

Espaces fibrés et classes caractéristiques

Omar Bakkacha

École polytechnique 2020



Je tiens à remercier Monsieur Hugues Auvray mon tuteur de stage ainsi que Monsieur Sébastien Boucksom mon référent de stage, sans qui ce mémoire n'aurait jamais vu le jour. Leurs diverses remarques, exemples et contre-exemples ont été d'une grande aide pour moi et m'ont permis de développer l'intuition et la compréhension nécessaire pour évoluer dans un tel sujet.

Table des matières

1	Introduction	4
2	Cohomologie de De Rham	5
2.1	Formes différentielles	5
2.2	Principe de Mayer-Vietoris	8
2.3	Les lemmes de Poincaré	10
2.3.1	Le lemme de Poincaré pour la cohomologie de De Rham .	10
2.3.2	Le lemme de Poincaré pour la cohomologie à support compact	13
2.4	L'argument de Mayer-Vietoris	15
2.4.1	Bon recouvrement	15
2.4.2	Dualité de Poincaré et formule de Künneth	16
2.5	Complexe de Cech-De Rham	20
3	Espaces Fibrés	26
3.1	Généralités	26
3.2	Fibrés vectoriels	29
3.3	Fibré en sphère	34
3.4	Fibré vectoriel orienté de rang 2	36
4	Classes caractéristiques	37
4.1	Classe de Thom	37
4.2	Classe d'Euler	42
4.2.1	Construction et propriétés	42
4.2.2	Cas du fibré vectoriel de rang 2	47
4.3	Classe de Chern	48
4.3.1	Construction et propriétés	48
4.3.2	Axiomatisation	53
5	Théorie des faisceaux	55
5.1	Définitions	55
5.2	Cohomologie des Faisceaux	58
5.3	Classification des fibré en droite complexe	62

1 Introduction

Le but de ce mémoire est de présenter la théorie des fibrés vectoriels du point de vue des classes caractéristiques de cohomologie. Nous nous intéresserons notamment aux classes de Thom, d'Euler et de Chern en étudiant les différentes relations entre ces classes et leur application dans la classification de certains fibrés vectoriels. Il est important de souligner que ces classes caractéristiques ont également une application dans le calcul du nombre de zéros d'une section lisse d'un fibré vectoriel. Ce point de vue ne sera pas adopté dans le présent exposé. La construction et les propriétés des différentes classes caractéristiques seront faites dans le cadre de la cohomologie de De Rham et de Čech. Ces deux théories cohomologiques seront exposées dans la première partie. Nous passerons ensuite à la présentation des fibrés vectoriels et des classes caractéristiques, et enfin à la théorie des faisceaux qui nous permettra de nous intéresser à la cohomologie des faisceaux, à la cohomologie à valeurs dans \mathbb{Z} ainsi qu'à la suite exacte exponentielle.

Fixons quelques notations une fois pour toutes, M désignera une variété lisse sans bord paracompact connexe de dimension finie, les termes "variété" ou "variété lisse" désigneront toujours un tel objet. E désignera un fibré vectoriel de rang fini constant sur M .

On notera ($H^*(M)$ ou encore $H_{DR}^*(M)$) la cohomologie de De Rham de M , $H^*(M, \mathbb{R})$ la cohomologie de Čech (ou cohomologie du faisceau constant \mathbb{R} sur M) et plus généralement $H^*(M, \mathfrak{S})$ la cohomologie d'un faisceau \mathfrak{S} sur M .

Un des résultats principaux du présent mémoire sera l'isomorphisme entre les classes d'isomorphismes de fibrés en droites complexes sur M et le groupe de cohomologie $H^2(M, \mathbb{Z})$.

2 Cohomologie de De Rham

Nous présentons dans cette section la cohomologie de De Rham d'une variété M ainsi que les principaux théorèmes liés à cette théorie cohomologique. Les faits non démontrés dans cet exposé pourront trouver leurs démonstrations dans les écrits de Bott Tu [1] et Nicolaescu [5]

2.1 Formes différentielles

Soit M une variété lisse de dimension n et soit $\{U_\alpha, \phi_\alpha\}$ un atlas sur M , sur un U_α on peut écrire ϕ_α sous forme de coordonnées locales :

$$\begin{aligned} \phi_\alpha : U_\alpha &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ p &\mapsto (x_1(p), \dots, x_n(p)) \end{aligned}$$

Étant donné un point $p \in U_\alpha$ on peut considérer la différentielle de chacune des coordonnées locales au point p ce qui nous fournit une famille de formes linéaires d_px_i sur l'espace tangent T_pU_α à U_α en p , les formes $d_px_i \in T_pU_\alpha^*$ fournissent alors une base de l'espace vectoriel $T_pU_\alpha^*$. Nous pouvons donc définir au dessus de chaque $p \in U_\alpha$ l'algèbre extérieure $\bigwedge T_pU_\alpha^* = \bigoplus_{q=0}^n \bigwedge^q T_pU_\alpha^*$ engendré par

$$1, d_px_i, d_px_i \wedge d_px_j, d_px_i \wedge d_px_j \wedge d_px_k, \dots \\ \text{pour } i < j, \quad i < j < k, \dots$$

On peut alors considérer les applications différentielles en tout point $dx_i : U_\alpha \rightarrow TU_\alpha^*$ données par $p \mapsto d_px_i$ ou TU_α^* désigne le fibré cotangent restreint à U_α , ainsi les dx_i et leurs produits extérieurs forment une famille de sections local du fibré $\bigwedge TU_\alpha^* = \bigoplus_{q=0}^n \bigwedge^q TU_\alpha^*$ qui évaluées en $p \in U_\alpha$ fournissent une base de l'algèbre extérieure au dessus de p . On note $\Gamma(\bigwedge TU_\alpha^*)$ l'espace des sections lisses de $\bigwedge TU_\alpha^*$. Soit alors $\omega \in \Gamma(\bigwedge TU_\alpha^*)$ une section lisse locale, évaluez ω en un point p reviez à l'écrire dans la base des d_px_i ainsi $\omega(p)$ serait de la forme

$$\sum_{q \geq 0} \sum_{i_1, \dots, i_q} f_{i_1, \dots, i_q}(p) d_px_{i_1} \wedge \dots \wedge d_px_{i_q}$$

ou les f_{i_1, \dots, i_q} sont des fonctions lisses sur U_α , ainsi l'espace des sections $\Gamma(\bigwedge TU_\alpha^*)$ peut être vue comme un module pour l'addition sur l'anneau $C^\infty(U_\alpha, \mathbb{R})$ des fonction lisse, ce module est de plus muni d'une structure d'algèbre pour le produit extérieure. On obtient la définition suivante

Définition 2.1. Soit $U \subset M$ un ouvert, on appelle forme différentielle locale sur U une section lisse locale du fibré $\bigwedge TU^*$.

On appelle forme différentielle globales sur M une section lisse globale du fibré $\bigwedge TM^*$.

De manière équivalente on peut dire qu'une forme globale est la donnée d'une famille d'élément $\omega_\alpha \in \Gamma(\bigwedge TU_\alpha^*)$ tel que $(\omega_\alpha)|_{U_\alpha \cap U_\beta} = (\omega_\beta)|_{U_\alpha \cap U_\beta}$.

On note alors l'espace des formes globales de degré q (ou q -formes) par $\Omega^q(M)$ ainsi on a $\Omega^0(M) = C^\infty(M, \mathbb{R})$, on note alors

$$\Omega^*(M) = \bigoplus_{q=0}^n \Omega^q(M).$$

qui forme une \mathbb{R} -algèbre gradué pour le produit extérieur.
On défini également la notion de forme à support compact

Définition 2.2. On appelle forme différentielle à support compact sur M une forme différentielle ω sur M tel que $Supp(\omega) = \{p \in M \mid \omega(p) \neq 0\}$ soit compact dans M .

On note alors l'espace des formes à support compact de degré q par $\Omega_c^q(M)$ ainsi on a $\Omega_c^0(M) = C_c^\infty(M, \mathbb{R})$, on note enfin

$$\Omega_c^*(M) = \bigoplus_{q=0}^n \Omega_c^q(M).$$

Soit $f : M \rightarrow N$ une application lisse entre variété, on peut définir un morphisme f^* de \mathbb{R} -algèbre (le tiré en arrière de f)

$$\begin{array}{ccc} f^* & : & \Omega^*(N) \rightarrow \Omega^*(M) \\ & & \omega \mapsto \omega \circ f \end{array}$$

Ainsi on peut voir Ω^* comme un foncteur contravariant de la catégorie des variété lisse et fonctions lisses qu'on note **Var** vers la catégorie de \mathbb{R} -algèbre et morphisme de \mathbb{R} -algèbre qu'on note $\mathbb{R} - \mathbf{Alg}$

$$\begin{array}{ccc} \Omega^*(-) : & \mathbf{Var} & \longrightarrow & \mathbb{R} - \mathbf{Alg} \\ & M & \longmapsto & \Omega^*(M) \\ & Hom_{\mathbf{Var}}(M, N) & \longmapsto & Hom_{\mathbb{R} - \mathbf{Alg}}(\Omega^*(N), \Omega^*(M)) \\ & f & \mapsto & f^* \end{array}$$

Un second point de vue consiste à considérer la catégorie \mathbf{O}_M (pour M une variété lisse) des ouverts de M dont les morphisme sont les inclusions d'ouverts $\iota : U \rightarrow V$ vers la catégorie $\mathbb{R} - \mathbf{Alg}$, alors Ω^* peut être vu comme un foncteur entre ces deux catégories.

$$\begin{array}{ccc} \Omega^*(-) : & \mathbf{O}_M & \longrightarrow & \mathbb{R} - \mathbf{Alg} \\ & U & \longmapsto & \Omega^*(U) \\ & Hom_{\mathbf{O}_M}(U, V) & \longmapsto & Hom_{\mathbb{R} - \mathbf{Alg}}(\Omega^*(V), \Omega^*(U)) \\ & \iota & \mapsto & r_U^V \end{array}$$

ou r_U^V désigne la restriction à U d'une forme défini sur V , les morphismes de restrictions jouissent d'une propriété supplémentaire, pour $W \subset U \subset V$ trois ouverts on a

$$\begin{array}{l} r_U^V \circ r_W^U = r_W^V \\ r_U^U = id \end{array}$$

Un tel foncteur s'appelle un pré-faisceau la théorie des faisceaux sera développée plus en détails dans la suite.

Considérons maintenant une fonction lisse $f : U_\alpha \rightarrow \mathbb{R}$ on peut alors regarder la différentielle $d_p f$ de f en $p \in U_\alpha$ comme un élément de $T_p U_\alpha^*$, cet élément doit donc s'écrire comme combinaison linéaire des $d_p x_i$, pour cela remarquons d'abords :

$$d_p f = d_p (f \circ \phi_\alpha^{-1} \circ \phi_\alpha) = d_{\phi_\alpha(p)} (f \circ \phi_\alpha^{-1}) \circ d_p \phi_\alpha$$

ou on peut voir $d_p \phi_\alpha$ comme le vecteur $(1, \dots, 1)$ dans $T_p U_\alpha^*$ écrit dans la base des $d_p x_i$. On définit alors les composantes de $d_p f$ selon cette base comme des dérivées partielles par rapport aux coordonnées locales on a alors :

$$d_p f = \sum_i \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)_p d_p x_i = \sum_i \left(\frac{\partial (f \circ \phi_\alpha^{-1})}{\partial x_i} \right)_{\phi_\alpha(p)} d_p x_i$$

On peut donc définir l'application :

$$\begin{aligned} df & : U_\alpha \rightarrow TU_\alpha^* \\ p & \mapsto d_p f \end{aligned}$$

et on notera :

$$df = \sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i$$

On a ainsi défini un morphisme $d : \Omega^0(U_\alpha) \rightarrow \Omega^1(U_\alpha)$, ce morphisme peut se généraliser aux formes globales et à tout degré pour donner ce qu'on appelle *Le morphisme de différentiation extérieur* défini par

$$\begin{aligned} d : \Omega^q(M) & \longrightarrow \Omega^{q+1}(M) \\ \omega = \sum_{i_1, \dots, i_q} f_{i_1, \dots, i_q} dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_q} & \longmapsto d\omega = \sum_i \sum_{i_1, \dots, i_q} \frac{\partial f_{i_1, \dots, i_q}}{\partial x_i} dx_i \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_q} \end{aligned}$$

On peut alors montrer par un calcul que ce morphisme jouit des propriétés suivantes

1. $d \circ d = 0$
2. $d(\omega \wedge \tau) = (d\omega) \wedge \tau + (-1)^{\deg \omega} \omega \wedge d\tau$
3. $df^* \omega = f^* d\omega$

Grâce à la propriété 1, $(\Omega^*(M), d)$ forme ce qu'on appelle un complexe différentiel i.e. une suite de morphismes sur une algèbre gradué

$$0 \rightarrow \Omega^0(M) \xrightarrow{d} \Omega^1(M) \xrightarrow{d} \Omega^2(M) \rightarrow \dots$$

tel que $\text{Im}(d) \subset \text{Ker}(d)$, on appelle *q-formes fermées* les éléments de $\text{ker}(d) \cap \Omega^q(M)$ et *q-formes exactes* les éléments de $\text{Im}(d) \cap \Omega^q(M)$, on définit alors les groupes de cohomologie de De Rham par

$$H^q(M) = \frac{\{q\text{-formes fermées}\}}{\{q\text{-formes exactes}\}}$$

On note alors

$$H^*(M) = \bigoplus_{q=0}^n H^q(M)$$

Qui forme une \mathbb{R} -algèbre gradués pour le produit extérieur.

On définit de la même manière la cohomologie à support compact en remplaçant "formes" par "formes à support compact" on note alors la \mathbb{R} -algèbre graduée de cohomologie à support compact

$$H_c^*(M) = \bigoplus_{q=0}^n H_c^q(M)$$

2.2 Principe de Mayer-Vietoris

Nous démontrons dans ce qui suit, le théorème de la suite de Mayer-Vietoris pour la cohomologie de De Rham et la cohomologie à support compact, ce théorème ainsi que le lemme de Poincaré forment un duo imbattable pour le calcul de plusieurs groupe de cohomologie.

Commençons par le cas de la cohomologie de De Rham. Soit M une variété lisse, supposons qu'il existe deux ouvert U et V tel que $M = U \cup V$ on obtient alors la suite d'inclusion suivante,

$$U \cap V \xrightarrow[\partial_V]{\partial_U} U \amalg V \xrightarrow{\iota} M$$

ou ∂_V , ∂_U et ι sont les inclusions naturelles en appliquant le foncteur Ω^* on obtient la suite de restrictions suivante :

$$\Omega^*(M) \longrightarrow \Omega^*(U) \oplus \Omega^*(V) \xrightarrow[\partial_V^*]{\partial_U^*} \Omega^*(U \cap V)$$

de cette suite nous pouvons construire la suite suivante :

$$0 \rightarrow \Omega^*(M) \xrightarrow{r} \Omega^*(U) \oplus \Omega^*(V) \xrightarrow{\delta} \Omega^*(U \cap V) \rightarrow 0$$

avec $r : \omega \mapsto (\omega|_U, \omega|_V)$ et $\delta : (\omega, \tau) \mapsto \tau|_{U \cap V} - \omega|_{U \cap V}$ (qui commute à d).

Théorème 2.1 (Suite de Mayer Vietoris).

(1) la suite ci dessus est exact

(2) Cette suite induit une suite exact longue :

$$\dots \rightarrow H^q(M) \xrightarrow{r} H^q(U) \oplus H^q(V) \xrightarrow{\delta} H^q(U \cap V) \xrightarrow{d^*} H^{q+1}(M) \rightarrow \dots$$

Démonstration. (1) Il est clair que r est injective, de plus si $(\omega, \tau) \in \text{Im}(r)$ alors ω et τ coïncident sur $U \cap V$, et si $\phi \in \Omega^q(U) \oplus \Omega^q(V)$ tel $\delta\phi = 0$ alors ϕ est la restriction à U et V d'une forme globale sur M car elle se recolle sur l'intersection $U \cap V$, Enfin pour la surjectivité de δ on considère ω une forme

dans $\Omega^q(U \cap V)$ et une partition de l'unité $\{\rho_U, \rho_V\}$ subordonnée à $\{U, V\}$ on prend alors la forme $(-\rho_V\omega, \rho_U\omega) \in \Omega^q(U) \oplus \Omega^q(V)$ dont l'image par δ est ω .

(2) D'après ce qui précède on a bien que $Im(r) = Ker(\delta)$ en passant au classe de cohomologie, il reste donc à définir d^* . Pour ce faire on considère le diagramme commutatif suivant dont les ligne sont exactes.

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & \Omega^q(M) & \longrightarrow & \Omega^q(U) \oplus \Omega^q(V) & \longrightarrow & \Omega^q(U \cap V) & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow d & & \downarrow d & & \downarrow d & & \\ 0 & \longrightarrow & \Omega^{q+1}(M) & \longrightarrow & \Omega^{q+1}(U) \oplus \Omega^{q+1}(V) & \longrightarrow & \Omega^{q+1}(U \cap V) & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

A présent soit $\omega \in \Omega^q(U \cap V)$ une forme fermé, par l'exactitude des lignes il existe une forme $\xi = (-\rho_V\omega, \rho_U\omega)$ dont l'image par δ est ω par commutativité du diagramme on a $\delta d\xi = d\delta\xi = d\omega = 0$ et $d\xi$ est l'image par r d'un élément de $\Omega^{q+1}(M)$ qui est fermé, on peut donc prendre :

$$d^*[\omega] = \begin{cases} [-d\rho_V\omega] & \text{sur } U \\ [d\rho_U\omega] & \text{sur } V \end{cases}$$

De plus la construction de $d^*[\omega]$ est (modulo une forme exacte) indépendante de la partition de l'unité choisie et elle est à support dans $U \cap V$

□

Passons à présent au cas de la cohomologie à support compact. Toujours sur une variété lisse M , soit $j : U \rightarrow M$ l'inclusion canonique d'un ouvert dans M alors l'application $j_* : \Omega_c^*(U) \rightarrow \Omega_c^*(M)$ est l'application qui étends par zéro une forme à support compact dans U .

en considérons la suite d'inclusion d'ouverts comme précédemment, on obtient la suite suivante :

$$0 \leftarrow \Omega_c^*(M) \xleftarrow{\sigma} \Omega_c^*(U) \oplus \Omega^*(V) \xleftarrow{s} \Omega_c^*(U \cap V) \leftarrow 0$$

avec $s : \omega \mapsto (-\partial_{U^*}\omega, \partial_{V^*}\omega)$ et $\sigma : (\omega, \tau) \mapsto \iota_*\omega + \iota_*\tau$, ces applications commutent à d . On déduite alors le théorème suivant

Théorème 2.2 (Suite de Mayer-Vietoris à support compact).

(1) la suite ci dessus est exact

(2) Cette suite induit une suite exact longue :

$$\dots \leftarrow H_c^q(M) \xleftarrow{\sigma} H_c^q(U) \oplus H_c^q(V) \xleftarrow{s} H_c^q(U \cap V) \xleftarrow{d_*} H_c^{q-1}(M) \leftarrow \dots$$

Démonstration. (1) Tout d'abord il est claire que s est injective, considérons $\omega \in \Omega_c^*(M)$, et soit $\{\rho_U, \rho_V\}$ une partition de l'unité subordonnée à U, V , alors $(\rho_U\omega, \rho_V\omega) \in \Omega_c^*(U) \oplus \Omega^*(V)$ puisque $Supp(\rho_U\omega) \subset Supp(\rho_U) \cap Supp(\omega)$ et $\omega = \sigma(\rho_U\omega, \rho_V\omega)$ ce qui conclut de la surjectivité de σ .

(2) D'après ce qui précède on a bien que $Im(s) = Ker(\sigma)$ en passant au classes de cohomologie, il reste donc à définir d_* . Pour cela on peut considérer le diagramme commutatif comme dans la preuve du cas de De Rham, avec les flèches horizontales inversées. On défini alors $d_*[\tau]$ pour $[\tau] \in H_c^{q-1}(M)$ comme la forme fermé tel que,

$$(-\partial_{U^*}(d_*[\tau]), \partial_{V^*}(d_*[\tau])) = ([d\rho_U\tau], [d\rho_V\tau])$$

On a alors clairement que $Im(d_*) = Ker(s)$ ce qui conclut de l'exactitude de notre suite. \square

2.3 Les lemmes de Poincaré

Nous allons, dans cette section, calculer la cohomologie et la cohomologie à support compact de \mathbb{R}^n , un résultat fondateur pour la théorie homologique des variétés et qui sera utile tout au long de ce traité.

2.3.1 Le lemme de Poincaré pour la cohomologie de De Rham

Soit M une variété lisse de dimension n , commençons par considérer les application $\pi : M \times \mathbb{R} \leftarrow M$ tel que $\pi(x, t) = x$ et $s : M \rightarrow M \times \mathbb{R}$ tel que $s(x) = (x, 0)$.

Ces deux applications induisent des morphisme de complexe différentiel $\pi^* : \Omega^*(M) \rightarrow \Omega^*(M \times \mathbb{R})$ et $s^* : \Omega^*(M \times \mathbb{R}) \rightarrow \Omega^*(M)$. On peut déjà remarquer que $\pi \circ s = id$ ce qui implique que $s^* \circ \pi^* = id$. La preuve du lemme de Poincaré repose principalement sur le théorème suivant.

Théorème 2.3. *L'application π^* fournis l'isomorphisme suivant :*

$$H^*(M) \xrightarrow{\sim} H^*(M \times \mathbb{R})$$

d'inverse s^* .

Démonstration. Comme $s^* \circ \pi^* = id$ il suffit de prouver que $\pi^* \circ s^* = id$ sur $H^*(M \times \mathbb{R})$. Pour cela nous allons construire un opérateur linéaire d'homotopie K tel que $id - \pi^* \circ s^* = \pm(dK \pm Kd)$, ainsi l'image d'une forme fermé par $(dK \pm Kd)$ sera exact et donc nul en passant à la cohomologie. Pour ce faire soit $\{U_\alpha, \phi_\alpha\}$ un atlas sur M on alors un atlas $\{U_\alpha \times \mathbb{R}, \phi_\alpha \times 1\}$, et soit $\omega \in \Omega^q(M \times \mathbb{R})$ une telle forme peut s'écrire comme combinaison linéaire de deux types de formes.

$$\begin{aligned} \text{(I)} & (\pi^*\phi)f(x, t) \\ \text{(II)} & (\pi^*\phi)f(x, t)dt \end{aligned}$$

ou ϕ est une q -forme globale sur M dans le cas (I) et une $q - 1$ -forme dans le cas (II), $f \in C^\infty(M \times \mathbb{R})$, et $(x, t) = (x_1, \dots, x_n, t)$ désigne les coordonnées locaux associé à un ouvert $U_\alpha \times \mathbb{R}$. On définit alors l'operater K de la manière suivante :

$$\begin{aligned} K : \quad \Omega^q(M \times \mathbb{R}) & \longrightarrow \Omega^{q-1}(M \times \mathbb{R}) \\ \text{(I)} (\pi^*\phi)f(x, t) & \mapsto 0 \\ \text{(II)} (\pi^*\phi)f(x, t)dt & \mapsto (\pi^*\phi) \int_0^t f(x, s)ds \end{aligned}$$

Vérifions alors que K est bien un opérateur d'homotopie, supposons que ω soit de type (I), on a alors d'une part

$$(id - \pi^* \circ s^*)\omega = (\pi^*\phi)f(x, t) - (\pi^*\phi)f(x, 0)$$

D'autre part,

$$\begin{aligned} (dK - Kd)\omega &= -Kd\omega = -K \left((d\pi^*\phi)f(x, t) + (-1)^q(\pi^*\phi) \left(\sum \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i + \frac{\partial f}{\partial t} dt \right) \right) \\ &= (-1)^{q-1}(\pi^*\phi) \int_0^t \frac{\partial f}{\partial s} ds = (-1)^{q-1}(\pi^*\phi)(f(x, t) - f(x, 0)) \end{aligned}$$

Ainsi

$$(id - \pi^* \circ s^*)\omega = (-1)^{q-1}(dK - Kd)\omega$$

Supposons à présent que ω soit de type (II), on a d'une part,

$$(id - \pi^* \circ s^*)\omega = \omega \text{ puisque } s^*dt = d(s^*t) = 0$$

D'autre part, on a

$$\begin{aligned} Kd\omega &= K \left((d\pi^*\phi)f dt + (-1)^{q-1}(\pi^*\phi) \sum \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i dt \right) \\ &= (\pi^*d\phi) \int_0^t f ds + (-1)^{q-1}(\pi^*\phi) \int_0^t \left(\sum \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i \right) ds \end{aligned}$$

De plus,

$$dK\omega = (\pi^*d\phi) \int_0^t f ds + (-1)^{q-1}(\pi^*\phi) \left(\int_0^t \left(\sum \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i \right) ds + f dt \right)$$

Ainsi

$$(id - \pi^* \circ s^*)\omega = (-1)^{q-1}(dK - Kd)\omega$$

ceci prouve que

$$(id - \pi^* \circ s^*) = (-1)^{q-1}(dK - Kd) \text{ sur } \Omega^q(M \times \mathbb{R})$$

et conclue la démonstration. \square

A partir du résultat précédent on aboutit au lemme de Poincaré en procédant par récurrence dans le cas $M = \mathbb{R}^n$

Corollaire 2.3.1 (Lemme de Poincaré).

$$H^*(\mathbb{R}^n) = H^*({*}) = \begin{cases} \mathbb{R} & \text{en dimension } 0 \\ 0 & \text{autre part} \end{cases}$$

Corollaire 2.3.2. *Deux applications homotope induisent la même applications en passant à la cohomologie.*

Démonstration. En effet soit f et g deux applications homotope d'une variété M vers une autre variété N , on a alors une application $F : M \times \mathbb{R} \rightarrow N$ tel que,

$$\begin{cases} F(x, t) = f(x) & \text{pour } t \geq 1 \\ F(x, t) = g(x) & \text{pour } t \leq 0 \end{cases}$$

De plus soit s_0 et $s_1 : M \rightarrow M \times \mathbb{R}$ tel que $s_0(x) = (x, 0)$ et $s_1(x) = (x, 1)$. On a alors que

$$\begin{aligned} f &= F \circ s_1 \\ g &= F \circ s_0 \end{aligned}$$

Ainsi, puisque $s_1^* = s_0^* = (\pi^*)^{-1}$

$$f^* = s_1^* \circ F^* = s_0^* \circ F^* = g^*$$

□

Définition 2.3. Deux variété M et N sont dites de même type d'homotopie (ou homotope) au sens lisse si il existe deux applications lisse $f : M \rightarrow N$ et $g : N \rightarrow M$ tel que $f \circ g$ et $g \circ f$ sont homotopes à l'identité sur M et N respectivement.

Corollaire 2.3.3. *Deux variété homotopes au sens lisse ont la même cohomologie.*

On peut déjà grâce à ces résultats calculer la cohomologie de plusieurs variétés bien connues, dont nous énonçons les résultats sans démonstration, ces résultats seront utiles dans la suite

Exemple 2.1. On note S^n la sphère de dimension n

$$H^*(S^n) = \begin{cases} \mathbb{R} & \text{en dimension 0 et } n \\ 0 & \text{autre part} \end{cases}$$

Notons $\mathbb{C}P^n$ l'espace projectif complexe

$$H^q(\mathbb{C}P^n) = \begin{cases} \mathbb{R} & \text{pour } q \leq 2n \text{ paire} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Pour calculer cette cohomologie notons $U = \mathbb{C}P^n \setminus \mathbb{C}P^{n-1}$ ou $\mathbb{C}P^{n-1} = \{[z_0 : \dots : z_{n-1} : 0]\}$ et notons $V = \mathbb{C}P^n \setminus [0 : \dots : 0 : 1]$. Remarquons alors que $U \cup V = \mathbb{C}P^n$ de plus les éléments de U sont représentés uniquement par des éléments $(z_0, \dots, z_{n-1}, 1)$ ainsi $U \simeq \mathbb{C}^n$, d'autre on a $U \cap V \simeq \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ qui est homotope à S^{2n-1} , enfin V est homotope à $\mathbb{C}P^{n-1}$ via l'homotopie

$$\begin{aligned} H : \quad V \times [0, 1] &\longrightarrow V \\ ([z_0 : \dots : z_n], t) &\longmapsto [z_0 : \dots : z_{n-1} : tz_n] \end{aligned}$$

ainsi par le principe de Mayer-Vietoris on a que

$$\dots \rightarrow H^q(\mathbb{C}P^n) \xrightarrow{r} H^q(\mathbb{C}^n) \oplus H^q(\mathbb{C}P^{n-1}) \xrightarrow{\delta} H^q(S^{2n-1}) \xrightarrow{d^*} H^{q+1}(\mathbb{C}P^n) \rightarrow \dots$$

Notons alors que $\mathbb{C}P^1 \simeq S^2$ on connait alors la cohomologie de $\mathbb{C}P^1$.

Supposons à présent par récurrence que

$$H^q(\mathbb{C}P^{n-1}) = \begin{cases} \mathbb{R} & \text{pour } q \leq 2n-2 \text{ paire} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Notons que $H^0(\mathbb{C}P^n) = \mathbb{R}$ par connexité, on a alors que $H^q(\mathbb{C}P^n) \simeq H^q(\mathbb{C}P^{n-1})$ pour $q \leq 2n-2$ l'isomorphisme étant réalisé par r qui n'est rien d'autre j^* ou $j : \mathbb{C}P^{n-1} \rightarrow \mathbb{C}P^n$ est l'injection canonique, enfin on a $H^{2n-1}(\mathbb{C}P^n) = 0$ car $H^{2n-2}(S^{2n-1}) = 0$ et $H^{2n}(\mathbb{C}P^n) \simeq H^{2n-1}(S^{2n-1})$, on obtient ainsi le résultats voulu.

2.3.2 Le lemme de Poincaré pour la cohomologie à support compact

Considérons comme précédemment l'application $\pi : M \rightarrow M \times \mathbb{R}$ nous allons définir le morphisme de complexe $\pi_* : \Omega_c^*(M \times \mathbb{R}) \rightarrow \Omega_c^{*-1}(M)$ qu'on appelle également *intégration le long des fibres*, de la manière suivante. Soit comme précédemment un atlas $\{U_\alpha \times \mathbb{R}, \phi_\alpha \times 1\}$ sur $M \times \mathbb{R}$, et soit $\omega \in \Omega_c^q(M \times \mathbb{R})$ une telle forme peut s'écrire comme combinaison linéaire de deux types de formes.

$$\begin{aligned} & \text{(I)} \quad (\pi^*\phi)f(x, t) \\ & \text{(II)} \quad (\pi^*\phi)f(x, t)dt \end{aligned}$$

ou ϕ est une q -forme globale (non nécessairement à support compact) sur M dans le cas (I) et une $q-1$ -forme dans le cas (II), $f \in C_c^\infty(M \times \mathbb{R})$, et $(x, t) = (x_1, \dots, x_n, t)$ désigne les coordonnées locales associé à un ouvert $U_\alpha \times \mathbb{R}$, on définit alors :

$$\begin{aligned} \pi_* : \quad \Omega_c^q(M \times \mathbb{R}) & \longrightarrow \Omega_c^{q-1}(M) \\ \text{(I)} \quad (\pi^*\phi)f(x, t) & \longmapsto 0 \\ \text{(II)} \quad (\pi^*\phi)f(x, t)dt & \longmapsto \phi \int_{-\infty}^{\infty} f(x, t)dt \end{aligned}$$

Le lemme suivant nous permet de déduire que π_* induit une application $\pi_* : H^*(M \times \mathbb{R}) \rightarrow H^{*-1}(M)$

Lemme 2.4. π_* est une morphisme de complexe i.e. $d\pi_* = \pi_*d$

Démonstration. Lorsque ω est de type (I) on a que $d\pi_*\omega = 0$ par ailleurs on a

$$\begin{aligned} \pi_*d\omega &= \pi_* \left((\pi^*d\phi)f(x, t) + (-1)^q(\pi^*\phi) \left(\sum \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i + \frac{\partial f}{\partial t} dt \right) \right) \\ &= (-1)^q \phi \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial f}{\partial t} dt = 0 \end{aligned}$$

puisque $f \in C_c^\infty(M \times \mathbb{R})$. Lorsque ω est de type (II) on a

$$\begin{aligned} d\pi_*\omega &= d \left(\phi \int_{-\infty}^{\infty} f(x, t)dt \right) \\ &= (d\phi) \int_{-\infty}^{\infty} f(x, t)dt + (-1)^{q-1} \phi \sum \left(\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial f}{\partial x_i} dt \right) dx_i \end{aligned}$$

D'autre part on a

$$\begin{aligned} \pi_*d\omega &= \pi_* \left((\pi^*d\phi)f(x, t)dt + (-1)^{q-1}(\pi^*\phi) \left(\sum \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i \right) dt \right) \\ &= (d\phi) \int_{-\infty}^{\infty} f(x, t)dt + (-1)^{q-1} \phi \sum \left(\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial f}{\partial x_i} dt \right) dx_i \end{aligned}$$

Ainsi on a bien $d\pi_* = \pi_*d$ dans les deux cas. \square

Soit à présent $e = e(t)dt$ une 1-forme à support compact sur \mathbb{R} tel que $\int e = 1$, on défini alors l'application :

$$e_* : \begin{array}{ccc} \Omega_c^q(M) & \longrightarrow & \Omega_c^{q+1}(M \times \mathbb{R}) \\ \phi & \longmapsto & (\pi^*\phi)e \end{array}$$

Cette application commute clairement avec d et induit donc une application en cohomologie. On peut alors remarquer que $\pi_* \circ e_* = id$, on alors le théorème suivant

Théorème 2.5. *L'application π_* fournit l'isomorphisme suivant :*

$$H_c^*(M \times \mathbb{R}) \xrightarrow{\sim} H_c^{*-1}(M)$$

d'inverse e_* .

Démonstration. Nous allons définir un opérateur d'homotopie K tel que $id - e_*\pi_* = (-1)^{q-1}(dK - Kd)$ sur $\Omega_c^q(M \times \mathbb{R})$ de la manière suivante :

$$K : \begin{array}{ccc} \Omega_c^q(M \times \mathbb{R}) & \longrightarrow & \Omega_c^{q-1}(M \times \mathbb{R}) \\ (I) (\pi^*\phi)f(x, t) & \longmapsto & 0 \\ (II) (\pi^*\phi)f(x, t)dt & \longmapsto & (\pi^*\phi) \int_{-\infty}^t f(x, s)ds - (\pi^*\phi)A(t) \int_{-\infty}^{\infty} f(x, t)dt \end{array}$$

$$\text{ou } A(t) = \int_{-\infty}^t e(s)ds.$$

Soit alors $(\pi^*\phi)f(x, t)$ une q -forme à support compact de type (I) on a,

$$(id - e_*\pi_*)(\pi^*\phi)f(x, t) = \pi^*\phi f(x, t)$$

Par ailleurs

$$\begin{aligned} & (dK - Kd)(\pi^*\phi)f(x, t) \\ &= -K \left((\pi^*d\phi)f(x, t) + (-1)^q(\pi^*\phi) \left(\sum \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i + \frac{\partial f}{\partial t} dt \right) \right) \\ &= (-1)^{q-1} \left((\pi^*\phi) \int_{-\infty}^t \frac{\partial f}{\partial s} ds - (\pi^*\phi)A(t) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial f}{\partial s} ds \right) \\ &= (-1)^{q-1}(\pi^*\phi)f(x, t) \end{aligned}$$

Puisque $f \in C_c^\infty(M \times \mathbb{R})$, ainsi $id - e_*\pi_* = (-1)^{q-1}(dK - Kd)$ pour les forme de type (I). Considérons maintenant $(\pi^*\phi)f(x, t)dt$ une q -forme à support compact de type (II) on a alors ,

$$(id - e_*\pi_*)(\pi^*\phi)f(x, t)dt = (\pi^*\phi)f(x, t)dt - (\pi^*\phi) \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(x, t)dt \right) e$$

De plus on a d'une part,

$$\begin{aligned} dK((\pi^*\phi)f(x, t)dt) &= d \left((\pi^*\phi) \int_{-\infty}^t f(x, s)ds - (\pi^*\phi)A(t) \int_{-\infty}^{\infty} f(x, t)dt \right) \\ &= (\pi^*d\phi) \int_{-\infty}^t f(x, s)ds + (-1)^{q-1}(\pi^*\phi) \sum \left(\int_{-\infty}^t \frac{\partial f}{\partial x_i} ds \right) dx_i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +(-1)^{q-1}(\pi^*\phi)f(x,t)dt - (\pi^*d\phi)A(t) \int_{-\infty}^{\infty} f(x,t)dt \\
& -(-1)^{q-1}(\pi^*\phi) \left(e \int_{-\infty}^{\infty} f(x,t)dt + A(t) \sum \left(\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial f}{\partial x_i} dt \right) dx_i \right)
\end{aligned}$$

D'autre part

$$\begin{aligned}
Kd((\pi^*\phi)f(x,t)dt) &= K \left((\pi^*d\phi)f(x,t)dt + (-1)^{q-1}(\pi^*\phi) \left(\sum \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i \right) dt \right) \\
&= (\pi^*d\phi) \int_{-\infty}^t f(x,s)ds - (\pi^*d\phi)A(t) \int_{-\infty}^{\infty} f(x,t)dt \\
&+ (-1)^{q-1} \left((\pi^*\phi) \sum \left(\int_{-\infty}^t \frac{\partial f}{\partial x_i} ds \right) dx_i - (\pi^*\phi)A(t) \sum \left(\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial f}{\partial x_i} dt \right) dx_i \right)
\end{aligned}$$

Ainsi on a bien

$$(dK - Kd)(\pi^*\phi)f(x,t)dt = (\pi^*\phi)f(x,t)dt - (\pi^*\phi) \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(x,t)dt \right) e$$

Ce qui conclue la démonstration \square

Corollaire 2.5.1 (Lemme de Poincaré).

$$H_c^q(\mathbb{R}^n) = \begin{cases} \mathbb{R} & \text{pour } q = n \\ 0 & \text{autre part} \end{cases}$$

Remarque 2.5.1. Faisons remarquer ici que dans le cas la cohomologie à support compact, deux variétés homotopes n'ont pas forcément la même cohomologie à support compact, le contre exemple évident étant le point et \mathbb{R}^n .

2.4 L'argument de Mayer-Vietoris

2.4.1 Bon recouvrement

Soit M une variété lisse, considérons deux recouvrement $\mathfrak{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$ et $\mathfrak{V} = \{V_\beta\}_{\beta \in J}$ de M si pour tout $\beta \in J$ il existe $\alpha \in I$ tel $V_\beta \subset U_\alpha$ on dit que \mathfrak{V} est un raffinement de \mathfrak{U} , ce raffinement est donné par une application $\phi : J \rightarrow I$.

Définition 2.4. Un ensemble ordonné (I, \leq) est dit *filtrant* si pour tout $i, j \in I$ il existe $k \in I$ tel $i \leq k$ et $j \leq k$.

Il se trouve que l'ensemble des recouvrements sur une variété est un ensemble ordonné pour la relation d'ordre $\mathfrak{U} \leq \mathfrak{V}$ si \mathfrak{V} est un raffinement de \mathfrak{U} , cette ensemble est de plus filtrant, en effet étant donné deux recouvrement on peut, en considérant l'intersection des ouverts qui les composent, obtenir une recouvrement qui raffine les deux recouvrement. Intéressons nous à une classe particulière de recouvrement les Bons recouvrements.

Définition 2.5 (Bon recouvrement). Soit M une variété de dimension n . Un recouvrement $\mathfrak{U} = \{U_\alpha\}$ de M est un *Bon recouvrement* si toute intersection non vide d'ouverts $U_{\alpha_0} \cap \dots \cap U_{\alpha_p}$ est diffeomorphe à \mathbb{R}^n . Un *bon recouvrement* sera dit de *type fini* s'il contient un nombre fini d'ouverts.

On a alors le théorème suivant qui ne sera pas démontré dans le présent exposé.

Théorème 2.6. *Toute variété admet un bon recouvrement, de plus il existe un bon recouvrement de type fini lorsque la variété est compacte.*

Définition 2.6. Un sous ensemble J d'un ensemble ordonné I est dit *cofinal* si pour tout $i \in I$ il existe $j \in J$ tel que $i \leq j$

Un corollaire au théorème qui précède est que l'ensemble des bons recouvrements d'une variété est cofinal dans l'ensemble de ses recouvrements.

Théorème 2.7. *Soit M une variété admettant un bon recouvrement de type fini, alors sa cohomologie de De Rahm et sa cohomologie à support compact sont de dimension fini.*

On démontre dans ce qui suit le théorème dans le cas de la cohomologie de De Rahm, la preuve du cas de la cohomologie à support compact étant essentiellement la même.

Démonstration. Soit $q \geq 0$ un entier, considérons la suite de Mayer-Vietoris pour deux ouverts U et V .

$$\dots \rightarrow H^{q-1}(U \cap V) \xrightarrow{d^*} H^q(U \cup V) \xrightarrow{r} H^q(U) \oplus H^q(V) \rightarrow \dots$$

on a alors

$$H^q(U \cup V) = \text{Im}(r) \oplus \text{Ker}(r) \simeq \text{Im}(r) \oplus \text{Im}(d^*)$$

Ainsi lorsque $H^q(U)$, $H^q(V)$ et $H^{q-1}(U \cap V)$ sont de dimension fini $H^q(U \cup V)$ l'est aussi. Supposons par récurrence que la cohomologie de degré q d'une variété admettant un bon recouvrement à p ouverts est de dimension fini, et supposons que M a un bon recouvrement à $p+1$ ouverts, $\{U_0, \dots, U_p\}$ ainsi $(U_0 \cup \dots \cup U_{p-1}) \cap U_p$ admet un bon recouvrement à p ouverts donné par $\{U_0 \cap U_p, \dots, U_{p-1} \cap U_p\}$ et donc par hypothèse la cohomologie de degré q de $U_0 \cup \dots \cup U_{p-1}$, U_p et $(U_0 \cup \dots \cup U_{p-1}) \cap U_p$ est de dimension fini. Enfin de ce qui précède on conclue que la cohomologie de degré q de $U_0 \cup \dots \cup U_p$ est de dimension fini. \square

2.4.2 Dualité de Poincaré et formule de Künneth

Soit V et W deux \mathbb{R} -espaces vectoriels Euclidiens de dimension fini on peut alors définir une forme bilinéaire $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \otimes W \rightarrow \mathbb{R}$, une telle forme sera dite *non-dégénérée* si $\langle v, w \rangle = 0$ pour tout $w \in W$ implique que $v = 0$ et $\langle v, w \rangle = 0$ pour tout $v \in V$ implique que $w = 0$. Le théorème de dualité de Poincaré repose essentiellement sur les deux lemmes qui suivent et qu'on présente sans démonstration.

Lemme 2.8. La forme bilinéaire $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \otimes W \rightarrow \mathbb{R}$ est non-dégénéré si et seulement si l'application $V \rightarrow W^*$ qui associe $v \mapsto \langle v, \bullet \rangle$ est un isomorphisme.

Lemme 2.9 (Lemme des cinq). Étant donné un diagramme commutatif de groupes Abéliens, ou les flèches sont des morphismes de groupe, de la forme suivante :

$$\begin{array}{ccccccccc}
 \dots & \longrightarrow & A & \xrightarrow{f_1} & B & \xrightarrow{f_2} & C & \xrightarrow{f_3} & D & \xrightarrow{f_4} & E & \longrightarrow & \dots \\
 & & \downarrow a & & \downarrow b & & \downarrow c & & \downarrow d & & \downarrow e & & \\
 \dots & \longrightarrow & A' & \xrightarrow{f'_1} & B' & \xrightarrow{f'_2} & C' & \xrightarrow{f'_3} & D' & \xrightarrow{f'_4} & E' & \longrightarrow & \dots
 \end{array}$$

Alors si a, b, d et e sont des isomorphisme, il en est de même pour c .

Soit à présent M une variété de dimension n , considérons l'application suivante :

$$\begin{array}{ccc}
 \int : H^q(M) \otimes H_c^{n-q}(M) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\
 \omega \otimes \tau & \longmapsto & \int_M \omega \wedge \tau
 \end{array}$$

Cette application est bien bilinéaire par linéarité de l'intégration et d'après le théorème de Stokes. De plus cette application induit le morphisme suivant :

$$\begin{array}{ccc}
 \int_M : H^q(M) & \longrightarrow & (H_c^{n-q}(M))^* \\
 \omega & \longmapsto & \int_M \omega \wedge \bullet
 \end{array}$$

Le théorème de dualité de Poincaré s'énonce alors comme suit

Théorème 2.10. Soit M une variété orientable admettant un bon recouvrement de type fini, alors on a un isomorphisme $H^q(M) \simeq (H_c^{n-q}(M))^*$ donné par l'application ci-dessus.

Démonstration. On peut tout d'abord remarquer que le théorème est vrai dans le cas de \mathbb{R}^n d'après les lemmes de Poincaré, il est donc vrai dans le cas d'ouverts difféomorphe à \mathbb{R}^n , considérons alors deux ouvert U et V de M difféomorphe à \mathbb{R}^n et dont l'intersection est difféomorphe à \mathbb{R}^n d'après les théorème de Mayer-Vietoris on a les suites exacts suivantes

$$\dots \rightarrow H^q(U) \oplus H^q(V) \xrightarrow{\delta} H^q(U \cap V) \xrightarrow{d^*} H^{q+1}(U \cup V) \xrightarrow{r} H^{q+1}(U) \oplus H^{q+1}(V) \rightarrow \dots$$

et

$$\dots \xleftarrow{\sigma} H_c^{n-q}(U) \oplus H_c^{n-q}(V) \xleftarrow{s} H_c^{n-q}(U \cap V) \xleftarrow{d_*} H_c^{n-q-1}(U \cup V) \xleftarrow{\sigma} H_c^{n-q-1}(U) \oplus H_c^{n-q-1}(V) \leftarrow \dots$$

Cette dernière suite induit une suite exacte sur les duals de ces espaces en inversant les flèches, on obtient alors le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccccccc}
\dots & \longrightarrow & H^q(U) \oplus H^q(V) & \xrightarrow{\delta} & H^q(U \cap V) & \xrightarrow{d^*} & H^{q+1}(U \cup V) & \longrightarrow & \dots \\
& & \downarrow \int_U + \int_V & & \downarrow \int_{U \cap V} & & \downarrow \int_{U \cup V} & & \\
\dots & \longrightarrow & H_c^{n-q}(U)^* \oplus H_c^{n-q}(V)^* & \longrightarrow & H_c^{n-q}(U \cap V)^* & \longrightarrow & H_c^{n-q-1}(U \cup V)^* & \longrightarrow & \dots
\end{array}$$

Nous allons montrer que ce diagramme est commutatif à signe près, pour cela nous montrons la commutativité du premier et second carré la démonstration du reste étant plus simple ou essentiellement la même. Pour le premier carré, soit $(\omega, \tau) \in H^q(U) \oplus H^q(V)$ et $\psi \in H_c^{n-q}(U \cap V)$ on a d'une part

$$\int_{U \cap V} \delta(\omega, \tau) \wedge \psi = \int_{U \cap V} (\tau|_{U \cap V} - \omega|_{U \cap V}) \wedge \psi$$

et d'autre part

$$\int_V \tau \wedge \psi - \int_U \omega \wedge \psi = \int_{U \cap V} (\tau|_{U \cap V} - \omega|_{U \cap V}) \wedge \psi$$

Puisque ψ est à support dans $U \cap V$. Pour le deuxième carré soit $\omega \in H^q(U \cap V)$ on a $d^*\omega \in H^{q+1}(U \cup V)$ de plus ω est fermée ainsi

$$d^*\omega = \begin{cases} -(d\rho_V)\omega & \text{sur } U \\ (d\rho_U)\omega & \text{sur } V \end{cases}$$

Pour $\{\rho_U, \rho_V\}$ une partition de l'unité subordonnée à $\{U, V\}$, soit $\tau \in H_c^{n-q-1}(U \cup V)$ puisque τ est fermé on a $d_*\tau \in H_c^{n-q}(U \cap V)$ et ainsi on peut par abus, après extension de $d_*\tau$ par 0 à U et V , écrire,

$$d_*\tau = \begin{cases} (d\rho_U)\tau & \text{sur } U \\ (d\rho_V)\tau & \text{sur } V \end{cases}$$

On a alors d'une part

$$\int_{U \cap V} \omega \wedge d_*\tau = (-1)^{\deg(\omega)} \int_{U \cap V} (d\rho_V)\omega \wedge \tau$$

D'autre part comme $d^*\omega$ est à support dans $U \cap V$

$$\int_{U \cup V} d^*\omega \wedge \tau = - \int_{U \cap V} (d\rho_V)\omega \wedge \tau$$

ainsi on a

$$\int_{U \cup V} d^*\omega \wedge \tau = (-1)^{\deg(\omega)+1} \int_{U \cap V} \omega \wedge d_*\tau$$

Ce qui conclut la commutativité à signe près du diagramme. Grâce à ce diagramme on peut déduire avec le lemme des cinq que si la dualité de Poincaré est vrai pour U , V et $U \cap V$ alors elle est vrai pour $U \cup V$. Supposons alors par récurrence que la dualité de Poincaré est vrai pour une variété admettant un bon recouvrement à p ouvert, et supposons que M a un bon recouvrement à $p+1$ ouverts, $\{U_0, \dots, U_p\}$ ainsi $(U_0 \cup \dots \cup U_{p-1}) \cap U_p$ admet un bon recouvrement à p ouverts donné par $\{U_0 \cap U_p, \dots, U_{p-1} \cap U_p\}$ et donc par hypothèse la dualité de Poincaré est vrai pour $U_0 \cup \dots \cup U_{p-1}$, U_p et $(U_0 \cup \dots \cup U_{p-1}) \cap U_p$. Enfin de ce qui précède on conclut que la dualité de Poincaré est vrai pour $U_0 \cup \dots \cup U_p$. Ce qui conclut la preuve. \square

Le théorème qui suit sera de grand importance dans la théorie de espace fibré, il nous permettra notamment de construire certaines classes caractéristique.

Théorème 2.11 (Formule de Künneth). *Soit M et F deux variété de dimension fini tel que M admette un bon recouvrement de type fini, alors on a la relation*

$$H^n(M \times F) \simeq \bigoplus_{p+q=n} H^p(M) \otimes H^q(F)$$

Démonstration. Commençons par le diagramme suivant ou ρ et π désigne les projections naturelles.

$$\begin{array}{ccc} M \times F & \xrightarrow{\rho} & F \\ \downarrow \pi & & \\ M & & \end{array}$$

On a alors une application

$$\begin{array}{ccc} \Psi : \bigoplus_{p+q=n} H^p(M) \otimes H^q(F) & \longrightarrow & H^n(M \times F) \\ \omega \otimes \tau & \longmapsto & \pi^* \omega \wedge \rho^* \tau \end{array}$$

Cette application est bien définie sur la cohomologie puisque l'image du produit de deux formes fermées est bien fermée, et l'image du produit d'une forme fermée avec une forme exacte est une forme exacte. Lorsque $M = \mathbb{R}^m$, Ψ est un isomorphisme d'après le lemme de Poincaré, soit alors U et V deux ouverts difféomorphe à \mathbb{R}^m et d'intersection difféomorphe à \mathbb{R}^m soit $n \geq 0$ un entier, la suite exacte de Mayer-Vietoris induit la suite exacte suivante

$$\dots \rightarrow H^q(U \cup V) \otimes H^{n-q}(F) \xrightarrow{r \otimes id} (H^q(U) \oplus H^q(V)) \otimes H^{n-q}(F) \xrightarrow{\delta \otimes id} H^q(U \cap V) \otimes H^{n-q}(F) \rightarrow \dots$$

On peut alors sommer sur q pour obtenir la suite exacte suivante

$$\begin{array}{ccc} \dots \rightarrow \bigoplus_{q=0}^n H^q(U \cup V) \otimes H^{n-q}(F) & \rightarrow & \bigoplus_{q=0}^n (H^q(U) \oplus H^q(V)) \otimes H^{n-q}(F) \rightarrow \\ & & \bigoplus_{q=0}^n H^q(U \cap V) \otimes H^{n-q}(F) \rightarrow \dots \end{array}$$

On obtient alors le diagramme suivant,

$$\begin{array}{ccccc}
\dots \rightarrow \bigoplus_{q=0}^n (H^q(U) \oplus H^q(V)) \otimes H^{n-q}(F) & \longrightarrow & \bigoplus_{q=0}^n H^q(U \cap V) \otimes H^{n-q}(F) & \xrightarrow{d^*} & \bigoplus_{q=0}^{n+1} H^q(U \cup V) \otimes H^{n+1-q}(F) \rightarrow \dots \\
& & \downarrow \Psi & & \downarrow \Psi \\
\dots \rightarrow H^n(U \times F) \oplus H^n(V \times F) & \longrightarrow & H^n(U \cap V \times F) & \longrightarrow & H^{n+1}((U \cup V) \times F) \rightarrow \dots
\end{array}$$

Ce diagramme est commutatif, nous allons montrer la commutativité du second carré. Soit $\omega \otimes \phi \in H^q(U \cap V) \otimes H^{n-q}(F)$ alors

$$\Psi d^*(\omega \otimes \phi) = \pi^*(d^*\omega) \wedge \rho^*\phi$$

d'autre part on a :

$$d^*\Psi(\omega \otimes \phi) = d^*(\pi^*\omega \wedge \rho^*\phi)$$

De plus étant donnée une partition de l'unité $\{\rho_U, \rho_V\}$ subordonnée à U et V , on a que le tiré en arrière par π fourni une partition de l'unité $\{\pi^*\rho_U, \pi^*\rho_V\}$ subordonnée à $U \times F$ et $V \times F$ ainsi on a sur $(U \cap V) \times F$

$$d^*(\pi^*\omega \wedge \rho^*\phi) = d((\pi^*\rho_U)\pi^*\omega \wedge \rho^*\phi) = (d\pi^*(\rho_U\omega)) \wedge \rho^*\phi = \pi^*(d^*\omega) \wedge \rho^*\phi$$

Enfin par le lemme des cinq si Ψ est un isomorphisme pour U , V et $U \cap V$ alors c'est le cas pour $U \cup V$, on conclut alors par l'argument de récurrence sur le cardinale d'un bon recouvrement comme dans les démonstrations précédentes. \square

2.5 Complexe de Cech-De Rham

On défini dans ce qui suit le complexe double de Cech-De Rham et sa cohomologie, ainsi que la cohomologie de Cech.

Soit M une variété de dimension n , considérons un recouvrement $\mathfrak{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in J}$ avec J un ensemble ordonné dénombrable. On note $U_\alpha \cap U_\beta$ par $U_{\alpha\beta}$ et $U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma$ par $U_{\alpha\beta\gamma}$ etc. On a alors une suite d'inclusion,

$$\dots \rightrightarrows \prod_{\alpha_0 < \alpha_1 < \alpha_2} U_{\alpha_0\alpha_1\alpha_2} \rightrightarrows \prod_{\alpha_0 < \alpha_1} U_{\alpha_0\alpha_1} \rightrightarrows \prod_{\alpha_0} U_{\alpha_0} \longrightarrow M$$

ou chacune des flèches qu'on note $\partial_i : U_{\alpha_0 \dots \alpha_i \dots \alpha_p} \hookrightarrow U_{\alpha_0 \dots \widehat{\alpha}_i \dots \alpha_p}$ désigne l'inclusion canonique ignore le i -ème ouvert dans l'intersection, cette suite d'inclusion induit alors une suite de restrictions

$$\dots \xleftarrow{\quad} \prod_{\alpha_0 < \alpha_1 < \alpha_2} \Omega^*(U_{\alpha_0\alpha_1\alpha_2}) \xleftarrow{\quad} \prod_{\alpha_0 < \alpha_1} \Omega^*(U_{\alpha_0\alpha_1}) \xleftarrow{\quad} \prod_{\alpha_0} \Omega^*(U_{\alpha_0}) \xleftarrow{r} \Omega^*(M)$$

ou r désigne la restriction à chaque ouverts et chacune des autre flèche désigne le morphisme suivant :

$$\begin{aligned} \delta_i : \prod_{\alpha_0 < \dots < \alpha_p} \Omega^*(U_{\alpha_0 \dots \alpha_p}) &\longrightarrow \prod_{\alpha_0 < \dots < \alpha_{p+1}} \Omega^*(U_{\alpha_0 \dots \alpha_{p+1}}) \\ \omega_{\alpha_0 \dots \alpha_p} &\mapsto \omega_{\alpha_0 \dots \widehat{\alpha}_i \dots \alpha_{p+1}} |_{U_{\alpha_0 \dots \alpha_i \dots \alpha_{p+1}}} \end{aligned}$$

Où $\omega_{\alpha_0 \dots \alpha_p} \in \Omega^q(U_{\alpha_0 \dots \alpha_p})$ désigne une composante dans $\prod_{\alpha_0 < \dots < \alpha_p} \Omega^q(U_{\alpha_0 \dots \alpha_p})$

On note pour être plus concis $\omega_{\alpha_0 \dots \widehat{\alpha}_i \dots \alpha_{p+1}} |_{U_{\alpha_0 \dots \alpha_i \dots \alpha_{p+1}}}$ par $\omega_{\alpha_0 \dots \widehat{\alpha}_i \dots \alpha_{p+1}}$ On définit alors l'opérateur δ

Définition 2.7. on définit l'application

$$\delta : \prod_{\alpha_0 < \dots < \alpha_p} \Omega^*(U_{\alpha_0 \dots \alpha_p}) \longrightarrow \prod_{\alpha_0 < \dots < \alpha_{p+1}} \Omega^*(U_{\alpha_0 \dots \alpha_{p+1}})$$

par $\delta = \sum_{i=0}^{p+1} (-1)^i \delta_i$ ainsi pour une forme $\omega \in \prod_{\alpha_0 < \dots < \alpha_p} \Omega^q(U_{\alpha_0 \dots \alpha_p})$ de composante $\omega_{\alpha_0 \dots \alpha_p} \in \Omega^q(U_{\alpha_0 \dots \alpha_p})$ on a la formule

$$(\delta\omega)_{\alpha_0 \dots \alpha_{p+1}} = \sum_{i=0}^{p+1} (-1)^i \omega_{\alpha_0 \dots \widehat{\alpha}_i \dots \alpha_{p+1}}$$

Il se trouve que δ est un morphisme de complexe i.e. $\delta^2 = 0$. En effet

$$\begin{aligned} (\delta^2\omega)_{\alpha_0 \dots \alpha_{p+2}} &= \sum_{i=0}^{p+2} (-1)^i (\delta\omega)_{\alpha_0 \dots \widehat{\alpha}_i \dots \alpha_{p+2}} \\ &= \sum_{j>i} (-1)^i (-1)^{j-1} \omega_{\alpha_0 \dots \widehat{\alpha}_i \dots \widehat{\alpha}_j \dots \alpha_{p+2}} + \sum_{j<i} (-1)^i (-1)^j \omega_{\alpha_0 \dots \widehat{\alpha}_j \dots \widehat{\alpha}_i \dots \alpha_{p+2}} = 0 \end{aligned}$$

On note alors $C^p(\mathfrak{U}, \Omega^q) = \prod_{\alpha_0 < \dots < \alpha_p} \Omega^q(U_{\alpha_0 \dots \alpha_p})$, et on obtient ainsi un complexe différentiel $(C^*(\mathfrak{U}, \Omega^q), \delta)$ pour chaque entier $q \geq 0$. On remarque également que δ commute avec d en effet :

$$\begin{aligned} (\delta(d\omega))_{\alpha_0 \dots \alpha_{p+1}} &= \sum_{i=0}^{p+1} (-1)^i (d\omega)_{\alpha_0 \dots \widehat{\alpha}_i \dots \alpha_{p+1}} \\ &= d \sum_{i=0}^{p+1} (-1)^i \omega_{\alpha_0 \dots \widehat{\alpha}_i \dots \alpha_{p+1}} = d(\delta\omega)_{\alpha_0 \dots \alpha_{p+1}} \end{aligned}$$

On peut alors augmenter le complexe horizontale $(C^*(\mathfrak{U}, \Omega^q), \delta)$ verticalement grâce au complexe $(C^p(\mathfrak{U}, \Omega^*), \delta)$. En effet notons

$$K^{p,q} = C^p(\mathfrak{U}, \Omega^q) = \prod_{\alpha_0 < \dots < \alpha_p} \Omega^q(U_{\alpha_0 \dots \alpha_p})$$

On a alors un diagramme commutatif à signe prés

$$\begin{array}{ccccccccccc}
& & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \\
& & & \uparrow d & & \uparrow -d & & \uparrow d & & \uparrow -d & & \\
0 \rightarrow \Omega^2(M) & \xrightarrow{r} & K^{0,2} & \xrightarrow{\delta} & K^{1,2} & \xrightarrow{\delta} & K^{2,2} & \xrightarrow{\delta} & K^{3,2} & \xrightarrow{\delta} & \dots \\
& & \uparrow d & & \uparrow -d & & \uparrow d & & \uparrow -d & & \\
0 \rightarrow \Omega^1(M) & \xrightarrow{r} & K^{0,1} & \xrightarrow{\delta} & K^{1,1} & \xrightarrow{\delta} & K^{2,1} & \xrightarrow{\delta} & K^{3,1} & \xrightarrow{\delta} & \dots \\
& & \uparrow d & & \uparrow -d & & \uparrow d & & \uparrow -d & & \\
0 \rightarrow \Omega^0(M) & \xrightarrow{r} & K^{0,0} & \xrightarrow{\delta} & K^{1,0} & \xrightarrow{\delta} & K^{2,0} & \xrightarrow{\delta} & K^{3,0} & \xrightarrow{\delta} & \dots
\end{array}$$

On note alors

$$K^n = \bigoplus_{p+q=n} K^{p,q}$$

et on considère l'application $D : K^n \rightarrow K^{n+1}$ donnée par $D\phi = \delta\phi + D'\phi$ avec $D' = (-1)^p d\phi$ pour $\phi \in K^{p,q}$.

D est alors un morphisme de complexe, en effet

$$\begin{aligned}
D^2 &= \delta^2 + \delta D' + D' \delta + D'^2 \\
&= (-1)^p \delta d + (-1)^{p+1} d \delta = 0
\end{aligned}$$

On obtient alors un double complexe (K^*, D) appelé complexe de Cech-De Rham. Ce double complexe jouit d'une propriété particulière qui est que ses suites horizontales sont exactes en effet on a la proposition suivante.

Proposition 2.1. La suite :

$$0 \rightarrow \Omega^*(M) \xrightarrow{r} \prod_{\alpha_0} \Omega^*(U_{\alpha_0}) \xrightarrow{\delta} \prod_{\alpha_0 < \alpha_1} \Omega^*(U_{\alpha_0 \alpha_1}) \xrightarrow{\delta} \prod_{\alpha_0 < \alpha_1 < \alpha_2} \Omega^*(U_{\alpha_0 \alpha_1 \alpha_2}) \xrightarrow{\delta} \dots$$

est exact.

Démonstration. Il est clair qu'une forme globale $\omega \in \Omega^q(M)$, dont la restriction à chaque ouvert du recouvrement est nulle, est nulle. De plus l'image d'une forme globale par r est d'image nulle sous δ . Considérons à présent une forme $\omega \in \prod_{\alpha_0 < \dots < \alpha_p} \Omega^q(U_{\alpha_0 \dots \alpha_p})$ de composantes $\omega_{\alpha_0 \dots \alpha_p}$, et soit ρ_α une partition de l'unité subordonnée au recouvrement \mathfrak{U} , on définit alors un opérateur d'homotopie :

$$\begin{aligned}
K : \prod_{\alpha_0 < \dots < \alpha_p} \Omega^q(U_{\alpha_0 \dots \alpha_p}) &\longrightarrow \prod_{\alpha_0 < \dots < \alpha_{p-1}} \Omega^q(U_{\alpha_0 \dots \alpha_{p-1}}) \\
\omega_{\alpha_0 \dots \alpha_p} &\mapsto (K\omega)_{\alpha_0 \dots \alpha_{p-1}} = \sum_{\alpha} \rho_\alpha \omega_{\alpha \alpha_0 \dots \alpha_{p-1}}
\end{aligned}$$

On peut alors calculer d'une part

$$\begin{aligned}\delta K\omega &= (\delta K\omega)_{\alpha_0 \dots \alpha_p} = \sum_i (-1)^i (K\omega)_{\alpha_0 \dots \widehat{\alpha}_i \dots \alpha_p} \\ &= \sum_{\alpha} \rho_{\alpha} \sum_i (-1)^i \omega_{\alpha \alpha_0 \dots \widehat{\alpha}_i \dots \alpha_p}\end{aligned}$$

D'autre part

$$\begin{aligned}K\delta\omega &= (K\delta\omega)_{\alpha_0 \dots \alpha_p} = \sum_{\alpha} \rho_{\alpha} (\delta\omega)_{\alpha \alpha_0 \dots \alpha_p} \\ &= \sum_{\alpha} \rho_{\alpha} \omega_{\alpha_0 \dots \alpha_p} + \sum_{\alpha} \rho_{\alpha} \sum_i (-1)^{i+1} \omega_{\alpha \alpha_0 \dots \widehat{\alpha}_i \dots \alpha_p} \\ &= \omega - \delta K\omega\end{aligned}$$

on a ainsi $\delta K + K\delta = id$ et donc tout δ -cocycle est un δ -cobord, le résultat suit alors du fait que $\delta^2 = 0$ □

Théorème 2.12. *L'application $r : \Omega^*(M) \rightarrow C^*(\mathfrak{U}, \Omega^*)$ induit un isomorphisme en cohomologie :*

$$r^* : H_{DR}^*(M) \xrightarrow{\sim} H_D^*(C^*(\mathfrak{U}, \Omega^*))$$

Démonstration. (1) r^* est surjective :

En effet considérons un D -cocycle $\phi \in K^n$, ϕ s'écrit alors comme $a_0 + \dots + a_n$ avec $a_i \in K^{i, n-i}$, puisque les suites horizontales sont exacts l'élément a_n s'écrit $a_n = \delta\alpha_{n-1}$ avec $\alpha_{n-1} \in K^{n-1, 0}$ on peut alors soustraire à ϕ , $D\alpha_{n-1}$ pour obtenir $\phi_1 = \phi - D\alpha_{n-1}$ qui appartient à la même classe de D -cohomologie que ϕ , en itérant ce procédé on obtient une forme $\phi_n \in K^{0, n}$ et de même classe de D -cohomologie que ϕ un simple calcul permet alors de voir que $d\phi_n = \delta\phi_n = 0$ ainsi ϕ_n est une forme fermée et globale.

(2) r^* est injective :

En effet soit $\omega \in \Omega^n(M)$ tel $r(\omega) = D\phi$ on peut alors par le même procédé que précédemment i.e. en soustrayant des D -cobords à ϕ , se ramener à une forme $\phi' \in K^{0, n}$ tel que $r(\omega) = D\phi'$ on alors pour des raisons de degré que $\delta\phi' = 0$ ce qui prouve que ϕ' est une forme globale et donc que ω est exact. □

Remarque 2.12.1. On fait remarquer ici que la démonstration précédente, qui en réalité n'utilise pas spécialement la structure de Ω^* , peut se généraliser en un énoncé sur les complexes double, en disant *Si les lignes (resp. colonnes) d'un complexe double sont exactes, alors sa D -cohomologie est isomorphe à celle de sa première colonne (resp. première ligne).*

Passons à présent à la définition de cohomologie de Čech, pour cela commençons par considérer le pré-faisceau des fonctions localement constantes qu'on note \mathbb{R} qui associe à chaque ouvert de M le groupe additif des fonctions localement constantes \mathbb{R} , on considère alors pour $p \geq 0$ un entier l'ensemble $C^p(\mathfrak{U}, \mathbb{R})$ des fonctions localement constantes sur l'intersection d'ordre p des ouverts $U_{\alpha_0 \dots \alpha_p}$ du recouvrement $\mathfrak{U} = \{U_{\alpha}\}_{\alpha \in I}$. On obtient ainsi un complexe $(C^*(\mathfrak{U}, \mathbb{R}), \delta)$, qu'on appelle également *Complexe de Čech* donné par la suite suivante, ou δ est défini de la même manière que précédemment.

$$C^0(\mathfrak{U}, \mathbb{R}) \xrightarrow{\delta} C^1(\mathfrak{U}, \mathbb{R}) \xrightarrow{\delta} C^2(\mathfrak{U}, \mathbb{R}) \xrightarrow{\delta} \dots$$

Définition 2.8. On note $H^*(\mathfrak{U}, \mathbb{R})$ la cohomologie de ce complexe qu'on appelle *Cohomologie de Čech du recouvrement* \mathfrak{U} .

Soit à présent $\mathfrak{B} = \{V_\beta\}_{\beta \in J}$ un raffinement de \mathfrak{U} et soit $\tau : J \rightarrow I$ une fonction tel que $V_\beta \subset U_{\tau\beta}$ pour tout $\beta \in J$, on a alors un morphisme

$$\tau^* : C^q(\mathfrak{U}, \mathbb{R}) \rightarrow (C^q(\mathfrak{B}), \mathbb{R})$$

défini par la formule

$$(\tau^* f)(\beta_0, \dots, \beta_q) = r_W^{W'} f(\tau\beta_0, \dots, \tau\beta_q)$$

ou $f \in C^q(\mathfrak{U}, \mathbb{R})$ et $W = V_{\beta_0} \cap \dots \cap V_{\beta_q}$ et $W = U_{\tau\beta_0} \cap \dots \cap U_{\tau\beta_q}$, on peut alors montrer par un calcul que

$$\tau^* \delta = \delta \tau^*$$

Ce qui implique que τ^* induit une application en cohomologie

$$t_{\mathfrak{B}}^{\mathfrak{U}} : H^q(\mathfrak{U}, \mathbb{R}) \rightarrow H^q(\mathfrak{B}, \mathbb{R})$$

On peut alors montrer que les morphismes $t_{\mathfrak{B}}^{\mathfrak{U}}$ sont indépendants du choix de la fonction τ (Ceci sera montré dans la section 5).

Enfin on peut montrer que les $t_{\mathfrak{B}}^{\mathfrak{U}}$ forment un système inductif i.e. $t_{\mathfrak{U}}^{\mathfrak{U}} = Id$ et $t_{\mathfrak{B}}^{\mathfrak{U}} \circ t_{\mathfrak{B}'}^{\mathfrak{B}} = t_{\mathfrak{B}'}^{\mathfrak{U}}$

On définit alors la *Cohomologie de Čech de M* qu'on note $H^*(M, \mathbb{R})$ comme la limite inductive de $H^*(\mathfrak{U}, \mathbb{R})$ sur l'ensemble des recouvrements de M

$$H^*(M, \mathbb{R}) = \varinjlim_{\mathfrak{U}} H^*(\mathfrak{U}, \mathbb{R})$$

Enfin comme les bons recouvrements forment un sous ensemble cofinale dans l'ensemble ordonné des recouvrements de M , on peut effectuer la limite sur les bons recouvrements seulement.

Remarquons à présent que $C^p(\mathfrak{U}, \mathbb{R})$ n'est en fait rien d'autre que le noyau de la flèche $D' : K^{p,0} \rightarrow K^{p,1}$ on a alors une injection canonique $\iota : C^p(\mathfrak{U}, \mathbb{R}) \rightarrow K^{p,0}$ ce qui nous permet d'injecter (par le bas) le complexe de Čech dans le complexe double exposé précédemment, et augmenter ainsi notre complexe double.

$$\begin{array}{ccccccccccc}
& & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \\
& & & \uparrow d & & \uparrow -d & & \uparrow d & & \uparrow -d & & \\
0 \rightarrow \Omega^2(M) & \xrightarrow{r} & K^{0,2} & \xrightarrow{\delta} & K^{1,2} & \xrightarrow{\delta} & K^{2,2} & \xrightarrow{\delta} & K^{3,2} & \xrightarrow{\delta} & \dots \\
& & \uparrow d & & \uparrow -d & & \uparrow d & & \uparrow -d & & \\
0 \rightarrow \Omega^1(M) & \xrightarrow{r} & K^{0,1} & \xrightarrow{\delta} & K^{1,1} & \xrightarrow{\delta} & K^{2,1} & \xrightarrow{\delta} & K^{3,1} & \xrightarrow{\delta} & \dots \\
& & \uparrow d & & \uparrow -d & & \uparrow d & & \uparrow -d & & \\
0 \rightarrow \Omega^0(M) & \xrightarrow{r} & K^{0,0} & \xrightarrow{\delta} & K^{1,0} & \xrightarrow{\delta} & K^{2,0} & \xrightarrow{\delta} & K^{3,0} & \xrightarrow{\delta} & \dots \\
& & \uparrow \iota & & \uparrow \iota & & \uparrow \iota & & \uparrow \iota & & \\
& & C^0(\mathfrak{U}, \mathbb{R}) & \xrightarrow{\delta} & C^1(\mathfrak{U}, \mathbb{R}) & \xrightarrow{\delta} & C^2(\mathfrak{U}, \mathbb{R}) & \xrightarrow{\delta} & C^3(\mathfrak{U}, \mathbb{R}) & \xrightarrow{\delta} & \dots \\
& & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\
& & 0 & & 0 & & 0 & & 0 & &
\end{array}$$

Si l'on suppose que \mathfrak{U} est un bon recouvrement de M alors pour $p \geq 0$ et $q > 0$ on a que $\prod_{\alpha_0 < \dots < \alpha_p} H^q(U_{\alpha_0 \dots \alpha_p}) = 0$ les suites verticales du complexe sont donc exactes ce qui implique d'après la remarque et la discussion qui précède le théorème suivant

Théorème 2.13. *Soit \mathfrak{U} un bon recouvrement de M on l'isomorphisme suivant*

$$H_{DR}^*(M) \simeq H^*(\mathfrak{U}, \mathbb{R})$$

et par passage à la limite inductive sur l'ensemble des bons recouvrements

$$H_{DR}^*(M) \simeq H^*(M, \mathbb{R})$$

En réalité on peut expliciter, l'inverse de l'isomorphisme $r^* : H_{DR}^*(M) \xrightarrow{\sim} H_D^*(C^*(\mathfrak{U}, \Omega^*))$ et par conséquent l'isomorphisme $H_{DR}^*(M) \simeq H^*(\mathfrak{U}, \mathbb{R})$. Pour cela on considère l'application $f : K^n \rightarrow \Omega^n(M)$ qui à une n -cochaîne $a \in K^n = \bigoplus_{p+q=n} K^{p,q}$ qui s'écrit $a = a_0 + \dots + a_n$ et tel que $Da = b = b_0 + \dots + b_{n+1}$ associe la formule suivante :

$$f(a) = \sum_{i=0}^n (-D'K)^i a_i - \sum_{i=1}^{n+1} K(-D'K)^{i-1} b_i$$

ou K désigne l'opérateur d'homotopie défini comme dans la preuve de la proposition 2.1 par :

$$\begin{array}{ccc}
K : \prod_{\alpha_0 < \dots < \alpha_p} \Omega^q(U_{\alpha_0 \dots \alpha_p}) & \longrightarrow & \prod_{\alpha_0 < \dots < \alpha_{p-1}} \Omega^q(U_{\alpha_0 \dots \alpha_{p-1}}) \\
& & \longmapsto (K\omega)_{\alpha_0 \dots \alpha_{p-1}} = \sum_{\alpha} \rho_{\alpha} \omega_{\alpha \alpha_0 \dots \alpha_{p-1}}
\end{array}$$

On appelle la formule définissant $f(a)$ *Formule de collage* car en un certain sens on "recolle" les éléments de la n -cochaîne a pour obtenir une n -forme globale, en effet on peut montrer par un calcul que $\delta f(a) = 0$, et que $f \circ r = id$, de plus on peut construire un opérateur d'homotopie $L : C^*(\mathfrak{U}, \Omega^*) \rightarrow C^*(\mathfrak{U}, \Omega^*)$ tel que $id - r \circ f = LD + DL$, nous ne donnerons pas le détails de cette construction, on a toutefois le théorème suivant qui nous sera fort utile.

Théorème 2.14. *Soit $a \in H^q(\mathfrak{U}, \mathbb{R})$ alors la forme globale fermée associée à a en cohomologie de De Rham est donnée par $f(a) = (-1)^n (D'K)^n a$.*

3 Espaces Fibrés

Nous exposons dans cette section quelques définitions et théorèmes liés aux espaces fibrés (au sens de la définition ci-dessous) ainsi que des résultats concernant le cas particulier des fibrés vectoriels et fibré en sphère, Les faits non démontrés dans cette présentation pourront trouver leurs démonstrations dans les écrits de F. Hirzebruch [2] et Steenrod [3] ou encore D.Husemoller [4].

3.1 Généralités

Définition 3.1 (Espace fibré). On appelle Espace fibré la donnée de :

1. Une variété lisse E appelé *Espace totale*
2. Une variété lisse M appelée *Base*
3. Une surjection lisse $\pi : M \rightarrow E$ appelée *Projection*
4. Une variété lisse $F \simeq \pi^{-1}(p)$ pour $p \in M$ appelée *Fibre*
5. Un Groupe de Lie G agissant de manière fidèle sur F appelé *Groupe structurale*

Vérifiant les conditions suivantes

1. Il existe un recouvrement $\{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$ muni d'une famille de difféomorphismes appelées *Trivialisations locales*

$$\phi_\alpha : \pi^{-1}(U_\alpha) \rightarrow U_\alpha \times F$$

tel que pour $(p, x) \in U_\alpha \times F$

$$\pi \circ \phi_\alpha^{-1}(p, x) = p$$

2. Et tel que pour $\alpha, \beta \in I$ et $p \in U_\alpha \cap U_\beta$ les applications

$$\phi_\alpha \circ \phi_\beta^{-1}(p, \bullet) : F \rightarrow F$$

qu'on note $g_{\alpha\beta}(p)$ représente l'action d'un élément de G on demande ainsi que les applications, qu'on appelle *fonctions de transition*,

$$g_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \rightarrow G$$

soient lisses.

Définition 3.2. On appelle *section lisse* ou simplement *section* d'un espace fibré $\pi : E \rightarrow M$ une application lisse $s : M \rightarrow E$ tel que $\pi \circ s = Id$

Une première conséquence de la définition d'espace fibré est la relation suivante

$$g_{\alpha\beta} \circ g_{\beta\gamma} = g_{\alpha\gamma} \text{ sur } U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma$$

appelée *relation de cocycle*.

Nous appellerons \mathfrak{U} -cocycles la famille d'éléments $\{g_{\alpha\beta}\}$ pour un recouvrement donné $\mathfrak{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$

Définition 3.3. On dit que deux \mathfrak{U} -cocycles $g_{\alpha\beta}$ et $g'_{\alpha\beta}$ sont équivalents si il existe une famille de fonctions lisses $\lambda_\alpha : U_\alpha \rightarrow G$ tel que pour tout $p \in U_\alpha \cap U_\beta$

$$g_{\alpha\beta}(p) = \lambda_\alpha(p)g'_{\alpha\beta}(p)\lambda_\beta^{-1}(p)$$

On note alors $H^1(\mathfrak{U}, G)$ l'ensemble des classes d'équivalences de \mathfrak{U} -cocycles pour un recouvrement \mathfrak{U} donné. Si $\mathfrak{B} = \{V_\gamma\}_{\gamma \in J}$ est un recouvrement qui raffine \mathfrak{U} et $\tau : J \rightarrow I$ une application, on a alors une application τ^* qui étant donné un \mathfrak{U} -cocycle fournit un \mathfrak{B} -cocycle par la relation

$$(\tau^*g)_{\gamma\delta} = g_{\tau\gamma, \tau\delta} \text{ sur } V_\gamma \cap V_\delta$$

On a alors en passant aux classes d'équivalence, une application

$$t_{\mathfrak{B}}^{\mathfrak{U}} : H^1(\mathfrak{U}, G) \rightarrow H^1(\mathfrak{B}, G)$$

On peut alors montrer que l'application $t_{\mathfrak{B}}^{\mathfrak{U}}$ sont indépendante du choix de la fonction τ (Ceci sera montré dans la section 5).

Enfin on peut montrer que les $t_{\mathfrak{B}}^{\mathfrak{U}}$ forment un système inductif i.e. $t_{\mathfrak{U}}^{\mathfrak{U}} = Id$ et $t_{\mathfrak{B}}^{\mathfrak{U}} \circ t_{\mathfrak{B}'}^{\mathfrak{B}} = t_{\mathfrak{B}'}^{\mathfrak{U}}$ on définit alors l'ensemble des G -cocycles $H^1(M, G)$ comme limite inductive sur l'ensemble de recouvrement de M

$$H^1(M, G) = \varinjlim_{\mathfrak{U}} H^1(\mathfrak{U}, G)$$

Considérons maintenant G' un sous-groupe fermé de G qui est donc un groupe de Lie, soit $\iota : G' \rightarrow G$ un plongement lisse de G' dans G , on a alors une application induite $\iota_* : H^1(M, G') \rightarrow H^1(M, G)$ qui associe à un représentant $g'_{\alpha\beta}$ d'un G' -cocycle $[g]$ le représentant $\iota \circ g'_{\alpha\beta}$ du G -cocycle $[g]$, on a alors la définition suivante

Définition 3.4. On dit que le groupe structural G d'un espace fibré E au dessus de M peut être réduit à G' si il existe un G' -cocycle $[g']$ tel que $\iota_*[g'] = [g]$ pour $[g]$ le G -cocycle de E .

Énonçons à présent un théorème fondamental dans la théorie de la réduction de groupe structural, la démonstration de ce théorème utilise des résultats profonds sur la théorie des groupes de Lie et ne fera pas l'objet de cet exposé.

Théorème 3.1. *Soit M une variété paracompact, soit G un groupe de Lie réel et soit G' un sous-groupe fermé de G (qui est donc de Lie) tel que G/G' soit contractile alors le plongement canonique $\iota : G' \rightarrow G$ induit une bijection*

$$\iota_* : H^1(M, G') \rightarrow H^1(M, G)$$

Nous montrons enfin un théorème important dans la théorie des espaces fibrés qui permettra notamment de construire certaines classes caractéristiques

Théorème 3.2. *(Leray-Hirsh) Soit $\pi : E \rightarrow M$ un espace fibré de fibre F sur une variété lisse M de type fini, supposons qu'il existe une famille fini de classe de cohomologie $e_1, \dots, e_r \in H^*(E)$ tel que leurs restrictions à chaque fibre F engendrent librement $H^*(F)$ en tant que \mathbb{R} -module alors on a un isomorphisme*

$$H^*(E) \simeq H^*(M) \otimes \mathbb{R}\{e_1, \dots, e_r\}$$

Démonstration. Supposons pour commencer que $M = U \cup V$ ou U et V sont des ouverts, considérons l'application

$$\begin{aligned} \Psi : H^*(M) \otimes \mathbb{R}\{e_1, \dots, e_r\} &\longrightarrow H^*(E) \\ \omega \otimes \tau &\longmapsto \pi^* \omega \wedge \tau \end{aligned}$$

Nous allons montrer que cette application fournit l'isomorphisme voulu. Remarquons d'abord que si E est trivial alors Ψ est un isomorphisme, en effet dans ce cas on a que $E \simeq M \times F$ est donc $\{e_1, \dots, e_r\}$ engendrent $H^*(E) \simeq H^*(M) \otimes H^*(F)$ par la formule de Künneth.

Considérons alors la suite exacte de Mayer-Vietoris pour M exposé plus haut, cette suite induit une suite exacte

$$\begin{aligned} \dots \rightarrow \bigoplus_{q=0}^n H^q(U \cup V) \otimes \mathbb{R}\{e_1, \dots, e_r\}^{n-q} &\rightarrow \bigoplus_{q=0}^n (H^q(U) \oplus H^q(V)) \otimes \\ &\mathbb{R}\{e_1, \dots, e_r\}^{n-q} \rightarrow \bigoplus_{q=0}^n H^q(U \cap V) \otimes \mathbb{R}\{e_1, \dots, e_r\}^{n-q} \rightarrow \dots \end{aligned}$$

ou $\mathbb{R}\{e_1, \dots, e_r\}^{n-q}$ désigne le sous-module de $\mathbb{R}\{e_1, \dots, e_r\}$ des formes de degré $n - q$, on a alors le diagramme commutatif suivant (la vérification de la commutativité de ce diagramme est essentiellement la même que dans la preuve de la formule de Künneth)

$$\begin{array}{ccccc} \dots \rightarrow \bigoplus_{q=0}^n (H^q(U) \oplus H^q(V)) \otimes \mathbb{R}\{e_1, \dots, e_r\}^{n-q} & \longrightarrow & \bigoplus_{q=0}^n H^q(U \cap V) \otimes \mathbb{R}\{e_1, \dots, e_r\}^{n-q} & \xrightarrow{d_*} & \bigoplus_{q=0}^{n+1} H^q(U \cup V) \otimes \mathbb{R}\{e_1, \dots, e_r\}^{n+1-q} \rightarrow \dots \\ & & \downarrow \Psi & & \downarrow \Psi \\ \dots \rightarrow H^n(E|_U) \oplus H^n(E|_V) & \longrightarrow & H^n(E|_{U \cap V}) & \longrightarrow & H^{n+1}(E|_{U \cup V}) \rightarrow \dots \end{array}$$

Ainsi si U , V et $U \cap V$ sont diffeomorphe à \mathbb{R}^m , Ψ réalise un isomorphisme pour $H^n(E|_U) \oplus H^n(E|_V)$ et $H^n(E|_{U \cap V})$ on conclue alors par le lemme des cinq qu'on a bien un isomorphisme pour $H^n(E|_{U \cup V})$.

Supposons enfin que l'isomorphisme vaut pour une variété M admettant un

bon recouvrement à p ouverts, on conclue alors par l'argument de récurrence de Mayer-vietoris ainsi que le lemme de cinq. □

3.2 Fibrés vectoriels

Définition 3.5. On appel *Fibré vectoriel réel de rang n* un espace fibré E de fibre un espace vectoriel réel de dimension n , $V \simeq \mathbb{R}^n$ et de groupe structurale $GL(V) \simeq GL_n(\mathbb{R})$

Définition 3.6. Soit $\pi : E \rightarrow M$ et $\pi' : E' \rightarrow M'$ deux fibré vectoriel, un morphisme de fibré vectoriel est la donné d'un couple d'application lisses (u, f) avec $u : E \rightarrow E'$ et $f : M \rightarrow M'$ tel que u soit linéaire sur chaque fibre et que le diagramme suivant commute

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{u} & E' \\ \downarrow \pi & & \downarrow \pi' \\ M & \xrightarrow{f} & M' \end{array}$$

lorsque $M = M'$ un morphisme entre les fibré E et E' et alors donné par un couple (u, Id_M) vérifiant les mêmes propriétés.

Un isomorphisme de fibré vectoriel au dessus d'une même variété, est un morphisme $u : E \rightarrow E'$ tel qu'il existe un morphisme $v : E' \rightarrow E$ tel que $uv = Id_{E'}$ et $vu = Id_E$

Remarque 3.2.1. La linéarité de u s'exprime plus explicitement comme suit, soit $\{U_\alpha, \phi_\alpha\}$ et $\{U'_\alpha, \phi'_\alpha\}$ des trivialisations locales de E et E' , soit $(x, v) \in U_\alpha \times \mathbb{R}^n$ et soit $\lambda \in \mathbb{R}$ alors

$$p_2 \phi'_\alpha u \phi_\alpha^{-1}(x, \lambda v) = \lambda p_2 \phi'_\alpha u \phi_\alpha^{-1}(x, v)$$

ou $p_2 : U_\alpha \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ désigne la deuxième projection.

Un fibré vectoriel réel de rang n sera dit *trivial* si il est isomorphe au fibré $M \times \mathbb{R}^n$. On peut également définir la notion de fibré vectoriel complexe ou il suffit de remplacer \mathbb{R} par \mathbb{C} . Dans le cas de résultats généraux nous diront simplement fibré vectoriel sans préciser (réel ou complexe).

On note alors la catégorie des fibré vectoriel \mathbf{VB} et lorsque la base est fixé M on notera la catégorie des fibré vectoriel sur M par \mathbf{VB}/M .

Nous pouvons faire plusieurs constructions sur les fibré vectoriel la première étant le tiré en arrière. Soit $\pi : E \rightarrow M$ un fibré vectoriel de rang n et soit N une variété et $f : M \rightarrow N$ une application lisse, on définit *le tiré en arrière de E par f* comme l'ensemble :

$$f^{-1}E := \{(e, p) \in E \times N \mid \pi(e) = f(p)\}$$

Le fibré $f^{-1}E$ est alors de rang n sur N on de plus le diagramme commutatif suivant

$$\begin{array}{ccc} f^{-1}E & \xrightarrow{f_E} & E \\ \downarrow \pi' & & \downarrow \pi \\ N & \xrightarrow{f} & M \end{array}$$

ou $\pi' : (e, p) \mapsto p$ et $f_E : (e, p) \mapsto e$

Cette construction définit alors un foncteur entre les catégories \mathbf{VB}/M et \mathbf{VB}/N

$$\begin{array}{ccc} f^{-1}(-) : & \mathbf{VB}/M & \longrightarrow & \mathbf{VB}/N \\ & E & \longmapsto & f^{-1}E \\ & \text{Hom}_{\mathbf{VB}/M}(E, E') & \longmapsto & \text{Hom}_{\mathbf{VB}/N}(f^{-1}E, f^{-1}E') \\ & u & \mapsto & f^*(u) \end{array}$$

ou $f^*(u) : (e, p) \mapsto (u(e), p)$, enfin si $g_{ij} : U_i \cap U_j \rightarrow GL_n(\mathbb{R})$ sont des cocycles de E alors $f^*g_{ij} = g_{ij} \circ f : f^{-1}U_i \cap f^{-1}U_j \rightarrow GL_n(\mathbb{R})$ fournissent des cocycles de $f^{-1}E$.

Considérons à présent deux fibrés vectoriels $\pi : E \rightarrow M$ et $\pi' : E' \rightarrow M$ de rang n et m .

On définit le *fibré vectoriel somme directe* de E et E' qu'on note $E \oplus E'$ qui est alors un fibré vectoriel de rang $n + m$, dont la fibre en chaque point $p \in M$ est $E_p \oplus E'_p$, ou la projection sur M est défini par le diagramme commutatif suivant

$$\begin{array}{ccc} E \oplus E' & \xrightarrow{p_2} & E' \\ \downarrow p_1 & \searrow p & \downarrow \pi' \\ E & \xrightarrow{\pi} & M \end{array}$$

ou p_1 et p_2 sont les projections canoniques données respectivement par $(e, e') \mapsto e$ et $(e, e') \mapsto e'$. Étant donné des cocycles $g_{ij} : U_i \cap U_j \rightarrow GL_n(\mathbb{R})$ de E et $g'_{ij} : U_i \cap U_j \rightarrow GL_m(\mathbb{R})$ de E' on définit le cocycle de $E \oplus E'$ par

$$\begin{pmatrix} g_{ij} & 0 \\ 0 & g'_{ij} \end{pmatrix} : U_i \cap U_j \rightarrow GL_{n+m}(\mathbb{R})$$

On définit le *fibré produit tensoriel* $E \otimes E'$ qui est alors un fibré de rang nm et dont chaque fibre pour $p \in M$ est $E_p \otimes E'_p$, la projection est donné par $p : e \otimes e' \mapsto \pi(e) = \pi'(e')$. Étant donné des cocycles $g_{ij} : U_i \cap U_j \rightarrow GL_n(\mathbb{R})$ de E et $g'_{ij} : U_i \cap U_j \rightarrow GL_m(\mathbb{R})$ de E' on définit le cocycle de $E \otimes E'$ par

$$g_{ij} \otimes g'_{ij} : U_i \cap U_j \rightarrow GL_{nm}(\mathbb{R})$$

ou \otimes désigne le produit de Kronecker de deux matrices.

On définit le *fibré projectif* $P(E)$ au dessus de M comme l'espace fibré dont la fibre est donnée par $P(E_p)$ le projectivisé de la fibre E_p , la projection $\sigma : P(E) \rightarrow M$ est alors donnée par l'unique application qui fait commuter le diagramme

$$\begin{array}{ccc} M & \xleftarrow{\pi} & E \\ & \swarrow \sigma & \downarrow p \\ & & P(E) \end{array}$$

Le groupe structurale de $P(E)$ est alors donné par $PGL_n(\mathbb{R})$ dont les cocycles $\bar{g}_{\alpha\beta}$ sont donné par l'image des cocycles $g_{\alpha\beta}$ de E par l'application quotient.

Soit M une variété lisse la relation d'isomorphisme entre fibrés vectoriel réels fourni une relation d'équivalence sur la catégorie \mathbf{VB}/M , on peut ainsi considérer l'ensemble des classes d'isomorphisme de fibré vectoriel réel sur M d'un rang k donné, on note cet ensemble $Vect_k(M)$ on peut alors vérifier qu'on a ainsi un foncteur contravariant de la catégorie de variété lisse est application lisse \mathbf{Var} vers la catégorie des ensembles \mathbf{Ens}

$$\begin{array}{ccc} Vect_k(-) : & \mathbf{Var} & \longrightarrow & \mathbf{Ens} \\ & M & \longmapsto & Vect_k(M) \\ Hom_{\mathbf{Var}}(N, M) & \longmapsto & Hom_{\mathbf{Ens}}(Vect_k(M), Vect_k(N)) \\ f & \mapsto & f^{-1} \end{array}$$

Où f^{-1} désigne l'application induite sur les classes d'isomorphisme de fibré vectoriel par le foncteur de tiré en arrière par f .

Nous allons à présent montrer que l'ensemble $Vect_k(M)$ est en bijection avec l'ensemble $H^1(M, GL_k(\mathbb{R}))$ défini précédemment, pour cela nous avons besoin des lemmes suivant.

Lemme 3.3. *Soit $\{\phi_\alpha\}$ et $\{\phi'_\alpha\}$ deux trivialisations locales d'un même fibré vectoriel E pour un même recouvrement \mathfrak{U} alors les \mathfrak{U} -cocycles associées $g_{\alpha\beta}$ et $g'_{\alpha\beta}$ sont équivalents.*

Démonstration. Soit $x \in U_\alpha$ on a que $\phi_\alpha \phi'_\alpha^{-1}(x, \bullet) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ comme ϕ_α et ϕ'_α^{-1} sont des diffeomorphismes (de plus linéaire sur chaque fibre) on a $\phi_\alpha \phi'_\alpha^{-1}(x, \bullet) \in GL_n(\mathbb{R})$ ainsi on peut définir une application lisse $\lambda_\alpha : U_\alpha \rightarrow GL_n(\mathbb{R})$ par $\lambda_\alpha(x) = \phi_\alpha \phi'_\alpha^{-1}(x, \bullet)$ on vérifie alors qu'on a bien

$$g_{\alpha\beta} = \lambda_\alpha \phi'_\alpha \phi'_\beta^{-1} \lambda_\beta^{-1} = \lambda_\alpha g'_{\alpha\beta} \lambda_\beta^{-1}$$

□

Remarque 3.3.1. Remarquons que si $\{\phi_\alpha\}$ et $\{\phi'_\gamma\}$ étaient associé à des recouvrements différents \mathfrak{U} et \mathfrak{V} on peut trouver un recouvrement \mathfrak{B} qui les raffine ainsi les trivialisations $\{\phi_\alpha\}$ et $\{\phi'_\gamma\}$ restreintes à \mathfrak{B} fourniraient des \mathfrak{B} -cocycles $g_{\alpha\beta}$ et $g'_{\alpha\beta}$ équivalents ainsi ils représentent le même $GL_n(\mathbb{R})$ -cocycles dans $H^1(M, GL_n(\mathbb{R}))$, n étant le rang de E .

Lemme 3.4. *Deux fibrés vectoriels sur M de même rang n sont isomorphes si et seulement si leurs cocycles représentent le même $GL_n(\mathbb{R})$ -cocycle.*

Démonstration. Soit E et F deux fibré vectoriel sur M , soit $u : E \rightarrow F$ un isomorphisme de fibré, et soit $\{\phi_\alpha\}$ et $\{\phi'_\alpha\}$ leurs trivialisations locales respectives et associées $g_{\alpha\beta}$ et $g'_{\alpha\beta}$ les cocycles associé, puisque u est un isomorphisme on a que $\{u \circ \phi_\alpha\}$ est une trivialisations locale de F dont le cocycle est donné par

$$g''_{\alpha\beta}(x) = u_x g_{\alpha\beta} u_x^{-1}$$

ou u_x est la restriction de u à une fibre au dessus de $x \in M$, on a alors que $g''_{\alpha\beta}$ est équivalent à $g_{\alpha\beta}$ (en prenant $\lambda_\alpha : x \mapsto u_x$) il est également équivalent à $g'_{\alpha\beta}$ par le lemme qui précède, ainsi $g_{\alpha\beta}$ et $g'_{\alpha\beta}$ sont équivalents. Réciproquement supposons que $g_{\alpha\beta}$ et $g'_{\alpha\beta}$ soient équivalents, il existe alors une famille de fonctions $\lambda_\alpha : U_\alpha \rightarrow GL_n(\mathbb{R})$ tel que

$$g_{\alpha\beta} = \lambda_\alpha g'_{\alpha\beta} \lambda_\beta^{-1}$$

Définissons alors $u_\alpha : E|_{U_\alpha} \rightarrow F|_{U_\alpha}$ par la relation

$$u_\alpha = \phi'_\alpha^{-1} \lambda_\alpha^{-1} \phi_\alpha$$

défini ainsi u_α est évidemment linéaire sur chaque fibre il est de plus inversible, enfin on a d'après l'équivalence des cocycles que u_α coïncide avec u_β sur $U_\alpha \cap U_\beta$ en effet

$$\begin{aligned} \phi_\alpha \phi_\beta^{-1} &= \lambda_\alpha \phi'_\alpha \phi'_\beta^{-1} \lambda_\beta^{-1} \\ \Rightarrow u_\alpha &= \phi'_\alpha^{-1} \lambda_\alpha^{-1} \phi_\alpha = \phi'_\beta^{-1} \lambda_\beta^{-1} \phi_\beta = u_\beta \end{aligned}$$

ainsi $u = \{u_\alpha\}$ défini un isomorphisme entre E et F . □

Nous allons noter les éléments de $Vect_k(M)$ par $[E]$ ou E est un représentant de la classe d'isomorphismes $[E]$ et par $[g_{\alpha\beta}]$ les éléments $H^1(M, GL_k(\mathbb{R}))$ ou $g_{\alpha\beta}$ est un cocycle associé au représentant E de la classe $[E]$, on peut alors énoncer le théorème suivant

Théorème 3.5. *Soit M une variété lisse alors l'application*

$$\begin{array}{ccc} Vect_k(M) & \longrightarrow & H^1(M, GL_k(\mathbb{R})) \\ [E] & \longmapsto & [g_{\alpha\beta}] \end{array}$$

est une bijection.

Démonstration. Grâce au lemme qui précède cette association défini bien une application qui est de plus injective. Pour la surjectivité soit $g_{\alpha\beta}$ un \mathfrak{U} -cocycle représentant un élément de $H^1(M, GL_k(\mathbb{R}))$ pour un recouvrement $\mathfrak{U} = \{U_\alpha\}$ on peut alors construire un fibré vectoriel de rang k , donner par l'ensemble $(\coprod U_\alpha \times \mathbb{R}^k) / (x, y) \sim (x, g_{\alpha\beta}(x)y)$ pour $(x, y) \in U_\beta \times \mathbb{R}^k$ et $(x, g_{\alpha\beta}(x)y) \in U_\alpha \times \mathbb{R}^k$ la classe d'isomorphisme d'un tel fibré fourni un élément de $Vect_k(M)$ ce qui conclue la preuve. □

Définition 3.7. Une métrique Riemannienne sur un fibré vectoriel $\pi : E \rightarrow M$ est la donné d'une application lisse $Q : E \oplus E \rightarrow \mathbb{R}$ tel que pour tout $p \in M$ $Q|(E_p \times E_p)$ soit un produit scalaire Euclidien sur E_p .

Lemme 3.6. *Tout fibré vectoriel sur une variété paracompact admet une métrique Riemannienne.*

Démonstration. Soit $\{U_\alpha, \phi_\alpha\}$ une trivialisaton locale de E alors $E|_{U_\alpha}$ admet une métrique Riemannienne Q_α donné explicitement par

$$Q_\alpha(e, f) = \langle p_2(\phi_\alpha(e)), p_2(\phi_\alpha(f)) \rangle$$

pour $(e, f) \in E \oplus E$ ou p_2 désigne la deuxième projection $U_\alpha \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ et $\langle \cdot, \cdot \rangle$ le produit scalaire usuel sur \mathbb{R}^n . On se donne alors une partition de l'unité $\{\rho_\alpha\}$ subordonné au recouvrement $\{U_\alpha\}$ on obtient alors une métrique Riemannienne globale sur E donnée par $Q = \sum_\alpha \rho_\alpha Q_\alpha$ \square

Étant donné E un fibré vectoriel réel de rang k sur une variété M (paracompact), muni d'une métrique Riemannienne, on peut se donner comme trivialisations de E des ϕ_α qui envoient tout repère orthonormé de E (pour la métrique choisie) sur un repère orthonormé de \mathbb{R}^k ainsi les cocycles $g_{\alpha\beta}$ associés à ϕ_α appartiennent au sous-groupe $O(k)$, on a donc d'après le lemme 3.3 que tout cocycle de E est équivalent à un cocycle à valeurs dans $O(k)$, ainsi le groupe structural peut être réduit à $O(k)$ on a ainsi la série de bijection

$$Vect_k(M) \simeq H^1(M, GL_k(\mathbb{R})) \simeq H^1(M, O(k))$$

(\simeq est ici une simple bijection d'ensemble puisqu'on n'a pas fixé de structure particulière sur les ensembles en question)

Définition 3.8. Un fibré vectoriel réel de rang n sera dit orientable si son groupe structural peut être réduit à $GL_n^+(\mathbb{R})$.

On notera l'ensemble des classes d'isomorphisme de fibré vectoriel orienté de rang fixé k , sur une variété M , $Vect_k^+(M)$. D'après ce qui précède le groupe structural d'un fibré vectoriel orienté de rang k peut être réduit à $SO(k)$ on a ainsi la série de bijection

$$Vect_k^+(M) \simeq H^1(M, GL_k^+(\mathbb{R})) \simeq H^1(M, SO(k))$$

Lemme 3.7. L'espace total d'un fibré vectoriel orientable E de rang n sur une variété orientable de dimension m est une variété orientable

Démonstration. Soit $\{U_\alpha, \psi_\alpha\}_{\alpha \in I}$ un atlas orienté dont les ouverts sont difféomorphes à \mathbb{R}^m et dont on note les fonctions de transition $h_{\alpha\beta}$ et soit

$$\phi_\alpha : E|_{U_\alpha} \xrightarrow{\sim} U_\alpha \times \mathbb{R}^n$$

des trivialisations associées au recouvrement $\{U_\alpha\}$ avec des fonctions de transitions $g_{\alpha\beta}$. On peut alors fournir un atlas sur E donné par

$$(\psi_\alpha \times 1) \circ \phi_\alpha : E|_{U_\alpha} \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$$

dont les fonctions de transitions sont données par

$$\begin{aligned} (\psi_\alpha \times 1) \circ \phi_\alpha \phi_\beta^{-1} \circ (\psi_\beta^{-1} \times 1) : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \\ (x, y) &\longmapsto (h_{\alpha\beta}(x), g_{\alpha\beta}(\psi_\beta^{-1}(x))(y)) \end{aligned}$$

La jacobienne de ces fonctions de transition est alors donnée par

$$\begin{pmatrix} D(h_{\alpha\beta}) & * \\ 0 & g_{\alpha\beta}(\psi_{\beta}^{-1}(x)) \end{pmatrix}$$

ou $D(h_{\alpha\beta})$ désigne la jacobienne de $h_{\alpha\beta}$ déterminant de cette matrice est alors évidemment positive puisque $\det(D(h_{\alpha\beta})) > 0$ car l'atlas $\{U_{\alpha}, \psi_{\alpha}\}$ est orienté et $\det(g_{\alpha\beta}) > 0$ car le fibré E est orienté. \square

L'atlas sur E que nous avons utiliser dans cette preuve, fournis une orientation canonique sur E qu'on appel *orientation produit locale* donné par

$$\left\{ \pi^{-1}(U_{\alpha}), (\psi_{\alpha} \times 1) \circ \phi_{\alpha} : \pi^{-1}(U_{\alpha}) \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \right\}$$

Signalons enfin (sans démonstration) un théorème qu'il est important d'évoquer dans tout exposé sur les fibrés vectoriels.

Théorème 3.8. *Soit $f, g : N \rightarrow M$ deux applications homotopes entre variété paracompacts et soit $\pi : E \rightarrow M$ un fibré vectoriel sur M alors les fibré vectoriel $f^{-1}E$ et $g^{-1}E$ sont isomorphes.*

Corollaire 3.8.1. *Un fibré vectoriel sur une variété contractile est trivial.*

3.3 Fibré en sphère

Définition 3.9. On appel Fibré en sphère de rang n (ou Fibré en n -sphère) un espace fibré $\pi : S \rightarrow M$ de fibre S^n

Le groupe structurale d'un tel espace fibré varie selon le cadre de travail, en effet ce dernier peut être le groupe $Diff(S^n)$ ou encore $O(n+1)$, nous allons ici nous intéresser principalement aux fibrés en sphère provenant de fibré vectoriel. Notons la catégorie des fibré en sphère sur une variété donné M , \mathbf{SB}/M . Pour construire un fibré en n -sphère à partir d'un fibré vectoriel E de rang $n+1$, on choisie tout d'abord une métrique Riemannienne \langle, \rangle global sur E , on considère ensuite le fibré $E^0 = E \setminus \sigma_0(M)$ sur M on définit alors l'ensemble

$$S(E) = \{h \in E^0 \mid \|h\| = 1\}$$

$S(E)$ s'incarne alors comme espace fibré en n -sphère sur M , dont les fibres sont les sphère des fibres de E et dont les trivialisations locale sont les restriction de celles de E à $S(E)$ de plus comme le groupe structurale de E peut être réduit à $O(n+1)$, le fibré $S(E)$ hérite de manière évidente du même groupe structurale. On peut noter pour chaque $p \in M$ les applications

$$r_p : \begin{array}{ccc} E_p^0 & \longrightarrow & S(E_p) \\ v & \longmapsto & \frac{v}{\|v\|} \end{array} \quad \text{et} \quad \iota_p : \begin{array}{ccc} S(E_p) & \longrightarrow & E_p \\ x & \longmapsto & x \end{array}$$

qui induisent des applications $r : E^0 \rightarrow S(E)$ et $\iota : S(E) \rightarrow E$ On peut alors résumer la situation en disant qu'on a un foncteur :

$$\begin{array}{ccc}
S(-) : & \mathbf{VB}/M & \longrightarrow & \mathbf{SB}/M \\
& \pi : E \rightarrow M & \longmapsto & \pi \circ \iota : S(E) \rightarrow M \\
& \text{Hom}_{\mathbf{VB}}(E, E') & \longmapsto & \text{Hom}_{\mathbf{SB}}(S(E), S(E')) \\
& f & \mapsto & r' \circ f \circ \iota
\end{array}$$

Définition 3.10. On dit qu'un fibré en n -sphère $\pi : S \rightarrow M$ est orientable si il existe un recouvrement $\{U_\alpha\}$ de M et des générateurs $[\sigma_\alpha]$ de $H^n(S|_{U_\alpha})$ tel $[\sigma_\alpha] = [\sigma_\beta]$ sur $H^n(S|_{U_\alpha \cap U_\beta})$

Fixé une orientation sur S revient donc à un choix d'une famille $\{[\sigma_\alpha]\}$ subordonnée à $\{U_\alpha\}$.

Proposition 3.1. Un fibré vectoriel E est orientable si et seulement si son fibré en sphère associé $S(E)$ est orientable.

Démonstration. Soit E un fibré vectoriel de rang $n+1$ orientable, ses fonctions de transitions $g_{\alpha\beta}$ associées à des trivialisations $\{U_\alpha, \phi_\alpha\}$ sont à valeur dans $SO(n+1)$. Fixons σ un générateur sur $H^n(S^n)$ et soit la projection canonique

$$\rho_\alpha : U_\alpha \times S^n \rightarrow S^n$$

Notons $\pi : S(E) \rightarrow M$, et définissons $[\sigma_\alpha] \in H^n(S(E)|_{U_\alpha})$ par

$$[\sigma_\alpha] = \phi_\alpha^* \rho_\alpha^* [\sigma]$$

Ainsi on a pour $p \in U_\alpha \cap U_\beta$

$$\begin{aligned}
[\sigma_\alpha]|_{\pi^{-1}(p)} &= [\sigma_\alpha]|_{\pi^{-1}(p)} \\
\Leftrightarrow [\sigma] &= ((\phi_\beta|_{\pi^{-1}(p)})^*)^{-1} (\phi_\alpha|_{\pi^{-1}(p)})^* [\sigma] \\
&\Leftrightarrow [\sigma] = g_{\alpha\beta}(p)^* [\sigma]
\end{aligned}$$

On remarque enfin qu'étant donné un élément $g \in SO(n+1)$ on a

$$\int_{S^n} g^* \sigma = \int_{g(S^n)} \sigma = \int_{S^n} \sigma = 1$$

ainsi $g^* \sigma$ et σ représentent la même classe dans $H^n(S^n)$ et d'après la série d'équivalence précédente on a bien $[\sigma_\alpha] = [\sigma_\beta]$ sur $U_\alpha \cap U_\beta$. Inversement soit $\{U_\alpha, [\sigma_\alpha]\}$ une orientation sur $S(E)$, et fixons σ une orientation sur S^n dans \mathbb{R}^{n+1} . Considérons alors une trivialisations de $S(E)$

$$\phi_\alpha : S(E)|_{U_\alpha} \xrightarrow{\sim} U_\alpha \times S^n$$

de tel sorte que ϕ_α préserve la métrique riemannienne sur E et que $[\sigma_\alpha] = \phi_\alpha^* \rho_\alpha^* [\sigma]$ on a alors pour $p \in U_\alpha \cap U_\beta$ que $[\sigma] = g_{\alpha\beta}(p)^* [\sigma]$ ce qui implique que $g_{\alpha\beta}(p) \in SO(n+1)$ et conclut la preuve. \square

Lemme 3.9. Un fibré vectoriel E est orientable si et seulement si son fibré déterminant $\det(E)$ est orientable.

Démonstration. Soit $g_{\alpha\beta}$ le cocycles de E , alors $det(g_{\alpha\beta})$ sont les les cocycles de $det(E)$, ainsi $g_{\alpha\beta} \in SO(n+1)$ si et seulement si $det(g_{\alpha\beta}) > 0$ le lemme s'en suit. \square

Théorème 3.10. *Tout fibré vectoriel sur une variété simplement connexe est orientable.*

Démonstration. Soit $det(E)$ le fibré déterminant d'un fibré vectoriel E sur une variété simplement connexe M alors $S(det(E))$ fourni un revêtement à deux feuillé au dessus de M , D'après le lemme et la proposition qui précédent, le fibré E est orientable si et seulement si $S(det(E))$ est non-connexe, enfin comme toute variété simplement connexe n'admet pas de revêtement connexe à deux feuillé, le théorème s'en suit. \square

3.4 Fibré vectoriel orienté de rang 2

Soit $\pi : E \rightarrow M$ un fibré vectoriel réel orienté de rang 2, son groupe structural peut alors être réduit à $SO(2) \simeq U(1)$ qui est un sous-groupe de $GL_1(\mathbb{C}) \simeq \mathbb{C}^*$, ainsi E peut être vue comme fibré vectoriel complexe de rang 1 de groupe structural $U(1)$. On a alors la série de bijection suivante

$$Vect_2^+(M) \simeq H^1(M, SO(2)) \simeq H^1(M, U(1))$$

De plus remarquons qu'on à les difféomorphisme $\mathbb{C}^*/U(1) \simeq \mathbb{R}_+^* \simeq \mathbb{R}$ alors par le théorème 3.1 on a la bijection

$$Vect_2^+(M) \simeq H^1(M, \mathbb{C}^*)$$

Cette bijection est en fait un isomorphisme de groupe, en effet $Vect_2^+(M)$ est muni d'une structure de groupe, étant donnée deux fibré vectoriel orienté de rang 2 E et F , on peut les regarder comme des fibré en droite complexe, alors $E \otimes_{\mathbb{C}} F$ est un fibré en droite complexe, le produit $\otimes_{\mathbb{C}}$ est alors évidemment associatif.

L'élément neutre de $Vect_2^+(M)$ est alors donné par la classe d'isomorphisme du fibré trivial $M \times \mathbb{C} \simeq M \times \mathbb{R}^2$

De plus un fibré E admet un inverse donné par le dual complexe E^* de E en effet si $g_{\alpha\beta} \in U(1)$ sont des cocycles de E alors $g_{\alpha\beta} g_{\alpha\beta}^\dagger$ fournissent des cocycle $E \otimes_{\mathbb{C}} E^*$ or $g_{\alpha\beta} g_{\alpha\beta}^\dagger = 1$ ainsi $E \otimes_{\mathbb{C}} E^* \simeq M \times \mathbb{C}$

Passons à present à un lemme concernant les sections d'un fibré de rang 2

Lemme 3.11. *Soit $\pi : E \rightarrow M$ un fibré vectoriel complexe de rang 1, si il existe une section lisse jamais nulle $s : M \rightarrow E$ alors E est trivial.*

Démonstration. Soit $s_1 : M \rightarrow E$ une section lisse jamais nulle on peut alors produire une section $s_2 = is_1$ ou $i = \sqrt{-1}$, en regardant E comme un fibré vectoriel réel de rang 2 orienté, on a que $s_1(p), s_2(p)$ vues comme vecteurs réel fournissent une base de l'espace vectoriel réel fibre E_p pour chaque $p \in M$, ainsi pour $e \in E_p$ on a que $e = \lambda_1(e)s_1(p) + \lambda_2(e)s_2(p)$ ou $\lambda_1(e), \lambda_2(e) \in \mathbb{R}$ sont des fonctions linéaires lisses défini sur E puisque s_1 et s_2 ne sont jamais nulle, on a alors un isomorphisme

$$\begin{aligned} \Psi : E &\longrightarrow M \times \mathbb{R}^2 \\ e &\longmapsto (\pi(e), \lambda_1(e)s_1(\pi(e)) + \lambda_2(e)s_2(\pi(e))) \end{aligned}$$

□

Exemple 3.1 (Fibré universel). Soit V un espace vectoriel complexe de dimension n , soit $P(V)$ l'espace projectif associé, on a alors un fibré naturel en droite complexe sur $P(V)$ donné par l'ensemble et la projection

$$S = \{(v, l) \in V \times P(V) \mid v \in l\}$$

$$\begin{aligned} \pi : S &\longrightarrow P(V) \\ (v, l) &\longmapsto l \end{aligned}$$

On appelle cet espace *Fibré universel* ou *Fibré tautologique*

Nous énonçons enfin un théorème utile

Théorème 3.12. *Soit $\pi : E \rightarrow M$ un fibré vectoriel orienté de rang 2 sur une variété de type fini, alors il existe un entier $n > 0$ et une application lisse $f : M \rightarrow \mathbb{C}P^n$ tel que $E \simeq f^{-1}S_n$, où S_n désigne le fibré universel au dessus de $\mathbb{C}P^n$.*

4 Classes caractéristiques

On s'intéresse dans ce qui suit à trois classes caractéristiques associées aux fibrés vectoriels, notamment les classes de Thom, d'Euler et de Chern. Ces classes de cohomologie ainsi que d'autres (qui ne seront pas exposés) jouent un rôle fondamentale dans la théorie des espaces fibrés. Les faits non démontrés pourront trouver leurs démonstrations dans les écrits de R.Bott et L.Tu [1] et F.Hirzebruch [2] ou encore J.Milnor et J.D.Stasheff [6].

4.1 Classe de Thom

Soit M une variété de dimension m , et soit $\pi : E \rightarrow M$ un fibré vectoriel orienté de rang n , on définit les formes à support compact vertical sur E comme suit

Définition 4.1. Une q -forme ω sera dite à support compact vertical sur E si pour tout compact $K \subset M$, $\pi^{-1}(K) \cap \text{Supp}(\omega)$ est compact. On note alors le complexe des formes à support compact vertical par $\Omega_{cv}^*(E)$.

Une forme $\omega \in \Omega_{cv}^q(E)$ ainsi défini est donc à support compact sur chaque fibre, en effet $\text{Supp}(\omega|_{\pi^{-1}(p)}) \subset \pi^{-1}(p) \cap \text{Supp}(\omega)$ qui est compact. On peut alors définir la cohomologie du complexe $(\Omega_{cv}^*(E), d)$ que l'on notera $H_{cv}^*(E)$ appelée cohomologie à support compact vertical.

Nous allons à présent définir une *Intégration le long des fibres* $\pi_* : \Omega_{cv}^*(E) \rightarrow$

$\Omega^{*-n}(M)$, pour cela considérons l'orientation produit locale $\{\pi^{-1}(U_\alpha), (\psi_\alpha \times 1) \circ \phi_\alpha\}$ pour une trivialisation orienté $\{U_\alpha, \phi_\alpha\}_{\alpha \in I}$ et un atlas orienté sur M $\{U_\alpha, \psi_\alpha\}_{\alpha \in I}$ on note par x_1, \dots, x_m les coordonnées d'un point $(p, v) \in E$ sur U_α et par t_1, \dots, t_n les coordonnées de ce même point sur la fibre fournis par l'orientation produit locale. Ainsi pour une forme $\omega \in \Omega_{cv}^*(E)$ on peut écrire sa restriction à $E|_{U_\alpha}$ que l'on note ω_α en fonction des coordonnées locales, une telle forme peut donc être localement de deux types :

$$(I) \quad \omega_\alpha = (\pi^* \phi) f(x_1, \dots, x_m, t_1, \dots, t_n) dt_{i_1} \dots dt_{i_r} \text{ avec } r < n$$

$$(II) \quad \omega_\alpha = (\pi^* \phi) f(x_1, \dots, x_m, t_1, \dots, t_n) dt_1 \dots dt_n$$

ou ϕ est une forme sur M .

On définit alors l'application π_* localement par :

$$(I) \quad (\pi^* \phi) f(x, t_1, \dots, t_n) dt_{i_1} \dots dt_{i_r} \mapsto 0 \text{ avec } r < n$$

$$(II) \quad (\pi^* \phi) f(x, t_1, \dots, t_n) dt_1 \dots dt_n \mapsto \phi \int_{\mathbb{R}^n} f(x, t) dt_1 \dots dt_n$$

Nous énonçons dans ce qui suit les principal propriété de π_* .

Lemme 4.1. *La famille $\{\pi_* \omega_\alpha\}_{\alpha \in I}$ se recolle en une forme $\pi_* \omega$ globale sur M*

Démonstration. Puisque ω est une forme globale sur E si elle est de type I sur un ouvert U_α elle l'est sur chacun des ouverts du recouvrement auquel cas $\pi_* \omega = 0$ sur tout M . Sinon posons

$$\omega_\alpha = (\pi^* \phi) f(x_1, \dots, x_m, t_1, \dots, t_n) dt_1 \dots dt_n \text{ sur } E|_{U_\alpha}$$

$$\text{et } \omega_\beta = (\pi^* \tau) g(y_1, \dots, y_m, u_1, \dots, u_n) du_1 \dots du_n \text{ sur } E|_{U_\beta}$$

ou $y_1, \dots, y_m, u_1, \dots, u_n$ désigne les coordonnées locales associées à la trivialisation U_β, ϕ_β .

Puisque ω est globale sur E , on a que $\omega_\alpha(p, v) = \omega_\beta(p, v)$ sur $U_\alpha \cap U_\beta$ après avoir écrit (p, v) dans les même coordonnées dans les deux coté de l'équation, pour cela on a déjà que $y_1, \dots, y_m = \psi_\beta \psi_\alpha^{-1}(x_1, \dots, x_m)$, de plus on a supposer le fibré E orienté ce qui implique que pour $p \in U_\alpha \cap U_\beta$ on a une transformation $g_{\beta\alpha}(p) \in GL_n^+(\mathbb{R})$ qui associe $u_1, \dots, u_n \mapsto t_1, \dots, t_n$ on peut alors écrire :

$$\omega_\alpha(p, v) = (\pi^* \tau) g(\psi_\beta \psi_\alpha^{-1}(x_1, \dots, x_m), g_{\alpha\beta}(p)(t_1, \dots, t_n)) g_{\alpha\beta}(p) dt_1 \dots dt_n + Res$$

ou le terme résiduel Res est de la forme

$$\sum_i \pm (\pi^* \tau) g(\psi_\beta \psi_\alpha^{-1}(x_1, \dots, x_m), g_{\alpha\beta}(p)(t_1, \dots, t_n)) (dg_{\alpha\beta}) dt_1 \dots \widehat{dt}_i \dots dt_n$$

d'après la définition locale de π_* on a que $\pi_*(Res) = 0$, ainsi on obtient

$$\begin{aligned} \pi_* \omega_\alpha &= \tau \int_{\mathbb{R}^n} g(y_1, \dots, y_m, g_{\alpha\beta}(p)(t_1, \dots, t_n)) g_{\alpha\beta}(p) dt_1 \dots dt_n \\ &= \tau \int_{\mathbb{R}^n} g(y_1, \dots, y_m, u_1, \dots, u_n) du_1 \dots du_n = \pi_* \omega_\beta \end{aligned}$$

par la formule de changement de variable, ce qui conclut la preuve. \square

Proposition 4.1. L'intégration le long des fibres π_* commute avec d

Démonstration. Soit $\{U_\alpha, \phi_\alpha\}_{\alpha \in I}$ une trivialisaton de E et $\{\rho_\alpha\}$ une partition de l'unité sur M subordonnée à $\{U_\alpha\}$, soit alors $\omega \in \Omega_{cv}^*(E)$ comme $\omega = \sum \rho_\alpha \omega$ il suffit de montrer la proposition pour $\rho_\alpha \omega$ que l'on notera ω pour simplifier, commençons par considérer le cas de type (II) ω s'écrit alors sous la forme :

$$(\pi^* \phi) f(x_1, \dots, x_m, t_1, \dots, t_n) dt_1 \dots dt_n$$

Ainsi on a d'une part

$$\begin{aligned} d\pi_* \omega &= d(\phi \int f(x, t) dt_1 \dots dt_n) \\ &= (d\phi) \int f(x, t) dt_1 \dots dt_n + (-1)^{\deg \phi} \phi \sum_i dx_i \int \frac{\partial f}{\partial x_i} dt_1 \dots dt_n \end{aligned}$$

D'autre part

$$\begin{aligned} \pi_* d\omega &= \pi_* \left((\pi^* d\phi) f dt_1 \dots dt_n + (-1)^{\deg \phi} \phi \sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i dt_1 \dots dt_n \right) \\ &= (d\phi) \int f(x, t) dt_1 \dots dt_n + (-1)^{\deg \phi} \phi \sum_i dx_i \int \frac{\partial f}{\partial x_i} dt_1 \dots dt_n \end{aligned}$$

Ainsi on a bien $\pi_* d = d\pi_*$ sur les formes de type (II)

Lorsque ω est de type (I) on a alors $d\pi_* \omega = 0$, d'autre part

$$\pi_* d\omega = (-1)^{\deg \phi} \sum_i \pi_* \left((\pi^* \phi) \frac{\partial f}{\partial t_i} dt_i dt_{i_1} \dots dt_{i_r} \right)$$

si $dt_i dt_{i_1} \dots dt_{i_r} \neq \pm dt_1 \dots dt_n$ alors $\pi_* d\omega = 0$ autrement on a également $\int \frac{\partial f}{\partial t_i} dt_i dt_{i_1} \dots dt_{i_r} = 0$ puisque f est à support compact sur les directions t_i ainsi on a dans les deux cas $\pi_* d\omega = d\pi_* \omega = 0$ ce qui conclut la preuve. \square

Proposition 4.2 (Formule de projection). Soit τ une forme sur M et ω une forme à support compact vertical on a alors

1. $\pi_*((\pi^* \tau) \wedge \omega) = \tau \wedge \pi_* \omega$
2. Si de plus M est orienté, $\omega \in \Omega_{cv}^q(E)$ et $\tau \in \Omega_c^{m+n-q}(M)$ alors :

$$\int_E (\pi^* \tau) \wedge \omega = \int_M \tau \wedge \pi_* \omega$$

Démonstration. 1. Il est claire qu'il suffit de montrer l'égalité localement sur un ouvert trivialisant. Supposons d'une part que ω soit de type (I) on a alors

$$\pi_*((\pi^* \tau) \wedge \omega) = \pi_*((\pi^* \tau) \phi) f(x, t) dt_{i_1} \dots dt_{i_r} = 0 = \tau \wedge \pi_* \omega$$

D'autre part si ω est de type (II) on a

$$\pi_*((\pi^* \tau) \wedge \omega) = \tau \phi(x, t) dt_1 \dots dt_n = \tau \wedge \pi_* \omega$$

2. Soit $\{U_\alpha, \phi_\alpha\}$ une trivialisaton orienté de E commençons par remarquer que

$$\begin{aligned}\int_E (\pi^* \tau) \wedge \omega &= \sum_{\alpha} \int_{E|_{U_{\alpha}}} (\pi^* \tau) \wedge (\rho_{\alpha} \omega) \\ \int_M \tau \wedge \pi_* \omega &= \sum_{\alpha} \int_{U_{\alpha}} \tau \wedge \pi_* (\rho_{\alpha} \omega)\end{aligned}$$

$Supp((\pi^* \tau) \wedge \rho_{\alpha} \omega)$ et $Supp(\tau \wedge \pi_*(\rho_{\alpha} \omega))$ sont évidemment compact en tant que fermé dans $Supp(\tau) \cap Supp(\rho_{\alpha} \omega)$ et $Supp(\tau)$ respectivement, de plus il est clair que ω est de type (II) (sinon le résultat n'a pas lieu d'être) ainsi par Fubini on a

$$\int_{E|_{U_{\alpha}}} (\pi^* \tau) \wedge (\rho_{\alpha} \omega) = \int_{U_{\alpha}} \tau \wedge \rho_{\alpha} \phi \int_{\mathbb{R}^n} f(x, t) dt_1 \dots dt_n = \int_{U_{\alpha}} \tau \wedge \pi_*(\rho_{\alpha} \omega)$$

On conclut alors en sommant sur α et en combinant les deux jeux d'égalités. \square

Grâce aux différentes propriétés de π_* nous pouvons à présent passer à la démonstration de l'isomorphisme de Thom.

Théorème 4.2 (Isomorphisme de Thom). *Soit $\pi : E \rightarrow M$ un fibré vectoriel orienté de rang n sur une variété de type fini, alors*

$$H_{cv}^*(E) \simeq H^{*-n}(M)$$

Démonstration. Soit U et V deux ouverts M , on a alors la suite exacte suivante,

$$0 \rightarrow \Omega_{cv}^*(E|_{U \cup V}) \xrightarrow{r} \Omega_{cv}^*(E|_U) \oplus \Omega_{cv}^*(E|_V) \xrightarrow{\delta} \Omega_{cv}^*(E|_{U \cap V}) \rightarrow 0$$

On peut alors d'après le théorème de Mayer-Vietoris le diagramme suivant

$$\begin{array}{ccccccc} \dots & \longrightarrow & H_{cv}^q(E|_U) \oplus H_{cv}^q(E|_V) & \xrightarrow{\delta} & H_{cv}^q(E|_{U \cap V}) & \xrightarrow{d^*} & H_{cv}^{q+1}(E|_{U \cup V}) \longrightarrow \dots \\ & & \downarrow \pi_* & & \downarrow \pi_* & & \downarrow \pi_* \\ \dots & \longrightarrow & H^{q-n}(U) \oplus H^{q-n}(V) & \xrightarrow{\delta} & H^{q-n}(U \cap V) & \xrightarrow{d^*} & H^{q+1-n}(U \cup V) \longrightarrow \dots \end{array}$$

Ce diagramme est commutatif, (nous montrons ici seulement la commutativité des carrés représentés ci-dessus la démonstration du reste étant essentiellement la même) soit $(\omega, \tau) \in H_{cv}^q(E|_U) \oplus H_{cv}^q(E|_V)$ alors

$$\pi_* \circ \delta(\omega, \tau) = \pi_*(\omega|_{U \cap V}) - \pi_*(\tau|_{U \cap V}) = \pi_* \omega|_{U \cap V} - \pi_* \tau|_{U \cap V} = \delta \circ \pi_*(\omega, \tau)$$

D'autre part considérons $\omega \in H_{cv}^q(E|_{U \cap V})$ on a alors

$$\pi_* d^* \omega = \pi_*(\pi^*(d\rho_U)\omega) = (d\rho_U)\pi_* \omega = d^* \pi_* \omega$$

Si U, V et $U \cap V$ sont difféomorphe à \mathbb{R}^m alors $E|_U, E|_V$ et $E|_{U \cap V}$ sont triviaux, ainsi d'après le lemme de Poincaré à support compact vertical π_* réalise un isomorphisme pour U, V et $U \cap V$ on conclut alors en utilisant le lemme des cinq et l'argument de récurrence de Mayer-Vietoris sur la cardinalité d'un bon recouvrement. \square

On peut à présent considérer le morphisme inverse de π_* que l'on notera

$$\mathcal{T} : H^*(M) \xrightarrow{\sim} H_{cv}^{*+n}(E)$$

Définition 4.2. On définit la classe de Thom $\Phi \in H_{cv}^n(E)$ comme la classe de cohomologie image de $1 \in H^0(M)$ par \mathcal{T}

Il est alors équivalent définir Φ comme l'unique solution de l'équation $\pi_*\Phi = 1$ dans $H_{cv}^n(E)$, on peut alors d'après la formule de projection expliciter l'application \mathcal{T} en écrivant pour $\omega \in H^*(M)$

$$\mathcal{T}(\omega) = \pi^*(\omega) \wedge \Phi$$

Une conséquence claire de la définition ci-dessus est la proposition suivante

Proposition 4.3. La classe de Thom $\Phi \in H_{cv}^n(E)$ est l'unique classe de cohomologie qui se restreint en un générateur de $H_c^n(F)$ sur chaque fibre F .

Proposition 4.4. Soit $\pi_1 : E \rightarrow M$ et $\pi_2 : F \rightarrow M$ deux fibré vectoriel orienté sur M , notons par $p_1 : E \oplus F \rightarrow E$ et $p_2 : E \oplus F \rightarrow F$ les projections canoniques, la classe de Thom de leurs somme direct est alors

$$\Phi(E \oplus F) = p_1^*\Phi(E) \wedge p_2^*\Phi(F)$$

Démonstration. Considérons le diagramme suivant,

$$\begin{array}{ccc} E \oplus F & \xrightarrow{p_2} & F \\ \downarrow p_1 & \searrow \pi & \downarrow \pi_2 \\ E & \xrightarrow{\pi_1} & M \end{array}$$

Ce diagramme est commutatif par définition du fibré somme ou π désigne la fibration de $E \oplus F$ sur M de plus en regardant $E \oplus F$ comme un fibré au dessus de F (resp. E) on a d'après le théorème de Fubini que l'intégration le long des fibres π_* se décompose en l'intégration le long des fibres de F (resp. E) puis le long des fibre de E (resp. F) par p_{2*} (resp. p_{1*}) on a ainsi la relation

$$\pi_* = \pi_{1*} \circ p_{1*} = \pi_{2*} \circ p_{2*}$$

Nous allons donc montrer que $\pi_*(p_1^*\Phi(E) \wedge p_2^*\Phi(F)) = 1$ pour cela on a d'après la formule de projection

$$\pi_{1*} \circ p_{1*}(p_1^*\Phi(E) \wedge p_2^*\Phi(F)) = \pi_{1*}(\Phi(E) \wedge p_{1*}p_2^*\Phi(F))$$

On remarque alors que $p_{1*}p_2^* = \pi_1^*\pi_{2*}$ sur $\Omega_{cv}^*(F)$ en effet soit ω une forme à support compact verticale sur F s'écrivant localement

$$\omega_\alpha = (\pi_2^*\phi)f(x_1, \dots, x_m, t_1, \dots, t_n)dt_1 \dots dt_n$$

ou $x_1, \dots, x_m, t_1, \dots, t_n$ désigne les coordonnées locales sur $F|_{U_\alpha}$ on alors d'une part

$$\pi_1^*\pi_{2*}\omega_\alpha = \pi_1^*\phi \int_{\mathbb{R}^n} f(x_1, \dots, x_m, t_1, \dots, t_n)dt_1 \dots dt_n$$

d'autre part

$$\begin{aligned}
p_{1*}p_{2*}\omega_\alpha &= p_{1*}p_{2*}\pi_2^*\phi f(x_1, \dots, x_m, t_1, \dots, t_n)dt_1 \dots dt_n \\
&= p_{1*}p_{1*}\pi_1^*\phi f(x_1, \dots, x_m, t_1, \dots, t_n)dt_1 \dots dt_n \\
&= \pi_1^*\phi \int_{\mathbb{R}^n} f(x_1, \dots, x_m, t_1, \dots, t_n)dt_1 \dots dt_n
\end{aligned}$$

la deuxième égalité repose sur la commutativité du digramme. On a donc bien

$$\pi_{1*} \circ p_{1*}(p_1^*\Phi(E) \wedge p_2^*\Phi(F)) = \pi_{1*}(\Phi(E) \wedge \pi_1^*\pi_{2*}\Phi(F))$$

Or par définition $\pi_{2*}\Phi(F) = 1$ et $\pi_{1*}(\Phi(E))$ ainsi on obtient

$$\pi_*(p_1^*\Phi(E) \wedge p_2^*\Phi(F))$$

ce qui prouve notre assertion □

4.2 Classe d'Euler

4.2.1 Construction et propriétés

Considérons un fibré en n -sphère $\pi : S \rightarrow M$ orientable sur une variété M , de groupe structurale $Diff(S^n)$, et soit \mathfrak{U} un bon recouvrement de M .

Nous allons procéder à la construction de la classe d'Euler associée à ce fibré, pour cela commençons par considérer la donnée d'une orientation $\{[\sigma_\alpha]\}$ subordonnée aux ouverts $\pi^{-1}U_\alpha$ du recouvrement $\pi^{-1}\mathfrak{U}$ qu'on note $\sigma^{0,n} \in C^0(\pi^{-1}\mathfrak{U}, \Omega^n)$, tel que $[\sigma_\alpha^{0,n}] = [\sigma_\beta^{0,n}]$.

Une telle forme existe car le fibré est supposé orientable. On peut alors reformuler l'égalité ci-dessus en disant qu'il existe une forme $\sigma^{1,n-1} \in C^1(\pi^{-1}\mathfrak{U}, \Omega^{n-1})$ tel que

$$\delta\sigma^{0,n} = d\sigma^{1,n-1} = -D''\sigma^{1,n-1}$$

on en déduit alors que $\delta\sigma^{1,n-1}$ est une forme fermée, en effet

$$d(\delta\sigma^{1,n-1}) = \delta(d\sigma^{1,n-1}) = \delta(\delta\sigma^{0,n}) = 0$$

de plus d'après la formule de Künneth on a que $H^{n-1}(S|_{U_{\alpha\beta\gamma}}) = 0$, il existe alors une forme $\sigma^{2,n-2} \in C^2(\pi^{-1}\mathfrak{U}, \Omega^{n-2})$ tel que

$$\delta\sigma^{1,n-1} = d\sigma^{2,n-2} = D'\sigma^{2,n-2}$$

en itérant cet argument on arrive à l'existence d'une forme $\sigma^{n,0} \in C^n(\pi^{-1}\mathfrak{U}, \Omega^0)$ tel que

$$\delta\sigma^{n-1,1} = d\sigma^{n,0}$$

En considérant alors la forme :

$$\sigma = \sigma^{0,n} + \sigma^{1,n-1} + \dots + \sigma^{n,0}$$

On a par un calcul rapide que :

$$D\sigma = \delta\sigma^{n,0}$$

De plus $\delta\sigma^{n,0}$ est une forme fermée, elle provient donc d'une forme $\epsilon \in C^{n+1}(\pi^{-1}\mathfrak{U}, \mathbb{R})$ en utilisant l'injection $\iota : C^{n+1}(\pi^{-1}\mathfrak{U}, \mathbb{R}) \rightarrow C^{n+1}(\pi^{-1}\mathfrak{U}, \Omega^0)$ i.e.

$$D\sigma = \delta\sigma^{n,0} = \iota(-\epsilon)$$

Enfin on remarque que $C^{n+1}(\pi^{-1}\mathfrak{U}, \mathbb{R}) \simeq C^{n+1}(\mathfrak{U}, \mathbb{R})$, en effet puisque π est surjective on a $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ si et seulement si $\pi^{-1}U_\alpha \cap \pi^{-1}U_\beta \neq \emptyset$, l'isomorphisme étant donnée par π^* , on a de plus $\delta\epsilon = 0$ ainsi ϵ définit une classe de cohomologie $\bar{\epsilon}$ dans $H^{n+1}(\mathfrak{U}, \mathbb{R})$, tel que $\epsilon = \pi^*\bar{\epsilon}$ de plus on a que $H^{n+1}(\mathfrak{U}, \mathbb{R}) \simeq H^{n+1}(M)$ on note alors par $e(S)$ l'élément associé à $\bar{\epsilon}$ dans $H^{n+1}(M)$ on appelle $e(S)$ la *Classe d'Euler* du fibré en n -sphère S .

Remarque 4.2.1. On peut grâce à cette construction définir la classe d'Euler d'un fibré vectoriel orienté, en effet soit $\pi : E \rightarrow M$ un fibré vectoriel orienté de rang $n+1$ ayant choisi une métrique Riemannienne sur E on définit la classe d'Euler $e(E)$ de E comme la classe d'Euler du fibré en n -sphère associé $S(E)$. On remarque enfin que si l'on se donne l'orientation opposé à $\{[\sigma_\alpha]\}$ alors la classe d'Euler associée à S muni de cette nouvelle orientation est $-e(S)$.

Proposition 4.5. Étant donnée une orientation $\{[\sigma_\alpha]\}$ la classe d'Euler est indépendante du choix des $\sigma^{j,n-j}$ dans sa construction.

Démonstration. Soit $\bar{\sigma}^{0,n}$ un autre représentant de $\{[\sigma_\alpha]\}$, alors il existe $\tau^{n-1} \in C^0(\pi^{-1}\mathfrak{U}, \Omega^{n-1})$ tel que $\bar{\sigma}^{0,n} - \sigma^{0,n} = d\tau^{n-1}$ ainsi en appliquant δ on a que

$$d(\bar{\sigma}^{1,n-1} - \sigma^{1,n-1}) = d\delta\tau^{n-1}$$

ce qui implique qu'il existe $\tau^{n-2} \in C^1(\pi^{-1}\mathfrak{U}, \Omega^{n-2})$ tel que $\delta\tau^{n-1} - (\bar{\sigma}^{1,n-1} - \sigma^{1,n-1}) = d\tau^{n-2}$ en appliquant δ on a

$$d(\bar{\sigma}^{2,n-2} - \sigma^{2,n-2}) = d\delta\tau^{n-2}$$

on continue comme précédemment jusqu'à arriver à l'existence d'un $\tau^0 \in C^{n-1}(\pi^{-1}\mathfrak{U}, \Omega^0)$ et d'un $\tau \in C^n(\pi^{-1}\mathfrak{U}, \mathbb{R})$ tel que

$$\delta\tau^0 - (\bar{\sigma}^{n,0} - \sigma^{n,0}) = \iota\tau$$

en appliquant δ on obtient

$$\bar{\epsilon} - \epsilon = \delta\tau$$

ainsi $\bar{\epsilon}$ et ϵ sont dans la même classe de δ -cohomologie dans $C^{n+1}(\pi^{-1}\mathfrak{U}, \mathbb{R})$ \square

Proposition 4.6. La classe d'Euler est indépendante du choix du Bon recouvrement.

Démonstration. Soit \mathfrak{U} un bon recouvrement et notons $\bar{\epsilon}_{\mathfrak{U}}$ l'élément de $H^{n+1}(\mathfrak{U}, \mathbb{R})$ construit grâce au recouvrement \mathfrak{U} . Soit \mathfrak{B} un bon recouvrement qui raffine \mathfrak{U} , on a alors que :

$$H^{n+1}(\mathfrak{U}, \mathbb{R}) \simeq H^{n+1}(M) \simeq H^{n+1}(\mathfrak{B}, \mathbb{R})$$

ainsi $\tilde{\epsilon}_{\mathfrak{U}}$ et $\tilde{\epsilon}_{\mathfrak{B}}$ représente le même élément dans $H^{n+1}(M)$, de plus étant donné deux bon recouvrement \mathfrak{B} et \mathfrak{U} il existe toujours un raffinement commun \mathfrak{M} , ainsi $\tilde{\epsilon}_{\mathfrak{U}}, \tilde{\epsilon}_{\mathfrak{M}}, \tilde{\epsilon}_{\mathfrak{B}}$ représente le même élément dans $H^{n+1}(M)$ et donc la classe d'Euler est indépendante du recouvrement choisi. \square

Proposition 4.7. Si le fibré en sphère S admet une section, alors sa classe d'Euler est nulle.

Démonstration. Soit s une section de S , alors $\pi \circ s = 1$ implique que $s^* \pi^* = 1$, ainsi on a

$$-\tilde{\epsilon} = s^* D\sigma = \delta s^* \sigma^{n,0}$$

$\tilde{\epsilon}$ est donc nul dans $H^{n+1}(\mathfrak{U}, \mathbb{R})$ et par suite $e(S)$ est nul dans $H^{n+1}(M)$ \square

Définition 4.3. Soit $\pi : S \rightarrow M$ un fibré en n -sphère orienté, on appelle *Forme angulaire globale sur S* la donnée d'une n -forme $\psi \in \Omega^n(S)$ tel que sa restriction à chaque fibre représente un générateur normalisé de la cohomologie de la fibre et tel que $d\psi = -\pi^* e$.

On peut grâce à la construction de la classe d'Euler produire une forme angulaire globale de S , en effet on commence par remarquer qu'on peut construire ψ grâce à la n -cochaîne associée à l'orientation $\{[\sigma_\alpha]\}$ et à la formule de collage, pour cela considérons la n -cochaîne :

$$\sigma = \sigma^{0,n} + \sigma^{1,n-1} + \dots + \sigma^{n,0} \text{ tel que } D\sigma = -\pi^* \tilde{\epsilon}$$

on pose alors (en utilisant les notations de la section 2.5) d'après la formule de collage :

$$\psi = f(\sigma) = \sum_{i=0}^n (-D'K)^i \sigma^{i,n-i} + (-1)^{n+1} K(D'K)^n (-\pi^* \tilde{\epsilon}) \in \Omega^n(S)$$

On a alors que K commute avec π^* , en effet étant donné une partition de l'unité $\{\rho_\alpha\}$ subordonnée à \mathfrak{U} on a que $\{\pi^* \rho_\alpha\}$ est une partition de l'unité subordonnée à $\pi^{-1}\mathfrak{U}$ en notant également par K l'opérateur d'homotopie défini comme dans la section 2.5 mais cette fois sur $C^*(\pi^{-1}\mathfrak{U}, \Omega^*)$ on a que

$$\begin{aligned} (K\pi^*\omega)_{\alpha_0 \dots \alpha_{p-1}} &= \sum (\pi^* \rho_\alpha) (\pi^*\omega)_{\alpha \alpha_0 \dots \alpha_{p-1}} \\ &= \pi^* \sum \rho_\alpha \omega_{\alpha \alpha_0 \dots \alpha_{p-1}} \\ &= (\pi^* K\omega)_{\alpha_0 \dots \alpha_{p-1}} \end{aligned}$$

ainsi on a que la restriction de $(-1)^{n+1} K(D'K)^n (-\pi^* \tilde{\epsilon}) = \pi^* (-1)^{n+1} K(D'K)^n (-\tilde{\epsilon})$ à une fibre est nulle ce qui implique que la restriction de ψ à chaque fibre est dans la même classe de d -cohomologie que $\sigma^{0,n}$ restreinte à une fibre, elle engendre donc la cohomologie de la fibre et fournit une forme angulaire globale. Enfin en appliquant d à l'équation définissant ψ on a

$$\begin{aligned}
d\psi &= (-1)^{n+1} dK(D'K)^n(-\pi^*\tilde{\epsilon}) \\
&= -\pi^*(-1)^{n+1}(D'K)^{n+1}(\tilde{\epsilon}) \\
&= -\pi^*e(S)
\end{aligned}$$

ou la dernière égalité résulte du théorème **2.14** et du fait que ici $e(S)$ est un représentant de la classe d'Euler qui a été défini comme l'image de $\tilde{\epsilon}$ dans $H^{n+1}(M)$ via l'isomorphisme $H^{n+1}(\mathfrak{U}, \mathbb{R}) \simeq H^{n+1}(M)$.

Remarque 4.2.2. On peut bien sur définir une forme angulaire globale associé à un fibré vectoriel orienté E , en effet soit ψ_S la forme angulaire globale du fibré en sphère qui lui est associé et soit $r : E^0 \rightarrow S(E)$ la rétraction qui envoie chaque vecteur non nul d'une fibre sur la sphère de cette fibre pour une certaine métrique Riemannienne sur E (E^0 désigne le fibré E privé de l'image de sa section nul), on pose alors $\psi = r^*\psi_S$ la forme angulaire globale sur E .

Proposition 4.8. (Fonctorialité) Soit $\pi : E \rightarrow M$ un fibré vectoriel orienté de rang $n + 1$ et soit $f : N \rightarrow M$ une application lisse entre variété, alors

$$e(f^{-1}E) = f^*e(E)$$

Démonstration. D'après la définition du tiré en arrière d'un fibré vectoriel on a la diagramme commutatif suivant

$$\begin{array}{ccc}
f^{-1}E & \xrightarrow{f_E} & E \\
\downarrow \pi' & & \downarrow \pi \\
N & \xrightarrow{f} & M
\end{array}$$

Ce diagramme induit le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc}
\Omega^*(M) & \xrightarrow{f^*} & \Omega^*(N) \\
\downarrow \pi^* & & \downarrow \pi'^* \\
\Omega^*(E) & \xrightarrow{f_E^*} & \Omega^*(f^{-1}E)
\end{array}$$

soit alors $e(E) \in \Omega^*(M)$ un représentant de la classe d'Euler de E on a alors la forme angulaire globale $\psi \in \Omega^*(E)$ tel que $d\psi = -\pi^*e(E)$ de plus on a l'égalité

$$\pi'^* f^* e(E) = f_E^* \pi^* e(E) = -d(f_E^* \psi)$$

on remarque alors que $f_E^* \psi$ est la forme angulaire globale de $f^{-1}E$, en effet on a pour $p \in N$ que la fibre $(f^{-1}E)_p = E_{f(p)} \times p$ ceci implique que

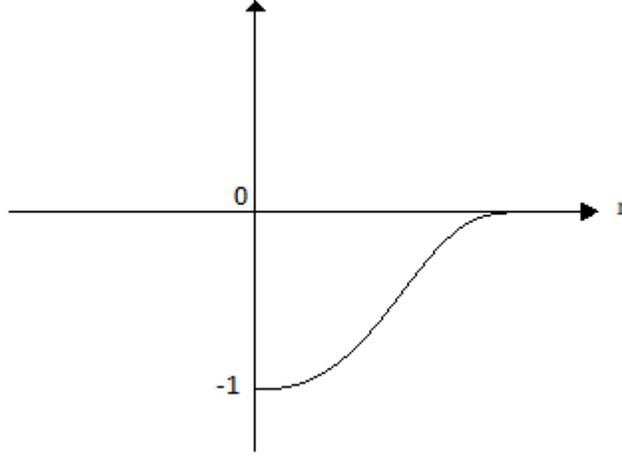
$$(f_E^* \psi)|_{(f^{-1}E)_p} = \psi|_{E_{f(p)}}$$

de plus on a que la sphère de la fibre $(f^{-1}E)_p$ est la sphère de $E_{f(p)}$, ainsi comme $\psi|_{E_{f(p)}}$ engendre la cohomologie de $S(E_{f(p)})$ on a que $(f_E^* \psi)|_{(f^{-1}E)_p}$ engendre la cohomologie de $S((f^{-1}E)_p)$ ainsi $f_E^* \psi$ est la forme angulaire globale de $f^{-1}E$. ceci implique

$$\pi'^* f^* e(E) = -d(f_E^* \psi) = \pi'^* e(f^{-1} E)$$

enfin comme π' est surjective, π'^* est injective, ainsi $f^* e(E) = e(f^{-1} E)$. \square

Nous allons à présent donner un lien entre la classe d'Euler et la classe de Thom, pour pouvoir déduire la formule du produit de Whitney pour les classe d'Euler. Soit $\pi : E \rightarrow M$ un fibré vectoriel orienté de rang $n + 1$, et considérons ψ une forme angulaire globale sur E . On se donne alors une métrique Riemannienne sur E et on définit $r : E \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction rayon, qui associe à un vecteur d'une fibre sa norme selon la métrique choisie. Considérons $\rho(r)$ une fonction de r comme celle représentée ci-dessous tel que $d\rho(r)$ soit à support compact et nulle pour $r = 0$ et tel que $\int_{\mathbb{R}} d\rho(r) = 1$



Proposition 4.9.

1. La classe de cohomologie de $\Phi = d(\rho(r).\psi)$ est la classe de Thom de E
2. Soit $s : M \rightarrow E$ la section nulle, alors $e = s^* \Phi$ ou e est la classe d'Euler de E

Démonstration. On remarque tout d'abord que

$$\Phi = d(\rho(r))\psi - \rho(r)\pi^* e$$

Ainsi Φ est une forme fermé à support compact verticale, en effet pour $p \in M$ on a $\Phi|_{E_p} = d(\rho(r))\psi|_{E_p}$ et $d\rho(r)$ est à support compact. De plus $\psi|_{E_p}$ fourni un générateur de $H^n(S^n)$ ainsi on a

$$\int_{\mathbb{R}^{n+1}} \Phi|_{E_p} = \int_{\mathbb{R}^{n+1}} d(\rho(r))\psi|_{E_p} = \int_{\mathbb{R}} d\rho(r) \int_{S^n} \psi|_{E_p} = 1$$

Pour $s : M \rightarrow E$ la section nulle de E , on a que $s^*d\rho(r) = 0$ et $s^*\rho = -1$.

$$s^*\Phi = -(s^*\rho)s^*\pi^*e = e$$

□

Proposition 4.10 (Formule du produit de Whitney). Soit E et F deux fibré vectoriel au dessus de M on a

$$e(E \oplus F) = e(E)e(F)$$

Démonstration. D'après la proposition 4.4 on a

$$\Phi(E \oplus F) = p_1^*\Phi(E) \wedge p_2^*\Phi(F)$$

ou $p_1 : E \oplus F \rightarrow E$ et $p_2 : E \oplus F \rightarrow F$ sont les projections canoniques, on a alors que $p_1 \circ s$ et $p_2 \circ s$ sont les sections nulles de E et F respectivement, ainsi on obtient d'après la proposition qui précède

$$e(E \oplus F) = s^*\Phi(E \oplus F) = s^*p_1^*\Phi(E) \wedge s^*p_2^*\Phi(F) = e(E)e(F)$$

□

4.2.2 Cas du fibré vectoriel de rang 2

Soit $\pi : E \rightarrow M$ un fibré vectoriel réel orienté de rang 2 de groupe structural $SO(2)$ nous allons donner une formule pour la classe d'Euler dans ce cadre. Soit $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}$ un recouvrement trivialisant pour E , étant donné une métrique riemannienne sur E on peut alors écrire les trivialisations locale de E en coordonnées polaire

$$\begin{aligned} \psi_\alpha : E &\longrightarrow U_\alpha \times \mathbb{R}^2 \\ e &\longmapsto (\pi(e), r(e), \theta_\alpha(e)) \end{aligned}$$

$[d\theta_\alpha/2\pi]$ fournissent alors une orientation du fibré en cercle $S(E)$ associé à E , notons par abus $\pi : S(E) \rightarrow M$ la projection de $S(E)$. De plus on peut voir les cocycles $g_{\alpha\beta}$ de E comme des fonction de $U_\alpha \cap U_\beta \rightarrow U(1) \subset \mathbb{C}^*$ ainsi on a

$$\theta_\alpha - \theta_\beta = \pi^*(1/i) \log g_{\alpha\beta}$$

Notons $\phi_{\alpha\beta} = -(1/i) \log g_{\alpha\beta}$ on a alors

$$\frac{d\theta_\beta}{2\pi} - \frac{d\theta_\alpha}{2\pi} = \pi^* \frac{d\phi_{\alpha\beta}}{2\pi}$$

ici $\pi^*\phi_{\alpha\beta} \in C^1(\pi^{-1}\mathcal{U}, \Omega^0)$ représente en fait l'élément $\sigma^{1,0}$ dans la construction général de la classe d'Euler faite plus haut, on a alors

$$\delta\pi^* \frac{\phi_{\alpha\beta}}{2\pi} = -\epsilon = -\pi^*\tilde{\epsilon}$$

ou $\epsilon \in C^2(\pi^{-1}\mathcal{U}, \mathbb{R})$ et $\tilde{\epsilon} \in C^2(\mathcal{U}, \mathbb{R})$ grâce à l'injectivité de π^* on a donc

$$\delta \frac{\phi_{\alpha\beta}}{2\pi} = -\tilde{\epsilon}$$

$\tilde{\epsilon}$ représente alors la classe d'Euler dans $H^2(\mathcal{U}, \mathbb{R})$ ainsi on peut passer en cohomologie de De Rham grâce au théorème **2.14**

$$e(E) = (-D'K)^2 \tilde{\epsilon} \text{ dans } H^2(M)$$

K désignant l'opérateur d'homotopie défini grâce à une partition de l'unité. On peut alors aller plus loin

$$\begin{aligned} (-D'K)^2 \tilde{\epsilon} &= -dKdK\tilde{\epsilon} \\ &= dKd\left(\frac{\phi_{\alpha\beta}}{2\pi} + \delta\tau\right) \text{ pour un certain } \tau \\ &= dKd\frac{\phi_{\alpha\beta}}{2\pi} + dKd\delta\tau \end{aligned}$$

or puisque $\delta K + K\delta = 1$ et que $Kd\tau$ est une forme global on a

$$dKd\delta\tau = -\delta dKd\tau = 0$$

ainsi on a une formule explicite pour la classe d'Euler

$$e(E) = dKd\frac{\phi_{\alpha\beta}}{2\pi} = -\frac{1}{2i\pi} \sum_{\gamma} d\rho_{\gamma} d \log g_{\gamma\alpha} \text{ sur } U_{\alpha}$$

Remarque 4.2.3. Faisons remarquer ici que dans le cas du fibré universel S_n au dessus de $\mathbb{C}P^n$ la classe d'Euler $x_n = e(S_n^*)$ du dual S_n^* engendre la cohomologie de $\mathbb{C}P^n$ (ce fait ne sera pas démontré), on peut alors écrire l'anneau de cohomologie pour le produit extérieur comme anneau de polynômes

$$H^*(\mathbb{C}P^n) = \mathbb{R}[x_n]/(x_n)^n$$

4.3 Classe de Chern

4.3.1 Construction et propriétés

Soit $\pi : E \rightarrow M$ un fibré vectoriel complexe de rang n au dessus d'une variété M . Considérons $\sigma : P(E) \rightarrow M$ le fibré en espace projectifs sur M associé à E . On peut définir plusieurs fibré vectoriel au dessus de $P(E)$, tout d'abords on a le tiré en arrière de E par σ défini par le diagramme commutatif suivant

$$\begin{array}{ccc} \sigma^{-1}E & \longrightarrow & E \\ \downarrow & & \downarrow \pi \\ P(E) & \xrightarrow{\sigma} & M \end{array}$$

ou la fibre $\sigma^{-1}E|_{l_p}$ pour $l_p \in P(E)$ et $p \in M$ est égale à la fibre E_p , on a de plus que

$$\sigma^{-1}E|_{P(E_p)} = P(E_p) \times E_p$$

On peut définir également le sous fibré universel $S \subset \sigma^{-1}E$ sur $P(E)$ comme suit :

$$S = \{(l_p, e) \in \sigma^{-1}E \mid e \in l_p\}$$

ou l'injection de S dans $\sigma^{-1}E$ est donné par l'injection canonique, et la projection $S \rightarrow P(E)$ est naturellement donné par $(l_p, e) \mapsto l_p$, ainsi S est un fibré vectoriel complexe de rang 1 sur $P(E)$.

On défini enfin le fibré quotient $Q = \sigma^{-1}E/S$ dont chaque fibre est donné par E_p/l_p ou l_p est vue ici comme une droite de E_p , et dont la projection est donné par l'unique application qui fait commuter le diagramme suivant

$$\begin{array}{ccc} P(E) & \longleftarrow & \sigma^{-1}E \\ & \searrow & \downarrow \\ & & Q \end{array}$$

On obtient alors une suite exact de fibré vectoriel au dessus de $P(E)$

$$0 \rightarrow S \rightarrow \sigma^{-1}E \rightarrow Q \rightarrow 0$$

Nous allons à présent construire les classes de Chern de E . Pour cela on commence par définir la classe de Chern $c_1(L)$ d'un fibré en droite complexe L comme la classe d'Euler de ce fibré regardé comme fibré vectoriel réel orienté de rang 2 i.e.

$$c_1(L) = e(L_{\mathbb{R}})$$

De plus grâce à la formule explicite de la classe d'Euler pour un fibré en droite complexe (qui est logarithmique) on a

$$c_1(L \otimes L') = c_1(L) + c_1(L')$$

Considérons alors S^* le fibré dual complexe de S au dessus de $P(E)$, et posons $x = c_1(S_{\mathbb{R}}^*) = -e(S_{\mathbb{R}})$ la classe d'Euler de S^* regardé comme fibré vectoriel réel, x représente alors une classe de cohomologie dans $H^2(P(E))$, grâce à la functorialité de e on a que $x|_{P(E_p)} = e(\tilde{S}_p^*) = -e(\tilde{S}_p)$ ou \tilde{S}_p désigne le fibré universel au dessus de la fibre $P(E_p)$, on a alors que les éléments $\{1, x, x^2, \dots, x^{n-1}\}$ lorsque restreint à une fibre engendrent librement l'anneau de cohomologie $H^*(P(E_p))$, ainsi d'après le théorème de Leray-Hirsch $H^*(P(E))$ est un module libre de type fini sur $H^*(M)$ engendré par $\{1, x, x^2, \dots, x^{n-1}\}$, on a alors que x^n est combinaison linéaire de ces élément, on défini alors la i -ème classes de Chern $c_i(E) \in H^{2i}(M)$ de E par la relation suivante

$$x^n + \sigma^* c_1(E)x^{n-1} + \dots + \sigma^* c_n(E) = 0$$

$H^*(P(E))$ et $H^*(M)$ sont de plus munis d'une structure d'algèbre pour le produit extérieur ainsi $H^*(P(E))$ peut être vu comme algèbre de polynômes à une variable sur l'anneau $H^*(M)$ on a alors l'isomorphisme

$$H^*(P(E)) \simeq H^*(M)[x]/(x^n + \sigma^* c_1(E)x^{n-1} + \dots + \sigma^* c_n(E))$$

On appel *Classe de Chern total* qu'on note $c(E) \in H^*(M)$ la classe de cohomologie donné par

$$c(E) = 1 + c_1(E) + \dots + c_n(E)$$

Proposition 4.11 (Fonctorialité). Soit $f : N \rightarrow M$ une application entre variété lisse, et E un fibré vectoriel complexe au dessus de M alors

$$c(f^*E) = f^{-1}c(E)$$

Démonstration. Remarquons tout d'abord que $f^{-1}P(E) = P(f^{-1}E)$ de plus on a le diagramme commutatif induit sur les fibrés projectifs par le tiré en arrière de E par f

$$\begin{array}{ccc} P(f^{-1}E) & \xrightarrow{f_P} & P(E) \\ \downarrow \sigma' & & \downarrow \sigma \\ N & \xrightarrow{f} & M \end{array}$$

Soit S_E^* le dual complexe du fibré universel au dessus de $P(E)$ on a alors $f_P^{-1}S_E^* = S_{f^{-1}E}^*$, ainsi par la fonctorialité de la classe d'Euler on a

$$x_{f^{-1}E} = e(S_{f^{-1}E}^*) = e(f_P^{-1}S_E^*) = f_P^*e(S_E^*) = f_P^*x_E$$

en appliquant f_P^* à l'équation

$$x_E^n + \sigma^*c_1(E)x_E^{n-1} + \dots + \sigma^*c_n(E) = 0$$

on peut alors comparer les deux équation polynomiales :

$$\begin{aligned} x_{f^{-1}E}^n + f_P^*\sigma^*c_1(E)x_{f^{-1}E}^{n-1} + \dots + f_P^*\sigma^*c_n(E) &= 0 \\ x_{f^{-1}E}^n + \sigma'^*c_1(f^{-1}E)x_{f^{-1}E}^{n-1} + \dots + \sigma'^*c_n(f^{-1}E) &= 0 \end{aligned}$$

ou $\sigma' : P(f^{-1}E) \rightarrow M$ désigne la projection du fibré projectif $P(f^{-1}E)$, on a alors

$$f_P^*\sigma^*c_i(E) = \sigma'^*f^*c_i(E) = \sigma'^*c_i(f^{-1}E)$$

ce qui implique $f^*c_i(E) = c_i(f^{-1}E)$ par surjectivité de σ' . □

Proposition 4.12. Si E admet une section jamais nulle alors $c_n(E) = 0$

Démonstration. Soit $s : M \rightarrow E$ une section jamais nulle, celle ci induit une section $s' : M \rightarrow P(E)$, on peut alors considérer $s'^{-1}S_E$ le tiré en arrière de S_E (comme fibré au dessus de $P(E)$) par s' , $s'^{-1}S_E$ est alors un fibré en droite complexe au dessus de M , qui admet un section jamais nul donné par $p \mapsto s(p)$, il est alors trivial, et on ainsi par fonctorialité de la classe d'Euler que $s'^*e(S_E^*) = s'^*x_E = 0$.

En appliquant s'^* à l'équation

$$x_E^n + \sigma^*c_1(E)x_E^{n-1} + \dots + \sigma^*c_n(E) = 0$$

on obtient $s'^*\sigma^*c_n(E) = 0$ i.e. $c_n(E) = 0$ □

Afin de prouver d'autre propriété de la classe de Chern, nous allons maintenant décomposer en certain sens le fibré vectoriel E en somme direct de fibré en droite. Pour ce faire nous allons construire un espace $F(E)$ et une application $\tau : F(E) \rightarrow M$ tel que $\tau^{-1}E = L_1 \oplus \dots \oplus L_n$ ou L_i sont des fibré en droite complexe sur $F(E)$ et $\tau^* : H^*(M) \rightarrow H^*(F(E))$ soit injective, $F(E)$ sera appelé *l'espace des drapeaux de E* .

Pour cela partons de la suite exacte de fibré au dessus de $P(E)$ exposé précédemment

$$0 \rightarrow S \rightarrow \sigma^{-1}E \rightarrow Q \rightarrow 0$$

On a alors que $\sigma^{-1}E = S \oplus Q$ ou S que l'on notera à présent S_1 est de rang complexe 1 et Q que l'on notera Q_1 est de rang $n - 1$.

Considérons alors $\beta_1 : P(Q_1) \rightarrow P(E)$ le fibré projectif de Q_1 au dessus de $P(E)$ on peut alors par le même procédé que précédemment tiré en arrière Q_1 par β_1 pour obtenir une suite exacte

$$0 \rightarrow S_2 \rightarrow \beta_1^{-1}Q_1 \rightarrow Q_2 \rightarrow 0$$

Ou S_2 est le fibré universel au dessus de $P(Q_1)$ qui est alors de rang complexe et 1 et Q_2 et de rang $n - 2$, on a alors $\beta_1^{-1}\sigma^{-1}E = \beta_1^{-1}S_1 \oplus S_2 \oplus Q_2$ en itérant ce procédé on fini par arriver à un fibré projectif $\beta_{n-2} : P(Q_{n-2}) \rightarrow P(Q_{n-3})$ associé au fibré quotient Q_{n-2} au dessus de $P(Q_{n-3})$ que l'on tire en arrière par β_{n-2} pour obtenir la suite exact

$$0 \rightarrow S_{n-1} \rightarrow \beta_{n-2}^{-1}Q_{n-2} \rightarrow Q_{n-1} \rightarrow 0$$

Ou S_{n-1} est le fibré universel au dessus de $P(Q_{n-2})$ qui est alors de rang complexe 1 et Q_{n-1} le fibré quotient qui est également de rang 1, puisque Q_{n-2} est de rang 2 au dessus de $P(Q_{n-3})$. Enfin, en notant $F(E) = P(Q_{n-2})$ et $\tau = \sigma \circ \beta_1 \circ \dots \circ \beta_{n-2}$ et $L_i = \beta_{n-2}^{-1} \dots \beta_i^{-1} S_i$ pour $i < n - 1$ et $L_{n-1} = S_{n-1}$ et $L_n = Q_{n-1}$ on a bien

$$\tau^{-1}E = L_1 \oplus \dots \oplus L_n$$

De plus $\tau^* : H^*(M) \rightarrow H^*(F(E))$ est bien injective. Passons maintenant à la démonstration de la formule de produit de Whitney.

Pour cela nous aurons besoin d'un lemme topologique dont la démonstration sera omise.

Lemme 4.3 (Lemme de rétrécissement). *Soit X un espace topologique normal, et $\{U_i\}$ un recouvrement ouvert fini de X alors il existe un recouvrement ouvert $\{\bar{V}_i\}$ tel que $\bar{V}_i \subset U_i$ pour tout i .*

Si X est de plus une variété lisse, alors il existe une des fonctions lisse $\{\rho_i\}$ à valeurs dans \mathbb{R} tel que ρ_i vaut 1 sur \bar{V}_i et 0 en dehors de U_i .

Proposition 4.13. Soit E et F deux fibré vectoriel complexe sur M alors $c(E \oplus F) = c(E)c(F)$

Démonstration. Commençons par considérer le cas ou E est somme direct de droite complexes $L_1 \oplus \dots \oplus L_n$, nous allons montrer que

$$c(E) = \prod_i c(L_i)$$

On a que le tiré en arrière $\sigma^{-1}E$ défini comme précédemment par le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \sigma^{-1}E & \longrightarrow & E \\ \downarrow & & \downarrow \pi \\ P(E) & \xrightarrow{\sigma} & M \end{array}$$

est somme direct de droite complexe $\sigma^{-1}E = L'_1 \oplus \dots \oplus L'_n$, soit S le fibré universel au dessus de $P(E)$, on a alors des projections s_i de S sur L'_i que l'on peut voir comme des sections du fibré $Hom(S, L'_i) \simeq S^* \otimes L'_i$ au dessus de $P(E)$, comme S_{l_p} est un sous espace de dimension 1 de $\sigma^{-1}E_{l_p}$ pour chaque $l_p \in P(E)$, les fonction s_i ne peuvent être simultanément nulles. Considérons alors les ouverts

$$U_i = \{l \in P(E) \mid s_i(l) \neq 0\}$$

Ces ouverts recouvre $P(E)$ de plus $S^* \otimes L'_i|_{U_i}$ est trivial puisque $s_i \neq 0$ sur U_i soit alors ξ_i une 2-forme globale sur $P(E)$ représentant $e(S^* \otimes L'_i) = c_1(S^* \otimes L'_i)$, on a alors que $\xi_i|_{U_i} = d\omega_i$ pour une certaine 1-forme locale ω_i sur U_i . Considérons d'après le lemme qui précède des fonctions $\{\rho_i\}$ ayant les propriété du lemme et défini sur un sous-recouvrement $\{V_i\}$, on a alors que $\xi_i - d(\rho_i\omega_i)$ est une forme globale qui représente $c_1(S^* \otimes L'_i)$ et s'annule sur V_i . on a alors pour $x = e(S^*) = c_1(S^*)$

$$\prod_i c_1(S^* \otimes L'_i) = \prod_i (x + c_1(L'_i)) = 0$$

ainsi on obtient

$$\prod_i (x + c_1(L'_i)) = x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n = 0$$

ou a_i sont les polynômes symétriques élémentaire en $c_1(L'_i)$ qui est en fait $\sigma^*c_1(L_i)$ par functorialité, par définition des classes de Chern on a que $a_i = \sigma^*c_i(E)$ on obtient donc

$$c(E) = \prod_i (1 + c_1(L_i)) = \prod_i c(L_i)$$

Soit maintenant E et F deux fibré vectoriel complexes de rang n et m et soit $\tau : F(E) \rightarrow M$ l'espace des drapeaux de E construit précédemment, $\tau^{-1}E$ est alors somme direct de fibré en droite complexe $L_1 \oplus \dots \oplus L_n$, de plus $\tau^{-1}F$ est un fibré vectoriel sur $F(E)$ soit alors $\tau' : F(\tau^{-1}F) \rightarrow F(E)$ l'espace des drapeaux de $\tau^{-1}F$, $\tau'^{-1}\tau^{-1}F$ est alors somme direct de fibré en droites complexes $L'_1 \oplus \dots \oplus L'_m$ sur $F(\tau^{-1}F)$, on peut résumer cela par le diagramme

$$\begin{array}{ccccc}
E \oplus F & & L_1 \oplus \dots \oplus L_n \oplus \tau^{-1}F & & \tau'^{-1}L_1 \oplus \dots \oplus \tau'^{-1}L_n \oplus L'_1 \oplus \dots \oplus L'_m \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
M & \xleftarrow{\tau} & F(E) & \xleftarrow{\tau'} & F(\tau^{-1}F)
\end{array}$$

notons alors $\alpha = \tau \circ \tau'$ on a

$$\begin{aligned}
\alpha^*c(E \oplus F) &= c(\alpha^{-1}(E \oplus F)) \\
&= c(\tau'^{-1}L_1 \oplus \dots \oplus \tau'^{-1}L_n \oplus L'_1 \oplus \dots \oplus L'_m) \\
&= \prod_i c(\tau'^{-1}L_i)c(L'_i) \\
&= \alpha^*c(E)c(F)
\end{aligned}$$

on a ainsi $c(E \oplus F) = c(E)c(F)$ par injectivité de α^*

□

Proposition 4.14. Soit E un fibré vectoriel complexe de rang n sur M , alors $c_n(E) = e(E_{\mathbb{R}})$

Démonstration. Ceci est une conséquence direct de la functorialité de la classe de Chern et de la formule de Whitney. Soit $\tau : F(E) \rightarrow M$ l'espace des drapeaux de E , on a alors $\tau^{-1}E = L_1 \oplus \dots \oplus L_n$ ainsi

$$\tau^*c_n(E) = c_n(\tau^{-1}E) = \prod_i c_1(L_i)$$

Par functorialité et formule de produit de Whitney, de plus par définition de la classe de Chern d'un fibré en droite on a

$$\begin{aligned}
\prod_i c_1(L_i) &= \prod_i e((L_i)_{\mathbb{R}}) \\
&= e((L_1)_{\mathbb{R}} \oplus \dots \oplus (L_n)_{\mathbb{R}}) \\
&= e((\tau^{-1}E)_{\mathbb{R}}) = \tau^*e(E_{\mathbb{R}})
\end{aligned}$$

Grâce à la formule de produit de Whitney et la functorialité pour la classe d'Euler, ainsi par injectivité de τ^* on $c_n(E) = e(E_{\mathbb{R}})$

□

4.3.2 Axiomatisation

Soit M une variété lisse paracompact de type fini, on peut définir les classes de Chern de manière axiomatique comme des éléments de $H^*(M, \mathbb{Z})$ qui désigne la cohomologie à valeurs dans le pré-faisceau des fonctions localement constantes à valeurs dans \mathbb{Z} , la théorie des faisceaux sera exposé plus en détail dans la section qui suit.

Avant de donner la définition des classes de Chern, considérons $\mathbb{C}P^n$ l'espace projectif de dimension complexe n , notons S_n le fibré universel sur $\mathbb{C}P^n$, et x_n la classe de cohomologie qui engendre $H^2(\mathbb{C}P^n, \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}$.

Définition 4.4. Soit E un fibré vectoriel complexe sur M une variété lisse, on définit les classes de Chern $c_i(E) \in H^{2i}(M, \mathbb{Z})$ avec $c_0 = 1$, et on note $c(E) = \sum_i c_i(E) \in H^*(M, \mathbb{Z})$ la classe de Chern total, comme les classe de cohomologie vérifiant les propriétés suivantes

1. (Fonctorialité) Si $f : N \rightarrow M$ est une application lisse entré variété alors $c(f^{-1}E) = f^*c(E)$
2. (Produit de whitney) Si L_1, \dots, L_k sont des fibré en droite complexe sur M alors $c(L_1 \oplus \dots \oplus L_k) = c(L_1) \dots c(L_k)$
3. (Normalisation) Avec les notation précédentes on a $c(S_n) = 1 + x_n$

Vérifions à présent que la construction de la classe de Chern total faite précédemment coïncide avec cette définition, pour cela notons $\tilde{c}_i(E)$ l'image via l'isomorphisme $H^*(M) \simeq H^*(M, \mathbb{R})$ des classes de Chern construites dans la section précédente et $\tilde{c}(E)$ la classe total associé, remarquons alors (avec les notations introduite plus haut) que $\tilde{c}_1(S_n)$ engendre $H^2(M, \mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}$ ainsi on peut identifier $x_n = \tilde{c}_i(S_n)$ donc $c(S_n) = 1 + \tilde{c}_1(S_n) = \tilde{c}(S_n)$ la définition coïncide dans ce cas.

Soit maintenant L un fibré en droite complexe sur M , alors il existe une application lisse $f : M \rightarrow \mathbb{C}P^n$ pour un certain $n > 0$ tel que $L \simeq f^{-1}S_n$ ainsi on a $\tilde{c}(L) = f^*\tilde{c}(S_n) = f^*c(S_n) = c(L)$ les classes coïncident donc dans le cas des fibrés en droites complexe.

Enfin soit E un fibré vectoriel complexe de rang n sur M , on peut alors considérer la variété de drapeaux $\tau : F(E) \rightarrow M$ associé à E , on a alors que $\tau^{-1}E = L_1 \oplus \dots \oplus L_n$ ou les L_i sont des fibrés en droites complexes, par la formule de produit de Whitney et la fonctorialité on a

$$\begin{aligned} \tau^*\tilde{c}(E) &= \tilde{c}(\tau^{-1}E) \\ &= \prod_i \tilde{c}(L_i) \end{aligned}$$

or on a montré que dans le cas d'un fibré en droite $\tilde{c}(L_i) = c(L_i)$ ainsi par les axiomes de fonctorialité et de produit de Whitney on a

$$\begin{aligned} \tau^*\tilde{c}(E) &= \prod_i \tilde{c}(L_i) \\ &= \prod_i c(L_i) = c(\tau^{-1}E) \\ &= \tau^*c(E) \end{aligned}$$

enfin par injectivité de τ^* on a $c(E) = \tilde{c}(E)$

Remarque 4.3.1. Remarquons que la discussion qui précède montre en particulier l'unicité de la classe de Chern ainsi défini. Rappelons que nous avions noté \tilde{e} l'élément représentant la classe d'Euler e dans $H^*(\mathcal{U}, \mathbb{R})$, notons alors $[\tilde{e}] \in H^*(M, \mathbb{R})$ la classe de \tilde{e} après passage à la limite inductive. Étant donné $f : M \rightarrow \mathbb{C}P^n$ on a que $f^* : H^*(\mathbb{C}P^n, \mathbb{Z}) \rightarrow H^*(M, \mathbb{Z})$ donc si L est un fibré en droites complexe sur M , on a que $[\tilde{e}](L) = \tilde{c}_1(L)$ par définition de la première classe de Chern dans la section qui précède. On a donc

$$[\tilde{e}](L) = c(L) - 1 = f^*(1 + x_n) - 1 \in H^2(M, \mathbb{Z})$$

$[\tilde{e}]$ est donc une classe de cohomologie à valeurs dans \mathbb{Z} , cette remarque sera utile dans la classification des fibrés en droites complexe.

5 Théorie des faisceaux

Notons dans ce qui suit X un espace topologique, nous allons définir la notion de faisceau et de pré-faisceau et la cohomologie pour ces objets, enfin nous aboutirons grâce à cette théorie à une classification des fibrés en droite complexe. Les faits non démontrés pourront trouver leurs démonstrations dans les écrits de F.Hirzebruch [2].

5.1 Définitions

Définition 5.1 (Faisceau de groupe abélien). Un faisceau de groupe abélien \mathfrak{S} sur X est la donnée d'un triplé $\mathfrak{S} = (S, \pi, X)$ ayant les propriétés suivantes

1. S et X sont des espaces topologiques et $\pi : S \rightarrow X$ est une application continue surjective.
2. Pour tout $\alpha \in S$ il existe un voisinage ouvert U de α et un voisinage ouvert V de $\pi(\alpha)$ tel que $\pi|_U$ réalise un homeomorphisme entre U et V .
3. On appelle $\pi^{-1}(x)$ pour $x \in X$, fibre au dessus de x , qu'on notera S_x . Chaque fibre S_x est muni d'une structure de groupe abélien, tel que les opérations d'addition et la soustraction soit continue pour la topologie de S .

Définition 5.2 (Morphisme de faisceaux). Étant donné deux faisceaux $\mathfrak{S} = (S, \pi, X)$ et $\mathfrak{S}' = (S', \pi', X)$ sur X , un morphisme de faisceaux $h : \mathfrak{S} \rightarrow \mathfrak{S}'$ est la donnée d'une application continue $h : S \rightarrow S'$ tel que le diagramme suivante commute

$$\begin{array}{ccc} S & \xrightarrow{h} & S' \\ \pi \searrow & & \swarrow \pi' \\ & X & \end{array}$$

De plus pour tout $x \in X$ la restriction $h_x : S_x \rightarrow S'_x$ à chaque fibre est un morphisme de groupe abélien.

Définition 5.3 (Pré-faisceaux de groupe abélien). Un Pré-faisceau \mathfrak{G} sur un espace topologique X est la donnée, pour chaque ouvert $U \subset X$, d'un groupe abélien S_U , et pour chaque paire d'ouverts U, V tel $V \subset U$ des morphismes de groupe $r_V^U : S_U \rightarrow S_V$ tel que les propriétés suivantes soient vérifiées

1. Si $U = \emptyset$ alors $S_U = 0$
2. le morphisme $r_U^U = Id_{S_U}$ et pour $W \subset V \subset U$ des ouverts on a $r_W^U \circ r_V^U = r_W^V$

Définition 5.4. Étant donné deux pré-faisceaux $\mathfrak{G} = \{S_U, r_V^U\}$ et $\mathfrak{G}' = \{S'_U, r'_V{}^U\}$ Un morphisme de Pré-faisceaux $h : \mathfrak{G} \rightarrow \mathfrak{G}'$ est la donné d'un système de morphisme de groupe abelien $\{h_U\}$ avec $h_U : S_U \rightarrow S'_U$ tel que le diagramme suivant commute

$$\begin{array}{ccc} S_U & \xrightarrow{h_U} & S'_U \\ r_V^U \downarrow & & \downarrow r'_V{}^U \\ S_V & \xrightarrow{h_V} & S'_V \end{array}$$

Étant donnée un pré-faisceau \mathfrak{G} sur un espace X , on peut construire *le faisceau de germes associé à \mathfrak{G}* , pour ce faire soit $x \in U$ avec $U \subset X$ un ouvert, on pose alors $S_x = \varinjlim_U S_U$ ou \varinjlim_U désigne la limite inductive pour les morphismes

r_V^U ou U parcourt tout les voisinages ouverts de x , chaque élément $f \in S_U$, pour U un voisinage de x , détermine un germe $f_x \in S_x$. Plus précisément, étant donné deux éléments $f \in S_U$ et $g \in S_V$ pour U et V des voisinages de x on définit la relation d'équivalence suivante : $f \sim g$ si et seulement si il existe un voisinage ouvert W de x tel que $W \subset U$ et $W \subset V$ et $r_W^U f = r_W^V g$. Le germe f_x représente alors la classe d'équivalence de f pour cette relation.

L'espace S de ce faisceau est alors la réunion des S_x pour $x \in X$ et la projection $\pi : S \rightarrow X$ qui associe à chaque élément d'un S_x le point x , la topologie de S est donnée par la base d'ouvert de la forme $\{f_y \mid y \in U\}$ ou U parcourt tout les ouverts de X et f_y est le germe d'un $f \in S_U$ ou f parcourt tout les éléments de S_U . On peut alors vérifier que le triplé (S, π, X) ainsi défini fourni bien un faisceau.

Étant donné un morphisme $\{h_U\}$ de pré-faisceaux $\mathfrak{G} \rightarrow \mathfrak{G}'$, on peut définir un morphisme de faisceaux sur les faisceaux de germes $\mathfrak{S} \rightarrow \mathfrak{S}'$ qui associe au germe $f_x \in S_x$ d'un élément $f \in S_U$ le germe $(h_U(f))_x \in S'_x$ de l'élément $h_U(f)$.

Considérons à présent un faisceau \mathfrak{S} sur un espace X on peut considérer une section locale de \mathfrak{S} i.e. un application continue $s : U \rightarrow S$ ou $U \subset X$ est un ouvert et tel $\pi \circ s = Id$, on note alors l'ensemble de ces section local d'un ouvert U , $\Gamma(U, \mathfrak{S})$ cet ensemble est muni d'une structure de groupe abelien héritée de celle de \mathfrak{S} on a de plus des morphismes de restriction pour $V \subset U$ on note $r_V^U : \Gamma(U, \mathfrak{S}) \rightarrow \Gamma(V, \mathfrak{S})$ qui associe à section défini sur U sa restriction à V , ces morphisme vérifie la seconde condition de pré-faisceau on obtient ainsi un pré-faisceau $\mathfrak{G} = \{\Gamma(U, \mathfrak{S}), r_V^U\}$ qu'on appel *Pré-faisceau canonique associé à \mathfrak{S}* .

Étant donné un morphisme de faisceaux $h : \mathfrak{S} \rightarrow \mathfrak{S}'$ on peut aussi définir un morphisme sur les pré-faisceaux canoniques associés, $\Gamma(U, \mathfrak{S}) \rightarrow \Gamma(U, \mathfrak{S}')$ donné par $s \mapsto h \circ s$ pour $s \in \Gamma(U, \mathfrak{S})$

Remarque 5.0.1. Ces deux constructions ne sont pas l'inverse l'une de l'autre, en effet partant d'un faisceau \mathfrak{S} alors le faisceau des germes associé au pré-faisceau canonique $\{\Gamma(U, \mathfrak{S}), r_V^U\}$ de \mathfrak{S} est isomorphe au faisceau de départ.

Cependant partant d'un pré-faisceau \mathfrak{G} alors le pré-faisceau canonique associé au faisceau des germes du pré-faisceau \mathfrak{G} , n'est pas en général isomorphe au pré-faisceau de départ.

Définition 5.5 (Sous faisceau). Étant donnée un faisceau $\mathfrak{S} = (S, \pi, X)$, $\mathfrak{S}' = (S', \pi', X)$ est un sous faisceau de \mathfrak{S} s'il vérifie

1. S' est ouvert dans S
2. $\pi' = \pi|_{S'}$ et $\pi'(S') = X$
3. La fibre $\pi'^{-1}(x) = S' \cap \pi^{-1}(x)$ est un sous groupe de $\pi^{-1}(x)$ pour tout $x \in X$

Pour tout faisceau \mathfrak{S} un sous faisceau évident de \mathfrak{S} est donné par le faisceau nul dont chaque fibre est le groupe trivial 0_x .

On peut alors vérifier que, étant donné un morphisme de faisceaux $h : \mathfrak{S} \rightarrow \mathfrak{S}'$, $\text{Ker}(h) = h^{-1}(0)$ est un sous faisceau de \mathfrak{S} et $\text{Im}(h) = h(\mathfrak{S})$ est un sous faisceau de \mathfrak{S}' .

On défini alors la notion de suite exact de faisceaux de manière habituelle, étant donné trois faisceaux \mathfrak{S} , \mathfrak{S}' et \mathfrak{S}'' une suite exact est une suite de morphisme de faisceaux

$$0 \rightarrow \mathfrak{S}' \xrightarrow{h'} \mathfrak{S} \xrightarrow{h} \mathfrak{S}'' \rightarrow 0$$

tel que $\text{Im}(h') = \text{Ker}(h)$ en tant que sous faisceau de \mathfrak{S} avec h' un morphisme injectif et h surjectif.

On défini également la notion de suite exacte de pré-faisceaux, étant donné trois faisceaux \mathfrak{S} , \mathfrak{S}' et \mathfrak{S}'' une suite exact est alors la donnée pour chaque ouvert $U \subset X$ d'une suite exacte de groupes

$$0 \rightarrow S'_U \xrightarrow{h'_U} S_U \xrightarrow{h_U} S''_U \rightarrow 0$$

ou les familles de morphismes $\{h_U\}$ et $\{h'_U\}$ représentent des morphismes de pré-faisceaux. Un fait qui ne sera pas démontrer ici est que ces suites exactes restent exactes après passage à la limite inductive, on peut alors énoncer le lemme suivant

Lemme 5.1. *Toute suite exact de pré-faisceaux induit une suite exact sur les faisceaux de germe correspondants.*

Une suite exacte de faisceaux induit une suite exact de groupe sur les fibres de chaque faisceau pour $x \in X$

$$0 \rightarrow S'_x \xrightarrow{h'_x} S_x \xrightarrow{h_x} S''_x \rightarrow 0$$

S''_x est alors isomorphe au quotient S_x/S'_x , on peut alors montrer que S'' est muni de la topologie quotient S/S' , de plus le faisceau \mathfrak{S}'' est unique (à isomorphisme près).

Exemple 5.1 (Suite exacte exponentiel). Soit M une variété lisse, nous allons considérer trois pré-faisceaux sur M ,

1. le pré-faisceau $\mathfrak{C} = \{C^\infty(U, \mathbb{C}), r_V^U\}$ des fonctions lisses définies localement sur M à valeurs dans \mathbb{C} .
2. le pré-faisceau $\mathfrak{C}^* = \{C^\infty(U, \mathbb{C}^*), r_V^U\}$ des fonctions lisses définies localement sur M à valeurs dans \mathbb{C}^* .
3. le pré-faisceau $\mathfrak{Z} = \{C^0(U, \mathbb{Z}), r_V^U\}$ des fonctions localement constantes sur M à valeurs dans \mathbb{Z} .

Notons alors \mathbb{C}_l , \mathbb{C}_l^* et \mathbb{Z} les faisceaux de germe associés respectivement à \mathfrak{C} , \mathfrak{C}^* et \mathfrak{Z} , remarquons d'abord que le faisceau de germe \mathbb{Z} n'est rien d'autre que le faisceau constant sur M (d'où la notation), de plus ces trois pré-faisceaux jouissent d'une propriété particulière, qui est que les pré-faisceaux canonique $\Gamma(U, \mathbb{C}_l)$ (resp. $\Gamma(U, \mathbb{C}_l^*)$, resp. $\Gamma(U, \mathbb{Z})$) sont isomorphes aux pré-faisceaux de départ \mathfrak{C} (resp. \mathfrak{C}^* , resp. \mathfrak{Z}).

Considérons à présent la suite de pré-faisceaux suivante

$$0 \rightarrow \mathfrak{Z} \xrightarrow{\iota} \mathfrak{C} \xrightarrow{e} \mathfrak{C}^* \rightarrow 0$$

Ou pour $U \subset M$ un ouvert, $\iota_U : C^0(U, \mathbb{Z}) \rightarrow C^\infty(U, \mathbb{C})$ désigne l'inclusion canonique des fonction localement constante à valeurs dans \mathbb{Z} dans les fonctions lisses définies localement à valeurs dans \mathbb{C} , et $e_U : C^\infty(U, \mathbb{C}) \rightarrow C^\infty(U, \mathbb{C}^*)$ est l'application exponentiel donnée par $f \mapsto e^{2i\pi f}$ pour $f \in C^\infty(U, \mathbb{C})$.

Cette suite est clairement exacte, en effet ι est injective, de plus on a

$$\text{Ker}(e) = \{f \in C^\infty(U, \mathbb{C}) \mid e^{2i\pi f} = 1\} = C^0(U, \mathbb{Z})$$

Enfin e est surjective puisque pour chaque ouvert de $U \subset M$, e_U admet un inverse à gauche donné par une détermination de $\frac{1}{2i\pi} \log(-)$. Cette suite exacte induit donc une suite exacte sur les faisceaux de germe

$$0 \rightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{\iota} \mathbb{C}_l \xrightarrow{e} \mathbb{C}_l^* \rightarrow 0$$

Ou les flèches sont données par les morphismes induit par ι et e . On appel cette suite exact *Suite exacte exponentiel*.

5.2 Cohomologie des Faisceaux

Soit X un espace topologique et \mathfrak{G} un pré faisceau sur X , Nous allons définir les groupes de cohomologie $H^q(X, \mathfrak{G})$ à valeurs dans un pré-faisceau et par la suite les groupes de cohomologie $H^q(X, \mathfrak{S})$ associé à un faisceau \mathfrak{S} .

Considérons pour cela $\mathfrak{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ un recouvrement ouvert de X , on défini le groupe $C^q(\mathfrak{U}, \mathfrak{G})$ comme l'ensemble des fonctions :

$$f : \begin{array}{ccc} I^{q+1} & \longrightarrow & \mathfrak{G} \\ (i_0, \dots, i_q) & \longmapsto & f(i_0, \dots, i_q) \in S_{U_{i_0} \cap \dots \cap U_{i_q}} \end{array}$$

$C^q(\mathfrak{U}, \mathfrak{G})$ est évidemment muni d'une structure de groupe abelien. On défini alors un morphisme

$$\delta^q : C^q(\mathfrak{U}, \mathfrak{G}) \rightarrow C^{q+1}(\mathfrak{U}, \mathfrak{G})$$

defini par la formule :

$$(\delta^q f)(i_0, \dots, i_{q+1}) = \sum_{k=0}^{q+1} (-1)^k r_W^{W_k} f(i_0, \dots, \widehat{i_k}, \dots, i_{q+1})$$

ou $f \in C^q(\mathfrak{U}, \mathfrak{G})$ et ou $W_k = U_{i_0} \cap \dots \cap \widehat{U_{i_k}} \cap \dots \cap U_{i_{q+1}}$ et $W = U_{i_0} \cap \dots \cap U_{i_{q+1}}$, on peut alors montrer par un calcul que $\delta^{q+1} \circ \delta^q = 0$, on a ainsi un complexe de cochaîne $(C^q(\mathfrak{U}, \mathfrak{G}), \delta^q)$ donné par la suite

$$0 \rightarrow C^0(\mathfrak{U}, \mathfrak{G}) \rightarrow C^1(\mathfrak{U}, \mathfrak{G}) \rightarrow C^2(\mathfrak{U}, \mathfrak{G}) \rightarrow \dots$$

on définit alors le q -ième groupe de cohomologie de ce complexe par

$$H^q(\mathfrak{U}, \mathfrak{G}) = \text{Ker}(\delta^q) / \text{Im}(\delta^{q-1})$$

Soit à présent $\mathfrak{B} = \{V_j\}_{j \in J}$ un raffinement de \mathfrak{U} et soit $\tau : J \rightarrow I$ une fonction tel que $V_j \subset U_{\tau j}$ pour tout $j \in J$, on a alors un morphisme

$$\tau^* : C^q(\mathfrak{U}, \mathfrak{G}) \rightarrow (C^q(\mathfrak{B}, \mathfrak{G}))$$

defini par la formule

$$(\tau^* f)(j_0, \dots, j_q) = r_W^{W'} f(\tau j_0, \dots, \tau j_q)$$

ou $f \in C^q(\mathfrak{U}, \mathfrak{G})$ et $W = V_{j_0} \cap \dots \cap V_{j_q}$ et $W' = U_{\tau j_0} \cap \dots \cap U_{\tau j_q}$, on peut alors montrer par un calcul que le diagramme suivant commute

$$\begin{array}{ccc} C^q(\mathfrak{U}, \mathfrak{G}) & \xrightarrow{\tau^*} & C^q(\mathfrak{B}, \mathfrak{G}) \\ \delta^q \downarrow & & \downarrow \delta^q \\ C^{q+1}(\mathfrak{U}, \mathfrak{G}) & \xrightarrow{\tau^*} & C^{q+1}(\mathfrak{B}, \mathfrak{G}) \end{array}$$

Ce qui implique que τ^* induit une application en cohomologie

$$t_{\mathfrak{B}}^{\mathfrak{U}} : H^q(\mathfrak{U}, \mathfrak{G}) \rightarrow H^q(\mathfrak{B}, \mathfrak{G})$$

On peut alors montrer que les morphismes $t_{\mathfrak{B}}^{\mathfrak{U}}$ sont independant du choix de la fonction τ , en effet étant donné τ et τ' deux fonctions $J \rightarrow I$ on définit l'opérateur d'homotopie

$$k^q : C^q(\mathfrak{U}, \mathfrak{G}) \rightarrow C^{q-1}(\mathfrak{B}, \mathfrak{G})$$

donné par la formule

$$(k^q f)(j_0, \dots, j_{q-1}) = \sum_{k=0}^{q-1} (-1)^k r_W^{W_k} f(\tau j_0, \dots, \tau j_k, \tau' j_{k+1}, \dots, \tau' j_{q-1})$$

avec $f \in C^q(\mathfrak{U}, \mathfrak{G})$

et $W = V_{j_0} \cap \dots \cap V_{j_{q-1}}$ et $W' = U_{\tau j_0} \cap \dots \cap U_{\tau j_k} \cap U_{\tau' j_{k+1}} \cap \dots \cap U_{\tau' j_{q-1}}$ on conclue alors grace à la relation suivante qui induit une égalité en cohomologie

$$\delta^{q-1} k^q + k^{q+1} \delta^q = \tau'^* - \tau^*$$

En peut enfin montrer que les $t_{\mathfrak{B}}^{\mathfrak{U}}$ forment un système inductif i.e. $t_{\mathfrak{U}}^{\mathfrak{U}} = Id$ et $t_{\mathfrak{B}}^{\mathfrak{U}} \circ t_{\mathfrak{B}'}^{\mathfrak{B}} = t_{\mathfrak{B}'}^{\mathfrak{U}}$, ceci motive alors la définition suivante.

Définition 5.6. On défini les groupes de cohomologie $H^q(X, \mathfrak{G})$ comme limite inductive i.e.

$$H^q(X, \mathfrak{G}) = \lim_{\mathfrak{U}} H^q(\mathfrak{U}, \mathfrak{G})$$

ou \mathfrak{U} parcourt l'ensemble des recouvrement de X .

Pour \mathfrak{G} un faisceau sur X on défini les groupes de cohomologie $H^q(X, \mathfrak{G}) = H^q(X, \Gamma(U, \mathfrak{G}))$ ou $\Gamma(U, \mathfrak{G})$ est le pré-faisceau canonique associé à \mathfrak{G} .

Considérons à présent une suite exact courte de pré-faisceaux sur un même espace X

$$0 \rightarrow \mathfrak{G}' \xrightarrow{h'} \mathfrak{G} \xrightarrow{h} \mathfrak{G}'' \rightarrow 0$$

cette suite induit une suite exact courte entre les groupes de cochaîne associé pour un recouvrement \mathfrak{U} fixé,

$$0 \rightarrow C^q(\mathfrak{U}, \mathfrak{G}') \xrightarrow{h'_*} C^q(\mathfrak{U}, \mathfrak{G}) \xrightarrow{h_*} C^q(\mathfrak{U}, \mathfrak{G}'') \rightarrow 0$$

Ou h'_* est défini par $f \mapsto h' \circ f$ pour $f \in C^q(\mathfrak{U}, \mathfrak{G}')$ de plus les morphismes h_* et h'_* commutent avec les δ^q , et induisent ainsi des morphismes en cohomologie

$$\begin{aligned} h'_* &: H^q(\mathfrak{U}, \mathfrak{G}') \rightarrow H^q(\mathfrak{U}, \mathfrak{G}) \\ h_* &: H^q(\mathfrak{U}, \mathfrak{G}) \rightarrow H^q(\mathfrak{U}, \mathfrak{G}'') \end{aligned}$$

Enfin h_* et h'_* commutent avec les morphisme de raffinement $t_{\mathfrak{B}}^{\mathfrak{U}} : H^q(\mathfrak{U}, \mathfrak{G}) \rightarrow H^q(\mathfrak{B}, \mathfrak{G})$, on peut alors passer à la limite inductive pour obtenir des morphismes

$$\begin{aligned} h'_* &: H^q(X, \mathfrak{G}') \rightarrow H^q(X, \mathfrak{G}) \\ h_* &: H^q(X, \mathfrak{G}) \rightarrow H^q(X, \mathfrak{G}'') \end{aligned}$$

On défini alors un morphisme de passage $\delta_*^q : H^q(\mathfrak{U}, \mathfrak{G}'') \rightarrow H^{q+1}(\mathfrak{U}, \mathfrak{G}')$ comme suit, étant donné $[f] \in H^q(\mathfrak{U}, \mathfrak{G}'')$ représenté par un élément $f \in C^q(\mathfrak{U}, \mathfrak{G}'')$ avec $\delta^q(f) = 0$ par exactitude de la suite des groupes de cochaîne on peut alors trouver un élément $g \in C^q(\mathfrak{U}, \mathfrak{G})$ tel que $h_*(g) = f$, ainsi $\delta^q(g)$ ainsi $\delta^q(g) \in \text{Ker}(h_*) \subset C^{q+1}(\mathfrak{U}, \mathfrak{G}')$ on a de plus $\delta^{q+1}\delta^q(g) = 0$, on défini alors $\delta_*^q[f] = [\delta^q(g)]$ comme la classe de cohomologie de $\delta^q(g)$.

On peut alors montrer que δ_*^q commute avec les morphismes de raffinement $t_{\mathfrak{B}}^{\mathfrak{U}}$ on obtient alors le lemme suivant

Lemme 5.2. Une suite exact courte de pré-faisceaux sur un même espace X induit une suite exact longue en cohomologie

$$\dots \rightarrow H^q(X, \mathfrak{G}') \xrightarrow{h_*} H^q(X, \mathfrak{G}) \xrightarrow{h'_*} H^q(X, \mathfrak{G}'') \xrightarrow{\delta_*^q} H^{q+1}(X, \mathfrak{G}') \rightarrow \dots$$

Supposons à présent que X est paracompact.

Soit \mathfrak{G} un pré-faisceau sur X et soit \mathfrak{S} le faisceau des germes de \mathfrak{G} , notons alors \mathfrak{G} le pré-faisceau canonique associé à \mathfrak{S} on a alors un morphisme naturel $h : \mathfrak{G} \rightarrow \mathfrak{S}$ qui à $f \in S_U$, pour $U \subset X$ un ouvert, associe la section $s \in \Gamma(U, \mathfrak{S})$ donnée par $x \mapsto f_x$ ou f_x désigne le germe de f . Par définition on a que $H^q(X, \mathfrak{S}) = H^q(X, \mathfrak{G})$, h induit alors un morphisme $h_* : H^q(X, \mathfrak{G}) \rightarrow H^q(X, \mathfrak{S})$. On a alors un théorème relatif à ce morphisme dont la démonstration ne fera pas l'objet de cet exposé.

Théorème 5.3. *Soit \mathfrak{G} un pré-faisceau sur un espace paracompact X et soit \mathfrak{S} son faisceau des germes, alors $h_* : H^q(X, \mathfrak{G}) \rightarrow H^q(X, \mathfrak{S})$ est un isomorphisme.*

Considérons maintenant une suite exacte de faisceaux

$$0 \rightarrow \mathfrak{G}' \xrightarrow{h'} \mathfrak{G} \xrightarrow{h} \mathfrak{G}'' \rightarrow 0$$

cette suite induit la suite exacte sur les pré-faisceaux canonique suivante

$$0 \rightarrow \Gamma(U, \mathfrak{G}') \xrightarrow{h'} \Gamma(U, \mathfrak{G}) \xrightarrow{h} S''_U \rightarrow 0$$

pour $U \subset X$ un ouvert ou $S''_U = \Gamma(U, \mathfrak{G})/\Gamma(U, \mathfrak{G}')$, notons respectivement \mathfrak{G}' , \mathfrak{G} et \mathfrak{G}'' les pré-faisceaux $\Gamma(U, \mathfrak{G}')$, $\Gamma(U, \mathfrak{G})$ et S''_U on par définition $H^q(X, \mathfrak{G}') = H^q(X, \mathfrak{G}')$ et $H^q(X, \mathfrak{G}) = H^q(X, \mathfrak{S})$ de plus comme X est supposé paracompact on a d'après le théorème précédent $H^q(X, \mathfrak{G}'') \simeq H^q(X, \mathfrak{S}'')$ ainsi d'après le lemme 5.2 on a le théorème suivant

Théorème 5.4. *Soit une suite exacte de faisceaux sur un espace X paracompact*

$$0 \rightarrow \mathfrak{G}' \xrightarrow{h'} \mathfrak{G} \xrightarrow{h} \mathfrak{G}'' \rightarrow 0$$

alors cette suite induit une suite exactes longue

$$\dots \rightarrow H^q(X, \mathfrak{G}') \xrightarrow{h_*} H^q(X, \mathfrak{S}) \xrightarrow{h'_*} H^q(X, \mathfrak{G}'') \xrightarrow{\delta_*^q} H^{q+1}(X, \mathfrak{G}') \rightarrow \dots$$

ou δ_*^q est défini naturellement comme dans le cas des pré-faisceaux.

Passons à présent à la définition d'un faisceau fin sur un espace topologique paracompact.

Définition 5.7. Un faisceau \mathfrak{S} sur un espace paracompact X sera dit *fin* si pour tout recouvrement localement fini $\mathfrak{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ de X il existe une famille de morphisme de faisceaux $\{h_i\}_{i \in I}$ ou $h_i : \mathfrak{S} \rightarrow \mathfrak{S}$ tel que

1. Pour chaque $i \in I$ il existe un fermé A_i de X tel que $A_i \subset U_i$ et $h_i(S_x) = 0$ si $x \notin A_i$.
2. $\sum_{i \in I} h_i = Id$

Théorème 5.5. *Soit \mathfrak{S} un faisceau fin sur X alors $H^q(X, \mathfrak{S}) = 0$ pour $q \geq 1$*

Démonstration. Puisque X est paracompact il suffit de montrer que $H^q(\mathfrak{U}, \mathfrak{S}) = 0$ pour $\mathfrak{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ un recouvrement localement fini, pour cela considérons l'opérateur d'homotopie,

$$k^q : C^q(\mathfrak{U}, \mathfrak{S}) \rightarrow C^{q-1}(\mathfrak{U}, \mathfrak{S})$$

défini par la formule suivante pour $f \in C^q(\mathfrak{U}, \mathfrak{S})$

$$(k^q f)(i_0, \dots, i_{q-1}) = \sum_{i \in I} t(i, i_0, \dots, i_{q-1})$$

ou $t(i, i_0, \dots, i_{q-1})$ est défini comme suit

$$t(i, i_0, \dots, i_{q-1}) = \begin{cases} h_i(f(i_0, \dots, i_{q-1})) & \text{sur } U_i \cap U_{i_0} \cap \dots \cap U_{i_{q-1}} \\ 0 & \text{autre part} \end{cases}$$

Ou les h_i sont les morphisme vérifiant les propriété 1 et 2 de faisceau fin, on peut alors vérifier par un calcul que $\delta^{q-1}k^q + k^{q+1}\delta^q = Id$ pour $q \geq 1$ ce qui conclue la preuve. \square

Théorème 5.6. *Le faisceau \mathbb{C}_l des germes de fonctions lisse définis localement sur une variété paracompact M à valeurs dans \mathbb{C} est fin.*

Démonstration. Soit $\mathfrak{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ un recouvrement localement fini, soit ϕ_i une partition de l'unité subordonnée à \mathfrak{U} on définit les morphismes $h_i : C^\infty(U, \mathbb{C}) \rightarrow C^\infty(U, \mathbb{C})$ donnés par $f \mapsto \phi_i f$ pour $U \subset X$ un ouvert. Les morphismes induits par les $\{h_i\}$ sur le faisceau des germes \mathbb{C}_l remplissent alors les conditions de la définition puisque $\sum \phi_i = 1$ et les fermés A_i sont donnés par $Supp(\phi_i)$. \square

5.3 Classification des fibré en droite complexe

Soit M une variété lisse, nous avons vu que les classes d'isomorphisme de fibré vectoriel réel de rang 2 orienté sont en bijection avec l'ensemble des \mathbb{C}^* -cocylces que nous avons noter $H^1(M, \mathbb{C}^*)$ cette notation provient du fait que cet ensemble n'est rien d'autre que le groupe de cohomologie $H^1(M, \mathbb{C}_l^*)$ associé au faisceau \mathbb{C}_l^* défini dans l'exemple 5.1 en effet par définition on a $H^1(M, \mathbb{C}_l^*) = H^1(M, \mathfrak{C}^*) = \varinjlim_{\mathfrak{U}} H^q(\mathfrak{U}, \mathfrak{C}^*)$, de plus \mathfrak{C}^* étant muni de sa struc-

ture multiplicative, les élément de $H^1(\mathfrak{U}, \mathfrak{C}^*)$ pour un recouvrement \mathfrak{U} sont donnée (d'après la définition de la cohomologie à valeur dans un pré-faisceau) par des classes d'équivalence de fonctions

$$g_{ij} : U_i \cap U_j \rightarrow \mathbb{C}^*$$

pour la relation d'équivalence :

$$\text{Il existe } \lambda_i \in \Gamma(U_i, \mathfrak{C}^*) \text{ tel que } g'_{ij} = \lambda_i g_{ij} \lambda_j^{-1}$$

ce qui correspond bien à la définition de $H^1(M, \mathbb{C}^*)$ dans la section 3.1 après passage à la limite inductive.

Considérons à présent la suite exacte exponentiel défini dans l'exemple 5.1

$$0 \rightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{t} \mathbb{C}_l \xrightarrow{e} \mathbb{C}_l^* \rightarrow 0$$

cette suite induit une suite exact longue en cohomologie par le théorème 5.4

$$\dots \rightarrow H^q(M, \mathbb{Z}) \xrightarrow{\iota_*} H^q(M, \mathbb{C}_l) \xrightarrow{e_*} H^q(M, \mathbb{C}_l^*) \xrightarrow{\delta_*^q} H^{q+1}(M, \mathbb{Z}) \rightarrow \dots$$

Nous avons de plus montrer que le faisceau \mathbb{C}_l est fin, ainsi $H^q(M, \mathbb{C}_l) = 0$ pour $q \geq 1$ nous avons donc l'isomorphisme

$$\delta_*^1 : H^1(M, \mathbb{C}_l^*) \simeq H^2(M, \mathbb{Z})$$

et donc une bijection qui est en fait un isomorphisme de groupe entre $Vect_k^+(M) \simeq H^2(M, \mathbb{Z})$ nous allons montrer que cet isomorphisme est en fait fourni par la première classe de Chern des fibré. Notons que d'après la remarque de la section **4.3.2** (avec les même notations) on a que $\tilde{c}_1(E) = [\tilde{c}](E) \in H^2(M, \mathbb{Z})$ pour E un fibré en droite complexe.

Théorème 5.7. *L'application*

$$\tilde{c}_1 : Vect_2^+(M) \rightarrow H^2(M, \mathbb{Z})$$

qui associe à une classe d'isomorphisme de fibré vectoriel sa classe d'Euler (première classe Chern) est un isomorphisme de groupe.

Démonstration. On a comme évoqué précédemment un isomorphisme de groupe $Vect_2^+(M) \simeq H^1(M, \mathbb{C}_l^*)$ ainsi il suffit de montrer que étant donné une classe isomorphisme de fibré vectoriel $[E]$ auquel est associé une classe de \mathbb{C}^* -cocycle $[g] \in H^1(M, \mathbb{C}_l^*)$ on a $\pm \tilde{c}_1([E]) = \delta_*^1([g])$ pour cela soit $g_{\alpha\beta}$ un \mathfrak{U} -cocycle représentant $[g]$ pour un recouvrement \mathfrak{U} de M donné. Par construction de la cohomologie des faisceaux la suite exact exponentiel induit une suite exact

$$0 \rightarrow C^1(\mathfrak{U}, \mathfrak{Z}) \xrightarrow{\iota_*} C^1(\mathfrak{U}, \mathfrak{C}) \xrightarrow{e_*} C^1(\mathfrak{U}, \mathfrak{C}^*) \rightarrow 0$$

ainsi il existe $\phi_{\alpha\beta} \in C^1(\mathfrak{U}, \mathfrak{C})$ qui peut être vue comme une élément $C^1(\mathfrak{U}, \mathfrak{Z})$ tel que $e_*(\phi_{\alpha\beta}) = g_{\alpha\beta}$ car le morphisme ι_* est induit par l'injection canonique, donc $\phi_{\alpha\beta}$ est donné par

$$\phi_{\alpha\beta} = \frac{1}{2i\pi} \log g_{\alpha\beta}$$

Nous avons défini le morphisme de passage $\delta_*^1([g])$ comme la classe $[\delta^1 \phi_{\alpha\beta}]$ dans $H^2(M, \mathbb{Z})$. De plus nous avons le diagramme commutatif suivant

$$\begin{array}{ccc} C^1(\mathfrak{U}, \mathfrak{Z}) & \xrightarrow{i} & C^1(\mathfrak{U}, \mathbb{R}) \\ \delta^1 \downarrow & & \downarrow \delta \\ C^2(\mathfrak{U}, \mathfrak{Z}) & \xrightarrow{i} & C^2(\mathfrak{U}, \mathbb{R}) \end{array}$$

ou i désigne l'injection canonique des fonction localement constante à valeurs dans \mathbb{Z} dans les fonction localement constante à valeurs dans \mathbb{R} , et δ est l'application défini dans la section **2.5** pour le complexe de Čech.

De plus les injections i induisent de injection en cohomologie $i : H^*(M, \mathbb{Z}) \rightarrow H^*(M, \mathbb{R})$, ainsi en regardant $\delta_*^1([g])$ comme un élément de $H^2(M, \mathbb{R})$ et $\phi_{\alpha\beta}$ comme un élément $C^2(\mathfrak{U}, \mathbb{R})$ de on a $\delta_*^1([g]) = [\delta \phi_{\alpha\beta}]$ dans $H^2(M, \mathbb{R})$ or d'après le calcul de la classe d'Euler d'un fibré vectoriel de rang 2 orienté on a

$$\delta_*^1([g]) = [\delta\phi_{\alpha\beta}] = [-\tilde{c}]$$

ou \tilde{c} est un représentant de la classe d'Euler du fibré dont les cocycles sont donné par $g_{\alpha\beta}$ dans $H^2(\mathcal{U}, \mathbb{R})$ donc $\delta_*^1([g])$ (à signe près) est bien la classe d'Euler de la classe d'isomorphisme du fibré E

□

Ce dernier théorème classe donc les fibrés vectoriel réel orienté de rang 2 sur une variété lisse, remarquons en particulier que si M est une surface lisse compact (i.e. variété lisse compact de dimension 2) alors $Vect_2^+(M) \simeq \mathbb{Z}$.

Références

- [1] Raoul Bott Loring W. Tu, Differential Forms in Algebraic Topology (1982)
- [2] Freidrich Hirzebruch, Topological methods in algebraic geometry (1978)
- [3] Norman Steenrod, Topology of Fibre Bundles (1960)
- [4] Dale Husemoller, Fibre Bundles (1966)
- [5] Nicolaescu, Lectures on the geometry of manifolds (2007)
- [6] John Milnor, James D. Stasheff, Characteristic Classes (1974)
- [7] Sylvestre Gallot, Dominique Hulin, Jacques Lafontaine, Riemannian Geometry (2004)