, \quad |\zeta'(\sigma + it)| \leq M_2 \log^2 |t|.$$

Fixons maintenant  $|t| \geq T$  de manière à avoir les inégalités précédentes.

Soit  $\epsilon > 0$  (dépendant de  $T$ ) tel que :  $S_t := 1 + \frac{\epsilon}{\log^9 |t|} \leq 2$   $(\star)$ .

Minorons  $|\zeta(\sigma + it)|$  dans les cas :  $1 \leq \sigma < S_t$  et  $S_t \leq \sigma \leq 2$ . On aura alors le résultat pour tout  $\sigma \in [1, 2]$ .

Lorsque  $1 < S_t \leq \sigma \leq 2$ , on peut appliquer l'inégalité de la PROPRIÉTÉ 2.2 :

$$\left| \frac{1}{\zeta(\sigma + it)} \right| \leq |\zeta(\sigma)|^{3/4} |\zeta(\sigma + 2it)|^{1/4}.$$

D'après la DÉFINITION-PROPRIÉTÉ 1.1 :  $|\zeta(\sigma)|^{3/4} \leq \frac{\sigma^{3/4}}{(\sigma - 1)^{3/4}}$ .

Combiné à l'inégalité (1), on obtient :

$$\left| \frac{1}{\zeta(\sigma + it)} \right| \leq \frac{\sigma^{3/4}}{(\sigma - 1)^{3/4}} M_1^{1/4} (\log |2t|)^{1/4}.$$

Mais ici :  $\sigma - 1 \geq \frac{\epsilon}{\log^9 |t|}$ , donc :  $\frac{1}{(\sigma - 1)^{3/4}} \leq \frac{\log^{27/4} |t|}{\epsilon^{3/4}}$ .

De plus, pour  $|t| \geq 2$  :  $\log |2t| = \log(2) + \log |t| \leq 2 \log |t|$ .

D'où :

$$\left| \frac{1}{\zeta(\sigma + it)} \right| \leq \frac{2^{3/4} M_1^{1/4} 2^{1/4} \log^{27/4} |t| \log^{1/4} |t|}{\epsilon^{3/4}} = \frac{\log^7 |t|}{A \epsilon^{3/4}} \quad (\star\star),$$

où :  $A = \frac{1}{2M_1^{1/4}}$ .

Lorsque :  $1 \leq \sigma < S_t$ , on écrit :

$$\int_{\sigma}^{S_t} \zeta'(x + it) dx = \zeta(S_t + it) - \zeta(\sigma + it).$$

Donc :

$$|\zeta(\sigma + it)| = \left| \zeta(S_t + it) - \int_{\sigma}^{S_t} \zeta'(x + it) dx \right| \geq |\zeta(S_t + it)| - \left| \int_{\sigma}^{S_t} \zeta'(x + it) dx \right|$$

Ainsi :

$$|\zeta(\sigma + it)| \geq |\zeta(S_t + it)| - \int_{\sigma}^{S_t} |\zeta'(x + it)| dx \geq \frac{A \epsilon^{3/4}}{\log^7 |t|} - (S_t - \sigma) M_2 \log^2 |t|.$$

La dernière inégalité s'obtenant d'une part en remarquant que  $S_t \leq 2$  ce qui permet d'utiliser la majoration  $(\star\star)$  et d'autre part en utilisant (2).

Comme :  $S_t - \sigma = 1 - \sigma + \frac{\epsilon}{\log^9 |t|} \leq \frac{\epsilon}{\log^9 |t|}$ , alors :

$$|\zeta(\sigma + it)| \geq \frac{A \epsilon^{3/4}}{\log^7 |t|} - \frac{\epsilon M_2}{\log^7 |t|} = \frac{\epsilon^{3/4} A - \epsilon M_2}{\log^7 |t|}.$$

L'étude de l'application :  $f : \epsilon > 0 \mapsto \epsilon^{3/4}A - \epsilon M_2$  montre que pour  $\epsilon > 0$  suffisamment petit, on a :  $f(\epsilon) > 0$ . Soit  $\epsilon_0 > 0$  vérifiant cela et  $(\star)$ , notons :  $m_1 = f(\epsilon_0) > 0$ .

Remarquons que  $\epsilon_0$  dépend de  $A$ ,  $M_2$  et  $T$ , donc de  $M_1$ ,  $M_2$  et  $T$  et non de  $\sigma$ .

On obtient :

$$\forall 1 \leq \sigma < S_t, |\zeta(\sigma + it)| \geq \frac{m_1}{\log^7 |t|}.$$

Si l'on introduit  $m_2 = A\epsilon_0^{3/4}$ , la majoration  $(\star\star)$  se réécrit :

$$\forall S_t \leq \sigma \leq 2, |\zeta(\sigma + it)| \geq \frac{m_2}{\log^7 |t|}.$$

Reste à choisir :  $m_0 = \max(m_1, m_2)$ , pour l'inégalité attendue :

$$\exists m_0 > 0, \exists T > 0, \forall 1 \leq \sigma \leq 2, \forall |t| \geq T, \quad |\zeta(\sigma + it)| \geq \frac{m_0}{\log^7 |t|}.$$

■

On est maintenant en mesure d'atteindre l'objectif de ces deux premiers chapitres.

#### DÉFINITION - PROPRIÉTÉ 2.9

Définissons, pour tout  $s \in D$  :

$$F(s) \stackrel{\text{déf}}{=} Z(s) - \zeta(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\Lambda(n) - 1}{n^s}$$

On a alors le résultat :  $F$  est prolongeable en une fonction continue sur  $\overline{D}$  tout entier et vérifie :

$$\exists M > 0, \forall 1 \leq \sigma \leq 2, \forall t \in \mathbb{R}, \quad |F(\sigma + it)| \leq M \log^9(2 + |t|)$$

**DÉMONSTRATION** La PROPRIÉTÉ DE PROLONGEMENT 1.3 et la CONSÉQUENCE 2.6 montrent que  $F$  définit une application continue sur  $\overline{D} \setminus \{1\}$  et que l'on a :

$$\forall s \in \overline{D} \setminus \{1\}, \quad F(s) = -\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} - \zeta(s).$$

Étudions le comportement de  $F$  en 1.

On utilise la PROPRIÉTÉ DE PROLONGEMENT 1.3 et la DÉFINITION-PROPRIÉTÉ 1.4.

Il existe  $\eta : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  dérivable de dérivée continue sur  $\overline{D}$  telle que :

$$\forall s \in \overline{D} \setminus \{1\}, \quad \zeta(s) = \eta(s) + \frac{1}{s-1}.$$

On obtient, pour tout  $s \in \overline{D} \setminus \{1\}$  :

$$F(s) = -\frac{\eta'(s) - \frac{1}{(s-1)^2}}{\eta(s) + \frac{1}{s-1}} - \eta(s) - \frac{1}{s-1} = \frac{\frac{1}{s-1} - (s-1)\eta'(s)}{1 + (s-1)\eta(s)} - \frac{\eta(s) + \frac{1}{s-1}}{1 + (s-1)\eta(s)} - \eta(s).$$

Donc :

$$F(s) = -\frac{\eta(s) + (s-1)\eta'(s)}{1 + (s-1)\eta(s)} - \eta(s) \xrightarrow{s \rightarrow 1} -2\eta(1),$$

car  $\eta$  et  $\eta'$  sont continues en 1 (voir la démonstration de la DÉFINITION-PROPRIÉTÉS 1.4).

Donc  $F$  est bien prolongeable en une fonction continue sur  $\overline{D}$  tout entier.

Passons à la majoration de  $|F|$  sur la bande  $B = \{\sigma + it \in \mathbb{C}, 1 \leq \sigma \leq 2\}$ .

On va d'abord établir le comportement asymptotique de  $F$  sur la bande. On sera ensuite ramené à un compact.

Montrons que :

$$\exists M > 0, \exists T > 0, \forall 1 \leq \sigma \leq 2, \forall |t| \geq T, \quad |F(\sigma + it)| \leq M \log^9 |t| \quad (\star)$$

On va utiliser les PROPRIÉTÉS 2.7 et 2.8.

Si l'on regroupe les trois comportements asymptotiques on obtient l'existence de  $T, M_1, M_2, M_3 > 0$  tels que pour tout  $\sigma \in [1, 2]$  et tout  $|t| \geq T$  :

$$|\zeta(\sigma + it)| \leq M_1 \log |t|, \quad |\zeta'(\sigma + it)| \leq M_2 \log^2 |t|, \quad \left| \frac{1}{\zeta(\sigma + it)} \right| \leq M_3 \log^7 |t|.$$

Dans ce cas :

$$|F(\sigma + it)| \leq |\zeta(\sigma + it)| + |Z(\sigma + it)| = |\zeta(\sigma + it)| + \left| \frac{\zeta'(\sigma + it)}{\zeta(\sigma + it)} \right| \leq M_1 \log |t| + M_2 (\log^2 |t|) M_3 \log^7 |t|.$$

Mais :

$$\frac{\log |t|}{\log^9 |t|} = \frac{1}{\log^8 |t|} \leq \frac{1}{\log^8 T}.$$

D'où :

$$|F(\sigma + it)| \leq \left( \frac{M_1}{\log^8 T} + M_2 M_3 \right) \log^9 |t| = m_0 \log^9 |t|.$$

Cela montre  $(\star)$ .

Il reste à contrôler  $|F|$  sur le compact :  $K = [1, 2] + i[-T, T]$ .

$F$  a été prolongée sur  $\overline{D}$  de manière continue, donc est continue sur  $K$  compact, donc est bornée :

$$\exists m_1 > 0, \forall \sigma \in [1, 2], \forall |t| \leq T, \quad |F(\sigma + it)| \leq m_1 \log^9 2.$$

On regroupe ces deux majorations en une seule :

$$\exists m_0 > 0, \exists m_1 > 0, \forall \sigma \in [1, 2], \forall t \in \mathbb{R}, \quad |F(\sigma + it)| \leq m_0 \log^9 |t| + m_1 \log^9 2.$$

En notant  $M = 2 \max(m_0, m_1)$  et en utilisant la croissance de  $\log^9$ , on obtient finalement :

$$\forall \sigma \in [1, 2], \forall t \in \mathbb{R}, \quad |F(\sigma + it)| \leq M \log^9(2 + |t|).$$

Cela achève la preuve. ■

## Chapitre 3

# La formule de Perron



n établit dans ce chapitre une formule intégrale, reliant une série de Dirichlet à sa fonction sommatoire, célèbre en théorie des nombres. Ce résultat se déduit traditionnellement du fameux *théorème des résidus* de la théorie des fonctions holomorphes. Fidèles à notre engagement, nous nous passerons de ces résultats puissants, en démontrant cette formule au moyen du théorème d'inversion des transformées de Fourier dans  $L^2$ . Une fois établie, cette formule nous amènera à une identité importante dans la démonstration du TNP.

### A Un premier calcul d'intégrale

Dans cette section, nous allons calculer, pour  $x > 0$ ,  $\sigma > 0$  deux réels strictement positifs, l'intégrale suivante :

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{x^{\sigma+it}}{\sigma+it} dt,$$

et nous invoquerons pour cela le lemme suivant.

#### LEMME 3.1

Pour tout  $x$  réel, on a les formules :

$$C(x) \stackrel{\text{déf}}{=} \int_0^{+\infty} \frac{\cos(xt)}{1+t^2} dt = \frac{\pi}{2} e^{-|x|},$$

$$S(x) \stackrel{\text{déf}}{=} \int_0^{+\infty} \frac{t \sin(xt)}{1+t^2} dt = \frac{\pi}{2} \text{signe}(x) e^{-|x|}.$$

**DÉMONSTRATION** Le calcul de  $C(x)$  étant plus facile que celui de  $S(x)$ , nous nous contenterons de montrer seulement la seconde formule :

$$S(x) \stackrel{\text{déf}}{=} \int_0^{+\infty} \frac{t \sin(xt)}{1+t^2} dt = f(x) \quad \text{où} \quad f \stackrel{\text{déf}}{=} x \in \mathbb{R} \mapsto \frac{\pi}{2} \text{signe}(x) e^{-|x|}.$$

Ce résultat découle du théorème d'inversion pour la transformée de Fourier dans  $L^2(\mathbb{R})$ . Commençons donc par invoquer ce théorème. La fonction  $f$  étant clairement de carré intégrable, la formule d'inversion est légitime :

$$\text{pour presque tout } x, \quad \mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}(f))(x) = f(x). \quad (3.1)$$

De plus,  $f$  est intégrable donc sa transformée de Fourier est donnée par la formule :

$$\mathcal{F}(f)(t) \stackrel{\text{déf}}{=} \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-ixt} dx = \frac{\pi}{2} \left( \int_0^{+\infty} e^{(-1-it)x} dx - \int_{-\infty}^0 e^{(1-it)x} dx \right) = \frac{-i\pi t}{1+t^2}.$$

La difficulté vient de la non-intégrabilité de  $\mathcal{F}(f)$ . En effet, si on imagine un instant que  $\mathcal{F}(f)$  est  $L^1$  sur  $\mathbb{R}$ , alors on obtient, pour presque tout  $x$  réel :

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \left( \frac{-i\pi t}{1+t^2} \right) e^{+itx} dt.$$

C'est-à-dire, puisque  $f(x)$  est réel :

$$f(x) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} \frac{t \sin(xt)}{1+t^2} dt = \int_0^{+\infty} \frac{t \sin(xt)}{1+t^2} dt.$$

Il restera donc, pour conclure, à justifier que l'égalité presque partout, jointe à un argument de continuité, fournit une égalité pour tout  $x$  réel. C'est ce que nous exposerons à la fin de la démonstration ; pour le moment, justifions le fait que la transformée de Fourier inverse de  $\mathcal{F}(f)$  au sens  $L^2$  est bien ce à quoi l'on s'attend :

$$\mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}(f))(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \left( \frac{-i\pi t}{1+t^2} \right) e^{+itx} dt.$$

Par définition, on a seulement :

$$\mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}(f)) = \lim \mathcal{F}^{-1}(g) \quad \text{où } g \longrightarrow \mathcal{F}(f) \text{ au sens } L^2$$

Introduisons alors, pour  $\epsilon > 0$ , la fonction :

$$g_\epsilon \stackrel{\text{déf}}{=} \mathbb{R} \ni t \longmapsto \mathcal{F}(f)(t) e^{-\epsilon t^2} = \frac{-i\pi t}{1+t^2} e^{-\epsilon t^2} \in L^1 \cap L^2.$$

Voyons d'abord que ces  $(g_\epsilon)_\epsilon$  convergent bien vers  $\mathcal{F}(f)$  au sens  $L^2$  quand  $\epsilon$  tend vers 0. Cela découle immédiatement du théorème de convergence dominée de Lebesgue ; en effet, l'hypothèse de domination est aussitôt vérifiée :

$$|g_\epsilon(t)|^2 = \frac{\pi^2 t^2}{(1+t^2)^2} e^{-2\epsilon t^2} \leq \frac{\pi^2 t^2}{(1+t^2)^2} \in L^1.$$

À ce stade, on sait donc que  $f$  est presque partout égale à la limite des  $\mathcal{F}^{-1}(g_\epsilon)$  au sens  $L^2$ , qui existe comme limite abstraite d'une suite de Cauchy dans l'espace de Banach  $L^2$ . On sait par aussi que, quitte à extraire, une limite en norme  $L^2$  implique une limite simple presque partout.

Pour  $x > 0$  strictement positif, montrons alors que :

$$\mathcal{F}^{-1}(g_\epsilon)(x) \longrightarrow S(x) \stackrel{\text{déf}}{=} \int_0^{+\infty} \frac{t \sin(xt)}{1+t^2} dt \quad \text{quand } \epsilon \text{ tend vers } 0.$$

Remarquons que le cas où  $x < 0$  est strictement négatif en découle immédiatement par symétrie. On ne peut bien sûr pas appliquer le théorème de convergence dominée de Lebesgue, toujours à cause de la non-intégrabilité de  $\mathcal{F}(f)$ . On va plutôt découper l'intégrale pour profiter du changement de signe de  $\sin(xt)$ , raison pour laquelle l'intégrale de  $\mathcal{F}(f)$  est semi-convergente. Tout d'abord, par parité, on a :

$$\mathcal{F}^{-1}(g_\epsilon)(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} g_\epsilon(t) e^{+itx} dt = \int_0^{+\infty} \frac{t}{1+t^2} e^{-\epsilon t^2} \sin(xt) dt$$

c'est-à-dire :

$$\mathcal{F}^{-1}(g_\epsilon)(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(\epsilon) \quad \text{où } u_n(\epsilon) \stackrel{\text{déf}}{=} \int_{2n\pi/x}^{2(n+1)\pi/x} \frac{t}{1+t^2} e^{-\epsilon t^2} \sin(xt) dt.$$

Or, il est tout à fait clair que :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} u_n(\epsilon) = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_{2n\pi/x}^{2(n+1)\pi/x} \frac{t}{1+t^2} \sin(xt) dt = S(x),$$

donc il s'agit donc de montrer que l'on peut dominer  $u_n(\epsilon)$  indépendamment de  $\epsilon$  par le terme général d'une série convergente, afin de pouvoir sortir la limite à l'extérieure de la somme. En effectuant le changement de variables  $t \leftrightarrow t - \pi/x$  :

$$\begin{aligned} u_n(\epsilon) &= \int_{2n\pi/x}^{2(n+1)\pi/x} \frac{t}{1+t^2} e^{-\epsilon t^2} \sin(xt) dt + \int_{(2n+1)\pi/x}^{2(n+1)\pi/x} \frac{t}{1+t^2} e^{-\epsilon t^2} \sin(xt) dt \\ &= \int_{2n\pi/x}^{2(n+1)\pi/x} \left( \frac{t}{1+t^2} e^{-\epsilon t^2} - \frac{t+\pi/x}{1+(t+\pi/x)^2} e^{-\epsilon(t+\pi/x)^2} \right) \sin(xt) dt \\ &= \int_{2n\pi/x}^{2(n+1)\pi/x} \left( \int_{t+\pi/x}^t \frac{d}{ds} \left( \frac{s}{1+s^2} e^{-\epsilon s^2} \right) ds \right) \sin(xt) dt. \end{aligned}$$

Or, l'étude facile de la fonction  $x \mapsto x e^{-x}$  montre que,

quel que soit  $s > 0$ ,  $\epsilon s^2 e^{-\epsilon s^2} \leq e^{-1}$  et donc :

$$\left| \frac{d}{ds} \left( \frac{s}{1+s^2} e^{-\epsilon s^2} \right) \right| = \left| \frac{(1-s^2)e^{-\epsilon s^2}}{(1+s^2)^2} - 2\frac{\epsilon s^2 e^{-\epsilon s^2}}{1+s^2} \right| \leq \frac{1+s^2}{(1+s^2)^2} + 2\frac{e^{-1}}{1+s^2} = \frac{1+2e^{-1}}{1+s^2}$$

On en déduit alors, par inégalité triangulaire, que :

$$|u_n(\epsilon)| \leq \int_{2n\pi/x}^{2(n+1)\pi/x} (t+\pi/x-t) \sup_{t \leq s \leq t+\pi/x} \left( \frac{1+2e^{-1}}{1+s^2} \right) \sin(xt) dt$$

et on obtient bien la majoration uniforme recherchée :

$$|u_n(\epsilon)| \leq \frac{\pi}{x} (1+2e^{-1}) \int_{2n\pi/x}^{2(n+1)\pi/x} \frac{1}{1+t^2} dt,$$

le membre de droite étant clairement un terme général de série positive convergente car la fonction  $t \mapsto \frac{1}{1+t^2}$  est intégrable sur  $[0, +\infty[$ . On a donc montré que :

$$\forall x > 0, \quad \mathcal{F}^{-1}(g_\epsilon)(x) \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} S(x).$$

L'égalité (3.1) étant seulement valable pour presque tout  $x$ , il reste donc à justifier que l'on a en fait l'égalité partout. À cette fin, nous allons utiliser le fait que deux fonction continues égales presque partout sont égales. En effet, par contraposée, si  $f_1$  et  $f_2$  sont deux fonctions continues telles que  $f_1(x_0) \neq f_2(x_0)$  pour un certain  $x_0$ , alors on peut trouver par continuité un voisinage de  $x_0$  sur lequel  $f_1$  et  $f_2$  ne coïncident pas, et donc  $f_1$  et  $f_2$  ne sont pas égales presque partout.

En tant que composée de fonctions continues, la fonction  $f$  est continue sur  $]0, +\infty[$ , donc il suffit de montrer que l'intégrale est aussi continue sur  $]0, +\infty[$  pour aboutir à l'égalité entre  $S$  et

$f$  sur tout  $]0, +\infty[$ , et donc par symétrie sur tout  $\mathbb{R}$  car l'égalité est immédiate en  $x = 0$ . Atteignons donc à cette tâche et fixons un réel  $x > 0$  strictement positif. En effectuant le changement de variable  $t \leftrightarrow xt$ , il vient que :

$$S(x) = \int_0^{+\infty} \frac{t \sin(t)}{x^2 + t^2} dt. \quad (3.2)$$

Soit  $t \geq 0$  un réel positif ou nul. Donnons-nous un  $0 < \epsilon_x < x$  de telle sorte que pour tout  $y$  tel que  $|y - x| < \epsilon_x$ , on ait :

$$\left| \frac{1}{y^2 + t^2} - \frac{1}{x^2 + t^2} \right| = \left| \frac{(x+y)(x-y)}{(y^2 + t^2)(x^2 + t^2)} \right| \leq |y - x| \frac{2(x + \epsilon_x)}{((x - \epsilon_x)^2 + t^2)^2}.$$

Et donc pour tout  $y$  tel que  $|y - x| < \epsilon_x$ , l'égalité (3.2) restant évidemment valable quel que soit  $y > 0$ , on a donc :

$$|S(y) - S(x)| \leq |y - x| \int_0^{+\infty} \frac{2(x + \epsilon_x)}{((x - \epsilon_x)^2 + t^2)^2} t |\sin(t)| dt,$$

d'où :

$$|S(y) - S(x)| \longrightarrow 0 \quad \text{quand} \quad y \rightarrow x$$

ce qui montre bien que  $S$  est continue sur  $]0, +\infty[$ . ■

Nous sommes à présent en mesure de calculer l'intégrale annoncée en début de section.

### PROPRIÉTÉ 3.2

Pour tout  $x > 0$ ,  $\sigma > 0$  deux réels strictement positifs, on a :

$$P_\sigma(x) \stackrel{\text{déf}}{=} \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{x^{\sigma+it}}{\sigma + it} dt = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 1, \\ 1/2 & \text{si } x = 1, \\ 0 & \text{si } 0 < x < 1. \end{cases}$$

**DÉMONSTRATION** Soient comme dans l'énoncé,  $x > 0$  et  $\sigma > 0$  deux réels strictement positifs. On commence par se ramener sur l'intervalle  $[0, T]$ , pour  $T \geq 0$ , en écrivant :

$$\begin{aligned} \int_{-T}^T \frac{x^{\sigma+it}}{\sigma + it} dt &= \int_0^T \left( \frac{x^{\sigma+it}}{\sigma + it} + \frac{x^{\sigma-it}}{\sigma - it} \right) dt \\ &= \int_0^T \frac{\sigma(x^{\sigma+it} + x^{\sigma-it}) - it(x^{\sigma+it} - x^{\sigma-it})}{(\sigma + it)(\sigma - it)} dt \\ &= 2x^\sigma \int_0^T \frac{\sigma \cos(t \log(x)) + t \sin(t \log(x))}{\sigma^2 + t^2} dt. \end{aligned}$$

D'où, en effectuant le changement de variables  $t \leftrightarrow \sigma t$  :

$$\int_{-T}^T \frac{x^{\sigma+it}}{\sigma + it} dt = 2x^\sigma \left( \int_0^{T/\sigma} \frac{\cos(t \log(x))}{1 + t^2} dt + \int_0^{T/\sigma} \frac{t \sin(t \log(x))}{1 + t^2} dt \right).$$

D'après le LEMME 3.1 précédent, on trouve alors que :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^{\sigma+it}}{\sigma + it} dt = 2x^\sigma (C(\sigma \log(x)) + S(\sigma \log(x))),$$

et donc la formule recherchée, en discutant la place de  $x$  par rapport à 1. ■

## B Une intégrale intermédiaire

### PROPRIÉTÉ 3.3

Pour tout  $x \geq 0$  positif ou nul et  $\sigma > 0$  strictement positif :

$$Q_\sigma(x) \stackrel{\text{déf}}{=} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^{\sigma+it+1}}{(\sigma+it)(\sigma+it+1)} dt = \begin{cases} x-1 & \text{si } x > 1, \\ 0 & \text{si } 0 \leq x \leq 1. \end{cases}$$

**DÉMONSTRATION** L'hypothèse de domination n'étant pas vérifiée, nous ne pouvons pas invoquer le théorème de convergence dominée pour obtenir  $Q'_\sigma = P_\sigma$ , ce qui permettrait quasiment de conclure, au moins de manière formelle. Nous allons donc le montrer autrement, en établissant la convergence uniforme locale de la suite de fonctions  $(f'_n)_n$  vers  $P_\sigma$  sur  $]0, 1[ \cup ]1, +\infty[$ , où :

$$\forall x > 0, \forall n \geq 1, \quad f_n(x) \stackrel{\text{déf}}{=} \frac{1}{2\pi} \int_{-n}^n \frac{x^{\sigma+it+1}}{(\sigma+it)(\sigma+it+1)} dt.$$

Pour  $n \geq 1$ , le support de l'intégrale définissant  $f_n(x)$  étant compact, la continue dérivabilité de l'intégrande par rapport à  $x$  suffit pour légitimer la dérivabilité de  $f_n$  sous le signe intégrale :

$$f'_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-n}^n \frac{x^{\sigma+it}}{\sigma+it} dt. \quad (3.3)$$

Si  $x > 0$  est différent de 1, l'intégration par parties :

$$\begin{cases} du = x^{\sigma+it} dt \\ v = \frac{1}{\sigma+it} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u = \frac{x^{\sigma+it}}{i \log(x)} dt \\ dv = \frac{-idt}{(\sigma+it)^2}, \end{cases}$$

donne que :

$$f'_n(x) = \frac{x^\sigma}{2i\pi \log(x)} \left( \frac{x^{in}}{\sigma+in} - \frac{x^{-in}}{\sigma-in} + \int_{-n}^n \frac{ix^{it}}{(\sigma+it)^2} dt \right).$$

Mais d'après (3.3),  $P_\sigma(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} (f'_n(x))$ , donc :

$$P_\sigma(x) = \frac{x^\sigma}{2i\pi \log(x)} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{ix^{it}}{(\sigma+it)^2} dt,$$

ce qui donne, par inégalité triangulaire :

$$|f'_n(x) - P_\sigma(x)| \leq \left| \frac{x^\sigma}{2i\pi \log(x)} \right| \left( \frac{2}{n} + \int_{|t|>n} \frac{1}{t^2} dt \right) \leq \frac{2x^\sigma}{\pi n |\log(x)|}.$$

Cette dernière majoration rend claire la convergence uniforme de  $f'_n$  vers  $P_\sigma$  sur toute partie compacte de  $]0, 1[$  ou de  $]1, +\infty[$ . Or, la suite de fonctions  $(f_n)_n$  converge simplement vers  $Q_\sigma$ , cela suffit pour assurer que :

$Q_\sigma$  est continue et dérivable sur  $]0, 1[ \cup ]1, +\infty[$ , de dérivée  $P_\sigma$ .

D'après la section précédente, on sait donc que  $Q_\sigma$  est constante sur  $]0, 1[$  et de dérivée égale à 1 sur  $]1, +\infty[$ . Et la continuité de  $Q_\sigma$  sur  $[0, +\infty[$  s'obtient sans effort car la condition de domination de l'intégrande sur toute partie compacte de  $K \subset [0, +\infty[$  est respectée :

$$\forall x \in K, \quad \left| \frac{x^{\sigma+it+1}}{(\sigma+it)(\sigma+it+1)} \right| \leq \frac{(\sup K)^{\sigma+1}}{\sigma^2 + t^2} \in L^1(\mathbb{R}_+)$$

donc le théorème de continuité des intégrales à paramètre est légitime. L'annulation évidente de  $Q_\sigma$  en 0 entraîne alors que  $Q_\sigma$  est nulle sur tout  $[0, 1]$ . Sur  $[1, +\infty[$ ,  $Q_\sigma$  est solution du système différentiel élémentaire  $(f'(x) = 1, f(1) = 0)$ , donc  $Q_\sigma(x) = x - 1$  pour tout  $x \geq 1$ . ■

## C Sommation

Cette section présente une formule, due au mathématicien allemand Oskar Perron, qui permettra dans le prochain chapitre, de déterminer un équivalent de la fonction sommatoire

$$\varphi(y) := \sum_{1 \leq n \leq y} a_n$$

associée à la série de Dirichlet  $\sum_{n \geq 1} \frac{a_n}{n^s}$ , sous une certaine condition de contrôle sur la suite  $(a_n)_n$ .

### LA FORMULE DE PERRON 3.4

Soit  $(a_n)_n$  une suite de nombres complexes telle que :

pour tout  $\epsilon > 0$ , la suite  $(a_n n^{-\epsilon})_n$  est bornée.

On note  $G$  la série de Dirichlet associée, et  $\varphi$  sa fonction sommatoire. Alors,  $G$  définit une fonction continue sur  $D$ , et pour tout  $\sigma > 1$  et  $x > 0$  :

$$\int_0^x \varphi(y) dy = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^{\sigma+it+1} G(\sigma+it)}{(\sigma+it)(\sigma+it+1)} dt.$$

Remarque : Le membre de droite dans la formule de Perron  $\int_0^x \varphi(y) dy$  est indépendant de  $\sigma > 1$ . Sous réserve d'un contrôle suffisant sur l'intégrande  $\frac{x^{\sigma+it+1} G(\sigma+it)}{(\sigma+it)(\sigma+it+1)}$ , par exemple pour pouvoir appliquer le théorème de convergence dominée, nous prolongerons cette remarquable formule en  $\sigma = 1$ .

**DÉMONSTRATION** L'hypothèse de contrôle faite sur la suite  $(a_n)_n$  assure aisément que la série de Dirichlet  $G$  converge normalement sur  $D_{1+\delta} := \{s \in \mathbb{C}, \Re(s) \geq 1 + \delta\}$ , pour chaque  $\delta > 0$  fixé. On en déduit donc que l'application

$$s \mapsto G(s) \stackrel{\text{déf}}{=} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{n^s}$$

est bien définie et continue sur  $D = \{s \in \mathbb{C}, \Re(s) > 1\}$ .

Fixons un  $\sigma > 1$  strictement plus grand que un et démontrons la formule. Nous allons calculer indépendamment les deux membres de l'égalité et observer qu'ils coïncident en effet ; le calcul de celui de droite est élémentaire, tandis que nous invoquerons la formule de la section précédente pour le membre de gauche.

D'une part on a :

$$\int_0^x \varphi(y) dy = \int_0^x \left( \sum_{1 \leq n \leq y} a_n \right) dy = \int_0^x \left( \sum_{1 \leq n \leq x} a_n \mathbb{1}_{\{n \leq y\}} \right) dy = \sum_{1 \leq n \leq x} a_n \int_0^x \mathbb{1}_{\{n \leq y\}} dy,$$

c'est-à-dire :

$$\int_0^x \varphi(y) dy = \sum_{1 \leq n \leq x} (x - n) a_n.$$

D'autre part, nous venons d'observer que la série  $G$  converge normalement sur  $\{s \in \mathbb{C}, \Re(s) = \sigma\}$ , il est donc loisible de permuter les signes de sommation :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^{\sigma+it+1} G(\sigma+it)}{(\sigma+it)(\sigma+it+1)} dt &= \frac{1}{2\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^{\sigma+it+1}}{(\sigma+it)(\sigma+it+1)} \left( \frac{a_n}{n^{\sigma+it}} \right) dt \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n Q_\sigma \left( \frac{x}{n} \right) \\
&= \sum_{1 \leq n \leq x} (x-n) a_n
\end{aligned}$$

d'après le calcul de la fonction  $Q_\sigma$  effectué dans la section précédente, ce qui conclut. ■

## Chapitre 4

# La démonstration du TNP



e chapitre est l'objet central de notre projet ; nous y présentons la démonstration du Théorème des Nombres Premiers. À cette fin, nous établirons dans la première section une identité clé qui amènera à un équivalent de la fonction sommatoire associée à la fonction de Mangoldt, ce qui, nous le verrons à la deuxième section, nous conduira au Théorème des Nombres Premiers. Cette première identité fera appel aux résultats établis dans les précédents chapitres.

### A Combinaison des résultats précédemment établis

On considère, comme dans le second chapitre, la fonction définie et continue sur  $D$  :

$$F(s) \stackrel{\text{déf}}{=} Z(s) - \zeta(s) = \sum_{n \geq 1} \frac{\Lambda(n) - 1}{n^s},$$

dont on rappelle qu'elle se prolonge en une fonction continue sur toute l'adhérence  $\overline{D}$ , et on introduit la fonction sommatoire suivante :

$$\psi(y) = \sum_{1 \leq n \leq y} \Lambda(n).$$

#### IDENTITÉ CLÉ 4.1

Pour tout  $x > 1$  strictement plus grand que 1, on a l'identité :

$$\int_0^x (\psi(y) - \lfloor y \rfloor) dy = \frac{x^2}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{F(1+it)x^{it}}{(1+it)(2+it)} dt.$$

**DÉMONSTRATION** Soit  $x > 1$  strictement plus grand que 1. La série de Dirichlet associée  $F$  :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\Lambda(n) - 1}{n^s}$$

vérifie clairement, par croissance comparée, la condition requise à l'application de la formule de Perron. Donc en remarquant que pour tout  $y$  dans l'intervalle  $[0, x]$ , on a :

$$\sum_{1 \leq n \leq y} (\Lambda(n) - 1) = \psi(y) - \lfloor y \rfloor,$$

il vient d'après le chapitre précédent que :

$$\forall \sigma > 1, \quad \int_0^x (\psi(y) - \lfloor y \rfloor) dy = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{F(\sigma + it)x^{1+\sigma+it}}{(\sigma + it)(1 + \sigma + it)} dt.$$

Il reste alors à invoquer le théorème de convergence dominée pour conclure, en faisant tendre  $\sigma$  vers 1 sous le signe intégral. Afin d'établir la condition de domination, nous allons utiliser le contrôle acquis, non sans effort, à la fin du deuxième chapitre, dont nous rappelons l'intitulé :

$$\exists M > 0, \forall 1 \leq \sigma \leq 2, \forall t \in \mathbb{R}, \quad |F(\sigma + it)| \leq M \log^9(2 + |t|).$$

D'autre part, on a la majoration uniforme :

$$\forall 1 \leq \sigma \leq 2, \forall t \in \mathbb{R}, \quad \left| \frac{x^{1+\sigma+it}}{(1 + \sigma + it)(\sigma + it)} \right| \leq \frac{x^3}{1 + t^2}.$$

Étant donné que la fonction :

$$t \mapsto \frac{\log^9(2 + |t|)}{1 + t^2} \text{ est intégrable sur } \mathbb{R},$$

l'hypothèse de domination est bien vérifiée. ■

Cette identité va nous permettre de déterminer un équivalent de la fonction  $\psi$ . Pour cela, nous serons amenés à utiliser le lemme suivant.

**LEMME 4.2**

Soit  $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$  monotone telle que :

$$\exists k \in \mathbb{N}, k \geq 2, \quad \int_0^x f(t) dt \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{x^k}{k}.$$

Alors,  $f(x)$  est équivalent à  $x^{k-1}$  quand  $x$  tend vers l'infini.

**DÉMONSTRATION** Supposons pour la démonstration que  $f$  est croissante, le cas où  $f$  est décroissante étant en tout point similaire. Soit  $a > 1$  strictement plus grand que 1. La croissance de  $f$  donne :

$$\forall x \geq 0, \quad f(x) \leq \frac{1}{(a-1)x} \int_x^{ax} f(t) dt = \frac{1}{(a-1)x} \left( \int_0^{ax} f(t) dt - \int_0^x f(t) dt \right).$$

Remarquons alors que :

$$\frac{1}{x^{k-1}} \left[ \frac{1}{(a-1)x} \left( \int_0^{ax} f(t) dt - \int_0^x f(t) dt \right) \right] = \frac{1}{a-1} \left( \frac{a^k}{(xa)^k} \int_0^{ax} f(t) dt - \frac{1}{x^k} \int_0^x f(t) dt \right)$$

et donc par hypothèse :

$$\frac{1}{x^{k-1}} \left[ \frac{1}{(a-1)x} \left( \int_0^{ax} f(t) dt - \int_0^x f(t) dt \right) \right] \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{k} \left( \frac{a^k - 1}{a - 1} \right),$$

on en déduit que :

$$\limsup_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{f(x)}{x^{k-1}} \right) \leq \frac{1}{k} \left( \frac{a^k - 1}{a - 1} \right) = \frac{1}{k} \sum_{n=0}^{k-1} a^n.$$

Ceci étant vrai pour tout  $a > 1$  strictement plus grand que 1, on en déduit, en faisant tendre  $a$  vers 1, que :

$$\limsup_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{f(x)}{x^{k-1}} \right) \leq 1. \quad (4.1)$$

De même, si  $0 < a < 1$  est strictement plus petit que 1, on a :

$$\forall x \geq 0, \quad f(x) \geq \frac{1}{(1-a)x} \int_{ax}^x f(t) dt,$$

et donc il vient que :

$$\liminf_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{f(x)}{x^{k-1}} \right) \geq 1. \quad (4.2)$$

D'après (4.1) et (4.2), on en déduit que :

$$\frac{f(x)}{x^{k-1}} \text{ converge quand } x \text{ tend vers l'infini, et sa limite est 1.} \quad \blacksquare$$

### COMPORTEMENT ASYMPTOTIQUE DE LA FONCTION $\psi$ 4.3

Lorsque  $x$  tend vers l'infini :  $\psi(x) \sim x$ .

**DÉMONSTRATION** Nous allons démontrer séparément les deux assertions suivantes :

$$\int_0^x \lfloor y \rfloor dy = \frac{x^2}{2} + o(x^2) \quad \text{et} \quad \int_0^x (\psi(y) - \lfloor y \rfloor) dy = o(x^2),$$

La première assertion découle immédiatement de l'encadrement  $y - 1 < \lfloor y \rfloor \leq y$ . Pour établir la deuxième, introduisons la fonction :

$$G(t) \stackrel{\text{déf}}{=} \frac{F(1+it)}{(1+it)(2+it)}$$

continue et intégrable sur  $\mathbb{R}$ , de telle sorte que l'IDENTITÉ CLÉ 4.1 se réécrive :

$$\int_0^x (\psi(y) - \lfloor y \rfloor) dy = \frac{x^2}{2\pi} \widehat{G}(-\log(x)),$$

où  $\widehat{G}$  représente la transformée de Fourier de la fonction  $G$ . Le lemme de Riemman-Lebesgue fournit alors le résultat recherché. On en déduit alors que :

$$\int_0^x \psi(y) dy = \int_0^x (\psi(y) - \lfloor y \rfloor) dy + \int_0^x \lfloor y \rfloor dy = \frac{x^2}{2} + o(x^2),$$

et on conclut grâce au LEMME 4.2 précédent.  $\blacksquare$

## B Conclusion

Le chemin restant à parcourir avant d'obtenir le TNP n'est plus très long. En effet, il ne reste plus qu'à expliciter le lien entre la fonction  $\psi$  et la fonction  $\pi$  de décompte des nombres premiers :

$$\forall x \geq 1, \quad \pi(x) \stackrel{\text{déf}}{=} \text{Card}\{p \text{ premier inférieur ou égal à } x\}.$$

Établissons pour cela la formule suivante.

#### PROPRIÉTÉ 4.4

La fonction sommatoire de Mangoldt  $\psi$  vérifie, pour tout  $x \geq 1$  supérieur ou égal à 1 :

$$\psi(x) = \sum_{p \leq x, p \text{ premier}} \left\lfloor \frac{\log(x)}{\log(p)} \right\rfloor \log(p),$$

et est telle que :  $\psi(x) \leq \pi(x) \log(x) \leq 2\psi(x)$ .

**DÉMONSTRATION** La première égalité est immédiate. En effet :

$$\psi(x) \stackrel{\text{déf}}{=} \sum_{n \leq x} \Lambda(n) = \sum_{p^k \leq x, p \text{ premier}} \log(p) = \sum_{p \leq x, p \text{ premier}} \left( \sum_{k \geq 1, p^k \leq x} \log(p) \right),$$

et le nombre de  $k \geq 1$  tels que  $p^k \leq x$  vaut  $\left\lfloor \frac{\log(x)}{\log(p)} \right\rfloor$  :

$$p^k \leq x \text{ et } p^{k+1} > x \Leftrightarrow k \leq \frac{\log(x)}{\log(p)} < k+1.$$

Pour établir l'encadrement, il suffit alors de remarquer que, pour tout  $X \geq 1$  plus grand que 1, l'encadrement  $\lfloor X \rfloor \leq X < \lfloor X \rfloor + 1 \leq 2\lfloor X \rfloor$  entraîne, pour tout  $x \geq 1$  plus grand que 1 :

$$\left\lfloor \frac{\log(x)}{\log(p)} \right\rfloor \log(p) \leq \log(x) \leq 2 \left\lfloor \frac{\log(x)}{\log(p)} \right\rfloor \log(p).$$

Donc en sommant sur les  $p$  premiers inférieurs ou égaux à  $x$ , on en déduit l'encadrement recherché. ■

Avant de démontrer le dernier théorème qui impliquera directement le TNP, nous aurons besoin d'un ultime lemme faisant intervenir le logarithme intégral :

$$\forall x \geq 2, \quad \text{Li}(x) \stackrel{\text{déf}}{=} \int_2^x \frac{dt}{\log(t)}.$$

#### LEMME 4.5

Quand  $x$  tend vers l'infini :  $\text{Li}(x) \sim \frac{x}{\log(x)}$ .

**DÉMONSTRATION** Tout d'abord, il est clair que  $\frac{1}{\log(t)} \geq \frac{1}{t}$  n'est pas intégrable sur  $[2, +\infty[$ , donc  $\text{Li}(x) \rightarrow +\infty$ . Une intégration par parties donne :

$$\forall x \geq 2, \quad \text{Li}(x) = \frac{x}{\log(x)} - \frac{2}{\log(2)} + \int_2^x \frac{dt}{\log^2(t)},$$

donc il s'agit de montrer que :

$$\int_2^x \frac{dt}{\log^2(t)} = o_{x \rightarrow +\infty}(\text{Li}(x)).$$

Soit  $\epsilon > 0$  strictement positif quelconque. On se donne un  $t_0 \geq 2$  tel que :

$$\forall t \geq t_0, \quad \frac{1}{\log(t)} \leq \epsilon.$$

On obtient alors, pour tout  $x$  plus grand que  $t_0$  :

$$0 \leq \frac{\int_2^x \frac{dt}{\log^2(t)}}{\int_2^x \frac{dt}{\log(t)}} \leq \frac{\int_2^{t_0} \frac{dt}{\log^2(t)} + \int_{t_0}^x \frac{dt}{\log^2(t)}}{\int_2^x \frac{dt}{\log(t)}} \leq \frac{\int_2^{t_0} \frac{dt}{\log^2(t)}}{\int_2^x \frac{dt}{\log(t)}} + \epsilon \frac{\int_{t_0}^x \frac{dt}{\log(t)}}{\int_2^x \frac{dt}{\log(t)}} \leq \frac{\int_2^{t_0} \frac{dt}{\log^2(t)}}{\int_2^x \frac{dt}{\log(t)}} + \epsilon.$$

La non-intégrabilité de  $\text{Li}(x)$  fournit un  $x_0$  tel que :

$$\forall x \geq x_0, \quad \int_2^x \frac{dt}{\log(t)} \geq \frac{1}{\epsilon} \int_2^{t_0} \frac{dt}{\log^2(t)},$$

c'est-à-dire :

$$\forall x \geq x_0, \quad 0 \leq \frac{\int_2^x \frac{dt}{\log^2(t)}}{\int_2^x \frac{dt}{\log(t)}} \leq \epsilon + \epsilon.$$

On a donc montré que :

$$\frac{\int_2^x \frac{dt}{\log^2(t)}}{\int_2^x \frac{dt}{\log(t)}} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0,$$

ce qu'il fallait. ■

#### PROPRIÉTÉ 4.6

Les comportements asymptotiques des fonctions  $\pi$  et  $\psi$  sont reliés par la formule :

$$\pi(x) = \frac{\psi(x)}{\log(x)} + O\left(\frac{x}{\log^2(x)}\right).$$

**DÉMONSTRATION** D'après la PROPRIÉTÉ 4.4 précédente,  $\pi(x)\log(x) - \psi(x) \geq 0$ , donc il s'agit de majorer la quantité  $\pi(x)\log(x) - \psi(x)$ . Montrons que :

$$\pi(x)\log(x) - \psi(x) = O\left(\frac{x}{\log(x)}\right).$$

Pour cela, commençons par découper la somme en deux :

$$\begin{aligned} \pi(x)\log(x) - \psi(x) &= \sum_{p \leq x, p \text{ premier}} \left( \log(x) - \left\lfloor \frac{\log(x)}{\log(p)} \right\rfloor \log(p) \right) \\ &= \sum_{p \leq \sqrt{x}, p \text{ premier}} \left( \log(x) - \left\lfloor \frac{\log(x)}{\log(p)} \right\rfloor \log(p) \right) + \sum_{\sqrt{x} < p \leq x, p \text{ premier}} \log\left(\frac{x}{p}\right) \end{aligned}$$

car si  $\sqrt{x} < p \leq x$ , alors  $p^2 > x$ , donc  $\left\lfloor \frac{\log(x)}{\log(p)} \right\rfloor = 1$ .

De plus, l'inégalité  $\left\lfloor \frac{\log(x)}{\log(p)} \right\rfloor > \frac{\log(x)}{\log(p)} - 1$  indique alors que :

$$\begin{aligned}
\pi(x)\log(x) - \psi(x) &\leq \sum_{p \leq \sqrt{x}, p \text{ premier}} \log(p) + \sum_{\sqrt{x} < p \leq x, p \text{ premier}} \log\left(\frac{x}{p}\right) \\
&= \sum_{p \leq \sqrt{x}, p \text{ premier}} \log(p) + \sum_{\sqrt{x} < n \leq x} (\pi(n) - \pi(n-1)) \log\left(\frac{x}{n}\right)
\end{aligned}$$

car  $\pi(n) - \pi(n-1) = 1$  si  $n$  est premier et 0 sinon.

Majorons la première somme :

$$\sum_{p \leq \sqrt{x}, p \text{ premier}} \log(p) \leq \sqrt{x} \log(\sqrt{x}).$$

D'autre part, une transformation d'Abel appliquée à la deuxième somme donne :

$$\begin{aligned}
\sum_{\sqrt{x} < n \leq x} (\pi(n) - \pi(n-1)) \log\left(\frac{x}{n}\right) &= \pi(\lfloor x \rfloor) \log\left(\frac{x}{\lfloor x \rfloor}\right) - \pi(\lfloor \sqrt{x} \rfloor) \log\left(\frac{x}{\lfloor \sqrt{x} \rfloor}\right) \\
&\quad + \sum_{\sqrt{x} < n \leq x-1} \pi(n) \left( \log\left(\frac{x}{n}\right) - \log\left(\frac{x}{n+1}\right) \right)
\end{aligned}$$

On en déduit donc la majoration suivante :

$$\pi(x)\log(x) - \psi(x) \leq \sqrt{x} \log(\sqrt{x}) + \pi(x) \log\left(\frac{x}{\lfloor x \rfloor}\right) + \sum_{\sqrt{x} < n \leq x-1} \pi(n) \log\left(\frac{n+1}{n}\right)$$

Montrons à présent que chacun des termes est un  $O\left(\frac{x}{\log(x)}\right)$ . C'est immédiat pour le premier terme, par croissance comparée. Pour le deuxième terme, on invoque à nouveau la PROPRIÉTÉ 4.4 :

$$\pi(x) \leq \frac{2\psi(x)}{\log(x)} = O\left(\frac{x}{\log(x)}\right).$$

Et enfin, pour le dernier terme, on écrit, dès que  $x \geq 4$  est plus grand que 4 :

$$\sum_{\sqrt{x} < n \leq x-1} \pi(n) \log\left(\frac{n+1}{n}\right) = \sum_{\sqrt{x} < n \leq x-1} \pi(n) \int_n^{n+1} \frac{dt}{t} \leq \int_2^x \frac{\pi(t)}{t} dt$$

Notons  $M > 0$  tel que pour tout  $t$  plus grand que 2, on ait :

$$\pi(t) \leq M \frac{t}{\log(t)}$$

et montrons que  $\int_2^x \frac{\pi(t)}{t} dt = O\left(\frac{x}{\log(x)}\right)$ . On a :

$$0 \leq \frac{\log(x)}{x} \int_2^x \frac{\pi(t)}{t} dt \leq M \frac{\log(x)}{x} Li(x) = O(1)$$

d'après le LEMME 4.5 précédent. ■

En regroupant ce résultat avec le COMPORTEMENT ASYMPTOTIQUE DE LA FONCTION  $\psi$  4.3, on en déduit aisément le TNP.

#### THÉORÈME DES NOMBRES PREMIERS 4.7

Quand  $x$  tend vers l'infini :  $\pi(x) \sim \frac{x}{\log(x)}.$



# Annexes

## A Résolution du problème de Bâle par Leonhard Euler

Âgé de 28 ans, le jeune Leonhard Euler annonça en 1735 à la communauté mathématique qu'il avait résolu le problème de Bâle. Bien qu'il ne publia une démonstration rigoureuse qu'en 1743, ce résultat fut son premier grand triomphe, qui le rendit célèbre dans toute l'Europe. Sa découverte résulte de ses observations sur les polynômes, en présumant que certaines propriétés restent valables pour les séries infinies.

Cet annexe expose son raisonnement en y apportant les justifications manquantes dans son article, ce qui fournit donc une preuve alternative de l'identité :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Précisons tout de même qu'Euler était pleinement conscient de l'importance d'une démonstration rigoureuse. La plupart des justifications qui vont suivre furent d'ailleurs formulées par Euler lui-même quelques années plus tard [Bur], témoignant sa volonté de ne laisser aucun résultat non démontré. Néanmoins, Euler a souvent formulé des résultats sans en donner de justification rigoureuse, son génie créatif l'amenant régulièrement à découvrir des résultats en avance sur son temps.

À présent, dévoilons son intuition ! Tout découlera du développement en produit infini de la fonction sinus :

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad \sin(z) \stackrel{\text{déf}}{=} \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = z \prod_{n=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{z^2}{\pi^2 n^2}\right) \quad (4.3)$$

donc commençons par justifier cette écriture à l'aide d'arguments modernes. La première étape consistera à montrer que l'exponentielle vérifie :

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad e^z = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n.$$

Considérons un complexe  $z$  quelconque fixé et notons

$$u_n(k) \stackrel{\text{déf}}{=} \binom{n}{k} \left(\frac{z}{n}\right)^k = \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \cdots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) \frac{z^k}{k!}$$

de telle sorte que, d'après la formule du binôme, on ait :

$$\forall n \geq 1, \quad \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^n u_n(k).$$

Or, le terme général

$$|u_n(k)| \leq \frac{|z|^k}{k!}$$

est uniformément dominé par le terme général d'une série positive convergente, donc d'après le théorème de convergence dominée, la permutation somme-limite est légitime, ce qui donne le résultat que nous recherchions, avec la convention  $u_n(k) = 0$  si  $k > n$  :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^{+\infty} u_n(k) = \sum_{k=0}^{+\infty} \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n(k) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^k}{k!} = e^z. \quad (4.4)$$

Introduisons maintenant le polynôme

$$P_n = \frac{1}{2i} \left[ \left(1 + \frac{iX}{n}\right)^n - \left(1 - \frac{iX}{n}\right)^n \right] \in \mathbb{C}[X]$$

de telle sorte que, d'après (4.4), on puisse écrire :

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad \sin(z) = \lim_{n \rightarrow +\infty} P_n(z) = \lim_{n \rightarrow +\infty} P_{2n+1}(z).$$

On remarque aisément que les

$$x_k(n) \text{ tels que } \frac{1 + \frac{ix_k(n)}{2n+1}}{1 - \frac{ix_k(n)}{2n+1}} = e^{2\pi i \frac{k}{2n+1}}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

fournissent  $2n + 1$  racines (réelles) distinctes du polynôme  $P_{2n+1}$  :

$$\forall k \in \llbracket -n, n \rrbracket, \quad x_k(n) = (2n + 1) \tan \left( \frac{\pi k}{2n + 1} \right).$$

$P_{2n+1}$  étant de degré  $2n + 1$ , on dispose alors de toutes ses racines et on peut donc le factoriser sous la forme

$$P_{2n+1} = C_n z \prod_{k=1}^n \left( 1 - \frac{X^2}{x_k(n)^2} \right)$$

avec  $C_n = 1$  car  $P'_{2n+1}(0) = 1$ .

Un développement limité au premier ordre en 0 de la fonction tangente donne :

$$x_k(n) = (2n + 1) \tan \left( \frac{\pi k}{2n + 1} \right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \pi k$$

donc il s'agit à nouveau de justifier une inversion de limites. Dans ce but, fixons un complexe  $z$  quelconque et introduisons les suites suivantes :

$$v_k \stackrel{\text{déf}}{=} z \prod_{j=1}^k \left( 1 - \frac{z^2}{\pi^2 j^2} \right) \quad \text{et} \quad u_k \stackrel{\text{déf}}{=} v_k - v_{k-1} \quad \text{avec} \quad u_0 = v_0 = z$$

de telle sorte que

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad v_k = \sum_{m=0}^k u_m.$$

Les propriétés du logarithme permettent de borner

$$|v_k| \leq |z| \prod_{j=1}^k \left( 1 + \frac{|z|^2}{\pi^2 j^2} \right) \leq |z| \exp \left( \sum_{j=1}^k \ln \left( 1 + \frac{|z|^2}{\pi^2 j^2} \right) \right) \leq |z| \exp \left( \sum_{j=1}^k \frac{|z|^2}{\pi^2 j^2} \right)$$

la suite  $(v_k)_k$  donc on dispose d'une constante

$$C = \frac{|z|^3}{\pi^2} \exp \left( \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{|z|^2}{\pi^2 j^2} \right) < +\infty$$

telle que la suite

$$\forall k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \quad u_k = v_k - v_{k-1} = \left( -\frac{z^2}{\pi^2 k^2} \right) v_{k-1}$$

vérifie la majoration suivante :

$$\forall k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \quad |u_k| \leq \frac{|z^2|}{\pi^2 k^2} |v_{k-1}| \leq \frac{C}{k^2}.$$

Une étude aisée de la fonction  $\mathbb{R} \ni x \mapsto x - \tan(x)$  montre que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad x_k(n) = (2n+1) \tan\left(\frac{\pi k}{2n+1}\right) \geq \pi k.$$

Ainsi, les suites

$$\nu_k(n) = z \prod_{j=1}^k \left( 1 - \frac{z^2}{x_j(n)^2} \right) \quad \text{et} \quad \mu_k(n) = \nu_k(n) - \nu_{k-1}(n)$$

continuent de vérifier les mêmes majorations. Donc la même constante  $C$  majore uniformément en  $n \in \mathbb{N}$  les suites  $(\mu_k(n)k^2)_k$ .

Donc les hypothèses de convergence normale sont vérifiées, ce qui rend légitime la permutation de la limite avec la somme, en posant  $\mu_k(n) = 0$  si  $k > n$  :

$$\sin(z) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^{+\infty} \mu_k(n) = \sum_{k=0}^{+\infty} \lim_{n \rightarrow +\infty} \mu_k(n) = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k = \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n.$$

C'est-à-dire ce que l'on cherchait :

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad \sin(z) = z \prod_{k=1}^{+\infty} \left( 1 - \frac{z^2}{\pi^2 k^2} \right).$$

Présentons maintenant la deuxième idée d'Euler. Partant de l'écriture de la fonction sinus en série :

$$\sin(X) = \sum_{n \geq 0} (-1)^n \frac{X^{2n}}{(2n)!},$$

il s'agit de voir que l'identification formelle du coefficient de  $X^2$  dans chaque membre de l'égalité

$$\frac{\sin(\pi X)}{\pi X} = \prod_{k=1}^{+\infty} \left( 1 - \frac{X^2}{k^2} \right)$$

est légitime, comme c'est le cas avec les polynômes.

Pour cela, remarquons que d'après le développement limité de la fonction sinus à l'ordre 3,

$$\frac{1}{x^2} \left( 1 - \frac{\sin(\pi x)}{\pi x} \right) \xrightarrow{x \rightarrow 0} \frac{\pi^2}{6},$$

donc si on se fixe un  $\epsilon > 0$  strictement positif quelconque, on dispose d'un  $\delta = \delta(\epsilon) > 0$  tel que pour tout  $0 < |x| < \delta$ , par inégalité triangulaire, on ait :

$$\left| \frac{\pi^2}{6} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \right| \leq \epsilon + \left| \frac{1}{x^2} \left( 1 - \frac{\sin(\pi x)}{\pi x} \right) - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \right|.$$

Ainsi, d'après le développement du sinus en produit infini, il reste à montrer que :

$$\left(1 - \frac{\sin(\pi x)}{\pi x}\right) - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^2}{n^2} = \left(1 - \prod_{k=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{x^2}{k^2}\right)\right) - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^2}{n^2} = o_{x \rightarrow 0}(x^2).$$

Soit  $N \geq 2$  un entier. Pour tout  $x \neq 0$  :

$$\begin{aligned} \prod_{k=1}^N \left(1 - \frac{x^2}{k^2}\right) &= \left(1 - \frac{x^2}{1^2}\right) \left(1 - \frac{x^2}{2^2}\right) \cdots \left(1 - \frac{x^2}{N^2}\right) \\ &= 1 - \sum_{n=1}^N \frac{x^2}{n^2} + \sum_{k=2}^N (-x^2)^k \sum_{0 < i_1 < \cdots < i_k \leq N} \frac{1}{i_1^2 i_2^2 \cdots i_k^2}, \end{aligned}$$

ce qui amène à la majoration :

$$\begin{aligned} \left| \left(1 - \prod_{k=1}^N \left(1 - \frac{x^2}{k^2}\right)\right) - \sum_{n=1}^N \frac{x^2}{n^2} \right| &\leq \sum_{k=2}^N x^{2k} \sum_{0 < i_1 < \cdots < i_k \leq N} \frac{1}{i_1^2 i_2^2 \cdots i_k^2} \\ &\leq x^2 \sum_{k=2}^N x^{2(k-1)} \sum_{0 < i_1 < \cdots < i_k} \frac{1}{i_1^2 i_2^2 \cdots i_k^2}. \end{aligned}$$

D'autre part, la majoration classique, pour  $k \geq 2$ ,

$$\sum_{i=k}^{+\infty} \frac{1}{i^2} \leq \sum_{i=k}^{+\infty} \frac{1}{i(i-1)} = \sum_{i=k}^{+\infty} \left( \frac{1}{i-1} - \frac{1}{i} \right) = \frac{1}{k-1},$$

permet d'obtenir la majoration suivante :

$$\begin{aligned} \sum_{0 < i_1 < \cdots < i_k} \frac{1}{i_1^2 i_2^2 \cdots i_k^2} &= \sum_{i_1 > 0} \left( \frac{1}{i_1^2} \sum_{i_2 > i_1} \left( \frac{1}{i_2^2} \left( \cdots \left( \frac{1}{i_{k-1}^2} \sum_{i_k > i_{k-1}} \frac{1}{i_k^2} \right) \cdots \right) \right) \right) \\ &\leq \left( \sum_{i_1=1}^{+\infty} \frac{1}{i_1^2} \right) \left( \sum_{i_2=2}^{+\infty} \frac{1}{i_2^2} \right) \cdots \left( \sum_{i_k=k}^{+\infty} \frac{1}{i_k^2} \right) \\ &\leq \frac{1}{2-1} \cdots \frac{1}{k-1} = \frac{1}{(k-1)!}, \end{aligned}$$

et donc finalement,

$$\begin{aligned} \left| \left(1 - \prod_{k=1}^N \left(1 - \frac{x^2}{k^2}\right)\right) - \sum_{n=1}^N \frac{x^2}{n^2} \right| &\leq x^2 \sum_{k=2}^N x^{2(k-1)} \frac{2}{(k-1)!} \\ &\leq 2x^2 \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(x^2)^k}{k!} = 2x^2 (e^{x^2} - 1). \end{aligned}$$

Ceci étant valable quel que soit  $N \geq 2$ , on en déduit bien que :

$$\left| \left(1 - \prod_{k=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{x^2}{k^2}\right)\right) - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^2}{n^2} \right| \leq 2x^2 (e^{x^2} - 1) = o_{x \rightarrow 0}(x^2).$$

Donc on dispose d'un  $\delta' > 0$  strictement positif tel que, pour tout  $0 < |x| < \delta'$  :

$$\left| \frac{1}{x^2} \left(1 - \prod_{k=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{x^2}{k^2}\right)\right) - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \right| \leq \epsilon.$$

Ainsi, pour tout  $0 < |x| < \min(\delta, \delta')$ , la quantité

$$\left| \frac{\pi^2}{6} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \right| \leq \epsilon + \epsilon \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} 0$$

peut donc être rendue arbitrairement petite, c'est bien dire que :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

**COIN DE LA CULTURE** Des considérations similaires permettent de calculer les valeurs prises par la fonction  $\zeta$  aux entiers pairs strictement positifs.

Ce remarquable résultat fut également découvert par Euler :

$$\forall n \geq 1, \quad \zeta(2n) = (-1)^{n-1} \frac{2^{2n-1} B_{2n}}{(2n)!} \pi^{2n},$$

où les  $B_{2n}$  apparaissant dans la formule sont les nombres de Bernoulli, définis au moyen de la série génératrice formelle suivante :

$$\frac{z}{e^z - 1} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{B_n}{n!} z^n.$$

Un argument de parité implique alors que les nombres  $B_{2n+1}$  sont tous nuls, et on a  $B_0 = 1$  et  $B_2 = -1/2$ . De plus, on peut vérifier que les nombres  $B_{2n}$  sont tous rationnels, et donc, étant donné que  $\pi$  est transcendant, il suit que  $\zeta(2n) \in \mathbb{Q}\pi^{2n}$ .

En revanche, pour le moment, aucune expression aussi simple n'a été découverte pour les valeurs prises par la fonction  $\zeta$  aux entiers impairs  $\zeta(2n+1)$ . À titre informatif, donnons ici quelques-uns des rares résultats démontrés à ce jour sur le sujet [Riv]. Le premier est plutôt récent car il fut démontré par le mathématicien Français Robert Apéry en 1978 : le nombre  $\zeta(3)$  est irrationnel. Ce nombre est depuis appelé la *constante d'Apéry*. On en connaît les 400 milliards premières décimales depuis 2015. On sait par ailleurs que la fonction  $\zeta$  prend une infinité de valeurs irrationnelles aux entiers impairs [Riv00], et que parmi les quatre nombres  $\zeta(5)$ ,  $\zeta(7)$ ,  $\zeta(9)$  et  $\zeta(11)$ , au moins un est irrationnel.

## B Sur l'ordre du $k$ -ième nombre premier

Cet annexe a pour but de présenter l'équivalence entre le théorème des nombres premiers, et une formule sur l'ordre de grandeur du  $k$ -ième nombre premier. La lettre  $p$  désignera toujours un nombre premier. Rappelons que la fonction  $\pi$  introduite dans le Chapitre 4 est définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \pi(x) = \sum_{p \leq x} 1.$$

Pour  $k \geq 1$ , on notera  $p_k$  le  $k$ -ième nombre premier, de telle sorte que  $\pi(p_k) = k$ .

Rappelons que le Théorème des Nombres Premiers donne une approximation de la fonction  $\pi$  pour les grandes valeurs de  $x$ .

$$\pi(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{x}{\ln(x)} \quad (*)$$

Nous allons montrer que cet énoncé est équivalent à la formule suivante.

$$p_k \underset{k \rightarrow +\infty}{\sim} k \ln(k) \quad (**)$$

$(*) \Rightarrow (**)$  En évaluant en  $x = p_k$ , il vient que :

$$k = \pi(p_k) \sim \frac{p_k}{\ln(p_k)}.$$

Reste donc à montrer que  $\ln(p_k) \sim \ln(k)$ , c'est-à-dire à justifier que :

$$\ln(k) \overset{(a)}{\sim} \ln\left(\frac{p_k}{\ln(p_k)}\right) \quad \text{et} \quad \ln\left(\frac{p_k}{\ln(p_k)}\right) \overset{(b)}{\sim} \ln(p_k).$$

Pour montrer (a), on revient à la définition de l'équivalent  $\sim$  :

$$\frac{k \ln(p_k)}{p_k} \longrightarrow 1 \Rightarrow \ln\left(\frac{k \ln(p_k)}{p_k}\right) = \ln(k) - \ln\left(\frac{p_k}{\ln(p_k)}\right) \longrightarrow 0$$

dont (a) découle effectivement :

$$\frac{\ln(k)}{\ln\left(\frac{p_k}{\ln(p_k)}\right)} = 1 + \frac{\ln(k) - \ln\left(\frac{p_k}{\ln(p_k)}\right)}{\ln\left(\frac{p_k}{\ln(p_k)}\right)} \longrightarrow 1.$$

(b) vient lui d'un argument de croissance comparée :

$$\frac{\ln(\ln(p_k))}{\ln(p_k)} \longrightarrow 0 \quad \text{car } \ln(p_k) \rightarrow +\infty.$$

$(**) \Rightarrow (*)$  On passe du discret au continu en remarquant que  $\pi$  est constante sur  $[p_k, p_{k+1}[$ , ce qui amène à l'encadrement suivant, pour tout  $x$  dans  $[p_k, p_{k+1}[$ .

$$p_{\pi(x)} = p_{\pi(p_k)} = p_k \leq x < p_{k+1} = p_{\pi(p_k)+1} = p_{\pi(x)+1}$$

Et donc pour tout  $x$  réel,  $p_{\pi(x)} \leq x < p_{\pi(x)+1}$  (c). Remarquons alors que :

$$\frac{p_{k+1}}{p_k} \sim \frac{(k+1) \ln(k+1)}{k \ln(k)} \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{p_{\pi(x)+1}}{p_{\pi(x)}} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 1. \quad (d)$$

En effet, revenons à la définition de la limite cette fois : soit  $\epsilon > 0$  arbitrairement petit, il existe un entier  $K$  tel que :

$$\forall k \geq K, \quad \left| \frac{p_{k+1}}{p_k} - 1 \right| < \epsilon.$$

Or,  $\pi$  croît indéfiniment donc il existe  $M$  tel que pour tout  $x \geq M$ ,  $\pi(x) \geq K$  et donc :

$$\forall x \geq M, \quad \left| \frac{p_{\pi(x)+1}}{p_{\pi(x)}} - 1 \right| < \epsilon.$$

En réunissant (c) et (d), on obtient alors :

$$x \sim p_{\pi(x)} \sim \pi(x) \ln(\pi(x))$$

et exactement les mêmes arguments qui ont permis d'établir (a) et (b) montrent que :

$$\ln(x) \sim \ln(\pi(x) \ln(\pi(x))) \sim \ln(\pi(x)).$$

Ce qui achève la démonstration.

$$\pi(x) \sim \frac{x}{\ln(x)}$$

# Bibliographie

- [Bri24] Henri Briggs, *Arithmetica logarithmica*, 1624.
- [Bur] Jean-François Burnol, *Le génial produit infini d'Euler pour sinus*, Université Lille 1 - UFR de mathématiques.
- [Der07] John Derbyshire, *Dans la jungle des nombres premiers*, Dunod, 2007.
- [dS03] Marcus du Sautoy, *La symphonie des nombres premiers*, Points, 2003.
- [Gou08] Xavier Gourdon, *Les maths en tête : Analyse*, 2ème ed., Ellipses, 2008.
- [Lac01] Gilles Lachaud, *L'hypothèse de riemann*, La recherche **346** (2001), 19.
- [Nep14] John Neper, *Mirifici Logarithmorum canonis Descriptio*, 1614.
- [Ore61] Nicole Oresme, *Quaestiones super geometriam Euclidis*, Edited by H. L. L. Busard. Janus, suppléments, Vol. III, E. J. Brill, Leiden, 1961. MR 0121295
- [Riv] Tanguy Rivoal, *Valeurs aux entiers de la fonction zêta de Riemann*.
- [Riv00] Tanguy Rivoal, *La fonction zêta de Riemann prend une infinité de valeurs irrationnelles aux entiers impairs*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. **331** (2000), no. 4, 267–270. MR 1787183
- [TMF] Gérald Tenenbaum and Michel Mendès France, *Les nombres premiers, entre l'ordre et le chaos*.

# Notes

## Chapitre 1

1. Quarante ans plus tard, deux des frères Bernoulli, Jean (alias Johann) et Jacques (alias Jakob) en donnèrent chacun une nouvelle démonstration.
2. Il tire ce nom de la ville suisse dans laquelle Jean et Jacques Bernoulli occupèrent successivement la chaire universitaire de mathématiques.
3. Les frères Jean et Jacques Bernoulli s'y sont attelés pendant des décennies, en vain. Gottfried Wilhelm Leibniz échoue également. James Stirling publia en 1730 une formule

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3}{n^3 \binom{2n}{n}}$$

qui accélère la convergence de la série mais il ne reconnut pas la valeur  $\pi^2/6$ .

4. Si un seul de ses travaux devait être conservé, Euler aurait voulu que ce soit celui-ci [Der07].
5. Considéré comme le précurseur de la théorie analytique des nombres, avec sa publication *Beweis des Satzes, dass jede unbegrenzte arithmetische Progression, deren erstes Glied und Differenz ganze Zahlen ohne gemeinschaftlichen Factor sind, unendlich viele Primzahlen enthält* (Preuve de l'assertion selon laquelle toute suite arithmétique infini, dont le premier terme et la différence sont des nombres sans facteur commun, contient une infinité de nombres premiers) (1837) où y figure le théorème qui porte son nom aujourd'hui.
6. *Über die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Grösse*, article soumis à l'Académie de Berlin en 1859 à l'occasion de la nomination de Riemann en tant que membre de l'Académie. Cette nomination fut un grand honneur pour le jeune Riemann (33 ans).