Géodésiques sur l'espace des métriques de Kähler

Mémoire de Mastère 2

Hugues AUVRAY
ENS - Université Pierre & Marie CURIE
Sous la direction d'Olivier BIQUARD

14 janvier 2011

Résumé

Nous étudions dans ce travail la résolution par Chen dans [Che] du problème des géodésiques dans l'espace des métriques de Kähler d'une variété kählérienne fixée, après avoir fait quelques rappels sur la géométrie de cet espace. En particulier, nous détaillons la preuve de la construction de géodésiques $C^{1,1}$. Nous regardons ensuite une première application à l'unicité dans certains cas de métriques à courbure scalaire constante. Enfin, nous évoquons en appendice les liens de ce problème avec la théorie de l'application moment, découverts par Donaldson.

1 Introduction au problème.

1.1 Bref rappel historique : les problèmes classiques de la géométrie kählérienne

Soit M une *variété kählérienne*, de dimension complexe m, que nous supposerons toujours connexe, et compacte sauf mention contraire. On entend par *kählérienne* une variété riemannienne, de métrique g, munie d'une structure presque-complexe J intégrable, telles que $\omega = g(J\cdot, \cdot)$ est une forme fermée, et donc une forme symplectique, appelée forme de Kähler. Il est bien connu que la forme de Ricci ρ de cette structure kählérienne, donnée par $\rho = r^g(J\cdot, \cdot)$ où r^g est le tenseur de Ricci associé à g, représente — à un facteur 2π près — la première classe de Chern $C_1(M)$, définie comme première classe de Chern de son fibré en droites complexes anticanonique muni du produit scalaire hermitien induit $\Lambda^m_{\mathbb{C}}((TM, J))$, qui est aussi celle de (TM, J). En 1954, E. Calabi conjectura que réciproquement, toute $(1, 1)$-forme représentant $C_1(M)$ est la forme de Ricci d'une métrique kählérienne sur M dont la forme de Kähler est cohomologue à ω — J étant fixée — et démontra l'unicité d'une telle métrique. En 1976, S.T. Yau démontra cette conjecture. La méthode de résolution, donnée elle aussi par Calabi, et appelée *méthode de continuité*, est instructive à bien des égards ; nous aurons d'ailleurs l'occasion au cours du présent mémoire d'en utiliser une variante, ainsi qu'un des résultats que Yau obtint pour sa démonstration.

D'autre part, Th. Aubin et S.T. Yau répondirent indépendamment à une autre conjecture de Calabi, reliée de près à la précédente, à savoir l'existence d'une métrique de Kähler-Einstein dès que $C_1(M) < 0$, unique à changement d'échelle près. Rappelons que répond à cette appellation une métrique kählérienne g telle que r^g est proportionnel à g, ce qui s'énonce donc également $\omega = k\rho$, où k est un réel — nécessairement égal à la courbure scalaire, constante, divisée par la dimension réelle de M. En outre, G. Tian démontra en 1987 l'existence de telles métriques sur des surfaces complexes à première classe de Chern définie positive, variétés dites *de Fano*, dont le groupe des automorphismes est réductif.

Les métriques de Kähler-Einstein peuvent se traiter du point de vue des *métriques de Kähler extrémales*. Celles-ci sont définies commes les points extrémaux de la *fonctionnelle de Calabi*, qui, pour une classe de Kähler — classe de cohomologie de de Rham de la forme symplectique associée à une métrique de Kähler — donnée, associe à une métrique de cette classe la norme $\mathbf{L}^2$ de sa courbure scalaire, ou de sa courbure scalaire réduite, ce qui, à une constant additive près, ne change rien, la courbure scalaire moyenne étant invariante au sein d'une même classe de Kähler. En 1970, Calabi démontra l'invariance d'une métrique extrémale sous l'action d'un sous-groupe compact maximal du groupe des transformations holomorphes ; autrement dit, si g est extrémale, $Isom_0(M, g)$ est maximal parmi les sous-groupes de Lie compacts de $Aut_0(M, J)$. Ce qui permit à M. Levine de construire une surface de Kähler n'admettant pas de métrique extrémale. En 1992, D. Burns et P. de Bartolomeis donnèrent eux aussi un exemple de non-existence de métrique extrémale, et leur construction semblait de plus indiquer (conjecture de Yau) que ce problème est lié à celui de semi-stabilité des fibrés vectoriels hermitiens, qui est un condition algébrique inscrite dans la théorie géométrique des invariants.

En 1983, Futaki introduisit l'invariant qui porte son nom pour les variété de Fano, invariant dont l'annulation est une condition nécessaire pour l'existence de métrique de Kähler-Einstein. Plus tard, Calabi et Futaki étendirent cet invariant à toute variété kählérienne compacte ; cet invariant généralisé devait alors servir à mesurer l'obstruction d'une variété à admettre une métrique à courbure scalaire constante. Notons que de telles métriques sont extrémales, et qu'il est fréquent que la réciproque soit vraie, en particulier en l'absence de champs de vecteurs holomorphes. Parallèlement, Calabi démontra dans le même article que dès qu'une classe de Kähler admet une métrique à courbure scalaire constante, alors toutes les métriques extrémales de cette même classe sont nécessairement à courbure scalaire constante. Remarquons que les métriques courbure scalaire constante existent toujours en dimension 1 — surfaces de Riemann compactes —, d'où la motivation à résoudre le problème analogue en dimension supérieure.

En ce qui concerne l'unicité, Calabi démontra dans les années 50 l'unicité d'une métrique de Kähler-Einstein dans le cas $C_1 \leq 0$, tandis qu'en 1987, T. Mabuchi et S. Bando en démontrèrent l'unicité à l'action des transformations holomorphes près dans le cas $C_1 > 0$. Plus récemment, Tian et X.H. Zhu démontrèrent l'unicité du soliton de Kähler-Ricci relativement à un champ de vecteurs holomorphe fixe dans le cas Fano.

1.2 Ce que propose X.X. Chen dans *The space of Kähler metrics*

En 1987, Mabuchi définit un produit scalaire sur l'espace $\mathcal{M}_\Omega$ des métriques de Kähler d'une classe Ω fixée ; ce produit scalaire admet une connexion de Levi-Civita, ce qui est remarquable en dimension infinie, et fait de $\mathcal{M}_\Omega$, du moins formellement, un espace symétrique de courbure négative. S. Semmes et S.K. Donaldson, qui n'avaient pas eu vent du travail de Mabuchi, furent amenés à redécouvrir cette métrique, en partant de point de vue différents. Semmes fut ainsi le premier à voir le lien entre géodésiques pour cette et équation de Monge-Ampère complexe homogène sur une variété de dimension complexe $m + 1$. Donaldson, quant à lui, émit la conjecture selon laquelle deux métriques sont toujours reliées par une telle géodésique. Chen, dans un article de 2000, *The space of Kähler metrics* (le premier d'une série de trois), apporte cette réponse : les points de $\mathcal{M}_\Omega$ sont réliés en tant que potentiels par des géodésiques $C^{1,1}$ (à dérivées lipschitziennes, ou encore à dérivées secondes définies presque-partout et $\mathbf{L}^\infty$). De plus, ces géodésiques sont globalement minimisantes, ce qui fait de $\mathcal{M}_\Omega$ un espace métrique. Enfin, grâce à ces géodésiques, Chen démontre l'unicité — au sein de chaque classe de Kähler — d'une éventuelle métrique à courbure scalaire constante dans les cas $C_1 < 0$ et $C_1 = 0$ — démonstration particulièrement technique dans le cas $C_1 < 0$ —, et que dans le cas $C_1 \leq 0$ ces métriques réalisent le minimum global de la K-énergie, complétant le résultat de Bando et Mabuchi qui statuait que la K-énergie admettait nécessairement une borne inférieure pour qu'existe une métrique à courbure scalaire constante dans la première classe de Chern.

Quelque temps plus tard, Donaldson [Don1] parvenait, dans le cas polarisé avec groupe des automorphismes du fibré en droites L modulo $\mathbb{C}^*$ discret à démontrer que si la classe de Kähler admet une métrique à courbure scalaire constante, alors cette métrique est unique dans la classe de Kähler, et que les plongements de Kodaira dans $\mathbb{P}H^0(M, L^k)$ sont stables au sens de Chow-Mumford. Ce résultat a ensuite finalement été étendu par Mabuchi [Mab3], et Chen-Tian [Ch-Ti] qui suppriment la condition d'une classe de Kähler entière, qui ont démontré que deux métriques extrémales d'une même classe de Kähler diffèrent toujours d'un automorphisme holomorphe.

1.3 But du présent mémoire

Nous commençons par introduire la métrique de Mabuchi sur l'espace des potentiels de Kähler, puis dans l'espace des métriques des Kähler, toujours à classe de Kähler Ω fixée, puis nous donnons l'équation des géodésiques. Nous montrons que cette équation est équivalente à une équation de Monge-Ampère complexe homogène sur $M \times [0, 1] \times S^1$, avec donnée au bord S^1-invariante.

Vient ensuite ce qui correspond au cœur technique de l'article de Chen, à savoir la démonstration de l'existence de solution $C^{1,1}$ grâce à des estimées *a priori*, dont nous détaillons les démonstrations. Nous apportons également un résultat d'unicité de la solution au sens des courants.

Ensuite, nous reprenons la démonstration concernant l'unicité des métriques à courbure scalaire constante dans les cas $C_1 = 0$ puis $C_1 < 0$.

Enfin, nous rappelons brièvement les liens de ce problème de géodésiques avec la théorie de l'application moment provenant de la géométre symplectique.

1.4 Remerciements

J'aimerais remercier chaleureusement mon directeur de mémoire Olivier Biquard pour m'avoir initié à ce domaine fascinant de la géométrie, ainsi que pour sa disponibilité et pour son soutien tout au long de ce travail. Je voudrais également remercier Paul Gauduchon pour les précisions qu'il a pu m'apporter sur divers points, techniques ou théoriques. Je remercie aussi Tien-Cuong Dinh pour ses réponses au sujet de l'équation de Monge-Ampère du point de vue des courants, et enfin Raphaël Côte pour ses réponses en matière de distributions.

2 Géométrie de l'espace des métriques de Kähler

2.1 Espace des potentiels et espaces de métriques.

Partant de la variété kählérienne (compacte, connexe) (M, g, J, ω), une des premières conséquences du célèbre « dd^c-lemma » est la suivante : toute forme de Kähler $\bar{\omega} \in \Omega$, où Ω est la classe de cohomologie de de Rham de ω, s'écrit sous la forme $\bar{\omega} = \omega + dd^c\varphi$, avec φ une fonction C^∞, appelée *potentiel de Kähler*, et déterminée à une constante près. D'où la définition :

Définition 2.1 *On appelle espace des potentiels de Kähler relativement à la classe Ω, et on note $\tilde{\mathcal{M}}_\Omega$, l'ensemble des φ C^∞ sur M telles que $\omega_\varphi := \omega + dd^c\varphi > 0$, c'est-à-dire telles que la forme bilinéaire symétrique $(\omega + dd^c\varphi)(\cdot, J\cdot)$ est définie positive en tout point, i.e. est une métrique riemannienne.*

Remarque 2.2 *Si l'on change de point-base dans Ω, l'espace est simplement translaté dans $C^\infty(M)$; c'est la raison pour laquelle on le note $\tilde{\mathcal{M}}_\Omega$ plutôt que $\tilde{\mathcal{M}}_{\Omega,\omega}$. Et de la même manière que l'on a noté ω_φ la forme de Kähler relative au potentiel φ, on notera g_φ la métrique relative à cette forme, Δ_φ le laplacien riemannien relatif à cette métrique, etc. On fera aussi fréquemment l'identification entre une métrique kählérienne et la forme symplectique associée.*

Nous avons donc défini une variété de dimension infinie, qui est un ouvert de l'espace de Fréchet $C^\infty(M)$. En un point, l'espace tangent est donc $C^\infty(M)$ lui-même. Nous noterons donc, tant que faire se peut, f une fonction de $C^\infty(M)$ vue comme vecteur tangent, et φ un potentiel vu comme tel. On s'aperçoit donc qu'un champ de vecteurs sur $\tilde{\mathcal{M}}_\Omega$ associe une fonction *à chaque point* de $\tilde{\mathcal{M}}_\Omega$, point qui est déjà une fonction. Réciproquement, une fonction sur M pourra être vue comme un champ de vecteurs *constant* sur $\tilde{\mathcal{M}}_\Omega$. De manière analogue, nous définissons :

Définition 2.3 *On appelle espace des métriques de Kähler relativement à la classe Ω, et on note $\mathcal{M}_\Omega$, l'ensemble des $\bar{\omega}$ dans Ω telles que $\bar{\omega} > 0$.*

Ce qui précède nous dit que nous avons le quotient $\mathcal{M}_\Omega = \tilde{\mathcal{M}}_\Omega/\mathbb{R}$, et nous pouvons ainsi voir $\mathcal{M}_\Omega$ comme ouvert dans l'espace de Fréchet $C^\infty(M)/\mathbb{R}$. Si bien qu'il s'agit, tout comme $\tilde{\mathcal{M}}_\Omega$, d'ouverts étoilés (et en particulier connexes), le premier par rapport à ω, le second par rapport à 0 ; en effet, si $\bar{\omega} > 0$ (resp. $\omega + dd^c\varphi > 0$), alors pour tout t de $[0, 1]$, $t\omega + (1-t)\bar{\omega} > 0$ (resp. $\omega + dd^c(1-t)\varphi = t\omega + (1-t)(\omega + dd^c\varphi) > 0$), puisqu'un barycentre de métriques > 0 est > 0.

Mais on peut aussi réaliser $\mathcal{M}_\Omega$ comme une sous-variété de $\tilde{\mathcal{M}}_\Omega$. Tout d'abord, remarquons que l'on a une 1-forme sur $\tilde{\mathcal{M}}_\Omega$ définie par

$$\varphi \mapsto \{f \mapsto \frac{1}{V_\Omega} \int_M f v_\varphi\}.$$

Notons $\tilde{v}$ cette 1-forme. On vérifie alors qu'elle est fermée ; en effet, donnons-nous, en un point φ, deux fonctions f_1 et f_2, que nous étendons comme champs de vecteurs constants à $\tilde{\mathcal{M}}_\Omega$. Il vient, puisque f_1 et f_2 commutent,

$$d_\varphi \tilde{v}(f_1, f_2) = f_1 \cdot \tilde{v}_\varphi(f_2) - f_2 \cdot \tilde{v}_\varphi(f_1) = \frac{1}{V_\Omega} \int_M (f_2 f_1 \cdot v_\varphi - f_1 f_2 \cdot v_\varphi).$$

Pour calculer la variation de la forme volume, on écrit $f \cdot v_\varphi = f \cdot \omega_\varphi^m / m! = \frac{1}{m!} \frac{d}{dt}|_{t=0}(\omega_{\varphi+tf}^m) = \frac{1}{m!}\frac{d}{dt}|_{t=0}(\omega_\varphi^m + tm\omega_\varphi^{m-1} \wedge dd^c f + \text{termes en } t^2) = \frac{1}{(m-1)!}\omega_\varphi^{m-1} \wedge dd^c f = -\Delta_\varphi f v_\varphi$. On conclut alors par $d_\varphi \tilde{v}(f_1, f_2) = \frac{1}{V_\Omega} \int_M (f_1 \Delta_\varphi f_2 - f_2 \Delta_\varphi f_1) v_\varphi = 0$, en se rappelant que le laplacien est formellement autoadjoint.

Cela dit, puisque $\tilde{\mathcal{M}}_\Omega$ est étoilé, $\tilde{v}$ y admet une unique "primitive" nulle en 0, usuellement notée $\mathbb{I}$. En prenant le chemin $\varphi_t = t\varphi$ allant de 0 à φ, on parvient à l'expression $\mathbb{I}(\varphi) = \int_0^1 \tilde{v}_{\varphi_t}(\dot{\varphi}_t)dt = \frac{1}{V_\Omega} \int_M \varphi(\int_0^1 v_{\varphi_t} dt)$. Cette fonctionnelle est donc $\mathbb{R}$-équivariante, *i.e.* $\mathbb{I}(\cdot + c) = \mathbb{I} + c$, ce qui nous permet de voir $\mathcal{M}_\Omega$ comme n'importe quel espace de niveau de $\mathbb{I}$ sur $\tilde{\mathcal{M}}_\Omega$. On identifiera donc $\mathcal{M}_\Omega$ au sous-espace — et même à la sous-variété, puisque la différentielle de $\mathbb{I}$ n'est jamais nulle — $\mathbb{I}^{-1}(0)$ de $\tilde{\mathcal{M}}_\Omega$, ou encore $\bar{\omega}$ est identifiée à son potentiel φ tel que $\mathbb{I}(\varphi) = 0$. De sorte que l'on verra l'espace tangent en ce point $\bar{\omega} = \omega + dd^c\varphi$ comme le noyau de $d_\varphi \mathbb{I} = \tilde{v}_\varphi$, c'est-à-dire comme $\{f \in C^\infty(M) | \int_M f v_\varphi = 0\}$.

En outre, bien que $\tilde{\mathcal{M}}_\Omega$ apparaisse comme un simple produit $\mathcal{M}_\Omega \times \mathbb{R}$, il a comme nous le verrons l'intérêt de faciliter certains calculs.

2.2 Métrique de Mabuchi

Nous avons vu qu'il est fructueux, sur l'espace des potentiels, lorsqu'on travaille sur l'espace tangent en un point, d'utiliser la métrique représentée par ce même point, ce qui, compte-tenu de la nature de l'espace en question, est finalement tout aussi naturel que d'utiliser une métrique fixe. Ceci nous suggère la définition suivante, d'après [Mab2].

Définition 2.4 *On appelle métrique de Mabuchi, et on note $\tilde{g_\Omega}$, la métrique sur $\tilde{\mathcal{M}}_\Omega$ définie par $\tilde{g_\Omega}(f_1, f_2)_\varphi (= (f_1, f_2)_\varphi) := \frac{1}{V_\Omega} \int_M f_1 f_2 v_\varphi$. On notera g_Ω, ou encore $(.,.)$, la métrique induite sur $\mathcal{M}_\Omega$, appelée également métrique de Mabuchi.*

En fait, ces métriques font de $\tilde{\mathcal{M}}_\Omega \ni \varphi \mapsto (\varphi - \mathbb{I}(\varphi), \mathbb{I}(\varphi)) \in \mathcal{M}_\Omega \times \mathbb{R}$ une isométrie. Le fait suivant est en outre tout à fait remarquable.

Proposition 2.5 *La métrique de Mabuchi admet une connexion de Levi-Civita D, sur l'espace des potentiels comme sur celui des métriques.*

Démonstration. On le fait sur $\tilde{\mathcal{M}}_\Omega$. On sait que si connexion de Levi-Civita il y a, elle est donnée par la formule de Koszul. On commence par l'appliquer à des champs constants f_1, f_2, f_3 :

$$\begin{aligned}
2(D_{f_2}f_1, f_3)_\varphi &= f_1 \cdot (f_2, f_3)_\varphi + f_2 \cdot (f_1, f_3)_\varphi - f_3 \cdot (f_1, f_2)_\varphi \\
&= -(f_2f_3, \Delta_\varphi f_1)_\varphi - (f_1f_3, \Delta_\varphi f_2)_\varphi + (f_1f_2, \Delta_\varphi f_3)_\varphi \\
&= \langle -d(f_2f_3), df_1\rangle_\varphi - \langle d(f_1f_3), df_2\rangle_\varphi + \langle d(f_1f_2), df_3\rangle_\varphi \\
&= -2((df_1, df_2), f_3)_\varphi
\end{aligned}$$

où $\langle ., .\rangle_\varphi$ dénote le produit $\mathbf{L}^2$ des 1-formes, et où leur produit ponctuel est noté $(., .)$ (sous-entendu par rapport à g_φ). Si l'on pose dans le cas où au moins f_1 est un champ constant, $D_{f_2}f_1 = -(df_1, df_2)$, on répond donc en partie au problème. Reste à étendre D aux champ non constants. Soit F un champ non-nécessairement constant ; si on suppose f_1 et f_2 constants, ou plutôt si on les étend en des champs constants, on doit avoir $(D_{f_1}F, f_2)_\varphi = f_1 \cdot (f_2, F)_\varphi - (F, D_{f_1}f_2)_\varphi$, ce que l'on sait calculer. Plus précisément, on obtient un terme supplémentaire dû à la variation de F en direction de f_1, soit $\frac{d}{dt}|_{t=0}F_{\varphi+tf_1} = \dot{F}_\varphi(f_1)$. On a donc nécessairement :

$$\begin{aligned}
(D_{f_1}F, f_2)_\varphi &= (\dot{F}_\varphi(f_1), f_2)_\varphi - (F_\varphi f_2, \Delta_\varphi f_1)_\varphi + (F_\varphi, (df_1, df_2))_\varphi \\
&= (\dot{F}_\varphi(f_1), f_2)_\varphi - ((dF_\varphi, df_1), f_2)_\varphi
\end{aligned}$$

et on pose donc $D_{f_1}F = \dot{F}_\varphi(f_1) - (dF_\varphi, df_1)$, et on vérifie que l'on a bien la connexion voulue en remontant les calculs. Et de même, on pose $D_{f_1}F = \dot{F}_g(f_1) - (dF_g, df_1)$ si $F \in \Gamma(T\mathcal{M}_\Omega)$, $f_1 \in T_g\mathcal{M}_\Omega$. □

2.3 L'équation des géodésiques

Pour établir l'équation des géodésiques, on procède exactement comme en dimension finie : on calcule la variation au premier ordre de l'énergie d'un chemin sous l'effet de perturbations laissant inchangées les extrémités. Soit donc $\varphi \in C^\infty(M \times [0, 1])$ un chemin différentiable dans $\mathcal{M}_\Omega$ de φ_0 à φ_1, avec $\varphi_0, \varphi_1 \in \tilde{\mathcal{M}}_\Omega$. Chaque $\varphi(t)$ est donc dans $\mathcal{M}_\Omega$. L'énergie de ce chemin, relativement à la métrique de Mabuchi, est donnée par

$$\int_0^1 dt \int_M \varphi'(t)^2 v_{\varphi(t)}$$

où $'$ dénote la dérivée par rapport à t, et où l'on omet la dépendance en M pour alléger les expressions. Une perturbation du premier ordre $f \in C^\infty(M \times [0, 1])$ de φ, laissant fixes les extrémités, *i.e.* $f(0) \equiv f(1) \equiv 0$, entraîne pour variation de cette énergie

$$\frac{d}{ds}|_{s=0} \int_0^1 dt \int_M (\varphi'(t)+sf'(t))^2 v_{\varphi(t)+sf(t)} = \int_0^1 dt \int_M (2\varphi'(t)f'(t) - \varphi(t)^2 \Delta_{\varphi(t)} f(t)) v_{\varphi(t)}$$

puisque, comme on l'a déjà vu lors du calcul de la variation au premier ordre de la forme volume, $\frac{d}{ds}|_{s=0}(v_{\varphi(t)+sf(t)}) = -\Delta_{\varphi(t)}(f(t))v_{\varphi(t)}$. En faisant d'une part un intégration par parties en t en se servant de $f(0) \equiv f(1) \equiv 0$, et d'autre part en utilisant l'autoadjonction du laplacien, cette variation s'écrit :

$$\int_0^1 dt \int_M (2f(t)\frac{d}{dt}(\varphi'(t)v_{\varphi(t)}) - f(t)\Delta_{\varphi(t)}(\varphi'(t)^2)v_{\varphi(t)})$$

Or, en reprenant une fois de plus le calcul de la variation la forme volume, $\frac{d}{dt}(\varphi'(t)v_{\varphi(t)}) = \varphi''(t)v_{\varphi(t)} + \varphi'(t)\frac{d}{dt}(v_{\varphi(t)}) = (\varphi''(t) - \varphi'(t)\Delta_{\varphi(t)}\varphi'(t))v_{\varphi(t)}$. Ajoutons que

$$\Delta_{\varphi(t)}(\varphi'(t)^2)v_{\varphi(t)} = \frac{1}{(m-1)!}\omega_{\varphi(t)}^{m-1} \wedge dd^c(\varphi'(t)^2).$$

Mais $dd^c(\varphi'(t)^2) = d(2\varphi'(t)d^c\varphi'(t)) = 2d\varphi'(t) \wedge d^c\varphi'(t) + 2\varphi'(t)dd^c\varphi'(t)$. D'où

$$\begin{aligned}\Delta_{\varphi(t)}(\varphi'(t)^2)v_{\varphi(t)} &= \frac{2}{(m-1)!}\omega_{\varphi(t)}^{m-1} \wedge (d\varphi'(t) \wedge d^c\varphi'(t) + \varphi'(t)dd^c\varphi'(t)) \\ &= \frac{2}{(m-1)!}\omega_{\varphi(t)}^{m-1} \wedge (d\varphi'(t) \wedge d^c\varphi'(t)) + 2\varphi'(t)\Delta_{\varphi(t)}\varphi'(t)v_{\varphi(t)},\end{aligned}$$

Reste à remarquer que $\frac{1}{(m-1)!}\omega_{\varphi(t)}^{m-1} = *_{\varphi(t)}\omega_{\varphi(t)}$, donc

$$\Delta_{\varphi(t)}(\varphi'(t)^2)v_{\varphi(t)} = 2((\omega_{\varphi(t)}, d\varphi'(t) \wedge d^c\varphi'(t)) + \varphi'(t)\Delta_{\varphi(t)}\varphi'(t))v_{\varphi(t)}.$$

c'est-à-dire $\Delta_{\varphi(t)}(\varphi'(t)^2) = 2|d\varphi'(t)|^2_{\varphi(t)} + 2\varphi'(t)\Delta_{\varphi(t)}\varphi'(t)$, comme on le voit en prenant des coordonnées locales dans lesquelles $\omega_{\varphi(t)}$ s'exprime comme la forme symplectique standard, ou plus exactement, en raisonnant point par point, en se plaçant dans un système de coordonnées holomorphes telle que les vecteurs tangents induits forment, au point considéré, une base orthonormée.

La variation d'énergie est donc égale à

$$-2\int_0^1 dt \int_M f(t)(\varphi''(t) - |d\varphi'(t)|^2_{\varphi(t)})v_{\varphi(t)}.$$

Ce qui finalement nous dit que l'on a pour équation des géodésiques :

$$\varphi''(t) - |d\varphi'(t)|^2_{\varphi(t)} = 0. \tag{1}$$

On peut vouloir, pour éviter ces calculs, voir le terme $-(dF_\varphi, df)$ dans l'expression $D_fF = \dot{F}_\varphi(f) - (dF_\varphi, df)$, comme le symbole de Christoffel associé à la connexion de Levi-Civita. Ce calcul nous rassure donc quant à l'équivalence des définitions des géodésiques, à savoir par $D_{\varphi'(t)}\varphi'(t) = 0$ ou *via* la minimisation de l'énergie, en dimension infinie, en plus de nous familiariser avec le calcul différentiel kählérien (identités kählériennes, *etc.*). Notons par exemple que c'est le chemin inverse qui est fait dans [Don2], où l'équation des géodésiques sert à exhiber la connexion de Levi-Civita. Par ailleurs, l'existence des géodésiques, qui se ramène à un problème de Cauchy du second ordre en dimension finie, n'est ici plus du tout assurée, puisqu'on n'est pas sur une variété banachique.

Théorème 2.6 *Les géodésiques de l'espace des potentiels, si elles existent, vérifient l'équation (1).*

Remarque 2.7 *On peut faire de nombreuses autres observations que celles qui vont suivre sur les géodésiques, comme les caractérisations en termes de courbes de Moser, comme le fait en particulier O. Mohsen, voir [Moh]. D'autre part, si les deux potentiels des extrémités sont dans* $\mathbb{I}^{-1}(0)$*, qui est totalement géodésique en raison de l'isométrie* $\tilde{\mathcal{M}}_\Omega \cong \mathcal{M}_\Omega \times \mathbb{R}$*, la géodésique est dans* $\mathbb{I}^{-1}(0)$*. Autrement dit, cette équation est aussi celle des géodésiques dans* $\mathcal{M}_\Omega$*.*

Remarque 2.8 *On dira que la base induite par* $(z_1, \ldots, z_m)$ *en* p *est* g*-orthonormée si pour tout* i, j*,* $g_{i\bar{j}} = g(\frac{\partial}{\partial z_i}, \frac{\partial}{\partial \bar{z}_j}) = \delta_{ij}$*, c'est-à-dire si* $g(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial y_j}) = 0$*, et si* $g(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}) = g(\frac{\partial}{\partial y_i}, \frac{\partial}{\partial y_j}) = 2\delta_{ij}$*.*

2.4 De l'équation des géodésiques à l'équation de Monge-Ampère complexe homogène

Ce changement de point de vue, que nous allons expliquer dans les lignes à venir, est essentiellement dû à Semmes, voir [Sem]. Pour ce faire, au lieu de voir une géodésique comme une fonction de $C^\infty(M \times [0,1])$, nous déclarons que c'est une fonction de $C^\infty(M \times [0,1] \times S^1)$ indépendante de la variable du dernier facteur, disons s.

Ce choix n'est pas anodin. En effet, $[0,1] \times S^1$, que nous noterons désormais Σ, est une couronne incluse dans le plan complexe *via* la paramétrisation $(t,s) \mapsto e^{t+is}, t \in [0,1], s \in S^1 = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$, ce qui en fait une surface de Riemann compacte à bord, et ainsi, $M \times \Sigma$ est une variété complexe de dimension $m+1$, et même kählérienne, en prenant par exemple $\omega_{M\times\Sigma} := pr_M^*\omega + \frac{i}{2}dw \wedge d\bar{w}$, où $w = \frac{i}{2}(t+is)$ est la coordonnée holomorphe locale sur le produit $[0,1] \times S^1$, vu comme tel, ou comme facteur de $M \times \Sigma$, tandis que z dénote la variable de M. Cela dit, nous posons

$$\Phi(z,t,s) = \varphi(z,t).$$

Le résultat fondamental de cette section est le suivant :

Théorème 2.9 *Le chemin* $\varphi(t)$ *est une géodésique si et seulement si* $(pr_M^*\omega + dd^c\Phi)^{m+1} \equiv 0$*, où les opérateurs* d *et* d^c *sont ceux de* $M \times \Sigma$*. Autrement dit, la* *donnée d'une géodésique sur l'espace des potentiels de Kähler est équivalente à la donnée d'une fonction Φ de $C^\infty(M \times \Sigma)$ qui est S^1-invariante, qui vérifie l'équation ci-dessus, et telle que pour tous t, s, $\Phi(., t, s)$ est un potentiel de Kähler sur M.*

Démonstration. On se place en un point p de M, et on utilise des coordonnées holomorphes locales $z_1, \ldots, z_m$. Considérons $g_{\varphi(t)}$; on peut supposer qu'en p, nos coordonnées induisent une base orthonormée, de sorte que la matrice de $g_{\varphi(t)}$ est dans ces coordonnées l'identité au point p. Puisqu'alors $|d\varphi'(t)|^2_{\varphi(t)} = \sum_{j=1}^m |\frac{\partial \varphi'(t)}{\partial z_j}|^2$, la quantité $\varphi''(t) - |d\varphi'(t)|^2_{\varphi(t)}$ est simplement égale au déterminant de la matrice

$$\begin{pmatrix} & & & \frac{\partial \varphi'}{\partial z_1} \\ & I_m & & \vdots \\ & & & \frac{\partial \varphi'}{\partial z_m} \\ \frac{\partial \varphi'}{\partial \bar{z}_1} & \ldots & \frac{\partial \varphi'}{\partial \bar{z}_m} & \varphi''(t) \end{pmatrix}$$

comme on le constate en développant par rapport à la dernière colonne, puis par rapport à la dernière ligne des mineurs non triviaux obtenus. Remarquons toutefois que puisque la dépendance en s de Φ est triviale, $\frac{\partial}{\partial t}$, $\frac{\partial}{\partial w} = \frac{\partial}{\partial t} - i\frac{\partial}{\partial s}$ et $\frac{\partial}{\partial \bar{w}} = \frac{\partial}{\partial t} + i\frac{\partial}{\partial s}$ agissent de la même manière sur Φ et sur ses dérivées (ce qui explique pourquoi on a pris $w = \frac{i}{2}(t + is)$, et non $w = t + is$). Notre matrice est donc égale à

$$\begin{pmatrix} & & & \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z_1 \partial w} \\ & I_m & & \vdots \\ & & & \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z_m \partial w} \\ \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \bar{z}_1 \partial \bar{w}} & \ldots & \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \bar{z}_m \partial \bar{w}} & \frac{\partial^2 \Phi}{\partial w \partial \bar{w}} \end{pmatrix}$$

Or, cette matrice est celle de la forme bilinéaire $(pr_M^*\omega + dd^c\Phi)(., J.)$ dans la base $(\frac{\partial}{\partial z_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial z_m}, \frac{\partial}{\partial w})$. φ vérifie donc l'équation des géodésiques si et seulement si le déterminant de cette matrice est nulle, c'est-à-dire si et seulement si $(pr_M^*\omega + dd^c\Phi)^{m+1} \equiv 0$. □

Remarque 2.10 *En fait, ce calcul nous dit :* $(\varphi'' - |d\varphi'|^2)\det(g_\varphi) = \det(g_\Phi)$*, où l'on complète la base utilisée pour calculer le premier déterminant par* $\frac{\partial}{\partial w}$ *pour calculer le second.*

Nous voici donc en présence de l'équation de Monge-Ampère complexe — elle fait intervenir l'opérateur $d^c = J^{-1}dJ$ — et manifestement homogène — ce qui n'est pas sans poser problème, puisque le fait que le membre de droite soit nul est synonyme d'une certaine dégénérescence. C'est ici sa formulation géométrique intrinsèque ; si l'on choisit le point de vue des coordonnées, comme il est pertinent de le faire pour « travailler » cette équation, celle-ci s'exprime en termes d'annulation de déterminant, et on constate derechef son invariance par changement de système. On pourra consulter Bedford-Taylor [Be-Ta] pour des commentaires quant à l'historique de cette équation. Rappelons cependant succinctement que c'est également une équation de Monge-Ampère qu'il s'agit de résoudre dans le problème de Calabi — étant donnée une fonction f, on veut trouver φ tel que $(\omega + dd^c\varphi)^m = Ae^f\omega^m$, où $A = (\int_M e^f\omega^m)^{-1}$ —, ce qui nous donnera l'occasion de nous servir d'estimées obtenues par Yau, *cf.* [Yau1]. Concluons en remarquant que ce problème de géodésiques se ramène à un problème à bord, avec condition au bord de type Dirichlet, la donnée au bord étant prescrite par la donnée des extrémités de la géodésique.

On peut aussi décider d'abolir l'indépendance en s ; *cf.* [Ch-Ti].

3 Existence et construction d'une solution $C^{1,1}$

3.1 Méthode de continuité

Précisons tout d'abord que nous notons ω_M la métrique d'origine sur M.

Observons que l'équation que nous avons obtenue peut se récrire sous la forme $\left((pr_M^*\omega_M + \frac{i}{2}dw \wedge d\bar{w}) + dd^c(\Phi - \frac{1}{8}t^2)\right)^{m+1} \equiv 0$ (puisque $\frac{i}{2}dw \wedge d\bar{w} = \frac{1}{4}dt \wedge ds = \frac{1}{8}dd^ct^2$) ; cette apparente trivialité tient compte du fait que $\omega_{M\times\Sigma} := pr_M^*\omega + \frac{i}{2}dw \wedge d\bar{w}$ est une forme de Kähler sur $M \times \Sigma$, tandis que $pr_M^*\omega$ est dégénérée. On se ramène donc en dernière analyse à l'équation

$$(\omega + dd^c\phi)^{m+1} \equiv 0$$

sur $M \times \Sigma$, avec ω forme de Kähler (sur $M \times \Sigma$; elle tient lieu de $\omega_{M\times\Sigma}$) telle que $\omega - \frac{i}{2}dw \wedge d\bar{w}$ est S^1-invariante sur $M \times \Sigma$, de même que la donnée au bord de $\phi + \frac{1}{8}t^2$ et donc de ϕ.

Venons-en à la méthode de continuité. Elle consiste à ne plus vouloir résoudre directement cette équation homogène, mais, en partant d'une équation similaire, déjà résolue, et en faisant « disparaître » progressivement le membre de droite, à obtenir la solution de l'équation homogène comme limite des solutions des équations à membre de droite non nul. Plus explicitement, cela revient à résoudre, pour tout $r \in]0, 1]$ et pour une certaine fonction S^1-invariante θ sur $M \times \Sigma$ et en tout point strictement croissante en r telle que $\theta(1) = 1$ et $\theta(0) = 0$ (typiquement, $\theta(r) = r$, mais nous allons voir qu'il est judicieux de modifier légèrement cette fonction), l'équation

$$(E_r)\begin{cases}(\omega + dd^c\phi)^{m+1} = \theta(r)(\omega + dd^c\phi^{(1)})^{m+1} \\ \phi|_{\partial(M\times\Sigma)} = \phi^{(1)}|_{\partial(M\times\Sigma)} \text{ (conditions au bord)} \\ \omega + dd^c\phi > 0 \text{ (positivité)}\end{cases}$$

sur $M \times \Sigma$, où $\phi^{(1)}$ est elle-même solution du problème pour $r = 1$, ce qui signifie $\omega + dd^c\phi^{(1)} > 0$. De plus, pour garder la trace de notre problème de géodésiques, on demandera à ce que la donnée des extrémités de la géodésique recherchée soit contenue dans la donnée au bord, ce qui revient à poser, après corrections, $\phi^{(1)}|_{M\times\{0\}\times S^1} = \varphi_0$ et $\phi^{(1)}|_{M\times\{1\}\times S^1} = \varphi_1 - \frac{1}{8}$ (par souci de clarté, les φ sont des fonctions sur M, et les ϕ, sur $M \times \Sigma$).

Remarquons rapidement que grâce au bord, on peut changer le volume relatif à une métrique au sein d'une même classe de Kähler, contrairement au problème de Calabi.

La première étape est de s'assurer qu'une telle fonction $\phi^{(1)}$ existe. Pour ce faire, donnons-nous sur $M \times \Sigma$ une fonction ψ de w, et même de t strictement convexe, et nulle au bord de Σ ; par exemple, $\psi(w) = -\frac{1}{8}t(1-t)$ fait très bien l'affaire. Posons $\phi^{(1)}(z,t,s) = (1-t)\varphi_0(z) + t(\varphi_1(z) - \frac{1}{8}) + C\psi(z,t,s)$, avec $C > 0$ une constante assez grande pour que $\omega + dd^c\phi^{(1)} > 0$. Ce point est tout à fait réalisable ; tous calculs faits, on a

$$\begin{aligned}\omega + dd^c\phi^{(1)} = \omega_M &+ (1-t)dd^c\varphi_0 + tdd^c\varphi_1 + d(\varphi_1 - \varphi_0)\wedge ds \\ &-d^c(\varphi_1 - \varphi_0)\wedge dt + Cdd^c\psi + \frac{1}{4}dt\wedge ds\end{aligned}$$

donc en revenant aux formes bilinéaires symétriques, la forme $g_{M\times\Sigma,\phi^{(1)}}$ obtenue sur $T(M\times\Sigma)$, vu comme $TM \oplus T\Sigma$, est du type

$$\begin{pmatrix} g_M & b \\ {}^tb & (C+1)g_\Sigma \end{pmatrix}$$

où b est un morphisme continu de fibrés $TM \to T\Sigma$ qui représente les termes mixtes $d(\varphi_1 - \varphi_0)\wedge ds$ et $-d^c(\varphi_1 - \varphi_0)\wedge dt$, g_M est définie positive sur TM, et Cg_Σ représente $Cdd^c\psi$, puisque $dd^c\psi = \frac{1}{4}dt\wedge ds = \frac{i}{2}dw\wedge d\bar{w}$. Dès lors, pour $(X_M, X_\Sigma) \in TM \times T\Sigma$,

$$g_{M\times\Sigma,\phi^{(1)}}((X_M,X_\Sigma),(X_M,X_\Sigma)) = |X_M|^2_{g_M} + 2B(X_M,X_\Sigma) + (C+1)|X_\Sigma|^2_{g_\Sigma}$$

avec $B : TM \times T\Sigma \to \mathbb{R}$ bilinéaire. Soit $\varepsilon = (1 + \sup_{M\times\Sigma}\|B\|)^{-1}$. Alors de ce que $B(X_M,X_\Sigma) \leq \|B\||X_M||X_\Sigma|$ et $|X_M||X_\Sigma| \leq \frac{1}{2}(\varepsilon|X_M| + |X_\Sigma|/\varepsilon)$, on déduit que dès que $C + 1 > \sup_{M\times\Sigma}\|B\|/\varepsilon$, $g_{M\times\Sigma,\phi^{(1)}}$ est définie positive.

Enfin, remarquons qu'ainsi définie, $\phi^{(1)}$ est encore S^1-invariante, ce qui conférera son S^1-invariance à la solution à l'équation (E_r), modulo l'unicité de cette solution qu'il nous reste à voir.

Cela dit, quelle est la stratégie pour démontrer que (E_r) admet une solution pour tout $r \in]0,1]$? Usuellement, elle consiste à démontrer que l'ensemble des r au voisinage desquels (E_r) admet une solution, qui est certainement un ouvert de $]0,1]$, en est aussi un fermé, ce qui, puisque cet ensemble est non vide par un argument d'ellipticité, permet de conclure. C'est ce que nous allons faire, de manière un peu déguisée ; en effet, nous allons, en suivant Chen, nous pencher sur le plus petit r_0 tel que (E_r) admet une unique solution pour tout r dans $]r_0, 1]$, et montrer par l'absurde que $r_0 = 0$.

Mais avant tout, examinons la condition de positivité $\omega + dd^c\phi > 0$. Est-elle redondante, comme dans le problème de Calabi ? En effet, si sur une variété compacte *sans bord* on a $(\omega + dd^c\phi)^m = Ae^f\omega^m$, puisque le déterminant ne s'annule pas, les valeurs propres de $\omega + dd^c\phi$ non plus, et il suffit d'avoir la positivité en un point ; or, en un point où ϕ atteint son maximum, $dd^c\phi > 0$, et *a fortiori* en ce point, $\omega + dd^c\phi > 0$. Du fait du bord dans notre problème, cette technique ne fonctionne plus, et nous sommes donc contraints de maintenir pour le moment la condition de positivité si l'on veut des solutions qui la vérifient.

Tout d'abord, posons $\omega_1 = \omega + dd^c\phi^{(1)}$.

3.2 Unicité des solutions intermédiaires et estimées C^0 *a priori*

On utilise ici un raisonnement qui permet aussi d'obtenir l'unicité au problème de Calabi. On pourra consulter à ce sujet [Gau], chapitre 1, section 8.

L'idée qui sous-tend cette technique consiste à faire apparaître des fonctions sous-harmoniques par rapport à des métriques *ad hoc* qui sont nulles sur le bord de $M \times \Sigma$, puis d'appliquer le principe du maximum en vue d'obtenir des inégalités.

On commence par le résultat d'unicité de la solution de l'équation de type Monge-Ampère avec second membre non nul (sur variété complexe compacte à bord de dimension $m+1$, où l'on oublie provisoirement les problèmes d'invariance selon S^1). Soient $\phi_1^{(r)}$, $\phi_2^{(r)}$ deux solutions de l'équation $(\omega + dd^c\phi)^{m+1} = \theta(r)\omega_1^{m+1}, \phi|_{\partial(V\times\Sigma)} = \phi^{(1)}|_{\partial(V\times\Sigma)}$, avec $\omega_\phi = \omega + dd^c\phi > 0$. Notons $\psi = \phi_1^{(r)} - \phi_2^{(r)}$ (en oubliant le ψ de la section précédente, qui désormais ne nous est plus d'aucune utilité). Alors ψ est nulle sur le bord, et $(\omega_{\phi_1^{(r)}} + dd^c\psi)^{m+1} = \omega_{\phi_1^{(r)}}^{n+1}$. Or, on peut écrire $dd^c\psi = \omega_{\phi_1^{(r)}}(\Psi.,.)$, avec Ψ antihermitien de sorte que, ponctuellement, dans un système de coordonnées bien choisi, $\omega = \frac{i}{2}\sum_j dz_j \wedge d\bar{z}_i$ et $dd^c\psi = \frac{i}{2}\sum \lambda_j dz_j \wedge d\bar{z}_j$, et que l'équation en ψ s'écrive $\prod(\lambda_j + 1) = 1$, avec la condition $\lambda_j + 1 > 0$ pour tout j. Par concavité du logarithme, on a alors

$$1 = \prod_{j=1}^{m+1} (\lambda_j + 1)^{\frac{1}{m+1}} \leq \frac{\sum_{j=1}^{m+1}(1+\lambda_j)}{m+1} = 1 - \frac{\Delta_{\phi_1^{(r)}}\psi}{m+1},$$

c'est-à-dire $\Delta_{\phi_1^{(r)}}\psi \leq 0$. La fonction ψ est donc sous-harmonique et donc négative sur $M \times \Sigma$ par principe du maximum, étant nulle sur le bord. $\phi_1^{(r)}$ et $\phi_2^{(r)}$ jouant un rôle symétrique, on en déduit que $\psi = 0$, c'est-à-dire $\phi_1^{(r)} = \phi_2^{(r)}$. En particulier, pour $r = 1$, on a bien $\phi^{(r=1)} = \phi^{(1)}$.

Un cas particulier, qui nous concerne au premier chef, est celui du produit $M \times \Sigma$, où Σ est le cylindre $[0,1] \times S^1$ et où $\phi^{(r)}$ est S^1-invariante ; dès que $\phi^{(r)}$ est solution de $(\omega + dd^c\phi)^{m+1} = \theta(r)\omega_1^{m+1}, \phi^{(r)}|_{\partial(V\times\Sigma)} = \phi^{(1)}|_{\partial(V\times\Sigma)}$, alors $r_s^*\phi^{(r)}$ est solution de $(r_s^*\omega + dd^c(r_s^*\phi))^{m+1} = \theta(r)r_s^*\omega_1^{m+1}$, $r_s^*\phi|_{\partial(V\times\Sigma)} = \phi^{(1)}|_{\partial(V\times\Sigma)}$ puisque $r_s^*\phi^{(1)} = \phi^{(1)}$. Or, $r_s^*\omega = \omega$, et donc $(\omega + dd^c(r_s^*\phi^{(r)}))^{m+1} = \theta(r)\omega_1^{m+1}$. L'unicité nous dit alors que $r_s^*\phi^{(r)} = \phi^{(r)}$ pour tout s, c'est-à-dire : $\phi^{(r)}$ est S^1-invariante. L'unicité de la solution nous permet donc d'affirmer que cette solution hérite des symétries de l'équation, et ainsi de nous rattacher à notre interprétation première du problème en termes de géodésiques, et plus généralement de chemins. Tout cela reste bien sûr vrai compte tenu des modifications $\phi \to \phi - \frac{1}{8}$ et $\omega \to \omega + \frac{i}{2}dw \wedge d\bar{w}$, qui sont elles-mêmes S^1-invariantes.

Dans le même élan, nous allons mettre en lumière des estimations C^0. Si $(\omega + dd^c\phi^{(r)})^{m+1} = \theta(r)\omega_1^{m+1}$, $\phi^{(r)}|_{\partial(V\times\Sigma)} = \phi^{(1)}|_{\partial(V\times\Sigma)}$, on pose (en oubliant encore le « contenu » précédent) $\psi = \phi^{(1)} - \phi^{(r)}$. L'équation , récrite $\frac{1}{\theta(r)}\omega_{\phi^{(r)}}^{m+1} = (\omega_{\phi^{(r)}} + dd^c\psi)^{m+1}$, devient, via une base adaptée à $\omega_{\phi^{(r)}}$ et à $dd^c\psi$, $\prod(\lambda_i + 1) = \frac{1}{r}, \lambda_i + 1 > 0, i = 1 \ldots m+1$. Toujours par concavité du logarithme,

$$(\frac{1}{\theta(r)})^{\frac{1}{m+1}} = \prod_{j=1}^{m+1}(\lambda_j + 1)^{\frac{1}{m+1}} \leq \frac{\sum_{j=1}^{m+1}(1+\lambda_j)}{m+1} = 1 - \frac{\Delta_{\phi^{(r)}}\psi}{m+1},$$

soit $\Delta_{\phi^{(r)}}\psi \leq 1 - (\frac{1}{\theta(r)})^{\frac{1}{m+1}} \leq 0$. ψ, nulle sur le bord et sous-harmonique, est donc négative, d'où l'estimation $\phi^{(1)} \leq \phi^{(r)}$. En fait, dès que l'on a une solution de (E_r) et une autre de $(E_{r'})$ avec $r \leq r'$, on a exactement $\phi^{(r')} \leq \phi^{(r)}$ — et on a même l'inégalité stricte à l'intérieur de $M \times \Sigma$ dès que $r < r'$, puisque l'on a des inégalités stricte tout au long du raisonnement.

En outre, si l'on utilise la condition $\omega_{\phi^{(r)}} = \omega + dd^c\phi^{(r)} > 0$, on peut appliquer ce même raisonnement pour avoir une majoration *a priori* sur $\phi^{(r)}$. En effet, définissons une fonction qui va nous être utile tout le long de cette partie.

Définition 3.1 *On appelle h la fonction sur-harmonique sur $M \times \Sigma$ telle que $-\Delta h + m + 1 = 0$, $h|_{\partial(V\times\Sigma)} = \phi^{(1)}|_{\partial(V\times\Sigma)}$ (équation de Poisson, problème de Dirichlet, laplacien relatif à ω).*

Si l'on pose $\psi = \phi^{(r)}$, on aura alors (via l'utilisation d'un système de coordonnées adapté à ω et $dd^c\phi^{(r)}$) $\prod(\lambda_j + 1) > 0$. La concavité du logarithme donne cette fois

$$0 \leq \prod_{j=1}^{m+1} (\lambda_j + 1)^{\frac{1}{m+1}} \leq \frac{\sum_{j=1}^{m+1}(1+\lambda_j)}{m+1} = 1 - \frac{\Delta\psi}{m+1},$$

ou encore $\Delta\psi \leq m + 1 = \Delta h$, soit : $\phi^{(r)} - h$ est sous-harmonique, et comme elle est nulle au bord, elle est négative, donc $\phi^{(r)} \leq h$. Au passage, ceci nous donne une borne inférieure sur $\Delta\phi^{(r)}$

On peut donc déjà affirmer que si l'on sait résoudre (E_r) pour tout $r \in]0, 1]$, comme la suite des solutions, lorsque r tend vers 0, est croissante majorée, elle est convergente en tout point, et le théorème de Dini nous dit qu'on a même convergence uniforme vers une fonction qui est donc continue, et que nous notons $\phi^{(0)}$. Idéalement, si cette fonction, qui est clairement S^1-invariante, était C^∞, et limite C^2 de la suite des solutions, on saurait immédiatement conclure quant à l'existence de géodésiques dans $\tilde{\mathcal{M}}_\Omega$. Mais le mieux qu'on puisse faire jusqu'à présent est $C^{1,1}$, ce qui est loin d'être suffisant. Nous allons toutefois voir dans certains cas comment pallier ce défaut d'existence de « vraies » géodésiques, et comment exploiter le fait qu'on sache approximer nos pseudo-géodésiques par des objets C^∞, puisque c'est en réalité ainsi qu'ils sont construits.

3.3 Estimées d'ordre supérieur

Nous récrivons l'équation (E_r), en posant f telle que $f\omega^{m+1} = (\omega + dd^c\phi^{(1)})^{m+1}$, de sorte que (E_r) se résume à

$$(\omega + dd^c\phi)^{m+1} = \theta(r)f\omega^{m+1}$$

en plus de la condition de bord et de la condition de positivité.

Notons que nous avons encore une certaine liberté sur θ. Ceci va nous permettre d'éliminer (pour les petits r) le terme f, qui est un reliquat dû à ω_1, alors que la métrique naturelle est ω. En effet, nous avons dû *construire* la fonction qui nous permettrait d'amorcer la méthode de continuité, tandis que ω apparaît naturellement à partir de ω_M. Ainsi, soit $c = \inf_{M\times\Sigma} f > 0$. Soit τ une fonction croissante lisse sur $[0, 1]$, identiquement nulle sur $[0, \frac{1}{2}]$, et telle que $\tau(1) = 1$.

On pose finalement $\theta(r) = r((1 - \tau(r))\frac{c}{f} + \tau(r)f)$, de sorte que θ vérifie toutes les conditions que l'on a imposées dans la section 3.1 : croissance stricte en tout point, S^1-invariance, *etc.* Et en fin de compte, $\theta(r)f = r((1 - \tau(r))c + \tau(r)f)$, ce qui vaut bien f pour $r = 1$, et vaut cr pour r proche de 0

Ainsi que nous l'avons indiqué, nous utilisons une lemme dû à Yau, et plus précisément figurant dans la démonstration de la conjecture de Calabi :

Lemme 3.2 (Yau) *Si $\phi^{(r)}$ est une solution de (E_r) pour $r \in]0,1[$, alors on a l'estimée C^2 a priori suivante :*

$$\begin{aligned}-\Delta_{\phi^{(r)}}\left(e^{-C\phi^{(r)}}(m+1-\Delta\phi^{(r)})\right) \geq\ & e^{-C\phi^{(r)}}\left(\Delta \ln(c+\tau(r)(f-c)) - (m+1)^2 \inf_{i\neq l} R_{i\bar{i}l\bar{l}}\right)\\ & -Ce^{-C\phi^{(r)}}(m+1)(m+1-\Delta\phi^{(r)})\\ & +(C+\inf_{i\neq l} R_{i\bar{i}l\bar{l}})e^{-C\phi^{(r)}}(m+1-\Delta\phi^{(r)})^{1+1/m}\cdot\\ & (r(c+\tau(r)(f-c)))^{-1}\end{aligned}$$

où R est la courbure riemannienne associée à $g = g_{M\times\Sigma}$ et $C + \inf_{i\neq l} R_{i\bar{i}l\bar{l}} > 1$ dépend uniquement de $(M \times \Sigma, \omega)$.

De ce lemme nous tirons une estimée sur $m + 1 - \Delta\phi^{(r)}$, par la technique habituelle du principe du maximum.

Puisque $\phi^{(r)}$, que nous appelons désormais ϕ, est bornée indépendamment de r (c'est ce que disent les estimées C^0 de la section précédente), il en va de même pour $e^{-C\phi}(\Delta \ln(c + \tau(r)(f - c)) - (m + 1)^2 \inf_{i\neq l} R_{i\bar{i}l\bar{l}})$, dont nous noterons c_0 un minorant (malgré une petite dépendance en r *via* τ, $0 < c \leq c + \tau(r)(f - c) \leq f$, et les dérivées de ce terme se contrôlent facilement uniformément). Donnons-nous alors, indépendamment de r, une constante $K_0 > 0$ assez grande pour que $-c_0+((c+\tau(r)(f-c))^{-1}(C+\inf_{i\neq l} R_{i\bar{i}l\bar{l}})K^{1/m}-C(m+1))K > 0$ dès que $K \geq K_0$.

De deux choses l'une : ou bien $e^{-C\phi}(m + 1 - \Delta\phi) \leq K_0$ sur $M \times \Sigma$, ou bien $e^{-C\phi}(m + 1 - \Delta\phi)(p) > K_0$ en un point p de $M \times \Sigma$. On peut supposer qu'en ce point, $e^{-C\phi}(m+1-\Delta\phi)$ atteint son maximum K — on a donc, d'après l'inégalité précédente et le lemme 3.2, $-\Delta_\phi(e^{-C\phi}(m + 1 - \Delta\phi))(p) > 0$. Mais si ce point est à l'intérieur de $M \times \Sigma$, comme le laplacien d'une fonction au point d'un ouvert où elle réalise son maximum est toujours ≥ 0, on a une contradiction. Dans ce cas, $e^{-C\phi}(m + 1 - \Delta\phi)$ atteint donc son maximum au bord de $M \times \Sigma$.

Et finalement, puisque ϕ est bornée indépendamment de r, on a des constantes a et b (indépendantes de r) telles $(m+1-\Delta\phi) \leq ae^{-C\phi}(m+1-\Delta\phi) \leq b(m+1-\Delta\phi)$, ce qui compte-tenu du paragraphe précédent, nous permet d'affirmer :

Corollaire 3.3 *Il existe une constante $C > 0$ qui dépend seulement de $(M\times\Sigma, \omega)$ telle que*

$$\max_{M\times\Sigma}(m + 1 - \Delta\phi) \leq C(1 + \max_{\partial(M\times\Sigma)}(m + 1 - \Delta\phi))$$

La prochaine étape va consister à contrôler ces laplaciens sur le bord, tout d'abord par la différentielle de ϕ :

Théorème 3.4 *Sous les mêmes hypothèses, il existe une constante $C > 0$ qui dépend seulement de $(M \times \Sigma, \omega)$ telle que*

$$\max_{\partial(M\times\Sigma)}(m + 1 - \Delta\phi) \leq C(1 + \max_{M\times\Sigma} |d\phi|^2)$$

Remarque 3.5 *Il peut paraître étrange de travailler sur $m + 1 - \Delta\phi$ plutôt que sur $\Delta\phi$; mais nous avons vu que c'est cette quantité qui est positive, et qu'il est donc finalement assez naturel de la considérer en voulant la majorer.*

La preuve de ce théorème, assez technique, nécessite à elle seule une section, que nous lui consacrons à présent. Le lecteur peut en première lecture passer directement à la suite, en particulier à la section « blowing up analysis », l'apport géométrique de la section à venir étant assez réduit ; toutefois, ces pages illustrent bien quelques techniques à employer face à une EDP du type Monge-Ampère, notamment en matière de construction de fonctions sous-harmoniques et d'utilisation du principe du maximum, et apportent indéniablement leur pierre dans la démonstration de notre théorème.

3.4 Preuve du théorème 3.4

Nous avons maintenant un enchaînement de lemmes techniques qui, mis bout à bout, nous donnent la démonstration du théorème 3.4. Commençons par une légère mise en place.

Nous voulons, dans le théorème 3.4, estimer $\Delta\phi$ sur $\partial(M \times \Sigma) = M \times \partial\Sigma$. Soit p un point de ce bord, autour duquel nous nous donnons un voisinage U, sur lequel nous prenons un système de coordonnées holomorphes locales $z_1, \ldots, z_{m+1}$, centrées en p, et respectant le produit $M \times \Sigma$, de sorte que $z_1, \ldots, z_m$ paramètrent M, tandis que, si $z_{m+1} = x + iy$, Σ est donné dans cet ouvert par $x \geq 0$ (on peut reprendre la coordonnée w de la section 3.1 si l'on est du côté du « bon » bord ; sinon, on peut prendre $-w$). On suppose qu'en p, la matrice de g est réduite à I_{m+1}.

Notons g_U la métrique dont la matrice dans la base induite par les z_j est en tout point I_{m+1} ; puisqu'en p, elle coïncide avec g, on peut supposer U assez petit pour que

$$\forall q \in U \quad \frac{1}{2} g_{U,q} \leq g_q \leq 2 g_{U,q}. \tag{2}$$

Fixons aussi $\varepsilon > 0$ tel que sur $M \times \Sigma$,

$$g_{\phi^{(1)}} > \varepsilon g \tag{3}$$

ce qui est possible car $g_{\phi^{(1)}} > 0$ sur $M \times \Sigma$.

On considère enfin $\delta > 0$ tel que la demi-boule holomorphe $U_{3\delta}$ de rayon 3δ soit incluse dans U, que l'on s'autorise éventuellement à réduire.

3.4.1 Un lemme

Ensuite, nous introduisons une fonction « barrière » ν définie par

$$\nu = (\phi - \phi^{(1)}) + s(h - \phi^{(1)}) - Nx^2$$

où x est la partie réelle de la dernière coordonnée, $\phi^{(1)}$ et h sont définies dans les sections précédentes, et s et N sont des constantes à déterminer, en vertu du :

Lemme 3.6 *Si N est assez grand, et s, δ sont assez petits (indépendamment de r s'entend), nous avons*

$$-\Delta_\phi \nu \leq -\frac{\varepsilon}{8}(1 + \sum_{j=1}^{m+1} g_\phi^{j\bar{j}}) \textit{ sur } U_{2\delta} \textit{ et } \nu \geq 0 \textit{ sur } \partial U_{2\delta}.$$

Démonstration. Nous allons travailler séparément sur les trois termes qui composent ν. Tout d'abord, dans les coordonnées locales que nous avons fixées,

$$\begin{aligned}
-\Delta_\phi(\phi - \phi^{(1)}) &= \sum_{i,j=1}^{m+1} g_\phi^{i\bar{j}} \Big[\frac{\partial^2 \phi}{\partial z_i \partial \bar{z}_j} - \frac{\partial^2 \phi^{(1)}}{\partial z_i \partial \bar{z}_j}\Big] \\
&= \sum_{i,j=1}^{m+1} g_\phi^{i\bar{j}} \Big[\Big(g_{i\bar{j}} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z_i \partial \bar{z}_j}\Big) - \Big(g_{i\bar{j}} + \frac{\partial^2 \phi^{(1)}}{\partial z_i \partial \bar{z}_j}\Big)\Big] \\
&= \operatorname{tr}^{g_\phi}(g_\phi) - \operatorname{tr}^{g_\phi}(g_{\phi^{(1)}})
\end{aligned}$$

comme $g_{i\bar{j}} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z_i \partial \bar{z}_j} = (g_\phi)_{i\bar{j}}$, tandis que $(g_{ij} + \frac{\partial^2 \phi^{(1)}}{\partial z_i \partial \bar{z}_j})_{ij} = g_{\phi^{(1)}}$. C'est ensuite un exercice d'algèbre bilinéaire [1] que de montrer, pour une forme bilinéaire $b \geq \varepsilon g$,

$$\operatorname{tr}^{g_\phi}(b) \geq \varepsilon \operatorname{tr}^{g_\phi}(g).$$

Or ici, $b = g_{\phi^{(1)}}$, et $g_{\phi^{(1)}} \geq \varepsilon g$ par définition de ε, d'où la première estimation :

$$-\Delta_\phi(\phi - \phi^{(1)}) \leq m + 1 - \varepsilon \operatorname{tr}^{g_\phi}(g).$$

D'autre part,

$$\begin{aligned}
-\Delta_\phi(h - \phi^{(1)}) &= \sum_{i,j=1}^{m+1} g_\phi^{i\bar{j}} \Big[\frac{\partial^2 h}{\partial z_i \partial \bar{z}_j} - \frac{\partial^2 \phi^{(1)}}{\partial z_i \partial \bar{z}_j}\Big] \\
&= \operatorname{tr}^{g_\phi}(b)
\end{aligned}$$

où b est donc cette fois la forme bilinéaire associée à la 2-forme fermée $dd^c(h - \phi^{(1)})$, et est donc bornée (indépendamment de r) sur $M \times \Sigma$.

1. on prend une base g-orthonormée (e_j) dans laquelle la matrice de g_ϕ est diagonale, disons $\mathrm{Diag}(\kappa_1, ..., \kappa_{m+1})$, de sorte que $(e_j/\kappa_j^{1/2})$ est g_ϕ-orthonormée, et on écrit $\operatorname{tr}^{g_\phi}(b) = \sum b(e_j/\kappa_j^{1/2}, e_j/\kappa_j^{1/2}) = \sum \frac{1}{\kappa_j} b(e_j, e_j) \geq \varepsilon \sum \frac{1}{\kappa_j} = \varepsilon \operatorname{tr}^{g_\phi}(g)$, et de même, $|\operatorname{tr}^{g_\phi}(b')| \leq \|b'\|_g \operatorname{tr}^{g_\phi}(g)$ pour une forme b' quelconque (majorer les $b'(e_j, e_j)$).

On en déduit la majoration $-\Delta_\phi(h-\phi^{(1)}) \leq C_1 \operatorname{tr}^{g_\phi}(g)$ pour une certaine constante C_1. De plus, $-\Delta_\phi(x^2) = \frac{1}{2} g_\phi^{(m+1)\overline{(m+1)}}$. Il vient :

$$\begin{aligned}
-\Delta_\phi \nu &= -\Delta_\phi(\phi-\phi^{(1)}) - s\Delta_\phi(h-\phi^{(1)}) + N\Delta_\phi(x^2) \\
&\leq m+1-\varepsilon \operatorname{tr}^{g_\phi}(g) + sC_1 \operatorname{tr}^{g_\phi}(g) - \frac{N}{2} g_\phi^{(m+1)\overline{(m+1)}} \\
&= m+1-2(\frac{\varepsilon}{4}\operatorname{tr}^{g_\phi}(g) + \frac{N}{2} g_\phi^{(m+1)\overline{(m+1)}}) + (sC_1 - \frac{\varepsilon}{2})\operatorname{tr}^{g_\phi}(g)
\end{aligned}$$

Là encore, nous allons travailler les termes de cette somme séparément. Soient $0<\lambda_1 \leq \ldots \leq \lambda_{m+1}$ les valeurs propres de g_ϕ dans une base g-orthonormée (point par point), et non dans les coordonnées que nous avons fixées, de manière que $\sum \lambda_j^{-1} = \operatorname{tr}^{g_\phi}(g)$, tandis que $\sum g_\phi^{j,j} = \operatorname{tr}^{g_\phi}(g_U)$. Le même type de raisonnement que dans la note précédente nous donne, d'après (2),

$$\operatorname{tr}^{g_\phi}(g) \geq \frac{1}{2}\operatorname{tr}^{g_\phi}(g_U)$$

qui nous sert, une fois fixé s pour que $sC_1 < \frac{\varepsilon}{4}$, à écrire $(sC_1-\frac{\varepsilon}{2})\operatorname{tr}^{g_\phi}(g) \leq -\frac{\varepsilon}{8}\operatorname{tr}^{g_\phi}(g_U) = -\frac{\varepsilon}{8}\sum g_\phi^{j\bar{j}}$. D'autre part, toujours dans la même veine,

$$g_\phi^{m+1\overline{m+1}} \geq \frac{\lambda_{m+1}^{-1}}{2}.$$

Il vient :

$$\begin{aligned}
\frac{\varepsilon}{4}\operatorname{tr}^{g_\phi}(g) + \frac{N}{2} g_\phi^{m+1\overline{m+1}} &\geq \frac{\varepsilon}{4}\sum_{j=1}^{m}\lambda_j^{-1} + \frac{\varepsilon+N}{4}\lambda_{m+1}^{-1} \\
&= (m+1)(\frac{\varepsilon}{4}\lambda_1 \ldots \frac{\varepsilon}{4}\lambda_m \frac{\varepsilon+N}{4}\lambda_{m+1})^{\frac{-1}{m+1}} \\
&\geq (m+1)\frac{\varepsilon}{4} N^{\frac{-1}{m+1}} (\lambda_1 \ldots \lambda_{m+1})^{\frac{-1}{m+1}}
\end{aligned}$$

dès que $\varepsilon < 1$, en arguant de la concavité du logarithme pour passer de la première à la deuxième ligne. Or, $(\lambda_1 \ldots \lambda_{m+1}) = \det^g(g_\phi) = \theta(r) f \leq rf$. En majorant f uniformément, et puisque $r \leq 1$, on a

$$\frac{\varepsilon}{4}\operatorname{tr}^{g_\phi}(g) + \frac{N}{2} g_\phi^{m+1\overline{m+1}} \geq c_1 N^{\frac{1}{m+1}}$$

pour une certaine constante c_1. Fixons N pour que $m+1-2c_1 N^{\frac{1}{m+1}} < -\frac{\varepsilon}{8}$. Alors

$$\begin{aligned}
-\Delta_\phi \nu &\leq m+1-2c_1 N^{\frac{1}{m+1}} + (sC_1 - \frac{\varepsilon}{2})\operatorname{tr}^{g_\phi}(g) \\
&\leq -\frac{\varepsilon}{8} - \frac{\varepsilon}{8}\sum_{j=1}^{m+1} g_\phi^{j\bar{j}} = -\frac{\varepsilon}{8}(1+\sum_{j=1}^{m+1} g_\phi^{j\bar{j}}),
\end{aligned}$$

ce qu'il fallait commencer par démontrer.

Pour ce qui est d'obtenir $\nu \geq 0$ sur $\partial U_{2\delta}$, observons que $-\Delta(h-\phi^{(1)}) = -m-1+\Delta(\phi^{(1)}) = -\operatorname{tr}^g(g) - \operatorname{tr}^g(b_{\phi^{(1)}}) = -\operatorname{tr}^g(g_{\phi^{(1)}}) < -(m+1)\varepsilon$ dans tout $M \times \Sigma$, d'après (3). Soit une fonction x' C^∞ sur $M \times \Sigma$ qui coïncide avec x sur $U_{2\delta}$, qui est nulle au bord de $M \times \Sigma$ et qui est positive ailleurs (on en fabrique facilement une avec une partition de l'unité). Alors pour $c_2 > 0$ assez petit, $-\Delta(h - \phi^{(1)} - c_2 x') \leq -\varepsilon/2$. Considérons un voisinage V de $\partial(M \times \Sigma)$ contenant $U_{2\delta}$; sur son bord intérieur (*i.e.* la partie du bord de V qui n'est pas $\partial(M \times \Sigma)$), $h - \phi^{(1)} > 0$, donc quitte à réduire c_2, on a encore $h - \phi^{(1)} - c_2 x' \geq 0$ sur ce bord intérieur ; et par construction, $h - \phi^{(1)} - c_2 x' = 0$ sur $\partial(M \times \Sigma)$. Appliquant le principe du maximum à cette fonction sur-harmonique et positive sur le bord de V, on obtient $h - \phi^{(1)} - c_2 x' \geq 0$ sur V, et en particulier $h - \phi^{(1)} \geq c_2 x$ sur $U_{2\delta}$. Quitte alors à réduire δ (ou à augmenter N), on peut le supposer $\leq \frac{sc_0}{N}$, de sorte que, sur $U_{2\delta}$,

$$s(h - \phi^{(1)}) - Nx^2 \geq (sc_0 - Nx)x \geq (sc_0 - N\delta)x \geq 0$$

et donc, puisque $\phi - \phi^{(1)} \geq 0$ (sur $M \times \Sigma$!), $\nu = (\phi - \phi^{(1)}) + s(h - \phi^{(1)}) - Nx^2 \geq 0$ sur $U_{2\delta}$. $\square$

Remarque 3.7 *Dans la composition de ν, le terme $(\phi - \phi^{(1)})$, renforcé du terme $-Nx^2$, qui seul ne serait pas suffisant, nous assure une sur-harmonicité par rapport à g_ϕ « mesurée » en $\operatorname{tr}^{g_\phi}(g_U)$ et non en $1 - (\frac{1}{r})^{\frac{1}{m+1}}$, comme dans la section 3.2. Le terme $(h - \phi^{(1)})$ nous garantit quant à lui une positivité sur un ouvert indépendant de r. On peut se dire que l'on aurait pu avoir $\operatorname{tr}^{g_\phi}(g)$ au lieu de $\operatorname{tr}^{g_\phi}(g_U)$, ce qui nous aurait évité de nous servir de g_U, qui n'est pas intrinsèque au problème. Mais pour se servir de x, mieux vaut disposer de g_U, qui en fin de compte est très proche de g.*

De plus, on a tendance à considérer $-\Delta$ autant voire plus que Δ ; ceci car le laplacien de la géométrie est l'opposé de celui de l'analyse.

3.4.2 Un deuxième lemme, peut-être plus compliqué

En voici l'énoncé :

Lemme 3.8 *Il existe une constante C ne dépendant que de (M, g) telle que*

$$\left|\frac{\partial^2(\phi - \phi^{(1)})}{\partial z_{m+1}\partial \bar{z}_j}(q)\right| \leq C(\max_{M \times \Sigma} |d\phi|_g + 1).$$

pour tout q dans le disque (de dimension réelle $2m-1$) de centre p et de rayon δ incluse dans $\partial(M \times \Sigma)$

Démonstration. Soit $K = \max_{M\times\Sigma} |d\phi|_g + 1$. On note D pour $\pm\frac{\partial}{\partial x_j}$ ou $\pm\frac{\partial}{\partial y_j}$, $j \in \{1, \dots, m+1\}$ (ou un opérateur différentiel du premier ordre) dans U. En guise de préambule, énonçons un

« Sous-lemme » 3.9 *Dans nos conditions, on a sur U l'égalité*

$$-\Delta_\phi(D\phi) = D\ln\Big((c + \tau(r)(f-c))\det{}^{g_U} g\Big) - \sum_{i,j=1}^{m+1} g_\phi^{i\bar{j}} D g_{i\bar{j}}. \tag{4}$$

Démonstration du sous-lemme. Cette formule résulte du calcul $D(\det(g_{i\bar{j}} + \frac{\partial^2\phi}{\partial z_i\partial\bar{z}_j})) = D(\theta(r)f\det^{g_U}(g))$, où $\det(g_{i\bar{j}} + \frac{\partial^2\phi}{\partial z_i\partial\bar{z}_j}) = \theta(r)f\det^{g_U}(g)$ est l'écriture en coordonnées locales de (E_r). En effet, si en général, G est une matrice dérivable et inversible au point considéré, on a :

$$\det(G)' = \det(G)\operatorname{tr}(G^{-1}G') \ \textit{i.e.}\ \ln(|\det(G)|)' = \operatorname{tr}(G^{-1}G').$$

Appliquant ceci à $G = (g_{i\bar{j}} + \frac{\partial^2\phi}{\partial z_i\partial\bar{z}_j}) = (g_{\phi i\bar{j}})$, avec D plutôt que $'$, on obtient

$$\operatorname{tr}((g_\phi^{i\bar{j}})(Dg_{\phi i\bar{j}})) = D\ln(\det(g_{\phi i\bar{j}})) = D\ln(\theta(r)f\det{}^{g_U}(g)).$$

Or, $(Dg_{\phi i\bar{j}}) = (Dg_{i\bar{j}} + \frac{\partial^2 D\phi}{\partial z_i\partial\bar{z}_j})$, et $-\Delta_\phi(D\phi) = \operatorname{tr}((g_\phi^{i\bar{j}})(\frac{\partial^2 D\phi}{\partial z_i\partial\bar{z}_j}))$, tandis que $\ln(\theta(r)) = \ln r + \ln(c + \tau(r)(f-c))$, d'où le résultat. ■

On a donc quelque chose du type $-\Delta_\phi(D\phi) = D\ln\Big((c+\tau(r)(f-c))\det^{g_U} g\Big) - \operatorname{tr}^{g_\phi}(b)$; le terme $D\ln((c+\tau(r)(f-c))\det^{g_U} g)$ se majore uniformément sur U (ou au moins sur $U_{2\delta}$ relativement compact dans U) indépendamment de r (voir la démonstration du lemme 3.2), tandis que le terme $-\operatorname{tr}^{g_\phi}(b)$ est dominé par $\operatorname{tr}^{g_\phi}(g)$ (indépendamment de r, la forme bilinéaire b en étant indépendante), elle-même majorée par $2\operatorname{tr}^{g_U}(g_\phi)$. Et de même que dans la démonstration du lemme 3.6, $\Delta_\phi(D\phi^{(1)})$ est dominé par $\operatorname{tr}^{g_\phi}(g)$, indépendamment de r, étant donné que la fonction C^∞ (au moins sur U) $D\phi^{(1)}$ ne dépend pas de r.

On peut donc écrire $\Delta_\phi\Big(D(\phi-\phi^{(1)})\Big) \leq C_3(1+\sum_{j=1}^{m+1} g_\phi^{j\bar{j}})$ sur U_δ pour un certain C_3 (δ fixé par le lemme 3.6). On se donne ensuite $B = (2K+\max_{U_{2\delta}}|D\phi^{(1)})|)/(4\delta^2)$ de sorte que sur $U_{2\delta}$, $4B\delta^2 - |D(\phi-\phi^{(1)})| > 0$. Prenons garde au fait que contrairement à ce qui se qui se faisait jusqu'ici, B dépend de ϕ. On suppose dans ce qui suit que D est ne contient pas de terme en $\frac{\partial}{\partial x_{m+1}} = \frac{\partial}{\partial x}$ ni en $\frac{\partial}{\partial y_{m+1}} = \frac{\partial}{\partial y}$.

Soit $A > 0$ une constante à ajuster. On pose :

$$\mu = A\nu + B|z|'^2 - D(\phi - \phi^{(1)})$$

sur U, où $|z|'^2 = 0$ si $|z| < \delta$, $4\delta^2$ si $|z| = 2\delta$; on veut obtenir, grâce à A, une fonction sur-harmonique et positive sur le bord d'un ouvert. Or $\mu(z', 0, y) = 0$

pour $|z'|^2 + y^2 < \delta$, et $\mu \geq 0$ sur ∂U_δ (on a tout fait pour ; ν y est ≥ 0 ; sur $\partial U_{2\delta} \cap \partial(M \times \Sigma)$, $D(\phi - \phi^{(1)}) = 0$, tandis que sur le bord $|z| = 2\delta$, $B|z|'^2 + D(\phi - \phi^{(1)}) = 4B\delta^2 - |D(\phi - \phi^{(1)})| > 0$ par choix de B). En vertu du lemme 3.6, de l'inégalité $-\Delta_\phi(|z|'^2) \leq C_4 \sum_{j=1}^{m+1} g_\phi^{j\bar{j}}$, et du préambule à cette preuve, nous avons

$$-\Delta_\phi \mu \leq (-\frac{\varepsilon A}{8} + C_4 B + C_3)(1 + \sum_{j=1}^{m+1} g_\phi^{j\bar{j}})$$

et cette quantité est < 0 dès que l'on prend $A = 2\frac{8C_4B+8C_3}{\varepsilon}$. Résumons ; les seules constantes qui dépendent de ϕ, et donc de r, sont K, puis B, qui vaut essentiellement $2K/\delta^2$, et A, qui vaut essentiellement $16C_4B/\varepsilon$, et est donc en dernier lieu essentiellement proportionnelle à K (ou plus exactement, est affine en K). Toutes les autres (C_3, C_4,δ,ε,...) en sont indépendantes.

Maintenant que μ est sur-harmonique sur $U_{2\delta}$, et positive au bord, le principe du maximum nous dit qu'elle est positive sur cet ouvert. Ceci oblige $\frac{\partial \mu}{\partial x}(z', 0, y)$ à être positif, puisque $\mu(z', 0, y) = 0$ pour $|z'|^2 + y^2 < \delta^2$. Or,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mu}{\partial x}(z', 0, y) &= A\frac{\partial \nu}{\partial x}(z', 0, y) + \frac{\partial}{\partial x}D(\phi - \phi^{(1)})(z', 0, y) \\
&= A\frac{\partial(\phi - \phi^{(1)})}{\partial x}(z', 0, y) + As\frac{\partial(h - \phi^{(1)})}{\partial x}(z', 0, y) \\
&\quad + \frac{\partial}{\partial x}D(\phi - \phi^{(1)})(z', 0, y)
\end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$\frac{\partial D(\phi - \phi^{(1)})}{\partial x}(z', 0, y) \leq A\frac{\partial(\phi - \phi^{(1)})}{\partial x}(z', 0, y) + As\frac{\partial(h - \phi^{(1)})}{\partial x}(z', 0, y).$$

Or [2], $(0 \leq)\frac{\partial(\phi - \phi^{(1)})}{\partial x}(z', 0, y) \leq \frac{\partial(h - \phi^{(1)})}{\partial x}(z', 0, y)$; en effet, dans le cas contraire on pourrait écrire $\frac{\partial \phi}{\partial x}(z', x, y) > \frac{\partial h}{\partial x}(z', x, y)$ pour x petit, disons $x \in [0, \eta]$ ce qui impliquerait, en intégrant sur ce segment, $\phi(z', \eta, y) > h(z', \eta, y)$ (h et ϕ sont égales au bord), ce qui est exclu. Nous avons donc :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial D(\phi - \phi^{(1)})}{\partial x}(z', 0, y) &\leq A(s+1)\frac{\partial(h - \phi^{(1)})}{\partial x}(z', 0, y) \\
&\leq C'K
\end{aligned}$$

pour une certaine constante C' uniforme assez grande, compte tenu du fait que seul A dépend de r (dépendance linéaire en K). Puisqu'on peut substituer $-D$ à D, on peut même écrire

$$|\frac{\partial D(\phi - \phi^{(1)})}{\partial x}(z', 0, y)| \leq C'K.$$

2. Chen ne précise pas ce point

Du reste, puisque $\partial(M\times\Sigma)$ a pour équation $x=0$, et donc que $(\phi-\phi^{(1)})(z',0,y)\equiv 0$, on a de manière immédiate, l'opérateur D ne regardant que les variations selon z',

$$\begin{aligned} D(\phi-\phi^{(1)})(z',0,y) &= 0 \\ \text{puis } \frac{\partial D(\phi-\phi^{(1)})}{\partial y}(z',0,y) &= 0. \end{aligned}$$

On a donc certainement $|\frac{\partial D\phi}{\partial z_{m+1}}(z',0,y)|\leq C'K$, ce qui, puisque D est quelconque parmi les $\frac{\partial}{\partial x_j}$ et les $\frac{\partial}{\partial y_j}$, $j\in\{1,\dots,m\}$, nous donne le résultat voulu, pour q de coordonnées $(z',0,y)$ avec $|z'|^2+y^2\leq\delta^2$, c'est-à-dire q dans un disque de centre p et de rayon δ.$\square$

Remarque 3.10 *En écho à la remarque 3.7, on voit dans cette démonstration en quoi il est utile d'avoir une fonction g_ϕ-sur-harmonique en $\mathrm{tr}^{g_\phi}(g_U)$. En effet, les termes à compenser, d'abord $D(\phi-\phi^{(1)})$, puis la correction $B|z|'^2$ (qui assure la positivité sur le bord de l'ouvert), ont quant à leur laplacien une contribution en $\mathrm{tr}^{g_\phi}(g_U)$, dont tout ce qu'on peut dire est qu'elle est minorée par $(\frac{1}{r})^{\frac{1}{m+1}}$, alors qu'on voudrait la majorer. D'où le détour par la fonction ν pour la construction de μ. Notons aussi, tout au long de ces preuves, l'utilisation de Δ_ϕ et non simplement de Δ.*

3.4.3 Fin de la preuve

Pour récompenser nos efforts, nous concluons quant à la preuve du théorème 3.4. En un point q tel que dans le lemme 3.8, et dans les coordonnées locales que nous nous sommes données, l'équation (E_r) s'écrit

$$\det\Big(g_{\phi^{(1)}i\bar{j}}+\frac{\partial(\phi-\phi^{(1)})}{\partial z_i\partial\bar{z}_j}\Big)_{i,j=1\dots m+1}=\theta(r)\det(g_{\phi^{(1)}i\bar{j}})_{i,j=1\dots m+1}.$$

En développant par rapport à la dernière colonne, puis par rapport à la dernière ligne des mineurs non principaux obtenus, ceci nous donne donc, puisque $\frac{\partial(\phi-\phi^{(1)})}{\partial z_i\partial z_j}$ est nul dès que i et j sont différents de $m+1$, sur U,

$$\begin{aligned}(g_{\phi^{(1)}(m+1)\overline{(m+1)}}+\frac{\partial(\phi-\phi^{(1)})}{\partial z_{m+1}\partial\bar{z}_{m+1}})\det(g_{\phi^{(1)}i\bar{j}})_{i,j=1\dots m}\;+\;P\Big(\frac{\partial(\phi-\phi^{(1)})}{\partial z_i\partial\bar{z}_j}\Big)\\ =\theta(r)\det(g_{\phi^{(1)}i\bar{j}})_{i,j=1\dots m+1}\end{aligned}$$

où P est un polynôme du second degré en les variables $X_{i\bar{j}}$ et leurs conjuguées, avec i ou $j=m+1$ et $(i,j)\neq(m+1,m+1)$, et à coefficients des polynômes en les $g_{\phi^{(1)}i\bar{j}}$ qui ne dépendent pas du point du bord considéré.

Finalement, puisque les $g_{\phi^{(1)}i\bar{j}}$ sont uniformément — et indépendamment de r — bornés sur U_δ, ainsi que $\det(g_{\phi^{(1)}i\bar{j}})^{-1}_{i,j=1\ldots m}$, il vient, en considérant l'estimation du lemme 3.8 portant sur les $\frac{\partial(\phi-\phi^{(1)})}{\partial z_i \partial \bar{z}_{m+1}}$, $j \neq m+1$, une majoration sur le terme restant :

$$|\frac{\partial(\phi-\phi^{(1)})}{\partial z_{m+1}\partial \bar{z}_{m+1}}| \leq C(\max_{M\times\Sigma} |d\phi|_g^2 + 1)$$

sur $U_\delta \cap \partial(M\times\Sigma)$, où la constante C ne dépend donc que de l'ouvert de coordonnées choisi au départ. Il reste à écrire, grâce à cette majoration et au lemme 3.8,

$$\begin{aligned} |\Delta(\phi-\phi^{(1)})| &\leq \sum_{i,j=1}^{m+1} |g^{i\bar{j}} \frac{\partial(\phi-\phi^{(1)})}{\partial z_i \partial \bar{z}_j}| \\ &= \sum_{i \text{ ou } j=m+1} |g^{i\bar{j}} \frac{\partial(\phi-\phi^{(1)})}{\partial z_i \partial \bar{z}_j}| \\ &\leq C(\max_{M\times\Sigma} |d\phi|_g^2 + 1) \end{aligned}$$

pour tout point du bord dans un voisinage de p. Le théorème 3.4 est alors entièrement démontré en faisant passer $\Delta\phi^{(1)}$ dans la constante, et en étendant ce résultat à tout le bord par un argument de compacité.

Remarque 3.11 *Chen, avant d'étendre ce même résultat à tout le bord, le démontre non pas au voisinage de p, mais en p. On peut alors douter que la constante C ne dépende pas de ce point, et être bloqué pour passer à l'ensemble du bord indépendamment de r, qui ne vit pas dans un compact. Nous avons dû faire quelques aménagements dans la preuve originale, et renoncer à certaines astuces, ce qui rend cette démonstration peut-être un peu plus compliquée. Mais la stratégie est la même. Nous avons aussi essayé de bien marquer la différence entre objets intrinsèques (métriques g et g_ϕ,...) et quantités définies localement (métrique g_U).*

3.5 « Blowing up analysis » et estimation C^2 uniforme

Nous allons maintenant utiliser une technique beaucoup plus géométrique — l'ingrédient majeur est le changement d'échelle — développée par Chen pour cette occasion. Nous allons démontrer le

Théorème 3.12 *Si ϕ est une solution de (E_r), $0 < r \leq 1$, alors $\max_{M\times\Sigma} |d\phi|_g$ est majoré indépendamment de r.*

qui nous donne grâce au théorème 3.4 une domination uniforme et absolue du laplacien par rapport à la métrique de départ g.

Démonstration. Par l'absurde. On se donne une suite r_i, $i \geq 1$, telle que les

$$\frac{1}{\varepsilon_i} := \max_{M\times\Sigma} |d\phi^{(r_i)}|_g \tag{5}$$

tendent vers $+\infty$. D'après le théorème 3.4, nous avons $\max_{M\times\Sigma} |\Delta\phi^{(r_i)}| \leq \frac{C}{\varepsilon_i^2}$. Appelons p_i un point où $|d\phi^{(r_i)}|_g$ est maximum ; quitte à extraire, (p_i) tend vers un point p de $M \times \Sigma$. On se donne, comme précédemment, un ouvert de coordonnées U centrées en p telles que la matrice de g en p soit I_{m+1} et telle qu'elle reste « entre » $\frac{1}{2}I_{m+1}$ et $2I_{m+1}$ sur cet ouvert. Nous allons traiter les deux cas possibles : p est sur le bord de $M \times \Sigma$, ou est à l'intérieur.

Pour l'heure, nous définissons, pour i que nous supposerons désormais assez grand et x dans $U_i := \frac{1}{2\varepsilon_i^2}U$

$$\tilde{\phi}_i(z) = \phi_i(p_i + \varepsilon_i z) \text{ et } (\tilde{g}_i)_z = g_{p_i+\varepsilon_i z}$$

(en notant $\phi_i = \phi^{(r_i)}$), de sorte que $|d\tilde{\phi}_i(0)|_{\tilde{g}_i} = 1$, que $\max_{U_i} |d\tilde{\phi}_i|_{\tilde{g}_i} \leq 1$ et que $\max_{U_i} |\Delta_i\tilde{\phi}_i| \leq C$, où Δ_i est le laplacien par rapport à $\tilde{g}_i$. On voit donc ici que l'exposant 2 dans la domination du laplacien par la norme de la différentielle du théorème 3.4 est exactement ce qu'il nous fallait. De plus, il est clair que sur tout compact et à tout ordre, les $\tilde{g}_i$ tendent vers la métrique plate g_0 canonique sur U.

En fait, à ce point du développement, Chen ne définit pas ces $\tilde{g}_i$, et suppose que sur U, g est la métrique plate. Il est vrai que l'utilisation des $\tilde{g}_i$ alourdit un peu l'argumentation, et l'on voit effectivement, après coup, que l'on peut supposer g plate. Mais on perd un peu de la « saveur » du changement d'échelle (on ne voit plus que le changement d'échelle aplatit la métrique de base), et c'est dans un souci de rendre clair cet « après coup » que nous les utilisons ici.

Ceci dit, voyons comment obtenir un contrôle des $\Delta_0\tilde{\phi}_i$. Notons $b_{\tilde{\phi}_i}$ l'opérateur bilinéaire dont la matrice est $(\frac{\partial\phi_i}{\partial z_k\partial\bar{z}_j})_{k,j}$. Alors

$$-\Delta_i\tilde{\phi}_i = \operatorname{tr}^{\tilde{g}_i}(b_{\tilde{\phi}_i}) \text{ et } -\Delta_0\tilde{\phi}_i = \operatorname{tr}^{g_0}(b_{\tilde{\phi}_i})$$

et remarquons que $\tilde{g}_i + b_{\tilde{\phi}_i} > 0$ puisque cette forme bilinéaire n'est autre que $g_{\tilde{\phi}_i}$ après changement d'échelle. Les arguments de réduction simultanée nous permettent d'affirmer

$$0 < \operatorname{tr}^{g_0}(\tilde{g}_i + b_{\tilde{\phi}_i}) \leq 2\operatorname{tr}^{\tilde{g}_i}(\tilde{g}_i + b_{\tilde{\phi}_i}) = 2(m+1) + 2\operatorname{tr}^{\tilde{g}_i}(b_{\tilde{\phi}_i})$$

soit

$$-2(m+1) \leq -\operatorname{tr}^{g_0}(\tilde{g}_i) \leq -\Delta_0\tilde{\phi}_i \leq -\operatorname{tr}^{g_0}(\tilde{g}_i)+2(m+1)-2\Delta_i\tilde{\phi}_i \leq \frac{3}{2}(m+1)-2\Delta_i\tilde{\phi}_i$$

d'où l'on déduit un contrôle uniforme sur $|\Delta_0\tilde{\phi}_i|$.

Faisons de même subir à h et $\phi^{(1)}$ le changement d'échelle :

$$\tilde{\phi}_i^{(1)}(z) = \phi^{(1)}(p_i + \varepsilon_i z) \text{ et } \tilde{h}_i(z) = h(p_i + \varepsilon_i z) \; \forall z \in U_i.$$

Il est clair qu'ainsi, $\lim_{i\to+\infty} \tilde{\phi}_i^{(1)}(z) = \phi^{(1)}(p)$ et $\lim_{i\to+\infty} \tilde{h}_i(z) = h(p)$ pour tout z de $\mathbb{C}^{m+1}$, ou du demi-espace dans le cas $p \in \partial(M \times \Sigma)$, avec convergence uniforme sur tout compact. Par ailleurs, nous avons toujours les estimées C^0 pour tout i

$$\tilde{\phi}_i^{(1)} \leq \tilde{\phi}_i \leq \tilde{h}_i. \tag{6}$$

de sorte que sur chaque compact, les $\tilde{\phi}_i$ soient uniformément bornées.

On n'a pas par contre un tel contrôle C^2 uniforme (du moins pas encore), mais le contrôle C^0 sur le laplacien nous donne, *via* l'ellipticité et les estimées de Schauder, un contrôle $C^{1,\alpha}$, $0 < \alpha < 1$:

Théorème 3.13 (Estimées de Schauder sur les boules) *Soit B une boule ; on suppose que P est un opérateur différentiel elliptique d'ordre d défini sur B. Si Pu est $C^{k,\alpha}$ sur B, alors u est $C^{k+d,\alpha}$ et on a l'estimée*

$$\|u\|_{C^{k+d,\alpha}(\frac{1}{2}B)} \leq C(\|Pu\|_{C^{k+d,\alpha}(B)} + \|u\|_{C^0(B)})$$

où C ne dépend que de B, k, d et α, ainsi que l'estimée

$$\|u\|_{C^{d-1,\alpha}(\frac{1}{2}B)} \leq C(\|Pu\|_{C^0(B)} + \|u\|_{C^0(B)})$$

où de même, C ne dépend que de B, d et α.

Fixons $0 < \eta < \alpha < 1$. Puisque le laplacien est elliptique d'ordre 2, on a pour tout i, sur chaque (demi-)boule B

$$\|\tilde{\phi}_i\|_{C^{1,\alpha}(\frac{1}{2}B)} \leq C(B,\alpha)(\|\Delta_0\tilde{\phi}_i\|_{C^0(B)} + \|\tilde{\phi}_i\|_{C^0(B)})$$

Or, la norme C^0 des $\Delta_0\tilde{\phi}_i$, ainsi que des $\tilde{\phi}_i$, est uniformément contrôlée. La suite des $\tilde{\phi}_i$ est donc bornée en norme $C^{1,\alpha}(\frac{1}{2}B)$, et à extraction près, converge faiblement dans $C^{1,\alpha}(\frac{1}{2}B)$, et donc fortement dans $C^{1,\eta}(\frac{1}{2}B)$, par compacité des injections $C^{1,\alpha}(\frac{1}{2}B) \hookrightarrow C^{1,\eta}(\frac{1}{2}B)$ pour $\eta < \alpha$.

Un argument d'extraction diagonale nous permet même de définir globalement $\tilde{\phi}$ sur $\mathbb{C}^{m+1}$ (ou sur le demi-espace), limite $C^{1,\eta}$ sur toute boule. Puisque la norme $C^{1,\eta}$ est plus forte que la norme C^1 on a en particulier $|d\tilde{\phi}(0)|_g = 1$, et on a aussi, par passage à la limite dans (6), $\tilde{\phi}^{(1)}(p) \leq \tilde{\phi}(z) \leq \tilde{h}(p)$. Nous traitons maintenant les deux cas possibles.

Premier cas : p est sur le bord de $M \times \Sigma$. Puisque sur ce bord, $\phi^{(1)} = h$, il est immédiat que $\tilde{\phi}^{(1)}(p) = \tilde{h}(p)$. D'après le paragraphe précédent, $\tilde{\phi}$ est donc constante sur le demi-espace, ce qui contredit $|d\tilde{\phi}(0)|_g = 1$.

Second cas : p est à l'intérieur de $M \times \Sigma$. Dans ce cas, $\tilde{\phi}$ est définie sur $\mathbb{C}^{m+1}$ tout entier, et elle est bornée, et localement $C^{1,\eta}$. Nous allons démontrer que sa restriction à chaque plan complexe passant par l'origine est sous-harmonique, ce qui, en vertu du théorème bien connu disant qu'en dimension 2, les fonctions sous-harmoniques bornées sont constantes (on se référera par exemple [Am-Ma]), nous permettra de conclure, comme dans le cas précédent, par une contradiction.

Il ne nuit en rien à la généralité de considérer le plan Π d'équation $z_2 = \ldots = z_{m+1} = 0$.

Sur U, la forme g_{ϕ_i} est > 0, et donc, en coordonnées locales, son coefficient $(1, \bar{1})$ est entre 0 et $\mathrm{tr}^{g_0}(g_{\phi_i})$, elle-même plus petite que $2\,\mathrm{tr}^g(g_{\phi_i}) = 2(m+1) - \Delta\phi_i$, soit

$$0 < g_{1\bar{1}} + \frac{\partial^2 \phi_i}{\partial z_1 \partial \bar{z}_1} \leq 2(m+1) - 2\Delta\phi_i \leq 2(m+1) + \frac{2C}{\varepsilon_i^2},$$

donc après changement d'échelle, en faisant passer le $2(m+1)$ dans la constante :

$$0 < \varepsilon_i^2 g_{1\bar{1}} + \frac{\partial \tilde{\phi}_i}{\partial z_1 \partial \bar{z}_1} \leq 2C$$

Ainsi, on peut trouver une sous-suite de $(\tilde{\phi}_i|_\Pi)$ qui converge localement $C^{1,\eta}$ vers une fonction ψ définie sur Π. Mais ψ n'est autre que $\tilde{\phi}|_\Pi$ puisque $\tilde{\phi}$ est localement limite $C^{1,\eta}$ des $\tilde{\phi}_i$ (et que la norme $C^{1,\eta}$ sur les ouverts de l'espace est plus forte que celle sur les ouverts du plan pour les restrictions). Or, par passage à la limite dans l'inégalité (3.5), on a au sens faible

$$0 \leq \frac{\partial \psi}{\partial z_1 \partial \bar{z}_1} = -\Delta_{0,\Pi}\psi$$

sur Π, *i.e.* $\psi = \tilde{\phi}|_\Pi$ est (faiblement) sous-harmonique, et donc constante sur Π, et ce pour tout plan Π passant par l'origine. Autrement dit, $\tilde{\phi}$ est constante, *quod erat demonstrandum.*□

3.6 Ellipticité et conséquences

3.6.1 Il existe des solutions pour r proche de 1

Explicitons l'argument d'ellipticité qui nous permet d'affirmer $r_0 < 1$.

Définition 3.14 *Soit P un opérateur différentiel non linéaire $C^\infty(N) \to \Gamma(E)$, où E est un fibré sur une variété N. Alors on dit que P est elliptique en $f \in C^\infty(N)$ si $d_f P$ est un opérateur linéaire elliptique.*

Soit $r \in]0,1]$ telle que (E_r) admette une solution $\phi^{(r)}$ (par exemple, $r = 1$). Vérifions que notre opérateur de Monge-Ampère $P : \phi \mapsto (\omega + dd^c\phi)^{m+1}$, qui est un opérateur (non-linéaire) de $C^\infty(M \times \Sigma)$ dans $\Gamma(K_{M\times\Sigma})$ est elliptique en $\phi^{(r)}$. Soit donc $f_1 \in C^\infty(M \times \Sigma)$. Puisque $\omega + dd^c\phi^{(r)} > 0$, il s'agit de calculer la variation de la forme volume $(\omega + dd^c\phi^{(r)})^{m+1}$ au premier ordre selon f_1 ; or, comme on l'a déja vu, cette variation vaut $-\Delta_{\phi^{(r)}} f_1(\omega + dd^c\phi^{(r)})^{m+1}$. On peut donc conclure grâce à l'ellipticité du laplacien.

La principale propriété d'un opérateur linéaire elliptique est de conférer de la régularité aux éléments de son noyau. En outre, le laplacien induit un isomorphisme entre espaces de sections bien précis, espaces qui sont des espaces de Banach. Dans notre cas, le laplacien induit un isomorphisme de $C_0^{3,\alpha}(M\times\Sigma)$ (fonctions $C^{3,\alpha}$ nulles au bord), qui est un espace de Banach ; on se ramène facilement aux fonctions $C^{3,\alpha}$ avec donnée au bord égale à dans celle de $\phi^{(1)}$, puisque cet espace est celui d'origine la fonction harmonique égale à $\phi^{(1)}$ au bord, et de direction $C_0^{3,\alpha}(M \times \Sigma)$.

Ceci nous dit donc que la différentielle de P en $\phi(1)$ est un isomorphisme de $C_0^{3,\alpha}(M \times \Sigma)$ dans $C^{1,\alpha}(K_{M\times\Sigma}) \cong C^{1,\alpha}(M \times \Sigma)$ (par « division » par ω_1). Le théorème des fonctions implicites nous permet alors d'affirmer que pour tout r suffisamment proche de 1, il existe une unique $\phi^{(r)}$ solution $C^{3,\alpha}$ de (E_r), avec condition au bord. Notons que pour ces r proches de 1, $r \mapsto \phi^{(r)}$ est continu pour la norme $C^{3,\alpha}$, donc $r \mapsto \omega + dd^c\phi^{(r)}$ est continu pour la norme $C^{1,\alpha}$. Ainsi, la fonction qui à r et p associe la plus petite valeur propre de $\omega + dd^c\phi^{(r)}$ au point p est continue. Or, elle ne s'annule jamais, puisqu'en tout point, le déterminant de $\omega + dd^c\phi^{(r)}$ est non nul, et cette valeur propre est > 0 en tout point pour $r = 1$. La plus petite valeur propre $\omega + dd^c\phi^{(r)}$, ainsi donc que toute les autres, restent > 0 ; en d'autres termes, $\omega + dd^c\phi^{(r)} > 0$ pour les r considérés.

Il ne nous donc reste plus qu'à montrer que les $\phi^{(r)}$ sont lisses pour avoir des solutions complètes à notre problème. Pour ce faire, on utilise la formule (4) qui est valable pour toute fonction ϕ C^3, donc en particulier $C^{3,\alpha}$, solution d'une (E_r), et que nous rappelons : sur un ouvert U de coordonnées $(z_1, \ldots, z_{m+1})$, si D est un opérateur différentiel du premier ordre à coefficients constants, on a

$$-\Delta_\phi(D\phi) = D \ln\Big((c + \tau(r)(f - c)) \det{}^{g_U} g\Big) - \sum_{i,j=1}^{m+1} g_\phi^{i,j} D g_{i,j}.$$

Cette formule, grâce aux estimées de Schauder, va nous permettre de gagner un ordre de régularité, puis par récurrence, de prouver que $\phi^{(r)}$ est C^∞. En effet, $\phi^{(r)}$ est $C^{3,\alpha}$, donc les $\frac{\partial^2\phi^{(r)}}{\partial z_i \partial \bar{z}_j}$ sont $C^{1,\alpha}$, ainsi donc que les $g_{\phi^{(r)}}^{i\bar{j}}$ (qui sont des polynômes à coefficients lisses en les $\frac{\partial^2\phi^{(r)}}{\partial z_i\partial\bar{z}_j}$ grâce à la formule de la comatrice). Le reste est C^∞, donc finalement, $\Delta_{\phi^{(r)}}(D\phi^{(r)})$ est $C^{1,\alpha}$ (on rappelle que les espaces de Hölder sont toujours des algèbres, ce pourquoi on les utilise ici de préférence aux espaces de Sobolev).

Il découle des estimées de Schauder, ou plutôt de l'énoncé de régularité elliptique, en supposant que U est une boule holomorphe, que $D\phi^{(r)}$ est $C^{3,\alpha}$ sur $\frac{1}{2}U$ par ellipticité du $\Delta_{\phi^{(r)}}$, puis que $\phi^{(r)}$ est $C^{4,\alpha}$ sur $\frac{1}{2}U$ puisque D est quelconque parmi les opérateurs différentiels du premier ordre à coefficients constants. U étant quelconque, par compacité, $\phi^{(r)}$ est $C^{4,\alpha}$. On a bien gagné un ordre pour $\phi^{(r)}$. Il n'y a plus à ce stade qu'à continuer la récurrence que nous venons d'amorcer pour conclure quant à la lissité de $\phi^{(r)}$.

On a donc démontré le :

Théorème 3.15 *r_0 est strictement inférieur à* 1.

Scolie 3.16 *On a en fait démontré que tout potentiel de Kähler qui est $C^{3,\alpha}$ pour un $\alpha > 0$ est en réalité C^∞.*

3.6.2 Il existe des solutions pour tout $r > 0$

Pour achever cette partie, il nous reste donc à démontrer que $r_0 = 0$, et à comprendre quel type de solution on obtient en faisant tendre r vers 0.

Théorème 3.17 *L'équation (E_r) possède une unique solution pour tout r de $]0,1]$, et à extraction près, ces solutions convergent faiblement lorsque r tend vers 0 vers une fonction $C^{1,1}$ sur $M \times \Sigma$.*

Démonstration. Supposons $r_0 > 0$, et exhibons une contradiction. Nous voulons montrer qu'on a alors une solution régulière de (E_{r_0}), ce qui contredira la minimalité de r_0, puisqu'en procédant comme en $r = 1$, on pourra trouver des solutions pour les $r < r_0$ suffisamment proches de r_0. Donnons-nous une suite r_i tendant vers r_0. Il s'agit de voir que les ϕ_i convergent $C^{3,\eta}$ vers une fonction ϕ qui sera lisse comme on l'a vu pour les $\phi^{(r)}$, r proche de 1, et qui sera donc solution de (E_{r_0}), avec conditions au bord et positivité (ce point se voit facilement en examinant la plus petite valeur propre de $\omega + dd^c\phi$ comme ci-dessus, qui est limite des plus petites valeurs propres successives, qui sont > 0 ; elle est donc ≥ 0, et comme le déterminant de $\omega + dd^c\phi$ est non nul, elle est > 0).

On veut montrer que les ϕ_i sont uniformément bornées $C^{3,\alpha}$, ce qui permettra d'en extraire une sous-suite convergente pout la norme $C^{3,\eta}$, $0 < \eta < \alpha$. Nous allons reprendre plus en détail les estimations du début de cette section, en vue de parvenir à quelque chose d'uniforme. En effet, les estimées de Schauder nous disent (en ne tenant pas compte du rétrécissement des domaines de ces inégalités pour simplifier, ce qui ne nous gène pas, puisqu'à chaque étape, on peut les globaliser par compacité) ceci :

$$\|D\phi^{(r)}\|_{C^{2,\alpha}} \leq C_{\alpha,\phi^{(r)}}(\|\Delta_{\phi^{(r)}}(D\phi^{(r)})\|_{C^{0,\alpha}} + \|D\phi^r\|_{C^0})$$

et

$$\|D\phi^{(r)}\|_{C^{1,\alpha}} \leq C_{0,\phi^{(r)}}(\|\Delta_{\phi^{(r)}}(D\phi^{(r)})\|_{C^0} + \|D\phi^r\|_{C^0})$$

où $C_{0,\alpha,\phi^{(r)}}$ et $C_{0,\phi^{(r)}}$ dépendent *a priori* des $\phi^{(r)}$, puiqu'elles dépendent de $\Delta_{\phi^{(r)}}$. Or, un raffinement de ces estimées nous dit que si on a une famille d'opérateurs elliptiques d'ordre fixe dont les coefficients sont bornés et le symbole principal a un inverse borné, alors la constante peut être prise uniforme.

Dans notre cas, $\Delta_{\phi^{(r)}}\psi = g^{i\bar{j}}_{\phi^{(r)}}\partial_i\partial_{\bar{j}}\psi$. Mais $g^{i\bar{j}}_{\phi^{(r)}} = \frac{{}^t\operatorname{com}(g_{\phi^{(r)}k\bar{l}})}{\theta(r)f\det(g_{k\bar{l}})}$ est donc un polynôme à coefficients C^∞ en $\frac{1}{r\theta(r)} \leq \frac{1}{\theta(r_0)}$ et en les $g_{\phi^{(r)}k\bar{l}} = g_{\phi^{(r)}}(\frac{\partial}{\partial z_k}, \frac{\partial}{\partial \bar{z}_l})$; il nous suffit donc de montrer que les $g_{\phi^{(r)}}$ sont bornées. Mais $(0 <)$ $g_{\phi^{(r)}} \leq \operatorname{tr}^g(g_{\phi^{(r)}})g$ (prendre une base g-orthonormée, adapté à $g_{\phi^{(r)}}$, et considérer la plus grande valeur propre, qui est $\leq \operatorname{tr}^g(g_{\phi^{(r)}})$), et $\operatorname{tr}^g(g_{\phi^{(r)}}) = m + 1 - \Delta\phi^{(r)}$, qui est uniformément borné. Nous avons donc démontré que les coefficients du $\Delta_{\phi^{(r)}}$ sont uniformément bornés.

En outre, $\sigma_{\Delta_{\phi^{(r)}}}(p,\xi) = -|\xi(p)|^2_{g_{\phi^{(r)}}}$. Or, de même que la plus grande valeur propre de $g_{\phi^{(r)}}$, par rapport à g, ainsi donc que toutes les autres, étaient bornées supérieurement, la plus petite est bornée inférieurement, grâce à l'hypothèse $r_0 > 0$. En effet, le produit des valeurs propres, disons $0 < \kappa_1^{(r)} \leq \ldots \kappa_{m+1}^{(r)}$, vaut $\theta(r)f$, et comme $\kappa_2^{(r)}, \ldots, \kappa_{m+1}^{(r)} \leq C$, il vient

$$\kappa_1^{(r)} \geq \frac{\theta(r)f}{\kappa_2^{(r)}\ldots\kappa_{m+1}^{(r)}} \geq \frac{\theta(r_0)f}{C^m} \geq c'\theta(r_0)$$

pour une certaine constante $c' > 0$, f étant > 0 sur $M \times \Sigma$. Ainsi, $\sigma_{\Delta_{\phi^{(r)}}}(p,\xi) \leq -c'\theta(r_0)|\xi(p)|^2_g$, ce qui signifie que le symbole principal des $\Delta_{\phi^{(r)}}$ est d'inverse borné. Les constantes $C_{0,\alpha,\phi^{(r)}}, C_{0,\phi^{(r)}}$ peuvent donc entre remplacées par des constantes uniformes $C_{0,\alpha,r_0}, C_{0,r_0}$.

Nous pouvons maintenant conclure. Par définition de la norme $C^{3,\alpha}$, $\|\phi_i\|_{C^{3,\alpha}}$ est uniformément contrôlée par la somme de $\|\phi_i\|_{C^0}$, qui est bornée, avec les $\|D\phi_i\|_{C^{2,\alpha}}$, où D parcourt les ∂_{x_j} et les ∂_{y_j}. Mais on vient de démontrer que par les estimées de Schauder pour une famille convenable d'opérateurs elliptiques, les $\|D\phi_i\|_{C^{2,\alpha}}$ sont uniformément contrôlées par les $\|\Delta_{\phi_i}(D\phi_i)\|_{C^{0,\alpha}}$ (et $\|D\phi_i\|_{C^0}$ qui est aussi bornée).

La formule (4) nous dit toutefois que les $\|\Delta_{\phi_i}(D\phi_i)\|_{C^{0,\alpha}}$ sont uniformément contrôlées par (un polynôme en) $\|\phi_i\|_{C^{2,\alpha}}$ (2 étant l'ordre maximal de dérivation intervenant dans cette formule, dans les coefficients de g_{ϕ_i}). Mais en appliquant à nouveau la définition de la norme $C^{2,\alpha}$, $\|\phi_i\|_{C^{2,\alpha}}$ est contrôlé uniformément par la somme des $\|D\phi_i\|_{C^{1,\alpha}}$, qui sont uniformément contrôlées, d'après Schauder, par les $\|\Delta_{\phi_i}(D\phi_i)\|_{C^0}$, à leur tour contrôlées uniformément par $\|\phi_i\|_{C^2}$, .

Finalement, on trouve que $\|\phi_i\|_{C^{3,\alpha}}$ est contrôlée uniformément par $\|\phi_i\|_{C^2}$, dont on a vu qu'elle était bornée lorsque l'on a vérifié que l'on avait famille d'opérateurs d'inverses bornés. Quitte à extraire, les ϕ_i convergent faiblement en norme $C^{3,\alpha}$, donc fortement en norme $C^{3,\eta}$. Or on a vu que ceci est contradictoire, ce qui achève la preuve que $r_0 > 0$.

On a vu que les dérivées secondes des $\phi^{(r)}$ étaient uniformément bornées, lorsqu'on a vu que les $g_{\phi^{(r)}k\bar{l}}$ l'étaient, ceci indépendamment du fait que $r_0 > 0$ ou $r_0 = 0$. Autrement dit, les $\phi^{(r)}$ sont uniformément bornées en norme $C^{1,1}$(espace des fonctions C^1 à dérivées secondes bornées), puisqu'elles le sont aussi en norme C^0 (estimées C^0) et C^1 (théorème 3.12). Quitte à extraire, il y a donc convergence faible des $\phi^{(r)}$ vers une fonction $C^{1,1}$ lorsque r tend vers 0. □

Remarque 3.18 *La convergence faible $C^{1,1}$ consiste en une convergence uniforme des fonctions et de leurs dérivées premières, et une convergence $\mathbf{L}^\infty$ faible-$*$ des dérivées secondes. D'autre part, on remarque facilement, en reprenant les arguments du début de cette section, que $r \mapsto \phi^{(r)}$ est C^∞ sur* $]0,1]$.

4 Unicité de la solution $C^{1,1}$

Dans son article, Chen montre que si deux suites de fonctions lisses (ϕ_i) et (ψ_i) telles que pour tout i, $\omega + dd^c\phi_i$ et $\omega + dd^c\psi_i$ sont > 0, $(\omega + dd^c\phi_i)^{m+1}$ et $(\omega + dd^c\psi_i)^{m+1}$ tendent vers 0 et (ϕ_i), (ψ_i) convergent uniformément, alors la limite C^0 — que Chen appelle « solution faible C^0 » — est la même. Toutefois, puisqu'on ne sait pas si toute solution à l'équation de Monge-Ampère dégénérée (disons C^2 pour l'instant, on va voir que l'on peut affaiblir la régularité) est limite d'une telle suite, cela ne nous donne pas l'unicité d'une telle solution.

A première vue, l'équation $(\omega + dd^c\phi)^{m+1} = 0$ est définie lorsque ϕ est au moins deux fois dérivable. Mais nous allons voir que l'on peut donner un sens à cette équation pour ϕ *localement bornée*, du point de vue des courants.

4.1 Point de vue des courants et opérateur de Monge-Ampère.

Rappelons succinctement qu'un *courant* de degré $n - k$ sur une variété de dimension n est une forme linéaire sur l'espace des k-formes à support compact de cette variété. Dans le cadre complexe (dimension complexe égale à n), on parle aussi de courant de bidegré $(n - p, n - q)$ s'il s'agit d'une forme linéaire agissant sur les $(p + q)$-formes de type (p, q). On peut aussi voir un courant de degré $n - k$

comme une k-forme à coefficients distributions. Nous renvoyons à [Dem] pour la définition des opérations usuelles (dérivation, produit extérieur avec une forme lisse) sur les courants, qui se définissent essentiellement comme leurs analogues pour les distributions, ainsi que pour les notions de courant fermé et de courant positif. Notons toutefois le fait suivant :

Proposition 4.1 *Un courant positif de bidegré* $(n-p, n-p)$ *est réel et est d'ordre* 0*, i.e. est à coefficients mesures.*

Venons-en au fait. Dans notre contexte, soit u une fonction pluri-sous-harmonique (*i.e.* $dd^c u \geq 0$ au sens des courants — on écrira *psh*) localement bornée, et soit T un courant fermé positif de bidegré $(m+1-p, m+1-p)$. Alors uT est bien défini et suivant [Be-Ta], nous définissons $dd^c u \wedge T$ par :

$$dd^c u \wedge T := dd^c(uT).$$

On a la propriété remarquable suivante :

Proposition 4.2 *Avec les hypothèses ci-dessus,* $dd^c u \wedge T$ *est encore un courant positif et fermé. Il est de bidegré* $(m-p, m-p)$*.*

Démonstration. [Dem], p. 185.□

Bien sûr, cette définition coïncide avec la définition usuelle lorsque T ou $dd^c u$ est lisse.

Dès lors, si $u_1, \ldots, u_q$, $q \leq p$ sont psh, on définit par récurrence $dd^c u_1 \wedge \ldots \wedge dd^c u_q \wedge T$ comme étant $dd^c(u_1 dd^c u_2 \wedge \ldots \wedge dd^c u_q \wedge T)$. De même, puisque si u est psh, $dd^c u \geq 0$ est de bidegré (m, m), on définit $(dd^c u)^2$ comme étant $dd^c(u dd^c u)$, puis $(dd^c u)^q$ comme $dd^c(u(dd^c u)^{q-1})$ — et on peut aussi le faire avec $u_1, \ldots, u_q$.

Par ailleurs, on sait que ω admet des potentiels locaux ; soit donc Ψ un potentiel de ω sur un ouvert U ; on dira que ϕ est ω-psh sur U si $\omega + dd^c\phi \geq 0$ sur U, c'est-à dire si $dd^c(\Psi + \phi) \geq 0$ sur U — et ceci ne dépend pas du potentiel. Pour une telle fonction localement bornée, on peut donc définir $(\omega + dd^c\phi)^{m+1} = (dd^c(\Psi + \phi))^{m+1}$ sur U, puis sur toute la variété en utilisant d'autres potentiels locaux, dès que ϕ est globalement ω-psh et globalement bornée. On a donc donné un sens à l'équation $(\omega + dd^c\phi)^{m+1} = 0$.

Que dire maintenant si ϕ est la fonction $C^{1,1}$ construite dans la partie précédente ? Nous allons avoir besoin d'un théorème de convergence des courants pour établir que l'on a bien $(\omega + dd^c\phi)^{m+1} = 0$ en tant que courant.

Théorème 4.3 (Théorème de monotonie de Bedford-Taylor) *Soient $u_1, \ldots, u_q$ q fonctions psh localement bornées sur U, et soient $(u_{1,j}), \ldots, (u_{q,j})$ q suites décroissantes de fonctions psh localement bornées sur U, convergeant respectivement vers $u_1, \ldots, u_q$ ponctuellement. Alors, lorsque $j \to +\infty$,*

$$dd^c u_{1,j} \wedge \ldots \wedge dd^c u_{q,j} \rightharpoonup dd^c u_1 \wedge \ldots \wedge dd^c u_q.$$

(au sens des courants d'ordre 0).

Démonstration. [Be-Ta].□

Remarque 4.4 *Notons alors que puisqu'on sait approximer des fonctions psh localement bornées par des suites décroissantes de fonctions psh localement bornées lisses, on a dans ce cadre la commutativité du produit extérieur, puisqu'on l'a dans le cas lisse. On a aussi sans problème la distributivité par rapport à l'addition (de fonctions psh). En un mot, dès que les objets sont bien définis, on peut faire du calcul multilinéaire et du calcul différentiel habituels avec.*

Munis de ce théorème, nous sommes en mesure de prouver que dès qu'une suite (ϕ_i) comme celle envisagée au début de cette partie a pour limite uniforme ϕ, comme c'est le cas si l'on considère la construction de la partie précédente, $(\omega + dd^c\phi)^{m+1} = 0$. En fait, si l'on reprend cette construction ($\phi_i = \phi^{(r_i)}$), la suite est croissante dès que les r_i décroissent vers 0, mais on voudrait la rendre décroissante. On procède comme suit dans le ca général. Soit $\varepsilon_i = \min_{M\times\Sigma} |\phi_i - \phi_{i+1}|$. Quitte à extraire, on peut supposer qui $\sum_i \varepsilon_i < +\infty$. Posons $\hat{\phi}_i = \phi_i + \sum_{j\geq i} \varepsilon_j$. Alors $(\hat{\phi}_i)_{i\geq 0}$ décroît vers ϕ, et donc si Ψ est un potentiel local de ω sur un ouvert U, $(\Psi + \hat{\phi}_i)_{i\geq 0}$ décroît vers $\Psi + \phi$, et toutes ces fonctions sont ω-psh et bornées sur U.

Alors d'après le théorème de monotonie de Bedford-Taylor, on a bien que $(\omega + dd^c\phi)^{m+1} = (dd^c(\Psi + \phi))^{m+1}$ est limite des $(dd^c(\Psi + \hat{\phi}_i))^{m+1} = (\omega + dd^c\phi_i)^{m+1} = r_i\omega_1^{m+1}$ au sens des courants. Et comme cette limite est nulle ($r_i \to 0$), $(\omega + dd^c\phi)^{m+1} = 0$ sur U pour tout U assez petit, donc sur $M \times \Sigma$.

4.2 Unicité de la solution $C^{1,1}$

On sait que l'équation (E_r) admet une unique solution lisse, ω-psh, et égale à $\phi^{(1)}$ au bord, pour $r \in]0, 1]$. Qu'en est-il du cas $r = 0$? Nous donnons, dans une version amplement simplifiée qui nous suffit ici, un théorème d'unicité, dû à Phong-Sturm, voir [Ph-St]. Mais nous avons besoin auparavant d'un petit lemme :

Lemme 4.5 *Soit U relativement compact dans l'intérieur de $M\times\Sigma$ — en d'autres termes, ∂U est disjoint de $\partial(M \times \Sigma)$. Soient ϕ et ψ deux fonctions ω-psh bornées qui coïncident sur un voisinage de ∂U. Alors*

$$\int_U (\omega + dd^c\phi)^{m+1} = \int_U (\omega + dd^c\psi)^{m+1}.$$

Démonstration. Soit K un compact inclus dans U tel que $\phi = \psi$ sur $U \setminus K$. Soit χ une fonction positive lisse à support compact dans U, égale à 1 au voisinage de K. Alors

$$\langle (\omega + dd^c\phi)^{m+1}, \chi\rangle = \langle \omega^{m+1}, \chi\rangle + \langle dd^c(\Theta_\phi), \chi\rangle$$

car, d'après la remarque (4.4) (et en passant par des potentiels locaux),

$$\begin{aligned}(\omega + dd^c\phi)^{m+1} &= \omega^{m+1} + \sum_{k=1}^{m+1} C^k_{m+1}(dd^c\psi)^k \wedge \omega^{m+1-k} \\ &= \omega^{m+1} + dd^c\Big[\sum_{k=1}^{m+1} C^k_{m+1}\psi(dd^c\psi)^{k-1} \wedge \omega^{m+1-k}\Big].\end{aligned}$$

Ainsi, $\langle(\omega+dd^c\phi)^{m+1}, \chi\rangle = \langle\omega^{m+1}, \chi\rangle + \langle\Theta_\phi, dd^c(\chi)\rangle$. Or, $dd^c(\chi)$ est nul au voisinage de K. En notant $\langle ., .\rangle_{U\setminus K}$ le crochet de dualité sur $U \setminus K$, nous avons $\langle(\omega + dd^c\phi)^{m+1}, \chi\rangle = \langle\omega^{m+1}, \chi\rangle + \langle\Theta_\phi, dd^c(\chi)\rangle_{U\setminus K}$, expression qui est inchangée si l'on remplace ϕ par ψ, puisqu'elles coïncident sur $U \setminus K$. Il n'y a plus qu'à faire grossir K jusqu'à remplir U. $\square$

Théorème 4.6 (Phong-Sturm) *Soient ϕ et ψ deux solutions continues et ω-psh sur $M \times \Sigma$, de l'équation de Monge-Ampère complexe homogène, soit*

$$(\omega + dd^c\phi)^{m+1} = (\omega + dd^c\psi)^{m+1} = 0$$

au sens des courants (et donc des mesures). On suppose que ϕ et ψ sont égales au bord. Alors elles sont égales.

Démonstration. On peut supposer ϕ et $\psi \geq 0$. On se donne également une fonction C^∞ f que nous supposons < 0 et telle que $\omega + dd^cf > 0$. Supposons d'abord que l'ensemble $\{\phi < \psi\}$ n'est pas vide.

Alors pour $\varepsilon > 0$ assez petit, $\{\phi < (1-\varepsilon)\psi+\varepsilon f\}$ n'est pas vide non plus, et est relativement compact dans l'intérieur de la variété puisqu'au bord, $\phi = \psi \geq 0$ et $f < 0$, donc $\phi > (1-\varepsilon)\psi+\varepsilon f$. Appelons ψ_ε la fonction (ω-psh, bornée) $(1-\varepsilon)\psi+\varepsilon f$, et U_ε l'ensemble $\{\phi < (1-\varepsilon)\psi + \varepsilon f\}$. C'est un ouvert, qui est de mesure > 0 (par rapport à la forme volume ω^{m+1}, par exemple), puisque c'est un ouvert non vide. Alors :

$$0 = \int_{U_\varepsilon} (\omega + dd^c\phi)^{m+1} \geq \int_{U_\varepsilon} (\omega + dd^c\psi_\varepsilon)^{m+1}.$$

En effet, posons $\phi_\eta = \sup(\phi+\eta, \psi_\varepsilon)$ pour $\eta > 0$ — ce sont des fonctions ω-psh, par stabilité par passage au sup. Par construction, il existe un voisinage V de ∂U_ε tel que $\phi_\eta = \phi + \eta$ que l'on peut prendre relativement compact dans l'intérieur de la variété.

Sur ce voisinage, $(\omega + dd^c\phi)^{m+1}$ et $(\omega + dd^c\phi_\eta)^{m+1}$ coïncident, donc d'après le lemme 4.5, $\int_{U_\varepsilon}(\omega+dd^c\phi)^{m+1} = \int_{U_\varepsilon}(\omega+dd^c\phi_\eta)^{m+1}$. Mais lorsque η décroît vers 0, ϕ_η

décroît vers ψ_ε. Par le théorème de monotonie (en s'aidant là encore de potentiels locaux de ω), $(\omega + dd^c\phi_\eta)^{m+1}$ tend vers $(\omega + dd^c\psi_\varepsilon)^{m+1}$ dans l'espace des mesures sur U_ε. Il vient donc :

$$\begin{aligned}\int_{U_\varepsilon}(\omega + dd^c\psi_\varepsilon)^{m+1} &\leq \liminf_{\eta\to 0}\int_{U_\varepsilon}(\omega + dd^c\phi_\eta)^{m+1}\\ &= \int_{U_\varepsilon}(\omega + dd^c\phi)^{m+1}\end{aligned}$$

(pour montrer l'inégalité de la première ligne, utiliser des fonctions plateaux qui croissent vers $\mathbb{1}_{U_\varepsilon}$ [3]), ce qui est le point que nous voulions voir.

Or, d'après la remarque (4.4) (et en passant par des potentiels locaux),

$$\begin{aligned}(\omega + dd^c\psi_\varepsilon)^{m+1} &= ((1-\varepsilon)(\omega + dd^c\psi) + \varepsilon(\omega + dd^c f))^{m+1}\\ &= \sum_{k=0}^{m+1} C_{m+1}^k (1-\varepsilon)^k \varepsilon^{m+1-k}(\omega + dd^c\psi)^k \wedge (\omega + dd^c f)^{m+1-k}\end{aligned}$$

où tous les termes de la somme sont positifs comme mesures, en particulier le terme $\varepsilon^{m+1}(\omega + dd^c f)^{m+1}$ qui est strictement positif. Il vient

$$\begin{aligned}0 &\geq \int_{U_\varepsilon}(\omega + dd^c\psi_\varepsilon)^{m+1}\\ &= \int_{U_\varepsilon}\sum_{k=0}^{m+1} C_{m+1}^k (1-\varepsilon)^k \varepsilon^{m+1-k}(\omega + dd^c\psi)^k(\omega + dd^c f)^{m+1-k}\\ &\geq \varepsilon^{m+1}\int_{U_\varepsilon}(\omega + dd^c f)^{m+1} > 0\end{aligned}$$

ce qui est impossible. L'ensemble $\{\phi < \psi\}$ est donc vide. Et par symétrie, $\{\psi < \phi\}$ est vide lui aussi, ce qui achève cette preuve.$\square$

En conclusion, ce théorème nous dit donc que la fonction que nous avons construite par la méthode de continuité est la seule solution continue possible à l'équation de Monge-Ampère complexe homogène, et nous donne donc aussi la seule pseudo-géodésique continue possible entre deux potentiels de Kähler.

Plus précisément, on a donc démontré

Théorème 4.7 *L'équation de Monge-Ampère dégénérée au sens des courants admet une unique solution C^0, qui est $C^{1,1}$, et vers laquelle tend uniformément toute suite de fonctions lisses (ϕ_i) ω-psh telle que $(\omega + dd^c\phi_i)^{m+1}$ tend vers 0 uniformément.*

3. Soit (χ_n) une suite de telles fonctions plateaux, et soit $\alpha > 0$; pour un n assez grand, $\langle(\omega + dd^c\psi_\varepsilon)^{m+1}, \chi_n\rangle \geq (\omega + dd^c\psi_\varepsilon)^{m+1}(U_\varepsilon) - \alpha$. Or, $\langle(\omega + dd^c\psi_\varepsilon)^{m+1}, \chi_n\rangle = \lim_{\eta\to 0}\langle(\omega + dd^c\phi_\eta)^{m+1}, \chi_n\rangle$ et par Beppo-Levi, $\langle(\omega + dd^c\phi_\eta)^{m+1}, \chi_n\rangle \leq (\omega + dd^c\phi_\eta)^{m+1}(U_\varepsilon)$, d'où le résultat en mettant ces inégalités bout à bout, en prenant la liminf sur η, et en faisant tendre α vers 0.

Remarque 4.8 *Cette remarque suit la remarque finale de la partie précédente. En effet, en jouant sur la fonction θ, il est facile de produire un grand nombre de suites convergeant faiblement $C^{1,1}$ et telles que leur Monge-Ampère tend vers 0. Ce théorème nous dit donc que toutes ces suites ont la même limite. De plus, on voit en travaillant un peu que la vitesse de convergence est la même pour différentes suites définies par une famille convenable de fonctions θ.*

5 Retour aux géodésiques et application : l'unicité de la métrique à courbure scalaire constante dans les cas $C_1 = 0$ et $C_1 < 0$

5.1 Résultats sur les géodésiques

De même que nous sommes passés d'un problème de géodésiques au sein d'une classe de Kähler à une équation de Monge-Ampère complexe, nous revenons maintenant vers le problème original après avoir en partie résolu cette équation, en réinterprétant nos résultats sur la variété M de départ grâce au théorème 2.9.

Considérons la solution $\phi^{(r)}$ de (E_r). Par la transformation réciproque de celle du début de la section 3.1 qui, rappelons-le, nous a permis de travailler avec une métrique non dégénérée sur $M \times \Sigma$, nous lui associons un chemin de φ_0 à φ_1 dans $\tilde{\mathcal{M}}_\Omega$. En effet, nous avons vu que $\phi^{(r)}$ est S^1-invariante ; en lui rajoutant $\frac{1}{8}t^2$, nous la laissons S^1-invariante, ce qui en fait une fonction $\varphi^{(r)} : M \times [0,1] \to \mathbb{R}$, telle que $\varphi^{(r)}(\cdot, 0) = \varphi_0$ et $\varphi^{(r)}(\cdot, 1) = \varphi_1$ grâce aux conditions de bord dans (E_r) — ce qui nous autorise à noter $\varphi_t^{(r)}$ au lieu de $\varphi^{(r)}(\cdot, t)$. De plus, $\varphi_t^{(r)}$ est bien un potentiel de Kähler pour tout t ; ceci car $\omega_M + d_M d_M^c \varphi_t^{(r)}$ est la restriction à TM, sous-fibré de $T(M \times \Sigma)$ préservé par la structure complexe, de $\omega_{\phi^{(r)}} = \omega_{M\times\Sigma} + dd^c\phi^{(r)} = \omega_M + dd^c(\phi^{(r)} + \frac{1}{8}t^2)$, *i.e.* $(\omega_M + d_M d_M^c \varphi_t^{(r)})(\cdot, J_M.)$ est la restriction à TM de la métrique $\omega_{\phi^{(r)}}(\cdot, J_{M\times\Sigma}\cdot)$, et est donc bien > 0.

Mais que se passe-t-il pour l'équation des géodésiques ? En effet, (E_r) est une déformation de l'équation de Monge-Ampère complexe homogène, laquelle était équivalente à l'équation des géodésiques $\varphi_t'' - |d\varphi_t'|^2_{\varphi_t} = 0$. Dans quelle mesure le chemin $\varphi^{(r)}$ est-il alors la déformation d'une géodésique ? En d'autres termes, que vaut la quantité $\varphi_t^{(r)\prime\prime} - |d\varphi_t^{(r)\prime}|^2_{\varphi_t^{(r)}}$?

Pour l'évaluer, souvenons-nous du calcul qui nous a menés à l'équivalence entre équation des géodésiques et Monge-Ampère complexe homogène. Il nous disait que,

$$(\varphi_t^{(r)\prime\prime} - |d\varphi_t^{(r)\prime}|^2_{\varphi_t^{(r)}})\omega^m_{\varphi_t^{(r)}} \wedge \frac{i}{2} dw \wedge d\bar{w} = (pr_M^*\omega + dd^c\varphi^{(r)})^{m+1}$$

où dans le membre de droite, $\varphi^{(r)}$ est vue comme fonction sur $M \times \Sigma$. Mais ce membre de droite est précisément égal à $(\omega_{M\times\Sigma} + dd^c\phi^{(r)})^{m+1}$, que l'on connaît par (E_r) ; soit :

$$(\varphi_t^{(r)\prime\prime} - |d\varphi_t^{(r)\prime}|^2_{\varphi_t^{(r)}})\omega^m_{\varphi_t^{(r)}} \wedge \frac{i}{2}dw \wedge d\bar{w} = \theta(r)\omega_1^{m+1}.$$

Toutefois,

$$\omega_1^{m+1} = f\omega^{m+1}_{M\times\Sigma} = f(\omega_M + \frac{i}{2}dw \wedge d\bar{w})^{m+1} = f\omega_M^m \wedge \frac{i}{2}dw \wedge d\bar{w}$$

d'où $(\varphi_t^{(r)\prime\prime} - |d\varphi_t^{(r)\prime}|^2_{\varphi_t^{(r)}})\omega^m_{\varphi_t^{(r)}} = \theta(r)f\omega_M^m$, ce qui vaut pour r assez petit, $cr\omega_M^m$, ce qui tend uniformément à tout ordre vers 0. De plus, comme seuls nous intéressent les r petits, on peut quitte à réindexer supposer $c = 1$. On parle alors de $\varphi^{(r)}$ comme *r-géodésique.*

Remarque 5.1 *C'est précisément pour éviter d'avoir ce f parasite que l'on a introduit la fonction θ, qui ne figure pas dans l'article de Chen, mais que celui-ci évacue en résumant en un théorème le contenu de la remarque (4.8).*

Désormais, puisque l'on est revenu sur M, ω (re)dénote ω_M

5.2 K-énergie de Mabuchi

Nous avons défini dans la section 2.1 la forme $\tilde{v}$ sur $\tilde{\mathcal{M}}_\Omega$ qui s'est révélée être une forme fermée et nous a permis d'exhiber la fonctionnelle $\mathbb{I}$, à l'origine de l'isométrie $\tilde{\mathcal{M}}_\Omega \cong \mathcal{M}_\Omega \times \mathbb{R}$. Nous voulons définir une autre fonctionnelle, dont les points extrémaux seront les métriques à courbure scalaire constante. Pour ce faire, on regarde la courbure scalaire réduite — à laquelle on a retranché sa moyenne — comme une forme sur les vecteurs tangents, soit :

$$\varphi \mapsto \tilde{s}_\varphi : \{f \mapsto \int_M f(s_\varphi - \bar{s}_\varphi)v_\varphi\}$$

Pour calculer la différentielle de cette 1-forme, on se rappelle tout d'abord que $\bar{s}_\varphi$ ne dépend en fait que de la classe de Kähler. En effet, pour une métrique g fixée de forme de Kähler ω, $s_g v_g = 2\rho\wedge\omega^{m-1}$; son intégrale sur M ne dépend donc que de la classe Ω de ω, et de la classe de ρ, qui est la première classe de Chern de M, qui ne dépend que de Ω, puisque la forme de Ricci de ω_φ s'écrit $\rho_\varphi = \rho - \frac{1}{2}dd^c \ln(\frac{\omega_\varphi^m}{\omega^m})$. Il suffit de calculer la variation au premier ordre de $\int_M fs_\varphi v_\varphi = \tilde{s}_\varphi(f) + V_\Omega\tilde{v}_\varphi(f)$, puisque $\tilde{v}$ est fermée.

Comme pour $\tilde{v}$, on se place en un point φ, où l'on prend deux vecteurs tangents f_1 et f_2, que l'on étend en champs constants. Il s'agit donc de calculer

$$d_\varphi \tilde{s}(f_1, f_2) = f_1 \cdot \tilde{s}_\varphi(f_2) - f_2 \cdot \tilde{s}_\varphi(f_1) = \int_M [f_2 f_1 \cdot (s_\varphi v_\varphi) - f_1 f_2 \cdot (s_\varphi v_\varphi)]$$

Or, $f_1 \cdot (s_\varphi v_\varphi) = (f_1 \cdot s_\varphi) v_\varphi + s_\varphi (f_1 \cdot v_\varphi)$ et on connaît déjà $f_1 \cdot v_\varphi$. Il nous reste à calculer la variation de s_φ. On utilise la formule $s_\varphi = 2\Lambda_\varphi \rho_\varphi$, et on calcule la variation de ρ_φ. On se sert $\rho_{\varphi+tf} = \rho_\varphi - \frac{1}{2} dd^c \ln(\frac{\omega^m_{\varphi+tf}}{\omega^m_\varphi})$; or, $\omega^m_{\varphi+tf} = (1 - t\Delta_\varphi f + \text{ termes en } t^2)\omega^m_\varphi$, donc $\ln(\frac{\omega^m_{\varphi+tf}}{\omega^m_\varphi}) = -t\Delta_\varphi f + \text{ termes en } t^2$, et finalement, $\rho_{\varphi+tf} = \rho_\varphi + \frac{t}{2} dd^c \Delta_\varphi f + \text{ termes en } t^2$ (le développement limité commute bien avec le dd^c, puisque c'est un développement en t, sur lequel dd^c n'agit pas). Reste à faire $\frac{d}{dt}|_{t=0}$, pour voir que la variation de ρ_φ est $\frac{1}{2} dd^c \Delta_\varphi f$.

Ainsi, $(f_1 \cdot s_\varphi) = 2\Lambda_\varphi (f_1 \cdot \rho_\varphi) + 2(f_1 \cdot \Lambda_\varphi)\rho_\varphi$ (et $f_1 \cdot \Lambda_\varphi = -dd^c f_1^\sharp \lrcorner$ sur les 2-formes, ce qui résulte de l'identité $\Lambda(\psi)\omega^m = m\psi \wedge \omega^{m-1}$ pour toute 2-forme ψ), donc

$$\begin{aligned} (f_1 \cdot s_\varphi) &= 2\omega_\varphi \lrcorner (\frac{1}{2} dd^c \Delta_\varphi f_1) + 2dd^c f_1 \lrcorner \rho_\varphi \\ &= -\Delta^2_\varphi f_1 - 2(dd^c f_1, \rho_\varphi) \\ &= -\Delta^2_\varphi f_1 - 2(d^c f_1, \delta_\varphi \rho_\varphi) - \delta_\varphi \alpha_1 \end{aligned}$$

où $\alpha_1 = 2(d^c f_1)^\sharp \lrcorner \rho_\varphi = 2r_\varphi(df_1^\sharp, .)$ par la formule d'adjonction. Or, l'identité de Bianchi contractée nous dit [4] $\delta_\varphi \rho_\varphi = -\frac{1}{2} d^c s_\varphi$. Au final, on a donc ($J$ étant une isométrie)

$$(f_1 \cdot s_\varphi) = -\Delta^2_\varphi f_1 + (df_1, ds_\varphi) - \delta_\varphi \alpha_1$$

et $f_1 \cdot (s_\varphi v_\varphi) = (-\Delta^2_\varphi f_1 + (df_1, ds_\varphi) - \delta_\varphi \alpha_1 - s_\varphi \Delta_\varphi f_1) v_\varphi$. Sachant que la laplacien, et donc aussi son carré, sont autoadjoints, il reste :

$$d_\varphi \tilde{s}(f_1, f_2) = \int_M [(f_2 df_1 - f_1 df_2, ds_\varphi) - f_2 \delta_\varphi \alpha_1 + f_1 \delta_\varphi \alpha_2 - s_\varphi (f_2 \Delta_\varphi f_1 - f_1 \Delta_\varphi f_2)] v_\varphi \tag{7}$$

Or,

$$\begin{aligned} \int_M s_\varphi (f_2 \Delta_\varphi f_1 - f_1 \Delta_\varphi f_2) v_\varphi &= \int_M [(d(s_\varphi f_2), df_1) - (d(s_\varphi f_1), df_2)] v_\varphi \\ &= \int_M [s_\varphi (df_2, df_1) + f_2 (ds_\varphi, df_1) - s_\varphi (df_1, df_2) \\ &\quad - f_1 (ds_\varphi, df_2)] v_\varphi \\ &= \int_M [f_2 (ds_\varphi, df_1) - f_1 (ds_\varphi, df_2)] v_\varphi \\ &= \int_M (f_2 df_1 - f_1 df_2, ds_\varphi) v_\varphi \end{aligned}$$

4. ce qui nous dit aussi que s_φ est constante si et seulement si ρ_φ est harmonique, d'où une EDP d'ordre 4 sur φ comme condition pour que g_φ soit à courbure scalaire constante.

ce qui, au regard de l'expression (7), nous dit que $d_\varphi\tilde{s}(f_1,f_2) = \int_M (f_1\delta_\varphi\alpha_2 - f_2\delta_\varphi\alpha_1)v_\varphi$.

Par ailleurs, $\int_M f_1\delta_\varphi\alpha_2 v_\varphi = \int_M 2f_1\delta_\varphi(r_\varphi(df_2^\sharp,\cdot)v_\varphi = \int_M 2(df_1, r_\varphi(df_2^\sharp,\cdot)) = \int_M 2r_\varphi(df_2^\sharp, df_1^\sharp)$, ce qui est clairement symétrique en f_1 et f_2, puisque r_φ est symétrique. L'intégrale (7) est donc nulle, et $\tilde{s}$ est donc fermée. □

Remarque 5.2 *Ce point peut aussi se justifier en calculant la dérivée covariante de $\tilde{s}$, qui est égale (par dualité riemannienne par rapport à la métrique de Mabuchi) à l'opérateur $\mathbb{L}$ de Lichnerowicz au point φ, dont une définition possible est $\mathbb{L}_\varphi(f) = \frac{1}{2}\Delta_\varphi^2 f + \frac{1}{2}(df, ds_\varphi) + (dd^c f, \rho_\varphi)$. C'est un opérateur autoadjoint — il est en fait égal à $(D_\varphi^- d)^* D_\varphi^- d$, où D_φ^- est la partie J-antiinvariante de la connexion de Levi-Civita de g_φ —, dont le noyau est l'espace des fonctions dont la différentielle est dans le noyau de D_φ^- — c'est-à-dire les fonctions dont le gradient est holomorphe —, dès que la variété est compacte.*

On définit de même s comme une 1-forme sur $\mathcal{M}_\Omega$, par

$$g \mapsto \mathring{s}_g : \{f \mapsto \int_M f(s_g - \bar{s}_g)v_g = \int_M f s_g v_g\}$$

puisque si $f \in T_g\mathcal{M}_\Omega$, $\int_M f v_g = 0$. Cette forme est évidemment fermée, puisque c'est la restriction à $T\mathcal{M}_\Omega$ de $\tilde{s}$, ce qui appelle, suivant [Mab2], la

Définition 5.3 *On appelle K-énergie de Mabuchi, et on note E_Ω (resp. $\tilde{E}_\Omega$), la fonctionnelle sur $\mathcal{M}_\Omega$ (resp. $\tilde{\mathcal{M}}_\Omega$) s'annulant au point-base et telle que $dE_\Omega = -\mathring{s}$ (resp. $d\tilde{E}_\Omega = -\tilde{s}$).*

Ces fonctionnelles ne sont définies qu'à une constante près, mais cette incertitude est levée dès que l'on choisit un point-base dans les espaces considérés. Indépendamment de cela, il est clair que puisque $dE_\Omega = -\mathring{s}$ (resp. $d\tilde{E}_\Omega = -\tilde{s}$), les points critiques de E_Ω sont les métriques à courbure scalaire constante (resp. les potentiels associés à de telles métriques).

5.3 Unicité des métriques à courbure scalaire constante : enjeux et préparatifs

Supposons qu'entre deux potentiels nous ayons une géodésique lisse (φ_t), $t \in [0,1]$. Posons $E(t) = \tilde{E}_\Omega(\varphi_t)$. Alors

$$\frac{dE}{dt} = d_{\varphi_t}\tilde{E}_\Omega(\varphi_t') = -\tilde{s}_{\varphi_t}(\varphi_t')$$

et pour calculer la dérivée seconde, on reprend le calcul de la variation de $\tilde{s}$, soit :

$$\begin{aligned}\frac{d^2E}{dt^2} &= -\varphi_t' \cdot \tilde{s}_{\varphi_t}(\varphi_t') - \tilde{s}_{\varphi_t}(\varphi_t'') \\ &= -\int_M \varphi_t'[-\Delta^2_{\varphi_t}\varphi_t' - 2(dd^c\varphi_t', \rho_{\varphi_t}) - (s_{\varphi_t} - s_\Omega)\Delta_{\varphi_t}\varphi_t']v_{\varphi_t} \\ &\quad - \int_M [\varphi_t''(s_{\varphi_t} - s_\Omega)]v_{\varphi_t}\end{aligned}$$

Or,

$$\begin{aligned}\int_M \varphi_t'(s_{\varphi_t} - s_\Omega)\Delta_{\varphi_t}\varphi_t' v_{\varphi_t} &= \int_M (d((s_{\varphi_t} - s_\Omega)\varphi_t'), d\varphi_t')v_{\varphi_t} \\ &= \int_M [(s_{\varphi_t} - s_\Omega)(d\varphi_t', d\varphi_t') + \varphi_t'(ds_{\varphi_t}, d\varphi_t')]v_{\varphi_t} \\ &= \int_M [(s_{\varphi_t} - s_\Omega)|d\varphi_t'|^2_{\varphi_t} + \varphi_t'(ds_{\varphi_t}, d\varphi_t')]v_{\varphi_t}.\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}\frac{d^2E}{dt^2} &= \int_M \varphi_t'[\Delta^2_{\varphi_t}\varphi_t' + 2(dd^c\varphi_t', \rho_\varphi) + (ds_{\varphi_t}, d\varphi_t')]v_{\varphi_t} \\ &\quad - \int_M (\varphi_t'' - |d\varphi_t'|^2_{\varphi_t})(s_{\varphi_t} - s_\Omega)v_{\varphi_t}.\end{aligned}$$

Mais puisqu'on a une géodésique, la seconde intégrale est nulle, tandis que la première, d'après la remarque 5.2, vaut

$$2\int_M \varphi_t'\mathbb{L}_{\varphi_t'}\varphi_t' = 2\|D^-_{\varphi_t}d\varphi_t'\|^2_{\mathbf{L}^2_{\varphi_t}} v_{\varphi_t} \tag{8}$$

ce qui en particulier est toujours ≥ 0.

Remarque 5.4 *Ce résultat est immédiat en utilisant la remarque 5.2 par le formalisme des géodésiques, mais ce calcul vaut jusqu'à l'avant-dernière ligne pour tout chemin différentiable.*

A présent, dans le cas où l'extrémité φ_0 est à courbure scalaire constante, $\frac{dE}{dt}|_{t=0} = 0$, donc $E(1) - E(0) = \int_0^1 ds \int_0^s \frac{d^2E}{dt^2}dt \geq 0$; autrement dit, dès que l'on sait relier les potentiels par de géodésiques lisses, on peut affirmer que les métriques à courbure scalaire constante réalisent les minima absolus de la K-énergie, et que réciproquement, de tels potentiels sont reliés par un chemin dont la dérivée a un gradient holomorphe. Ceci permet de conclure quant l'unicité de l'éventuelle métrique à courbure scalaire constante dans les cas où l'espace des champs de vecteurs holomorphes est réduit à 0, comme par exemple lorsque $C_1 = 0$ ou $C_1 < 0$. Dans le cas où toutefois il y a des champs de vecteurs holomorphes, vecteurs qui agissent de manière infinitésimale relativement aux transformations holomorphes, on conclut que deux métriques à courbure scalaire constante sont image l'une de l'autre par transformation holomorphe.

Le problème est que nous n'avons pas de vraies géodésiques, mais que nous savons les approcher comme expliqué dans la section 5.1. Tout le travail va donc consister à reprendre le calcul de la dérivée seconde de l'énergie le long d'un chemin approchant une géodésique, et à voir dans quel mesure on peut faire tendre ce chemin vers la géodésique envisagée pour retrouver les résultats escomptés. Toutefois, on n'a une convergence faible $C^{1,1}$, tandis que l'opérateur $\mathbb{L}$ est d'ordre 4... Néanmoins, nous allons tout de même démontrer le

Théorème 5.5 *Dans les cas $C_1 = 0$ et $C_1 < 0$, l'éventuelle métrique à courbure scalaire constante est unique au sein de sa classe de Kähler.*

Preuve dans le cas $C_1 = 0$. Fixons tout d'abord la métrique de référence h dans $\mathcal{M}_\Omega$, qui est la supposée métrique à courbure scalaire constante ; dans le cas $C_1 = 0$, on a donc h telle que $r^h = 0$ (théorème de Calabi-Yau), tandis que dans le cas $C_1 < 0$, on a h telle que $r^h = s_\Omega h/2m$, avec $s_\Omega < 0$ (existence d'une métrique de Kähler-Einstein dans le cas $C_1 < 0$, d'après Aubin et Yau), et on peut donc écrire $r^h < -ch$ pour une certaine constante $c > 0$.

On se donne ensuite, pour $r > 0$ petit, une r-géodésique $\varphi_t^{(r)}$ allant de φ_0 à φ_1, potentiels correspondant à des métriques à courbure scalaire constante, et tels que $\varphi_t^{(r)\prime\prime} - |d\varphi_t^{(r)\prime}|^2_{\varphi_t^{(r)}} = ru^{(r)}f$, où f est fixe, calculé à partir de h comme on l'a vu dans la section 5.1. On appellera un tel chemin une r-géodésique.

Dans le calcul de la dérivée seconde de l'énergie le long d'une géodésique, l'hypothèse de géodésicité ne sert qu'à la fin, pour éliminer le facteur $\varphi_t'' - |d\varphi_t'|^2_{\varphi_t}$. En fait, jusqu'à cette simplification, on a fait le calcul de la dérivée seconde de l'énergie le long d'un chemin lisse, ce qui nous dit, si l'on note $E_r(t) = \tilde{E_\Omega}(\varphi_t^{(r)})$, et comme $(\varphi_t^{(r)\prime\prime} - |d\varphi_t^{(r)\prime}|^2_{\varphi_t^{(r)}})v_{\varphi_t^{(r)}} = rv_h$, que

$$\begin{aligned}\frac{d^2E_r}{dt^2} &= 2\int_M \varphi_t^{(r)\prime}\mathbb{L}\varphi_t^{(r)\prime}v_{\varphi_t^{(r)}} - \int_M (s_{\varphi_t^{(r)}} - s_\Omega)(\varphi_t^{(r)\prime\prime} - |d\varphi_t^{(r)\prime}|^2_{\varphi_t^{(r)}})v_{\varphi_t^{(r)}} \\ &= 2\int_M |\mathcal{D}_{\varphi_t^{(r)}}\varphi_t^{(r)\prime}|^2_{\varphi_t^{(r)}}v_{\varphi_t^{(r)}} - \int_M s_{\varphi_t^{(r)}}(\varphi_t^{(r)\prime\prime} - |d\varphi_t^{(r)\prime}|^2_{\varphi_t^{(r)}})v_{\varphi_t^{(r)}} + rs_\Omega\int_M v_h\end{aligned}$$

en notant $\mathcal{D}_{\varphi_t^{(r)}}$ l'opérateur $D^-_{\varphi_t^{(r)}}d$, *i.e.* $\flat_{\varphi_t^{(r)}}\bar\partial\sharp_{\varphi_t^{(r)}}\bar\partial$ (usuellement, cette notation est d'ailleurs attribuée à $\bar\partial\sharp_{\varphi_t^{(r)}}\bar\partial$).

Dorénavant, pour alléger les notations, on ne marque plus la dépendance en t et on fait passer le r en indice, de sorte qu'au lieu d'indexer par φ_t, on indexe par r. On appelle u_r le quotient > 0 de $\frac{rv_h}{v_r} = \varphi_t^{(r)\prime\prime} - |d\varphi_t^{(r)\prime}|^2_{\varphi_t^{(r)}}$. Nous allons travailler sur le second terme de cette somme. Les formules $s_r = 2\Lambda_r\rho_r$ et $\rho_r = \rho_h - \frac{1}{2}dd^c\ln(\frac{v_r}{v_h})$ donnent :

$$s_r = 2\Lambda_r\rho_h + \Delta_r(\ln(\frac{v_r}{v_h})) = \mathrm{tr}_r(r^h) - \Delta_r(\ln(u_r))$$

ce qui permet d'écrire, pour ce second terme, que son opposé est égal à :

$$\int_M s_r u_r v_r = -\int_M \Delta_r(\ln(u_r))u_r v_r + \int_M \mathrm{tr}_r(r^h)u_r v_r.$$

Or,

$$\begin{aligned}\int_M \Delta_r(\ln(u_r))u_r v_r &= \int_M (d\ln(u_r), du_r)v_r \\ &= \int_M \frac{|du_r|_r^2}{u_r}v_r\end{aligned}$$

et donc notre second terme vaut $\int_M \left[|d\ln(u_r)|_r^2 - \mathrm{tr}_r(r_h)\right]u_r v_r$. Ainsi, en reprenant l'expression de $\frac{d^2E_r}{dt^2}$ et en intégrant en t, puisque $\frac{dE_r}{dt}(0) = \frac{dE_r}{dt}(1) = 0$ par l'hypothèse de courbure scalaire constante sur les extrémités,

$$0 = 2\int_{M\times[0,1]} |\mathcal{D}_r\varphi_r'|_r^2 v_r + \int_{M\times[0,1]} \left[|d\ln(u_r)|_r^2 - \mathrm{tr}_r(r^h)\right]u_r v_r dt + rs_\Omega \int_{M\times[0,1]} v_h \quad (9)$$

soit encore

$$2\int_{M\times[0,1]} |\mathcal{D}_r\varphi_r'|_r^2 v_t dt + \int_{M\times[0,1]} \left[|d\ln(u_r)|_r^2 - \mathrm{tr}_r(r^h)\right]u_r v_r dt = -rs_\Omega \int_{M\times[0,1]} v_h dt$$

A présent, le cas $C_1 = 0$ est clair, puisque r^h est nul, ainsi que s_Ω. Par conséquent,

$$2\int_{M\times[0,1]} |\mathcal{D}_r\varphi_r'|_r^2 v_r dt + \int_{M\times[0,1]} |d\ln(u_r)|_r^2 u_r v_r dt = 0$$

ce qui implique en particulier que $\nabla_r\varphi_r'$ est holomorphe pour tout t, c'est-à-dire nul puisque $C_1 = 0$. On a donc démontré que l'éventuelle métrique à courbure scalaire constante est unique.

Remarque 5.6 *Ceci implique que* $\ln(u_r)$*, donc* u_r *est constant pour tout* t *; par intégration, cette constante vaut* $1/r$*, i.e.* $v_r = v_h$*, ce qui n'est guère surprenant, puisque* h *est l'unique métrique à courbure scalaire constante... Par ailleurs, ce résultat est un cas particulier du résultat d'unicité dans le théorème de Calabi-Yau, qui donne aussi l'existence, mais cette démonstration illustre bien comment on peut travailler avec des* r*-géodésiques.*

5.4 Le cas $C_1 < 0$

Remarquons que le calcul précédent est valable dans ce cas jusqu'à l'avant-dernière ligne, et ce quoi que vaille C_1. On commence par utiliser l'hypothèse $r_h < -ch$ pour écrire $-\operatorname{tr}_r(r^h) > c\operatorname{tr}_r(h)$, et donc en remplaçant v_r par $\frac{rv_h}{u_r}$ et en simplifiant par r,

$$2\int_{M\times[0,1]} \frac{|\mathcal{D}_r\varphi_r'|_r^2}{u_r} v_h dt + \int_{M\times[0,1]} [|d\ln(u_r)|_r^2 + c\operatorname{tr}_r(h)]v_h dt \leq -s_\Omega \int_{M\times[0,1]} v_h dt := C \tag{10}$$

où C est donc indépendante de r. Cette inégalité va se révéler cruciale pour la suite, comme en atteste le nombre de fois que nous allons y faire référence.

5.4.1 Bornes uniformes $\mathbf{L}^p_{v_h dt}$

En effet, appelons w_r la fonction $\ln(\frac{v_h}{v_r})$, de sorte que $\bar\partial w_r = -\bar\partial\ln(u_r)$.

Lemme 5.7 *On a un contrôle $\mathbf{L}^2_{v_h dt}$ sur $\bar\partial w_r$, et un contrôle $\mathbf{L}^1_{v_h dt}$ sur $e^{\frac{w_r}{m}}$, contrôles qui ne dépendent pas de r.*

Démonstration. Pour le contrôle $\mathbf{L}^2_{v_h dt}$ sur $\bar\partial w_r$, on écrit $|\bar\partial w_r|_h^2 = |d\ln(u_r)|_h^2 \leq \lambda_m|\ln(u_r)|_r^2$, où λ_m est la plus grande valeur propre de g_r par rapport à h. Or, g_r est borné supérieurement (on a vu ce point dans la section 3.6), ainsi donc que les λ_j, d'où le contrôle voulu sur $\bar\partial w_r$ en intégrant et en considérant (10).

Pour le contrôle $\mathbf{L}^1_{v_h dt}$ sur $e^{\frac{w_r}{m}}$, on écrit $e^{\frac{w_r}{m}} = (\frac{v_h}{v_r})^{\frac{1}{m}} \leq \frac{1}{m}\operatorname{tr}_r(h)$ (convexité du logarithme), et on applique (10) en se servant de $c > 0$. □

Avant de donner un nouveau résultat, remarquons que $e^{-w_r} = \frac{v_r}{v_h} = \lambda_1\cdots\lambda_m$ est borné indépendamment de r donc $e^{w_r} = \frac{v_h}{v_r}$ est borné inférieurement indépendamment de r. Il existe donc une constante $c' > 0$ telle $\frac{v_h}{v_r} \geq c'$, c'est-à-dire $w_r \geq \ln c'$, et quitte à faire une homothétie (et à changer de classe de Kähler, ce qui est sans conséquence, puisqu'une métrique à courbure scalaire constante est unique dans sa classe de Kähler si et seulement si son homothétique l'est dans l'homothétique de sa classe de Kähler), on peut supposer $c' \geq 1$, *i.e.* $\ln c \geq 0$, et donc $w_r \geq 0$.

Corollaire 5.8 *On a pour tout $p > 1$ et tout $j \geq 0$ un contrôle $\mathbf{L}^p_{v_h dt}$ sur w_r^j, contrôle qui ne dépend que de p et j (et qui ne dépend pas de r).*

Démonstration. Soit $p > 1$. On va dominer $(\int_{M\times[0,1}(w_r^j)^p)^{\frac{1}{p}}$ par $(\int_{M\times[0,1} e^{\frac{w_r}{m}})^{\frac{1}{p}}$. Tout d'abord, $(\int_{M\times[0,1}(w_r^j)^p)^{\frac{1}{p}} = m^j(\int_{M\times[0,1}(\frac{w_r}{m})^{jp})^{\frac{1}{p}}$. Ensuite, une simple étude de la fonction $x^{jp}e^{-x}$, qui atteint son maximum sur $\mathbb{R}^+$ en $x = jp$, dit que pour tout $x \geq 0$, $x^{jp} \leq (\frac{jp}{e})^{jp}e^x$.

De cette inégalité il vient $\int_{M\times[0,1}(\frac{w_r}{m})^{jp} \leq (\frac{jp}{e})^{jp} \int_{M\times[0,1} e^{\frac{w_r}{m}}$, soit :

$$(\int_{M\times[0,1}(w_r^j)^p)^{\frac{1}{p}} \leq m^j(\frac{jp}{e})^j(\int_{M\times[0,1} e^{\frac{w_r}{m}})^{\frac{1}{p}} \tag{11}$$

ce qui, au vu lemme précédent, donne le résultat.□

D'autre part, (10) nous donne une estimation de la norme $\mathbf{L}^q_{v_h dt}$ (sur $M\times[0,1]$) de $|\mathcal{D}_r\varphi'_r|_r$ vue comme fonction sur $M\times[0,1]$ pour $q \in]1,2[$; en effet, d'après Hölder,

$$\int_{M\times[0,1]} |\mathcal{D}_r\varphi'_r|_r^q v_h dt \leq \Big(\int_{M\times[0,1]} \frac{|\mathcal{D}_r\varphi'_r|_r^2}{u_r} v_h dt\Big)^{\frac{2}{q}} \cdot \Big(\int_{M\times[0,1]} u_r^{\frac{q}{2-q}} v_h dt\Big)^{\frac{2-q}{2}}$$

puisque $|\mathcal{D}_r\varphi'_r|^q = \frac{|\mathcal{D}_r\varphi'_r|_r^q}{u_r^{q/2}} u_r^{q/2}$ et que $\frac{2}{q}$ et $\frac{2}{2-q}$ sont conjugués. Le premier facteur est donc borné par $C^{2/q}$. Or, $u_r = \varphi_t^{(r)}{}'' - |d\varphi_t^{(r)}{}'|^2_{\varphi_t^{(r)}} \leq \varphi_t^{(r)}{}''$ et $\varphi_t^{(r)}{}'' = \frac{\partial^2\phi^{(r)}}{\partial t^2} \pm \frac{1}{8}$, dont on a vu lors de la section 3.5 (« blowing up analysis ») qu'il était uniformément borné, donc u_r l'est aussi, d'où

$$\begin{aligned}\int_{M\times[0,1]} u_r^{\frac{q}{2-q}} v_h dt &\leq C\int_{M\times[0,1]} u_r^{\frac{1}{m}} v_h dt \\ &= Cr^{\frac{1}{m}} \int_{M\times[0,1]} (\frac{v_h}{v_r})^{\frac{1}{m}} v_h dt\end{aligned}$$

et en raisonnant sur les valeurs propres de h par rapport à g_r, $(\frac{v_h}{v_r})^{\frac{1}{m}} \leq \frac{\mathrm{tr}_r\, h}{m}$ (concavité du logarithme), et comme par (10), $\int_{M\times[0,1]} \mathrm{tr}_r(h)v_h dt$ est borné (c'est ici que sert la constante $c > 0$),

$$\int_{M\times[0,1]} u_r^{\frac{q}{2-q}} v_h dt \leq Cr^{\frac{1}{m}}$$

ce qui tend vers 0 quand r tend vers 0 (bien sûr, la constante C dépend de q). On en déduit, en revenant au calcul précédent, que $\int_{M\times[0,1]} |\mathcal{D}_r\varphi'_r|_r^q v_h dt$ tend vers 0 quand r tend vers 0, mais il faut prendre garde au fait que ceci ne signifie pas que $\mathcal{D}_r\varphi'_r$ tend vers 0 en norme $\mathbf{L}^q_{v_h dt}$ quand r tend vers 0, puisque c'est $|\mathcal{D}_r\varphi'_r|_r^q$, et non $|\mathcal{D}_r\varphi'_r|_h^q$, qui est intégré contre $v_h dt$.

Remarquons au passage que puisque que u_r est uniformément bornée, d'après (10),

$$\int_{M\times[0,1]} |\mathcal{D}_r\varphi'_r|_r^2 v_h dt \leq C\int_{M\times[0,1]} \frac{|\mathcal{D}_r\varphi'_r|_r^2}{u_r} v_h dt \leq C$$

i.e. $|\mathcal{D}_r\varphi'_r|_r^2$ est borné indépendamment de r.

Considérons à présent le champ de vecteurs $X_r = \sharp_r \bar\partial \varphi'_r$ — de sorte que $\mathcal{D}_r \varphi'_r = \flat_r \bar\partial X_r$, et estimons à son tour sa norme $\mathbf{L}^2_{v_h dt}$. Ponctuellement, en choisissant des coordonnées telles qu'au point et à l'instant considérés, la matrice de h soit réduite à I_m, et telle que celle de g_r soit diagonale, disons $\mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_m)$,

$$
\begin{aligned}
|X_r|_h^2 &= \sum_{j=1}^m X_r^j \overline{X_r^j} \qquad (12)\\
&= \sum_{j=1}^m \lambda_j^{-1} \frac{\partial \varphi'_r}{\partial \bar z_j} \overline{\left(\lambda_j^{-1} \frac{\partial \varphi'_r}{\partial \bar z_j}\right)}\\
&= \sum_{j=1}^m \lambda_j^{-1} \lambda_j^{-1} \frac{\partial \varphi'_r}{\partial \bar z_j} \frac{\partial \varphi'_r}{\partial z_j}\\
&\leq \sum_{j=1}^m \Big(\sum_{k=1}^m \lambda_j^{-1} \Big) \lambda_j^{-1} \left| \frac{\partial \varphi'_r}{\partial z_j} \right|^2 = \mathrm{tr}_r(h) |d\varphi'_r|_r^2
\end{aligned}
$$

d'où, globalement,

$$
\int_{M \times [0,1]} |X_r|_h^2 v_h dt \leq \int_{M \times [0,1]} \mathrm{tr}_r(h) |d\varphi'_r|_r^2 v_h dt
$$

ce qui est borné, puisque $|d\varphi'_r|_r^2 \leq \varphi''_r$ qui est borné, et que $\int_{M\times[0,1]} \mathrm{tr}_r(h) v_h dt$ est borné comme on l'a vu. On peut donc extraire de X_r une limite faible dans $\mathbf{L}^2_{v_h dt}$ quand r tend vers 0, et nous voulons voir que cette limite est holomorphe, donc nulle.

Si l'on avait convergence $\mathbf{L}^q_{v_h dt}$ de $\bar\partial X_r$ lorsque r tend vers 0, on aurait gagné, mais en l'absence de cette convergence, nous devons affiner notre analyse pour parvenir au résultat. En fait, on va tronquer X_r, et voir que le $\bar\partial$ de ce vecteur tronqué vérifie de bonnes propriétés.

Mais on peut déjà estimer $|\bar\partial X_r|_h$ ponctuellement ; un calcul légèrement différent de (12) nous dit que $|\bar\partial X_r|_h \leq C(\mathrm{tr}_r(h))^{\frac{1}{2}} |\mathcal{D}_r \varphi'_r|_r$ pour une certaine constante C ; en effet, en choisissant des coordonnées telles qu'au point et à l'instant considérés, la matrice de h soit réduite à I_m, et telle que celle de g_r soit diagonale, disons $\mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_m)$, on a

$$
\begin{aligned}
|\bar\partial X_r|_h^2 &= \sum_{i,j,k,l=1}^m \frac{\partial X_r^i}{\partial \bar z_j} \frac{\partial X_r^{\bar k}}{\partial z_l} h_{i\bar k} h^{j \bar l}\\
&= \sum_{i,j=1}^m \Big| \frac{\partial X_r^i}{\partial \bar z_j} \Big|^2
\end{aligned}
$$

et en notant $\varphi'_{r,k\bar{l}}$ les composantes de $\mathcal{D}_r\varphi'_r$, puisque $\bar{\partial}X_r = \sharp_r\mathcal{D}_r\varphi'_r$, il vient

$$\begin{aligned}|\bar{\partial}X_r|_h^2 &= \sum_{i,j,k,l=1}^{m} |g_t^{i\bar{k}}\varphi'_{r,\bar{k}\bar{j}}|^2 = \sum_{i,j=1}^{m} \frac{1}{\lambda_i^2}|\varphi'_{r,ij}|^2 \\ &\leq (\sum_{i,j=1}^{m} \frac{\lambda_j}{\lambda_i})(\sum_{i,j=1}^{m} \frac{1}{\lambda_i\lambda_j}|\varphi'_{r,ij}|^2) = (\sum_{i,j=1}^{m} \frac{\lambda_j}{\lambda_i})|\mathcal{D}_r\varphi'_r|_r^2.\end{aligned}$$

Or, g_t est borné supérieurement (on a vu ce point dans la section 3.6), ainsi donc que les λ_j, tandis que $\sum_{i=1}^m \frac{1}{\lambda_i} = \mathrm{tr}_t(h)$, d'où l'estimation annoncée.

Remarque 5.9 *Ceci nous donne une borne sur la norme* $\mathbf{L}^1_{v_h dt}$ *de* $\bar{\partial}X_r$ *par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, puisque* $(\mathrm{tr}_r(h))^{\frac{1}{2}}$ *et* $|\mathcal{D}_r\varphi'_r|_r$ *sont bornés en norme* $\mathbf{L}^2_{v_h dt}$ *; on peut donc bien en extraire une sous-suite faiblement convergente dans* $\mathbf{L}^1_{v_h dt}$ *quand* r *tend vers* 0*. Mais nous ne pouvons toujours pas dire que cette limite est nulle. Toutefois, nous avons le lemme suivant :*

Lemme 5.10 $e^{-w_r}\bar{\partial}X_r$ *tend vers* 0 *en norme* $\mathbf{L}^q_{v_h dt}$, $1 < q < 2$ *lorsque* r *tend vers* 0.

Démonstration. On a $e^{-w_r}\bar{\partial}X_r = \bar{\partial}X_r\frac{v_r}{v_h}$. Or,

$$\begin{aligned}\int_{M\times[0,1]} \Big(|\bar{\partial}X_r|_h\frac{v_r}{v_h}\Big)^q v_h d &\leq C\int_{M\times[0,1]} \Big(\mathrm{tr}_r(h)^{\frac{1}{2}}\cdot\frac{v_r}{v_h}|\mathcal{D}_r\varphi'_r|_r\Big)^q v_h dt \\ &\leq C\int_{M\times[0,1]} |\mathcal{D}_r\varphi'_r|_r^q v_h dt.\end{aligned}$$

d'où le résultat, puisqu'on a vu que $\int_{M\times[0,1]} |\mathcal{D}_r\varphi'_r|_r^q$ tendait vers 0 quand r tend vers 0 (on a utilisé que $(\mathrm{tr}_r(h))^{\frac{1}{2}}\frac{v_r}{v_h} = (\mathrm{tr}_(h)(\frac{v_r}{v_h})^2)^{\frac{1}{2}}$ est uniformément borné, ce qui est légitime car $(\frac{v_r}{v_h})^2\,\mathrm{tr}_r(h) = \sum_{j=1}^m \lambda_1^2\ldots\lambda_{j-1}^2\lambda_j\lambda_{j+1}^2\ldots\lambda_m^2$ et les λ_j sont uniformément bornés.)□

On définit le champs de vecteurs $Y_r = \frac{v_r}{v_h}X = e^{-w_r}X_r$. Nous voulons voir

Lemme 5.11 Y_r *est borné uniformément dans* $\mathbf{L}^\infty_{v_h dt}$ *(alors que* X_r *l'était* $\mathbf{L}^2_{v_h dt}$*), et que* $\bar{\partial}Y_r$ *est borné dans* $\mathbf{L}^q_{v_h dt}$ *pour* $1 < q < 2$.

Démonstration. Voyons le premier point. Ce qui empêche X_r d'être $\mathbf{L}^\infty_{v_h dt}$, c'est le $\sharp_r$ dans sa définition, et le fait que g_r ne soit d'inverse borné par rapport à h (ou à une quelconque autre métrique de référence). Mais ceci est corrigé pour Y_r par le terme $\frac{v_r}{v_h}$; en effet, si l'on reprend le système de coordonnées ci-dessus, on a au point-instant considéré, $\frac{v_r}{v_h} = \lambda_1 \cdots \lambda_m$, et $\mathrm{tr}_r(h) = \sum_{j=1}^m \frac{1}{\lambda_j}$, donc $(\frac{v_r}{v_h})^2 \mathrm{tr}_r(h) = \sum_{j=1}^m \lambda_1^2 \ldots \lambda_{j-1}^2 \lambda_j \lambda_{j+1}^2 \ldots \lambda_m^2 \geq C$ car les λ_j sont uniformément bornés. D'après (12), il vient

$$\begin{aligned} |Y_r|_h^2 &= (\frac{v_r}{v_h})^2 |X_r|_h^2 \\ &\leq (\frac{v_r}{v_h})^2 \mathrm{tr}_r(h) |d\varphi_r'|_r \\ &\leq C |d\varphi_r'|_r^2 \end{aligned}$$

et comme $|d\varphi_r'|_r$ est uniformément borné, Y_r est donc borné uniformément dans $\mathbf{L}^\infty_{v_h dt}$.

Reste le cas de $\bar\partial Y_r$. L'inégalité (10) nous dit que $\int_{M\times[0,1]} |d \ln(u_r)|_r^2 v_h dt$ est borné indépendamment de r. On applique ensuite le lemme précédent, puisqu'en fait, $\bar\partial Y_r = e^{-w_r} \bar\partial X_r + \bar\partial \ln(u_r) \otimes Y_r$. $\square$

Résumons : X_r est uniformément borné $\mathbf{L}^2_{v_h dt}$, Y_r et $\frac{v_r}{v_h}$, dans $\mathbf{L}^\infty_{v_h dt}$, et $\bar\partial Y_r$, dans $\mathbf{L}^q_{v_h dt}$. On extrait donc des sous-suites faiblement convergentes dans ces espaces respectifs, et on appelle X_0 (resp. Y_0,...) limite faible de $X_r = X_{\varphi_t^{(r)}}$ (resp. de $Y_{\varphi_t^{(r)}}$,...) pour r tendant vers 0. On voit aussi que $\bar\partial Y_0$ coïncide avec la limite faible des $\bar\partial Y_{\varphi_t^{(r)}}$, et est donc $\mathbf{L}^q_{v_h dt}$ $(1 < q < 2)$.

En outre, w_r est borné dans $\mathbf{L}^p_{v_h dt}$ pour tout $p \geq 1$ (et $< \infty$), donc par extraction diagonale, admet une sous-suite convergeant faiblement dans tout $\mathbf{L}^p_{v_h dt}$ (on le fait pour p entier, et on utilise l'injection continue $\mathbf{L}^p_{v_h dt} \hookrightarrow \mathbf{L}^{p'}_{v_h dt}$ pour tout $p' > p$).On appelle w_0 la limite (commune à tous les $\mathbf{L}^p_{v_h dt}$) de cette suite. De plus, $|e^{-w_0} - e^{-w_r}| \leq \sup(e^{-w_0}, e^{-w_r})|w_0 - w_r| \leq |w_0 - w_r|$ presque-partout par accroissements finis ; en intégrant $e^{-w_0} - e^{-w_r}$ contre une fonction $\mathbf{L}^{p^*}_{v_h dt}$, on a donc que e^{-w_r} tend faiblement $\mathbf{L}^p_{v_h dt}$ vers e^{-w_0} pour tout $p \geq 1$.

Or, pour tout r, $e^{-w_r} X_r = Y_r$, ce qui tend faiblement $\mathbf{L}^\infty_{v_h dt}$vers Y_0 ; du reste, il n'est pas difficile de constater que le produit de deux suites bornées faiblement convergentes, l'une $\mathbf{L}^2_{v_h dt}$ et l'autre $\mathbf{L}^p_{v_h dt}$, $p \geq 2$, est faiblement convergente $\mathbf{L}^{2p/(2+p)}_{v_h dt}$, de limite le produit des limites faibles. Dans notre contexte, ceci donne donc la convergence faible ($\mathbf{L}^{2p/(2+p)}_{v_h dt}$ pour tout $p \geq 2$, c'est-à-dire $\mathbf{L}^q_{v_h dt}$ pour tout $q \in [1, 2[$) de $e^{-w_r} X_r$ vers $e^{-w_0} X_0$, d'où $Y_0 = e^{-w_0} X_0$ presque-partout.

Par ailleurs, puisqu'ils sont bornés dans $\mathbf{L}^2_{v_h dt}$, les $\bar\partial w_r$ tendent (à extraction près) faiblement dans $\mathbf{L}^2_{v_h dt}$ vers une fonction qui est donc $\mathbf{L}^2_{v_h dt}$, et qui coïncide nécessairement avec $\bar\partial w_0$.

Le même type de raisonnement donne : $\bar\partial Y_r + \bar\partial w_r \otimes Y_r$ tend faiblement dans tout $\mathbf{L}^q_{v_h dt}$, $1 < q < 2$, vers $\bar\partial Y_0 + \bar\partial w_0 \otimes Y_0$; or, on a vu que $\bar\partial Y_r + \bar\partial w_r \otimes Y_r$ tend vers 0 dans ces $\mathbf{L}^q_{v_h dt}$, d'où $\bar\partial Y_0 + \bar\partial w_0 \otimes Y_0 = 0$ presque-partout. Remarquons que formellement, ces deux relations nous donnent ce que l'on veut, puisque si tout était lisse, on en déduirait (comme $\bar{\partial}X = e^w(\bar{\partial}Y + \bar{\partial}w \otimes Y)$) que $\bar{\partial}X = 0$.

5.4.2 Calcul sur les limites

Puisque w_0 est $\mathbf{L}^p_{v_h dt}$ pour tout p, ainsi donc que ses puissances, et que Y_0 est $\mathbf{L}^\infty_{v_h dt}$, on peut définir pour $k \geq 0$

$$X_{0,k} := Y_0 \sum_{j=0}^{k} \frac{w_0^j}{j!}$$

dans tous les $\mathbf{L}^p_{v_h dt}$, contrairement à X_0 qui reste « obstinément » à ce point du développement dans $\mathbf{L}^2_{v_h dt}$. Il est facile de voir que les $X_{0,k}$ tendent vers X_0 dans $\mathbf{L}^2_{v_h dt}$; en effet,

$$\|X_0 - X_{0,k}\|^2_{\mathbf{L}^2_{v_h dt}} = \int_{M\times[0,1]} (1 - e^{-w_0} \sum_{j=0}^{k} \frac{w_0^j}{j!})^2 |X_0|_h^2 v_h dt \tag{13}$$

et l'intégrande, qui est majoré presque-partout par $|X_0|_h^2$ qui est intégrable, tend ponctuellement vers 0 lorsque k tend vers $+\infty$, d'où la convergence voulue par convergence dominée.

Calculons $\bar{\partial}X_0$ (c'est la quantité dont on veut montrer qu'elle est nulle). Soit ψ une fonction-test sur $M \times [0,1]$ (ou plutôt un m-uplet de fonctions-test sur un ouvert de coordonnées) ; alors

$$\begin{aligned}
\langle \bar{\partial}X_0, \psi \rangle &= -\langle X_0, \bar{\partial}\psi \rangle \\
&= -\lim_{k\to+\infty} \langle X_{0,k}, \bar{\partial}\psi \rangle \\
&= \lim_{k\to+\infty} \langle \bar{\partial}X_{0,k}, \psi \rangle
\end{aligned}$$

car X_0 est limite $\mathbf{L}^2_{v_h dt}$, donc en particulier limite au sens distribution, des $X_{0,k}$. Or, à k fixé, il est clair que $X_{0,k}$ est limite faible $\mathbf{L}^p_{v_h dt}$, donc limite distribution, des $X_{r,k} = \sum_{j=0}^{k} \frac{w_r^j}{j!} Y_r$. En effet, Y_r tend vers faiblement Y_0 dans $\mathbf{L}^{2p}_{v_h dt}$, ainsi que les w_r^j vers w_0^j, et chaque facteur est borné par rapport à r, donc le produit converge bien faiblement vers le produit des limites dans $\mathbf{L}^p_{v_h dt}$. $\bar{\partial}X_{0,k}$ est donc limite au sens des distributions des $\bar{\partial}X_{r,k}$.

On calcule donc

$$\begin{aligned}
\bar\partial X_{r,k} &= \bar\partial(\sum_{j=0}^{k} \frac{w_r^j}{j!} Y_r) \\
&= \sum_{j=0}^{k-1} \frac{w_r^j}{j!} \bar\partial w_r \otimes Y_r + \sum_{j=0}^{k} \frac{w_r^j}{j!} \bar\partial Y_r \\
&= \bar\partial w_r \otimes (\sum_{j=0}^{k-1} \frac{w_r^j}{j!} - \sum_{j=0}^{k} \frac{w_r^j}{j!}) Y_r + \sum_{j=0}^{k} \frac{w_r^j}{j!} (\bar\partial Y_r + \bar\partial w_r \otimes Y_r) \\
&= \bar\partial w_r \otimes (X_{r,k-1} - X_{r,k}) + \sum_{j=0}^{k} \frac{w_r^j}{j!} (\bar\partial Y_r + \bar\partial w_r \otimes Y_r).
\end{aligned}$$

Or, $\bar\partial w_r$ tend vers $\bar\partial w_0$ dans $\mathbf{L}^q_{v_h dt}$ $(1 < q < 2)$ et $X_{r,k-1} - X_{r,k}$ tend vers $X_{0,k-1} - X_{0,k}$ dans $\mathbf{L}^{q^*}_{v_h dt}$, donc leur produit tensoriel tend vers $\bar\partial w_0 \otimes (X_{0,k-1} - X_{0,k})$ dans $\mathbf{L}^1_{v_h dt}$ donc au sens des distributions. De plus, $\bar\partial Y_r + \bar\partial w_r \otimes Y_r$ tend vers 0 dans $\mathbf{L}^q_{v_h dt}$, tandis que $\sum_{j=0}^k \frac{w_r^j}{j!}$ est borné dans $\mathbf{L}^{q^*}_{v_h dt}$, et donc leur produit tend vers 0 dans $\mathbf{L}^1_{v_h dt}$, et donc au sens des distributions.

Finalement, $\bar\partial X_{0,k}$ vaut donc $\bar\partial w_0 \otimes (X_{0,k-1} - X_{0,k})$, et ce pour tout k ; mais puisque $\bar\partial w_0$ est $\mathbf{L}^2$ et que $X_{0,k-1} - X_{0,k}$ tend vers 0 dans $\mathbf{L}^2$ (puisque $(X_{0,k})$ converge dans $\mathbf{L}^2$), leur produit tend vers 0 dans $\mathbf{L}^1$, en particulier au sens des distributions.

Ainsi, $\bar\partial X_0 = 0$ au sens des distributions. C'est-à-dire : $\int_{M\times[0,1]} X_0 \frac{\partial \bar\psi}{\partial \bar z_j} = 0$ pour toute $\psi = (\psi_1, \ldots, \psi_m)$ lisse s'annulant au bord de $U \times I$. A présent, donnons-nous une fonction lisse $\chi = (\chi_1, \ldots, \chi_m)$ sur U qui s'annule au bord de cet ouvert, et une fonction lisse ρ sur $[0,1]$ qui s'annule en 0 et en 1. Posons $\psi = \rho.\chi$. Il vient, pour tout $j = 1, \ldots, m$:

$$\int_{M\times[0,1]} X_0 \frac{\partial \bar\psi}{\partial \bar z_j} v_h = 0 = \int_{[0,1]} (\int_{M\times\{t\}} X_0 \frac{\partial \bar\chi}{\partial \bar z_j} \det h) \bar\rho \; v_h dt$$

par le théorème de Fubini, puisque X_0 est dans $L^2(V \times \{t\})$ pour presque tout t de I.

Ceci étant vrai pour toute fonction ρ lisse sur $[0,1]$, nulle en 0 et en 1, on en déduit que pour toute fonction-test fixée χ et pour $j = 1, \ldots, m$, $\int_{V\times\{t\}} X_0 \frac{\partial \bar\chi}{\partial \bar z_j} \det h = 0$, et ce,pour presque tout t dans $[0,1]$ (dépendant de χ) . Reste à voir que l'on peut affirmer que pour presque tout t, les $\int_{M\times\{t\}} X_0 \frac{\partial \bar\chi}{\partial \bar z_j} \det h$ sont nuls, indépendamment de la fonction χ. Pour ce faire, on choisit une famille dénombrable χ_l, $l \geq 0$ dense dans $C_c^\infty(U)$, et l'on pose $B_l := \{t \in [0,1], \int_{V\times\{t\}} X_0 \frac{\partial \bar\chi_l}{\partial \bar z_j} \det h = 0, j = 1, \ldots, n\}$. Alors B_l^c est de mesure nulle pour tout l, donc $\cup_{l\geq 0} B_l^c = (\cap_{l\geq 0} B_l)^c$ est de mesure nulle, et donc pour presque tout t, on a :

$$\int_{V\times\{t\}} X_0 \frac{\partial \bar{\chi}_l}{\partial \bar{z}_j} v_h = 0, j = 1, \ldots, m \ \ \forall l \geq 0$$

et donc par densité des χ_l, on aura, pour presque tout t, $\int_{M\times\{t\}} X_0 \frac{\partial \bar{\chi}}{\partial \bar{z}_j} \det h = 0, j = 1, \ldots, m$ pour toute χ dans $C_c^\infty(U)$. Autrement dit, la séparabilité de $C_c^\infty(U)$ permet d'inverser l'ordre des quantificateurs. En particulier, X_0 est faiblement holomorphe sur $M \times \{t\}$ pour presque tout t de $[0, 1]$. Par ellipticité du $\bar{\partial}$, X_0 est donc fortement holomorphe sur ces $M \times \{t\}$. Mais puisque $C_1(M \times \{t\}) = C_1(M) < 0$, l'espace des champs de vecteurs holomorphes est réduit à $\{0\}$, et donc X_0 est nul sur ces $M \times \{t\}$.

Il nous reste à conclure quant à l'unicité de l'éventuelle métrique à courbure scalaire constante. On a supposé que h était la métrique de référence et que $\varphi(t), t \in [0, 1]$ est la « géodésique » menant de cette métrique à une autre métrique à courbure scalaire constante, $g_{\varphi(1)}$ (c'est dans (9) qu'on a besoin que les extrémités représentent des métriques à courbure scalaire constante) dans l'espace des potentiels. Comme h est la métrique de référence dans $\mathcal{M}_\Omega$, $\varphi(0) \equiv 0$. Pour $r > 0$, on s'est donné $\varphi^{(r)}$ une r-géodésique approchant φ. Pour tout t et tout $r > 0$, on a $\bar{\partial}\varphi^{(r)}(t) - \bar{\partial}\varphi^{(r)}(0) = \int_0^t \bar{\partial}\varphi^{(r)\prime}(s)\, ds$. Par convergence faible $C^{0,1}$ de $\bar{\partial}\varphi^{(r)}$, et convergence faible L^∞ de $\bar{\partial}\varphi^{(r)\prime}$, on a alors pour tout t $\bar{\partial}\varphi(t) - 0 = \int_0^t \bar{\partial}\varphi'(s)\, ds$, en faisant $r \to 0$. Or, $\bar{\partial}\varphi'(s)$ est nul presque-partout. Ainsi, $\bar{\partial}\varphi(t) = 0$ pour tout t, et en particulier pour $t = 1$. Or, $\omega_{\varphi(1)} = \omega_h + i\partial\bar{\partial}\varphi(1)$ (au sens fort, car au moins les extrémités de la géodésique sont lisses), et donc $\omega_{\varphi(1)} = \omega_h$.

5.5 Complément : minimum de la K-énergie dans le cas $C_1 \leq 0$

En guise de conclusion à notre étude de [Che], nous terminons par une courte démonstration, celle du

Théorème 5.12 *Si $C_1 \leq 0$, alors une métrique à courbure scalaire constante réalise le minimum global de la K-énergie. Si la K-énergie n'a pas de borne inférieure, il n'y a donc pas de métrique à courbure scalaire constante dans la classe de Kähler considérée.*

Démonstration. D'après ce qui précède, en prenant pour point de départ une métrique à courbure scalaire constante, il suffit pour voir que $E(1) \geq E(0)$ de montrer que $\frac{d^2 E_r}{dt^2} \geq -Cr$ pour tout $r > 0$, pour une certaine constante $C \geq 0$. Or, on a vu que si h est la métrique de référence telle que $r^h \leq 0$,

$$\begin{aligned}\frac{d^2E_r}{dt^2} &= 2\int_M |\mathcal{D}_{\varphi_t^{(r)}}\varphi_t^{(r)\prime}|^2_{\varphi_t^{(r)}} v_{\varphi_t^{(r)}} - \int_M s_{\varphi_t^{(r)}}(\varphi_t^{(r)\prime\prime} - |d\varphi_t^{(r)\prime}|^2_{\varphi_t^{(r)}})v_{\varphi_t^{(r)}} + rs_\Omega \int_M v_h \\ &= \int_M |\mathcal{D}_{\varphi_t^{(r)}}\varphi_t^{(r)\prime}|^2_{\varphi_t^{(r)}} v_{\varphi_t^{(r)}} + \int_M \left[|d\ln(u_r)|^2_r - \mathrm{tr}_r(r_h)\right] rv_h + rs_\Omega \int_M v_h \\ &\geq -2rC\end{aligned}$$

avec $C \geq 0$, puisque s_Ω et $\mathrm{tr}_r(r_h)$ sont ≤ 0. Ainsi, comme $\frac{dE_r}{dt}(0) = 0$, puisqu'on part d'une métrique à courbure scalaire constante, $\frac{dE_r}{dt}(t) \geq -2rCt$, et donc $E_r(t) - E_r(0) \geq -rCt^2$, d'où $E(1) - E(0) = E_r(1) - E_r(0) \geq -rC$ pour tout $r > 0$. Il ne reste plus qu'à faire tendre r vers 0, et le tour est joué. $\square$

Remarque 5.13 *En fait, dans cette démonstration, le signe de s_Ω importe peu ; ce qui est crucial ici, c'est que $\mathrm{tr}_r(r^h)$ soit négatif pour avoir l'inégalité à laquelle on parvient avant de conclure. En effet, g_r n'est a priori pas d'inverse borné par rapport à h, et donc on ne pourrait plus majorer uniformément $\mathrm{tr}_r(r^h)$ si ce terme était de signe quelconque, ce qui justifie qu'on se restreigne à $C_1 \leq 0$ pour cette section.*

A Le point de vue symplectique : formalisme de l'application moment

Nous suivons ici les sections 1.2 et 1.3 de [Biq], qui offrent un aperçu tout à fait synthétique du sujet, [Do-Kr] constituant du reste la référence la plus complète sur ce point.

A.1 Application moment

Action hamiltonienne

Soit (M, ω) une variété symplectique sur laquelle agit un groupe de Lie G (connexe, compact), d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$, de manière symplectique, c'est-à-dire :

$$\gamma^*\omega = \omega \quad \forall \gamma \in G.$$

Notant $\hat{a}$ le champ de vecteurs sur M canoniquement associé à $a \in \mathfrak{g}$ (action infinitésimale, $\hat{a}(x) = \frac{d}{dt}|_{t=0} \exp(ta)(x)$, on parle d'action hamiltonnienne si :

— tout champ est hamiltonien, *i.e.* $\hat{a} \lrcorner \omega = -d\mu^a$

— il existe une application $\mu : M \to \mathfrak{g}^*$ équivariante pour l'action de G, Une telle fonction μ, unique à l'addition près d'un élément de $(\mathfrak{g}^*)^G$, est appelée *application moment.*

Notons que si la forme symplectique provient de la courbure d'un fibré en droites complexes L, soit $\omega = iF_L \in 2\pi C_1(L)$, le choix d'une telle application moment nous autorise à faire agir G sur L, en écrivant

$$\hat{a}_L = \tilde{a} + \langle \mu(x), a \rangle \frac{d}{d\theta}$$

où $\tilde{a}$ est le remonté horizontal de $\hat{a}$ sur L *via* une connexion de courbure $-i\omega$.

Réduction de Mardsen-Weinstein

Soit ζ, $Ad^*_\gamma \zeta = 0$ pour tout γ, où Ad^* dénote l'action coadjointe $\langle Ad^*_\gamma \zeta, a \rangle = \langle \zeta, Ad_{\gamma^{-1}} a \rangle$.

ζ est appelée valeur régulière de μ si pour tout x de $\mu^{-1}(\zeta)$, $d_x\mu : T_xM \to T_{\mu(x)}\mathfrak{g}^*$ est surjective, c'est-à-dire l'algèbre d'isotropie de x est nulle. $\mu^{-1}(\zeta)$ est G-invariante, et l'action de G sur $\mu^{-1}(\zeta)$ est localement libre. On note $\hat{M}$ le *quotient symplectique* $\mu^{-1}(\zeta)/G$, et si $\hat{\omega}$ est induite par ω sur $\hat{M}$, alors $(\hat{M}, \hat{\omega})$ est symplectique. On a donc le diagramme :

$$\begin{tikzcd} (M,\omega) & \mu^{-1}(\zeta) \arrow[l, hook', "i"'] \arrow[d, "\pi"] \\ & \mu^{-1}(\zeta)/G \end{tikzcd}$$

avec $i^*\omega = \pi^*\hat{\omega}$.

Si de plus $\hat{J}$ est la structure presque-complexe induite sur $\hat{M}$ par une structure presque-complexe J (G-invariante ω, pas nécessairement intégrable, mais compatible à ω au sens où $\omega(\cdot, J\cdot)$ est une métrique riemennienne) sur M, on a de plus $(\hat{M}, \hat{J}) \cong (M^{ss}, J)/G^{\mathbb{C}}$ (avec $G^{\mathbb{C}}$ le complexifié du groupe de Lie compact G et M^{ss} l'ensemble des points semi-stables sous l'action de G, points dont l'orbite sous l'action de $G^{\mathbb{C}}$ est fermée).

Cas kählérien

Dans le même cadre que ci-dessus, on suppose de plus que M est munie d'une structure kählérienne (g, J, ω) préservée par l'action de G (*i.e.* on suppose en plus J intégrable par rapport au paragraphe précédent). Alors g « descend » elle aussi sur $\hat{M}$, et fait de $(\hat{M}, \hat{g}, \hat{J}, \hat{\omega})$ une variété kählérienne.

L'action de G sur L elle aussi se complexifie, de sorte que les $G^{\mathbb{C}}$-orbites dans L se projettent sur des $G^{\mathbb{C}}$-orbites dans M. Si alors Z est la fonction sur L G-invariante $z \mapsto -\log|z|^2$, on obtient un potentiel pour $\pi^*\omega$ (avec π la projection $L - \{\text{section nulle}\} \to M$), *i.e.* $\frac{1}{2}dd^cZ = \pi^*\omega$.

Par ailleurs, on montre que si $p \in L$ est au-dessus de $x \in M$, et si $a \in \mathfrak{g}$, on a :

$$\frac{d}{dt} Z(e^{ita}p) = \langle \mu(e^{ita}x), a \rangle$$

et

$$\frac{d^2}{dt^2} Z(e^{ita}p) = |\hat{a}(e^{ita}x)|^2.$$

Les points critiques de Z sont donc les zéros de μ, et Z est convexe, ou plutôt la tirée-en-arrière de Z sur $G^{\mathbb{C}}/G$ est convexe le long des géodésiques de cet espace symétrique, qui sont données par l'action infinitésimale de $i\mathfrak{g}$.

Finalement, on en déduit le résultat général d'unicité de cette théorie : dans M, une $G^{\mathbb{C}}$-orbite rencontre $\mu^{-1}(\zeta)$ en au plus un point, point dont l'existence s'énonce : il existe $\gamma \in G^{\mathbb{C}}$ tel que $\mu(\gamma x) = \zeta$, condition équivalente premièrement à la propreté de la fonctionnelle Z relative à x, et deuxièmement au fait que $G^{\mathbb{C}}p$ soit fermée, avec G_x (le groupe d'isotropie) fini. Notons que cette dernière condition est appelée condition de *stabilité* dans le cadre de la théorie géométrique des invariants.

A.2 La courbure scalaire comme application moment

Pour exprimer notre problème en termes d'application moment, on change de point de vue ; en effet, dans tout notre travail, nous avions fixé la structure complexe, et nous analysions l'espace des métriques de Kähler dans une classe donnée. On peut aussi, une fois choisi la structure kählérienne de base (g, J, ω), fixer ω et faire varier J dans l'espace $\mathcal{J}$ des structures presque-complexes compatibles à ω, *i.e.* telles que $\omega(J\cdot, J\cdot) = \omega$ et $\omega(\cdot, J\cdot)$ est une métrique riemannienne.

$\mathcal{J}$ est en fait formellement une variété kählérienne de dimension infinie, sur laquelle agit le groupe G des symplectomorphismes de M, en préservant cette structure kählérienne.

De plus, l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ de G se voit comme l'espace $C^\infty_\omega(M)$ des fonctions d'intégrale nulle pour la forme volume associée à ω, *via* l'isomorphisme $f \leftrightarrow X_f = \sharp_\omega df$. En outre, on peut aussi définir une courbure scalaire relative à une structure presque-complexe sans que celle-ci soit intégrable ; l'opérateur $\bar{\partial}$ s'étend en une connexion de Chern sue $\Omega^{0,1}M$, donc sur le fibré anticanonique K_M, et donne une courbure $i\rho_J$; on pose ensuite $s_J = 2\Lambda\rho_J$.

On a donc un élément de $\mathfrak{g}^*$ définie par $f \mapsto \int_M s_J f v_\omega$, que l'on note encore s_j, et donc en ce sens une application $\mathcal{J} \to \mathfrak{g}^*$ définie par $J \mapsto s_J$. Le lien avec le début de cet appendice est donné par le

Théorème A.1 (Donaldson) *L'application $J \mapsto \frac{1}{4}s_J$ est une application moment pour l'action des symplectomorphismes sur $\mathcal{J}$. En particulier, le lieu d'an-*

nulation de l'application moment est exactement l'espace des structures presque-complexes à courbure scalaire constante.

Démonstration. [Biq], p. 9.□

Par ailleurs, bien que le groupe des symplectomorphismes, qui n'est pas compact, n'admette pas de complexification, on peut commplexifier l'action infinitésimale de $\mathfrak{g}$ puisque $\mathcal{J}$ est complexe ; if agira donc sur J par $J\mathcal{L}_{X_f}J$. Les $\mathcal{L}_{X_f}J$ et les $J\mathcal{L}_{X_f}J$ engendrent alors une distribution involutive, dont les feuilles maximales jouent le rôle de l'orbite sous l'action du groupe complexifié, dont on peut donc se passer si seules nous intéressent ces orbites.

De plus, si J est intégrable, l'annulation du tenseur de Nijenhuis donne $J\mathcal{L}_{X_f}J = \mathcal{L}_{JX_f}J$ (en fait, elle est équivalente à $J\mathcal{L}_X J = \mathcal{L}_{JX}J$ pour tout vecteur X), donc l'action complexifiée infinitésimale est une action infinitésimale par difféomorphismes sur J. Il est alors équivalent de faire agir les difféomorphismes sur ω (par $-\mathcal{L}_{JX_f} = -dd^c f$), et de fixer J. Plus précisément, il y a un difféomorphisme naturel entre $\mathcal{J}$ modulo les symplectomorphismes relatifs à la forme de Kähler d'origine (ou plutôt à la composante connexe de l'identité dans ce groupe), et $\mathcal{M}_\Omega$ modulo les transformations holomorphes relatives à la structure complexe de départ. En particulier, si d'un côté on a une courbure scalaire constante, on récupère automatiquement une courbure scalaire constante de l'autre. Et il apparaît que le rôle de l'espace symétrique $G^{\mathbb{C}}/G$ est joué par $\mathcal{M}_\Omega$, où $\Omega = [\omega]_{dR}$.

La K-énergie joue alors le rôle de la fonctionnelle Z, et la théorie de l'application moment prévoit donc que *si $\mathcal{M}_\Omega$ est géodésiquement convexe*, les métriques à courbure scalaire constante réalisent le minimum global de la K-énergie, et que celle-ci est convexe le long des géodésiques de $\mathcal{M}_\Omega$. On pourra consulter [Don2] pour plus détails à ce sujet.

Cette analogie a donc donné en un mot de bonnes raisons de formuler la conjecture de l'unicité des métriques à courbure scalaire constante à l'action près des transformations holomorphes, ainsi que la conjecture portant sur l'existence de ces métriques, formulée ainsi : il existe une métrique à courbure scalaire constante si et seulement s'il y a K-stabilité, au sujet de laquelle nous renvoyons à [Yau1]. Cette conjecture à d'ailleurs récemment été démontrée dans le cas des surfaces toriques, voir [Don3]

Notons cependant que c'est en revenant au pur point de vue des géodésiques et de l'équation de Monge-Ampère, en particulier dans l'article [Che] que nous étudions dans ce travail, que Chen est parvenu à mettre en œuvre les intuitions données par le formalisme hamiltonien pour aboutir au résultat d'unicité escompté, au prix peut-être de quelque raffinement analytique.

Références

[Am-Ma] E. Amar, E. Matheron, *Analyse complexe*, Cassini, 2004.

[Bes] A. L. Besse, *Einstein Manifolds*, Ergenbisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, vol. 10, Springer-Verlag, Berlin, 1987.

[Be-Ta] E. D. Bedford, T. A. Taylor, *The Dirichlet problem for the complex Monge-Ampère operator*, Invent. Math. 37 (1976) 1-44.

[Biq] O. Biquard, *Métriques kählériennes à courbure scalaire constante : unicité, stabilité*. Séminaire Bourbaki, Vol. 2004/2005 Astérisque No. 307 (2006), Exp. no. 938, vii, 1-31.

[Che] X. X. Chen, *The Space of Kähler Metrics*, J. Differential Gometry 56 (2000), no. 2, p. 189-234.

[Ch-Ti] X. X. Chen, G. Tian, *Geometry of Kähler Metrics and Foliations by Holomorphic Discs*, arXiv : math.DG/0507148 v1.

[Dem] J. P. Demailly, *Complex Analytic and Differential Geometry*, disponible sur la page web de l'auteur.

[Don1] S. K. Donaldson, *Scalar curvature and projective embeddings. I*, J. Differential Geom. 59 (2001), no.3, p 479-522.

[Don2] S. K. Donaldson, *Symmetric spaces, Kähler geometry and Hamiltonian dynamics*, Northern California symplectic geometry seminar, Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2, vol. 196, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1999, p. 13-33.

[Don3] S. K. Donaldson, *Scalar curvature and stability of toric varieties*, J. Differential Geom. 62 (2002), no.2, p 289-349.

[Do-Kr] S. K. Donaldson, P. B. Kronheimer, *The Geometry of four-Manifolds*, Oxford Mathematical Monographs, The Clarendon Press, New York, 1990, Oxford Science Publications.

[Gau] P. Gauduchon, *Calabi's extremal metrics : an elementary introduction*, notes de cours.

[Joy] D. Joyce, *Compact Manifolds with Special Holonomy*, Oxford Mathematical Monographs, Oxford University Press, 2000.

[Mab1] T. Mabuchi, *K-energy map integrating Futaki invariants*, Tohoku Math. J. (2) 38 (1986), no.4, p 575-593.

[Mab2] T. Mabuchi, *Some symplectic geometry on compact Kähler manifolds. I*, Osaka J. Math. 24 (1987), no.2, p 227-252.

[Mab3] T. Mabuchi, *Stability of extremal Kähler metrics*, Osaka J. Math. 41 (2004), no.3.

[Moh] O. Mohsen, *Symplectomorphismes hamiltoniens et métriques kählériennes*, 22 mai 2003, mémoire de DEA, Univ. Paris 7.

[Ph-St] D. H. Phong, J. Sturm, *The Monge-Ampère operator and geodesics in the space of Kähler potentials*, arXiv :math.DG/0504157

[Sem] S. Semmes, *Complex Monge-Ampère and symplectic manifolds*, Amer. J. Math., 114 (1992), no. 3, p. 495-550.

[Yau1] S. T. Yau, *On the Ricci curvature of a compact Kähler manifold and the complex Monge-Ampère equation*, I^*, Comm. Pre Appl. Math. 31 (1978) 339-441.

[Yau2] S. T. Yau, *Open problem in geometry*,Differential geometry : partial differential equations on manifolds (Los Angeles, CA, 1990), Proc. Sympos. Pure Math., vol. 54, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1993, p. 1-28.

Table des matières