Chapitre 4

Ensembles de périmètre fini

4.1 Définition et propriétés

Définition 4.1.1. Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un ouvert. Un ensemble Lebesgue mesurable $E \subset \mathbb{R}^N$ est de *périmètre fini dans* Ω si $D\chi_E \in \mathcal{M}(\Omega; \mathbb{R}^N)$. On définit alors le *périmètre de* E *dans* Ω par

$$P(E, \Omega) := |D\chi_E|(\Omega) = \sup \left\{ \int_E \operatorname{div}\varphi \, dx : \ \varphi \in \mathcal{C}_c^1(\Omega; \mathbb{R}^N), \ |\varphi| \leq 1 \right\}.$$

Exemple 4.1.2. Si $E \subset \mathbb{R}^N$ est un ouvert borné de frontière de classe $\mathcal{C}^1$ (par morceaux), alors E est de périmètre fini dans Ω et $D\chi_E = -\nu_E \mathcal{H}^{N-1} \llcorner (\partial E \cap \Omega)$ où ν_E désigne la normale unitaire extérieure à E. En effet, si $\varphi \in \mathcal{C}_c^1(\Omega; \mathbb{R}^N)$, en utilisant la formule de la divergence, il vient

$$\int_E \operatorname{div}\varphi \, dx = \int_{\partial E \cap \Omega} \varphi \cdot \nu_E \, d\mathcal{H}^{N-1},$$

ce qui montre bien que $D\chi_E = -\nu_E \mathcal{H}^{N-1} \llcorner (\partial E \cap \Omega)$. Par ailleurs, une application immédiate de la Proposition 1.1.9 montre que $|D\chi_E| = \mathcal{H}^{N-1} \llcorner (\partial E \cap \Omega)$ si bien que

$$P(E, \Omega) = |D\chi_E|(\Omega) = \mathcal{H}^{N-1}(\partial E \cap \Omega).$$

En appliquant l'injection de Sobolev (théorème 2.3.1) aux fonctions caractéristiques d'ensembles de périmètre fini on obtient la fameuse inégalité isopérimétrique.

Théorème 4.1.3 (Inégalité isopérimétrique). *Il existe une constante* $\gamma_N > 0$ *qui ne dépend que de la dimension telle que pour tout ensemble* E *de périmètre fini dans* $\mathbb{R}^N$ *avec* $\mathcal{L}^N(E) < \infty$,

$$\mathcal{L}^N(E)^{\frac{N-1}{N}} \leq \gamma_N P(E, \mathbb{R}^N).$$

Le résultat suivant de compacité est une conséquence immédiate du théorème de Rellich pour les fonctions BV.

Théorème 4.1.4 (Rellich). *Soit* $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ *un ouvert borné. De toute suite* $\{E_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ *d'ensembles de périmètre fini dans* Ω *telle que*

$$\sup_{k \in \mathbb{N}} \left\{ \mathcal{L}^N(E_k) + P(E_k, \Omega) \right\} < \infty,$$

on peut extraire une sous-suite $\{E_{k_j}\}_{j \in \mathbb{N}}$ *telle que* $\chi_{E_{k_j}} \to \chi_E$ *fortement dans* $L^1(\Omega)$ *et* $D\chi_{E_{k_j}} \rightharpoonup D\chi_E$ *faible* dans* $\mathcal{M}(\Omega; \mathbb{R}^N)$, *où* E *est un ensemble de périmètre fini dans* Ω *tel que* $\mathcal{L}^N(E) < \infty$.

Démonstration. Si $u_k = \chi_{E_k}$, le théorème 2.3.3 montre que $\chi_{E_{k_j}} \to u$ dans $L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ (en donc aussi $\mathcal{L}^N$-presque partout quitte à extraire une sous-suite) et $Du_k \rightharpoonup Du$ faible* dans $\mathcal{M}(\Omega;\mathbb{R}^N)$. Par conséquent, $u(x) \in \{0,1\}$ pour $\mathcal{L}^N$-presque tout $x \in \Omega$ et donc, il existe un ensemble E mesurable tel que $u = \chi_E$. D'après le Lemme de Fatou, il vient $\mathcal{L}^N(E) < \infty$. Comme par ailleurs $P(E,\Omega) < \infty$, on en déduit que $u = \chi_E \in BV(\Omega)$.

Il reste à montrer la convergence dans tout $L^1(\Omega)$. Pour ce faire, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un compact $K \subset \Omega$ tel que $\mathcal{L}^N(\Omega \setminus K) \leq \varepsilon$. On considère alors un ouvert borné et Lipschitzien ω tel que $K \subset \omega \subset \overline{\omega} \subset \Omega$. Alors, on a

$$\int_\Omega |\chi_{E_k} - \chi_E|\, dx \leq \int_\omega |\chi_{E_k} - \chi_E|\, dx + 2\mathcal{L}^N(\Omega \setminus \omega) \leq \int_\omega |\chi_{E_k} - \chi_E|\, dx + 2\varepsilon.$$

Par passage à la limite quand $k \to \infty$ puis $\varepsilon \to 0$, on obtient bien que $\chi_{E_k} \to \chi_E$ dans $L^1(\Omega)$. $\square$

Un cas particulier de l'inégalité de Sobolev-Poincaré-Wirtinger dans BV est le cas où $\Omega = B_\varrho(x_0)$ et u est la fonction caractéristique d'un ensemble de périmètre fini. On obtient une version localisée de l'inégalité isopérimétrique.

Théorème 4.1.5 (Inégalité isopérimétrique relative). *Il existe une constante $C_N > 0$, ne dépendant que de la dimension, telle que pour tout ensemble E de périmètre fini dans $\mathbb{R}^N$, pour tout $x_0 \in \mathbb{R}^N$ et tout $\varrho > 0$,*

$$\min\{\mathcal{L}^N(B_\varrho(x_0) \cap E), \mathcal{L}^N(B_\varrho(x_0) \setminus E)\}^{\frac{N-1}{N}} \leq C_N P(E, B_\varrho(x_0)).$$

Démonstration. Si E est un ensemble de périmètre fini dans $\mathbb{R}^N$, alors $u := \chi_E \in BV(B_\varrho(x_0))$. Posons $v(y) := u(x_0 + \rho y)$ pour $y \in B_1$ de sorte que $v \in BV(B_1)$. D'après l'inégalité de Sobolev-Poincaré-Wirtinger, il existe une constante dimensionnelle $C_N > 0$ telle que

$$\|v - v_{B_1}\|_{L^{\frac{N}{N-1}}(B_1)} \leq C_N |Dv|(B_1).$$

Par changement de variable, il vient

$$\|u - u_{B_\varrho(x_0)}\|_{L^{\frac{N}{N-1}}(B_\varrho(x_0))} \leq C_N |Du|(B_\varrho(x_0)),$$

ou encore

$$\mathcal{L}^N(B_\varrho(x_0) \cap E)^{\frac{N-1}{N}} \left(\frac{\mathcal{L}^N(B_\varrho(x_0) \setminus E)}{\mathcal{L}^N(B_\varrho(x_0))}\right) + \mathcal{L}^N(B_\varrho(x_0) \setminus E)^{\frac{N-1}{N}} \left(\frac{\mathcal{L}^N(B_\varrho(x_0) \cap E)}{\mathcal{L}^N(B_\varrho(x_0))}\right) \\ \leq C_N P(E, B_\varrho(x_0)).$$

Si $\mathcal{L}^N(B_\varrho(x_0) \cap E) \leq \mathcal{L}^N(B_\varrho(x_0) \setminus E)$, alors $\mathcal{L}^N(B_\varrho(x_0) \setminus E) \geq \frac{1}{2}\mathcal{L}^N(B_\varrho(x_0))$ et il vient

$$\begin{aligned} C_N P(E, B_\varrho(x_0)) &\geq \mathcal{L}^N(B_\varrho(x_0) \cap E)^{\frac{N-1}{N}} \left(\frac{\mathcal{L}^N(B_\varrho(x_0) \setminus E)}{\mathcal{L}^N(B_\varrho(x_0))}\right) \\ &\geq \frac{1}{2}\mathcal{L}^N(B_\varrho(x_0) \cap E)^{\frac{N-1}{N}}. \end{aligned}$$

L'autre cas se démontre de manière analogue. $\square$

4.2 Applications

4.2.1 Le problème isopérimétrique

Le *problème isopérimétrique* consiste à minimiser le périmètre d'un ensemble à volume prescrit. Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un ouvert borné et $0 < m \leq \mathcal{L}^N(\Omega)$, on cherche à résoudre le problème de minimisation

$$\alpha := \inf \left\{ P(E, \Omega) : \ E \subset \Omega \text{ mesurable tel que } \mathcal{L}^N(E) = m \right\}.$$

En choisissant $r > 0$ tel que $\mathcal{L}^N(\Omega \cap B_r) = m$, on a alors que

$$0 \leq \alpha \leq P(\Omega \cap B_r, \Omega) = P(B_r, \Omega) = \mathcal{H}^{N-1}(\Omega \cap \partial B_r) < \infty.$$

Par la méthode directe du calcul des variations, si $\{E_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ est une suite minimisante, le théorème de Rellich montre qu'à extraction d'une sous-suite près, on a $\chi_{E_k} \to \chi_E$ dans $L^1(\Omega)$ où $E \subset \Omega$ est un ensemble de périmètre fini dans Ω satisfaisant $\mathcal{L}^N(E) = m$ et $P(E, \Omega) = \alpha$.

Si $\Omega = \mathbb{R}^N$, il est possible de montrer que le problème de minimisation précédent admet toujours des solutions données par les boules de volume m.

4.2.2 Le problème de Cheeger

Un autre exemple d'application est le *problème de Cheeger*. Soient $p > 0$, $N \geq 2$ et $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un ouvert borné. Le p-problème de Cheeger dans Ω est le problème variationnel suivant :

$$C_p(\Omega) := \inf \left\{ \frac{P(E, \mathbb{R}^N)}{\mathcal{L}^N(E)^p} : \ E \subset \Omega \right\},$$

avec la convention $\frac{P(E,\mathbb{R}^N)}{\mathcal{L}^N(E)^p} = \infty$ si $\mathcal{L}^N(E) = 0$. Toute solution de ce problème de minimisation est appelé un p-ensemble de Cheeger. Notons tout d'abord que $C_p(\Omega) < \infty$, ce qui se vérifie en prenant $E = B$ une boule contenue dans Ω.

Si $p < (N-1)/N$, alors $C_p(\Omega) = 0$. En effet, si $B_\varepsilon \subset \Omega$ est une boule de rayon $\varepsilon > 0$, alors

$$C_p(\Omega) \leq \frac{P(B_\varepsilon, \mathbb{R}^N)}{\mathcal{L}^N(B_\varepsilon)^p} = \varepsilon^{N-1-Np} \frac{P(B, \mathbb{R}^N)}{\mathcal{L}^N(B)^p} \to 0$$

quand $\varepsilon \to 0$. Par conséquent, s'il existait un ensemble $E \subset \Omega$ (de périmètre fini dans $\mathbb{R}^N$) tel que

$$0 = C_p(\Omega) = \frac{P(E, \mathbb{R}^N)}{\mathcal{L}^N(E)^p},$$

alors $P(E, \mathbb{R}^N) = |D\chi_E|(\mathbb{R}^N) = 0$ et donc χ_E serait constant sur $\mathbb{R}^N$. Si $\chi_E = 1$, on aurait alors que $E = \mathbb{R}^N$ ce qui est impossible puisque $E \subset \Omega$ et Ω est borné. Si en revanche $\chi_E = 0$, alors $\mathcal{L}^N(E) = 0$ ce qui est également impossible. Ceci montre qu'un p-ensemble de Cheeger ne peut pas exister quand $p < (N-1)/N$.

Supposons maintenant que $p \geq (N-1)/N$. Si $E \subset \Omega$, en utilisant l'inégalité isopérimétrique, on obtient que

$$\mathcal{L}^N(E)^p \leq \mathcal{L}^N(E)^{\frac{N-1}{N}} \mathcal{L}^N(\Omega)^{p - \frac{N-1}{N}} \leq \gamma_N P(E, \mathbb{R}^N) \mathcal{L}^N(\Omega)^{p - \frac{N-1}{N}},$$

où $\gamma_N > 0$ est une constante dimensionnelle, ce qui montre que

$$C_p(\Omega) \geq \frac{\mathcal{L}^N(\Omega)^{\frac{N-1}{N} - p}}{\gamma_N} > 0.$$

Considérons alors une suite minimisante $\{E_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ tels que $E_k \subset \Omega$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ et

$$\frac{P(E_k,\mathbb{R}^N)}{\mathcal{L}^N(E_k)^p} \to C_p(\Omega).$$

Comme Ω est borné, on a $\mathcal{L}^N(E_k) \le \mathcal{L}^N(\Omega)$, et $P(E_k,\mathbb{R}^N) \le (C_p(\Omega)+1)\mathcal{L}^N(E_k)^p \le (C_p(\Omega)+1)\mathcal{L}^N(\Omega)^p$ pour k assez grand. On en déduit que $\{\chi_{E_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ est bornée dans $BV(\mathbb{R}^N)$. D'après le théorème de Rellich, quitte à extraire une sous-suite, on peut supposer que $\chi_{E_k} \to \chi_E$ dans $L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^N)$ où $\chi_E \in BV(\mathbb{R}^N)$. Comme $E_k \subset \Omega$, alors $\mathcal{L}^N(E_k \setminus \Omega) = 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ puis, par passage à la limite quand $k \to \infty$, on obtient que $\mathcal{L}^N(E \setminus \Omega) = 0$. Par conséquent, on peut modifier E sur un ensemble de $\mathcal{L}^N$-mesure nulle près (et donc sans changer sa mesure de Lebesgue ni son périmètre) pour assurer que $E \subset \Omega$. De plus, on a $\mathcal{L}^N(E_k) \to \mathcal{L}^N(E)$ et, par semicontinuité inférieure du périmètre $P(E,\mathbb{R}^N) \le \liminf_k P(E_k,\mathbb{R}^N)$. Par conséquent,

$$C_p(\Omega) \le \frac{P(E,\mathbb{R}^N)}{\mathcal{L}^N(E)^p} \le \liminf_{k\to\infty} \frac{P(E_k,\mathbb{R}^N)}{\mathcal{L}^N(E_k)^p} = C_p(\Omega),$$

ce qui montre que E est un p-ensemble de Cheeger. Si $p = N/(N-1)$, il est possible de montrer que toutes les boules contenues dans Ω sont les seuls p-ensembles de Cheeger.

4.3 Formule de la co-aire

La formule de la co-aire permet de reconstruire l'intégrale $\int_\Omega |\nabla u|\,dx$ pour une fonction (régulière) u à partir de la mesure de ses ensembles de niveau. Nous donnons ici une version "faible" pour les fonctions à variation bornée pour calculer la variation totale $|Du|(\Omega)$ d'une fonction $u \in BV(\Omega)$ où la mesure des ensembles de niveau est remplacée par le périmètre des ensembles $\{u > t\}$.

Théorème 4.3.1 (Fleming-Rishel). *Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un ouvert et $u \in BV(\Omega)$. Alors les ensembles $\{u > t\}$ sont de périmètre fini dans Ω pour $\mathcal{L}^1$-presque tout $t \in \mathbb{R}$ et, pour tout Borélien $A \subset \Omega$,*

$$|Du|(A) = \int_{\mathbb{R}} |D\chi_{\{u>t\}}|(A)\,dt, \tag{4.3.1}$$

$$Du(A) = \int_{\mathbb{R}} D\chi_{\{u>t\}}(A)\,dt. \tag{4.3.2}$$

Démonstration. On pose $E_t := \{u > t\}$. Quitte à modifier u sur un ensemble de mesure $\mathcal{L}^N$ nulle, on peut supposer que u est une fonction Borélienne sur Ω, ce qui fait de $\{u > t\}$ un Borélien de Ω. Il vient alors que les fonctions $(x,t) \mapsto u(x) - t$ et $(x,t) \mapsto \chi_{\{u>t\}}(x)$ sont Boréliennes sur $\Omega \times \mathbb{R}$. D'après le théorème de Fubini, pour tout $\varphi \in \mathcal{C}^1_c(\Omega;\mathbb{R}^N)$ avec $|\varphi| \le 1$, la fonction

$$t \mapsto \int_\Omega \chi_{E_t}(x)\,\mathrm{div}\varphi(x)\,dx$$

est alors Borélienne sur $\mathbb{R}$. Si D est un ensemble dénombrable dense dans $\mathcal{C}^1_c(\Omega;\mathbb{R}^N)$, on en déduit que

$$t \mapsto P(E_t,\Omega) = \sup_{\varphi\in D,\,|\varphi|\le 1} \left\{ \int_\Omega \chi_{E_t}(x)\,\mathrm{div}\varphi(x)\,dx \right\}$$

est Borélienne sur $\mathbb{R}$.

Etape 1. Pour tout $x \in \Omega$, on a

$$u(x) = \int_{\mathbb{R}^+} \chi_{E_t}(x)\,dt - \int_{\mathbb{R}^-} (1 - \chi_{E_t}(x))\,dt.$$

Par conséquent, pour tout $\varphi \in \mathcal{C}^1_c(\Omega;\mathbb{R}^N)$ avec $|\varphi| \leq 1$, on obtient que

$$\int_\Omega u(x)\,\mathrm{div}\varphi(x)\,dx = \int_\mathbb{R}\int_\Omega \chi_{E_t}(x)\,\mathrm{div}\varphi(x)\,dx\,dt \leq \int_\mathbb{R} P(E_t,\Omega)\,dt. \tag{4.3.3}$$

Par passage au supremum parmi toutes les fonctions test φ, il vient

$$|Du|(\Omega) \leq \int_\mathbb{R} P(E_t,\Omega)\,dt.$$

Etape 2. Pour montrer l'autre inégalité, on suppose d'abord que u est une fonction affine et continue par morceaux. Il existe alors une partition de $\mathbb{R}^N$ en N-simplexes $A_1,\dots,A_m$ d'intérieurs deux à deux disjoints et des fonctions affines $x \mapsto f_i(x) := a_i \cdot x + b_i$ telles que

$$u(x) = f_i(x) \quad \text{pour tout } x \in A_i.$$

On a alors d'une part que

$$\int_\Omega |\nabla u|\,dx = \sum_{i=1}^m \mathcal{L}^N(A_i\cap\Omega)|a_i|.$$

D'autre part, notant alors $e_i := a_i/|a_i|$, la formule changement de variable donne

$$\begin{aligned}\int_\mathbb{R} \mathcal{H}^{N-1}(\Omega\cap\{u=t\})\,dt &= \sum_{i=1}^m \int_\mathbb{R} \mathcal{H}^{N-1}(A_i\cap\Omega\cap\{u=t\})\,dt\\ &= \int_\mathbb{R} \mathcal{H}^{N-1}(\{x\in A_i\cap\Omega:\ a_i\cdot x+b_i=t\})\,dt\\ &= |a_i|\int_\mathbb{R} \mathcal{H}^{N-1}(\{x\in A_i\cap\Omega:\ e_i\cdot x=s\})\,ds,\end{aligned}$$

puis, en vertu du théorème de Fubini,

$$\int_\mathbb{R} \mathcal{H}^{N-1}(\Omega\cap\{u=t\})\,dt = |a_i|\mathcal{L}^N(A_i\cap\Omega),$$

ce qui montre que

$$\int_\Omega |\nabla u|\,dx = \int_\mathbb{R} \mathcal{H}^{N-1}(\Omega\cap\{u=t\})\,dt.$$

L'ensemble $\{u>t\}$ étant un ouvert à frontière polyhédrique, on a $|D\chi_{\{u>t\}}|(\Omega) = \mathcal{H}^{N-1}(\Omega\cap\{u=t\})$ et donc

$$\int_\Omega |\nabla u|\,dx = \int_\mathbb{R} |D\chi_{\{u>t\}}|(\Omega)\,dt.$$

On suppose maintenant que $u \in W^{1,1}(\Omega)$. Si U est un ouvert borné tel que $\overline{U}\subset\Omega$, on approche u par une suite $\{u_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ de fonctions continues affines par morceaux dans $W^{1,1}(U)$. On a alors que pour tout $j\in\mathbb{N}$,

$$\int_U |\nabla u_j|\,dx = \int_\mathbb{R} |D\chi_{\{u_j>t\}}|(U)\,dt.$$

Comme

$$\int_\mathbb{R}\int_\Omega |\chi_{\{u_j>t\}} - \chi_{\{u>t\}}|\,dx\,dt = \int_\mathbb{R} \mathcal{L}^N(\{u>t\}\triangle\{u_j>t\})\,dt = \int_\Omega |u_j-u|\,dx \to 0,$$

on en déduit que, pour une sous-suite et pour tout $\mathcal{L}^1$-presque tout $t \in \mathbb{R}$, on a $\chi_{\{u_j>t\}} \to \chi_{\{u>t\}}$ dans $L^1(\Omega)$. Par passage à la limite quand $j \to \infty$, en utilisant la semi-continuité inférieure du périmètre et le Lemme de Fatou, on obtient que

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} P(\{u>t\},U)\,dt &\leq \int_{\mathbb{R}} \liminf_{j\to\infty} P(\{u_j>t\},U)\,dt\\ &\leq \liminf_{j\to\infty} \int_{\mathbb{R}} P(\{u_j>t\},U)\,dt\\ &= \lim_{j\to\infty} \int_U |\nabla u_j|\,dx = \int_U |\nabla u|\,dx.\end{aligned}$$

Enfin, en considérant une suite croissante $\{U_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ d'ouverts bornés tels que $\overline{U}_n \subset U_{n+1}$ et $\bigcup_n U_n = \Omega$, on obtient par convergence monotone quand $n \to \infty$

$$\int_{\mathbb{R}} P(\{u>t\},\Omega)\,dt \leq \int_\Omega |\nabla u|\,dx.$$

Enfin, si $u \in BV(\Omega)$, on considère une suite $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{C}^\infty(\Omega)\cap BV(\Omega) \subset W^{1,1}(\Omega)$ telle que $u_k \to u$ dans $L^1(\Omega)$ et $|Du_k|(\Omega) \to |Du|(\Omega)$. Par le même raisonnement que précédemment, on a

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} P(\{u>t\},\Omega)\,dt &\leq \int_{\mathbb{R}} \liminf_{k\to\infty} P(\{u_k>t\},\Omega)\,dt\\ &\leq \liminf_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}} P(\{u_k>t\},\Omega)\,dt\\ &= \lim_{k\to\infty} \int_\Omega |\nabla u_k|\,dx = |Du|(\Omega).\end{aligned}$$

Cette deuxième inégalité montre que, si $u \in BV(\Omega)$, alors $P(E_t,\Omega) < \infty$ pour $\mathcal{L}^1$-presque tout $t \in \mathbb{R}$, et donc que $\{u>t\}$ est de périmètre fini dans Ω pour $\mathcal{L}^1$-presque tout $t \in \mathbb{R}$.

Etape 3. Si $A \subset \Omega$ est un Borélien, par régularité extérieure, pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un ouvert $U \supset A$ tel que $|Du|(U \setminus A) \leq \varepsilon$. En reprenant la démonstration précédente, on obtient que

$$\int_{\mathbb{R}} |D\chi_{\{u>t\}}|(A)\,dt \leq \int_{\mathbb{R}} |D\chi_{\{u>t\}}|(U)\,dt = |Du|(U) \leq |Du|(A)+\varepsilon$$

puis, en faisant tendre $\varepsilon \to 0$, que

$$\int_{\mathbb{R}} |D\chi_{\{u>t\}}|(A)\,dt \leq |Du|(A).$$

Comme

$$A \in \mathcal{B}(\Omega) \mapsto |Du|(A) - \int_{\mathbb{R}} |D\chi_{\{u>t\}}|(A)\,dt$$

est une mesure positive et de masse totale nulle, il vient finalement que

$$\int_{\mathbb{R}} |D\chi_{\{u>t\}}|(A)\,dt = |Du|(A),$$

ce qui établit (4.3.1). Enfin, (4.3.3) implique que

$$\int_\Omega \varphi\cdot dDu = -\int_\Omega u\,\mathrm{div}\varphi\,dx = -\int_{\mathbb{R}}\int_\Omega \chi_{E_t}\,\mathrm{div}\varphi\,dx\,dt = \int_{\mathbb{R}}\left(\int_\Omega \varphi\cdot dD\chi_{E_t}\right)dt$$

pour tout $\varphi \in \mathcal{C}^1_c(\Omega;\mathbb{R}^N)$ ce qui montre (4.3.2). □

Un cas particulier important concerne le cas où $u(x) = |x|$ qui est une fonction appartenant à $BV(B_R)$ pour tout $R > 0$ dont la dérivée distributionnelle est donnée par la fonction $\nabla u(x) = x/|x|$. Donc ce cas, les ensembles de sur-niveau de u sont donnés par

$$\{u > r\} = \mathbb{R}^N \setminus \overline{B}_r.$$

Comme ces ensembles sont réguliers, pour tout $r < R$ et tout Borélien $A \subset B_R$, on a

$$|D\chi_{\{u>r\}}|(A) = \mathcal{H}^{N-1}(\partial B_r \cap A) = r^{N-1}\mathcal{H}^{N-1}(\mathbb{S}^{N-1} \cap (A/r)).$$

Une application immédiate de la formule de la co-aire donne alors que pour tout Borélien borné $A \subset \mathbb{R}^N$,

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^N(A) = \int_{\mathbb{R}^+} \mathcal{H}^{N-1}(\partial B_r \cap A)\, dr &= \int_{\mathbb{R}^+} \int_{\partial B_r} \chi_A(x)\, d\mathcal{H}^{N-1}(x)\, dr \\ &= \int_{\mathbb{R}^+} \int_{\mathbb{S}^{N-1}} \chi_A(ry) r^{N-1}\, d\mathcal{H}^{N-1}(y)\, dr.\end{aligned}$$

Par approximation, si $g : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^+$ est une fonction Borélienne, on a

$$\int_{\mathbb{R}^N} g(x)\, dx = \int_{\mathbb{R}^+} \int_{\partial B_r} g(x)\, d\mathcal{H}^{N-1}(x)\, dr = \int_{\mathbb{R}^+} \int_{\mathbb{S}^{N-1}} g(ry) r^{N-1}\, d\mathcal{H}^{N-1}(y)\, dr,$$

ce qui correspond à la formule de changement de variables en coordonnées polaires en dimension quelconque.

4.4 Frontière réduite

Nous allons montrer que tout ensemble de périmètre fini possède une structure similaire à un ensemble régulier au sens où sa dérivée distributionnelle est concentrée sur un sous-ensemble dénombrablement $\mathcal{H}^{N-1}$-rectifiable sur lequel il est possible de définir une normale approchée.

Dans la suite de cette section, $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ est un ouvert et E est un ensemble de périmètre fini dans Ω.

Définition 4.4.1. La *frontière réduite* $\partial^* E$ est l'ensemble des points $x_0 \in \Omega \cap \mathrm{Supp}(|D\chi_E|)$ tels que la limite

$$\lim_{\varrho \to 0} \frac{D\chi_E(B_\varrho(x_0))}{|D\chi_E|(B_\varrho(x_0))} =: -\nu_E(x_0)$$

existe et satisfait $|\nu_E(x_0)| = 1$. La fonction $\nu_E : \partial^* E \to \mathbb{S}^{N-1}$ s'appelle la *normale extérieure généralisée.*

Remarque 4.4.2. (i) D'après le Corollaire 1.4.7 sur la décomposition polaire d'une mesure vectorielle, on a

$$|D\chi_E|(\Omega \setminus \partial^* E) = 0,$$

autrement dit, $D\chi_E$ est concentrée sur $\partial^* E$, et

$$D\chi_E = -\nu_E |D\chi_E|.$$

(ii) Comme $\mathrm{Supp}(|D\chi_E|) \subset \partial E$, on en déduit que $\partial^* E \subset \partial E$.

(iii) Comme les fonctions $x \mapsto D\chi_E(B_\varrho(x))$ et $x \mapsto |D\chi_E|(B_\varrho(x))$ sont Boréliennes sur Ω, on en déduit que $\partial^* E$ est un Borélien de Ω et que la fonction $\nu_E : \partial^* E \to \mathbb{S}^{N-1}$ est Borélienne.

Lemme 4.4.3. *Il existe des constantes $A_1, \dots, A_5 > 0$ telles que pour tout $x_0 \in \partial^* E$,*

(i) $\displaystyle \liminf_{\varrho\to 0} \frac{\mathcal{L}^N(B_\varrho(x_0)\cap E)}{\varrho^N} > A_1,$

(ii) $\displaystyle \liminf_{\varrho\to 0} \frac{\mathcal{L}^N(B_\varrho(x_0)\setminus E)}{\varrho^N} > A_2,$

(iii) $\displaystyle \liminf_{\varrho\to 0} \frac{|D\chi_E|(B_\varrho(x_0))}{\varrho^{N-1}} > A_3,$

(iv) $\displaystyle \limsup_{\varrho\to 0} \frac{|D\chi_E|(B_\varrho(x_0))}{\varrho^{N-1}} \leq A_4,$

(v) $\displaystyle \limsup_{\varrho\to 0} \frac{|D\chi_{E\cap B_\varrho(x_0)}|(\mathbb{R}^N)}{\varrho^{N-1}} \leq A_5.$

Démonstration. **Etape 1.** Soit $x_0 \in \partial^* E$, on pose $\delta := \mathrm{dist}(x_0, \partial\Omega)$. On commence par montrer que pour $\mathcal{L}^1$-presque tout $\varrho \in (0,\delta)$,

$$|D\chi_{E\cap B_\varrho(x_0)}|(\mathbb{R}^N) \leq |D\chi_E|(B_\varrho(x_0)) + \mathcal{H}^{N-1}(E\cap \partial B_\varrho(x_0)). \tag{4.4.1}$$

Soit $\varphi \in \mathcal{C}^1_c(\mathbb{R}^N;\mathbb{R}^N)$ et $g(t) = \chi_{[0,\varrho)}(t)$ de sorte que $\chi_{B_\varrho(x_0)}(y) = g(|y-x_0|)$. On régularise la fonction caractéristique en posant

$$g_\varepsilon(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq t \leq \varrho, \\ \frac{\varrho+\varepsilon-t}{\varepsilon} & \text{si } \varrho \leq t \leq \varrho+\varepsilon, \\ 0 & \text{si } t \geq \varrho+\varepsilon, \end{cases}$$

de sorte que

$$g'_\varepsilon(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq t < \varrho, \\ -\frac{1}{\varepsilon} & \text{si } \varrho < t < \varrho+\varepsilon, \\ 0 & \text{si } t > \varrho+\varepsilon. \end{cases}$$

On pose alors $h_\varepsilon(y) = g_\varepsilon(|y-x_0|)$ qui définit une fonction Lipschitzienne et satisfait

$$\nabla h_\varepsilon(y) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq |y-x_0| < \varrho \text{ ou } |y-x_0| > \varrho+\varepsilon, \\ -\frac{1}{\varepsilon}\frac{y-x_0}{|y-x_0|} & \text{si } \varrho < |y-x_0| < \varrho+\varepsilon. \end{cases}$$

Par conséquent, comme $h_\varepsilon\varphi$ est Lipschtzienne et $\mathrm{Supp}(h_\varepsilon\varphi) \subset \Omega$, on a

$$-\int_\Omega h_\varepsilon\varphi \cdot dD\chi_E = \int_E \mathrm{div}(h_\varepsilon\varphi)\,dy = \int_E h_\varepsilon \mathrm{div}\varphi\,dy - \frac{1}{\varepsilon}\int_{E\cap\{y\in\Omega:\varrho<|y-x_0|<\varrho+\varepsilon\}} \varphi(y)\cdot\frac{y-x_0}{|y-x_0|}\,dy.$$

D'après la formule de la co-aire et le théorème de différentiation de Besicovitch, on a pour $\mathcal{L}^1$-presque tout $\varrho > 0$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\varepsilon}\int_{E\cap\{y\in\Omega:\varrho<|y-x_0|<\varrho+\varepsilon\}} \varphi(y)\cdot\frac{y-x_0}{|y-x_0|}\,dy &= \frac{1}{\varepsilon}\int_\varrho^{\varrho+\varepsilon}\int_{E\cap\partial B_r(x_0)} \varphi(y)\cdot\frac{y-x_0}{|y-x_0|}\,d\mathcal{H}^{N-1}(y)\,dr \\ &\to \int_{E\cap\partial B_\varrho(x_0)} \varphi(y)\cdot\frac{y-x_0}{|y-x_0|}\,d\mathcal{H}^{N-1}(y). \end{aligned}$$

Par passage à la limite quand $\varepsilon \to 0$, on en déduit que

$$\int_{E\cap B_\varrho(x_0)} \mathrm{div}\varphi\,dy = -\int_{B_\varrho(x_0)} \varphi\cdot dD\chi_E + \int_{E\cap\partial B_\varrho(x_0)} \varphi(y)\cdot\frac{y-x_0}{|y-x_0|}\,d\mathcal{H}^{N-1}(y). \tag{4.4.2}$$

Par passage au supremum par rapport à $\varphi \in \mathcal{C}_c^1(\mathbb{R}^N;\mathbb{R}^N)$ tels que $|\varphi| \leq 1$, on en déduit (4.4.1).

Etape 2. Dans (4.4.2), on choisit $\varphi = \nu_E(x_0)$ dans $B_\varrho(x_0)$. On obtient alors

$$\nu_E(x_0) \cdot D\chi_E(B_\varrho(x_0)) = \int_{E\cap\partial B_\varrho(x_0)} \nu_E(x_0)\cdot\nu(y)\,d\mathcal{H}^{N-1}(y).$$

Comme $x_0 \in \partial^* E$,

$$\lim_{\varrho\to 0} \nu_E(x_0)\cdot \frac{D\chi_E(B_\varrho(x_0))}{|D\chi_E|(B_\varrho(x_0))} = -|\nu_E(x_0)|^2 = -1.$$

Il existe donc $\varrho_0 = \varrho_0(x_0) \in (0,\delta)$ tel que pour $\mathcal{L}^1$-presque tout $\varrho < \varrho_0$, $|\nu_E(x_0)\cdot D\chi_E(B_\varrho(x_0))| \geq \frac{1}{2}|D\chi_E|(B_\varrho(x_0))$ de sorte que

$$|D\chi_E|(B_\varrho(x_0)) \leq 2\mathcal{H}^{N-1}(E\cap\partial B_\varrho(x_0))$$

puis, en reportant dans (4.4.1),

$$|D\chi_{E\cap B_\varrho(x_0)}|(\mathbb{R}^N) \leq 3\mathcal{H}^{N-1}(E\cap\partial B_\varrho(x_0)).$$

Comme $\mathcal{H}^{N-1}(E\cap\partial B_\varrho(x_0)) \leq \mathcal{H}^{N-1}(\partial B_\varrho(x_0)) = \varrho^{N-1}\mathcal{H}^{N-1}(\partial B_1(0))$, les deux dernières inégalités donnent (iv) et (v).

Etape 3. D'après la formule de la co-aire, on a

$$g(\varrho) := \int_0^\varrho \mathcal{H}^{N-1}(\partial B_r(x_0)\cap E)\,dr = \mathcal{L}^N(E\cap B_\varrho(x_0)) < \infty,$$

et en vertu du théorème de différentiation de Besicovitch, pour $\mathcal{L}^1$-presque tout $\varrho > 0$,

$$g'(\varrho) = \mathcal{H}^{N-1}(\partial B_\varrho(x_0)\cap E).$$

D'après l'inégalité isopérimétrique,

$$\begin{aligned} g(\varrho)^{\frac{N-1}{N}} &= \mathcal{L}^N(E\cap B_\varrho(x_0))^{\frac{N-1}{N}} \\ &\leq \gamma_N |D\chi_{E\cap B_\varrho(x_0)}|(\mathbb{R}^N) \\ &\leq 3\gamma_N \mathcal{H}^{N-1}(E\cap\partial B_\varrho(x_0)) \\ &= 3\gamma_N g'(\varrho). \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\frac{1}{3\gamma_N} \leq g(\varrho)^{\frac{1-N}{N}} g'(\varrho) = N[g(\varrho)^{\frac{1}{N}}]'$$

de sorte que

$$g(\varrho)^{\frac{1}{N}} \geq \frac{\varrho}{3N\gamma_N}.$$

On en déduit que pour $\mathcal{L}^1$-presque tout $\varrho \in (0,\varrho_0)$

$$\mathcal{L}^N(E\cap B_\varrho(x_0)) = g(\varrho) \geq \frac{\varrho^N}{(3N\gamma_N)^N},$$

ce qui établit (i). Comme pour tout $\varphi \in \mathcal{C}_c^1(\Omega;\mathbb{R}^N)$

$$0 = \int_\Omega \mathrm{div}\varphi\,dy = \int_E \mathrm{div}\varphi\,dy + \int_{\Omega\setminus E}\mathrm{div}\varphi\,dy,$$

on en déduit que $D\chi_E = -D\chi_{\Omega\setminus E}$ et de que $P(\Omega \setminus E, \Omega) = P(E, \Omega) < \infty$, ce qui montre que $\Omega \setminus E$ est un ensemble de périmètre fini dans Ω. Comme $\partial^*(\Omega \setminus E) = \partial^* E$, l'argument précédent appliqué à $\Omega \setminus E$ montre alors la validité de (ii).

L'inégalité isopérimétrique relative montre ensuite que

$$\begin{aligned} \liminf_{\varrho\to 0} \frac{|D\chi_E|(B_\varrho(x_0))}{\varrho^{N-1}} &\geq C \min\left\{ \liminf_{\varrho\to 0} \frac{\mathcal{L}^N(E\cap B_\varrho(x_0))}{\varrho^N}, \liminf_{\varrho\to 0} \frac{\mathcal{L}^N(B_\varrho(x_0)\setminus E)}{\varrho^N} \right\}^{\frac{N-1}{N}} \\ &\geq C \min\{A_1, A_2\}^{\frac{N-1}{N}}, \end{aligned}$$

ce qui implique (iii). □

Le résultat suivant permet de montrer que $\mathcal{H}^{N-1} \llcorner \partial^* E$ est une mesure absolument continue par rapport à $|D\chi_E|$.

Lemme 4.4.4. *Il existe une constante $c_N > 0$ telle que pour tout Borélien $A \subset \Omega$,*

$$\mathcal{H}^{N-1}(A \cap \partial^* E) \leq c_N |D\chi_E|(A).$$

Démonstration. On utilise un argument de recouvrement. Par régularité extérieure de $|D\chi_E|$, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un ouvert $U \subset \Omega$ contenant A tel que

$$|D\chi_E|(U) \leq |D\chi_E|(A) + \varepsilon.$$

D'après le Lemme 4.4.3-(iii), pour tout $x \in A \cap \partial^* E$ et tout $\delta > 0$, il existe $\varrho_x \in (0, \delta)$ tel que $\overline{B}_{\varrho_x}(x) \subset U$ et $|D\chi_E|(B_{\varrho_x}(x)) > A_3 \varrho^{N-1}$. On pose

$$\mathcal{F} := \{\overline{B}_\varrho(x) : x \in A \cap \partial^* E,\ 0 < \varrho < \delta,\ \overline{B}_\varrho(x) \subset U,\ |D\chi_E|(B_\varrho(x)) > A_3 \varrho^{N-1}\},$$

ce qui définit un recouvrement de $A \cap \partial^* E$. D'après le théorème de recouvrement de Besicovitch, il existe ξ sous-recouvrements dénombrables disjoints $\mathcal{F}_1, \ldots, \mathcal{F}_\xi$ tels que

$$A \subset \bigcup_{i=1}^{\xi} \bigcup_{B\in\mathcal{F}_i} B.$$

En particulier,

$$\begin{aligned} \mathcal{H}^{N-1}_{2\delta}(A \cap \partial^* E) &\leq \omega_{N-1} \sum_{i=1}^{\xi} \sum_{B\in\mathcal{F}_i} \left(\frac{\operatorname{diam}(B)}{2}\right)^{N-1} \\ &= \frac{\omega_{N-1}}{A_3} \sum_{i=1}^{\xi} \sum_{B\in\mathcal{F}_i} |D\chi_E|(B) \\ &\leq \frac{\omega_{N-1}}{A_3} \sum_{i=1}^{\xi} |D\chi_E|(U) \\ &\leq \frac{\xi\omega_{N-1}}{A_3} (|D\chi_E|(A) + \varepsilon). \end{aligned}$$

La conclusion suit par passage à la limite quand $\varepsilon \to 0$ et $\delta \to 0$. □

Nous allons à présent améliorer le résultat précédent en montrant qu'en fait $|D\chi_E| = \mathcal{H}^{N-1} \llcorner \partial^* E$.

Théorème 4.4.5 (De Giorgi - 1). *Soit $x_0 \in \partial^* E$, on pose $E_{x_0,\varrho} := (E - x_0)/\varrho$ et*

$$H^{\pm}(x_0) := \{y \in \mathbb{R}^N : \pm\nu_E(x_0)\cdot(y - x_0) > 0\}.$$

Alors

$$\chi_{E_{x_0,\varrho}} \to \chi_{H^-(0)} \quad \text{dans } L^1_{\rm loc}(\mathbb{R}^N).$$

De plus,

(i) $\displaystyle\lim_{\varrho\to 0} \frac{\mathcal{L}^N(B_\varrho(x_0)\cap E \cap H^+(x_0))}{\varrho^N} = 0\,;$

(ii) $\displaystyle\lim_{\varrho\to 0} \frac{\mathcal{L}^N(B_\varrho(x_0)\setminus E \cap H^-(x_0))}{\varrho^N} = 0\,;$

(iii) $\displaystyle\lim_{\varrho\to 0} \frac{|D\chi_E|(B_\varrho(x_0))}{\omega_{N-1}\varrho^{N-1}} = 1.$

Démonstration. On suppose pour simplifier que $x_0 = 0$, $\nu_E(0) = e_N = (0,\dots,0,1)$ et on pose $E_\varrho := E_{0,\varrho}$, $H^\pm := H^\pm(0)$, $H_0 = e_N^\perp$.

Soit $R > 0$. Pour tout $\varphi \in \mathcal{C}^1_c(B_R;\mathbb{R}^N)$ avec $|\varphi| \le 1$, on a

$$\int_{E_\varrho} \mathrm{div}\varphi(x)\,dx = \frac{1}{\varrho^N}\int_E \mathrm{div}\varphi\left(\frac{y}{\varrho}\right)dy = \frac{1}{\varrho^{N-1}}\int_E \mathrm{div}\varphi_\varrho(y)\,dy \le \frac{|D\chi_E|(B_{R\varrho})}{\varrho^{N-1}} \le C_R$$

d'après le Lemme 4.4.3-(iv), où l'on a posé $\varphi_\varrho := \varphi(\frac{\cdot}{\varrho}) \in \mathcal{C}^1_c(B_{R\varrho};\mathbb{R}^N)$. Par conséquent, $P(E_\varrho, B_R) \le C_R$, ce qui montre que la suite $\{\chi_{E_\varrho}\}_{\varrho>0}$ est bornée dans $BV(B_R)$ pour tout $R < \infty$. En utilisant le théorème de Rellich et un principe d'extraction diagonal, il existe une sous-suite et un ensemble de périmètre localement fini $F \subset \mathbb{R}^N$ tels que $\chi_{E_{\varrho_j}} \to \chi_F$ dans $L^1_{\rm loc}(\mathbb{R}^N)$ et $D\chi_{E_{\varrho_j}} \rightharpoonup D\chi_F$ localement faible* dans $\mathcal{M}_{\rm loc}(\mathbb{R}^N;\mathbb{R}^N)$. Quitte à extraire une nouvelle sous-suite, on peut également supposer que $|D\chi_{E_{\varrho_j}}| \rightharpoonup \lambda$ localement faible* dans $\mathcal{M}_{\rm loc}(\mathbb{R}^N)$ où λ est une mesure de Radon positive sur $\mathbb{R}^N$.

Pour tout $R > 0$, on a

$$|D\chi_{E_{\varrho_j}}|(B_R) = \frac{|D\chi_E|(B_{R\varrho_j})}{\varrho_j^{N-1}}, \quad D\chi_{E_{\varrho_j}}(B_R) = \frac{D\chi_E(B_{R\varrho_j})}{\varrho_j^{N-1}}, \tag{4.4.3}$$

de sorte que

$$-e_N = -\nu_E(0) = \lim_{j\to\infty} \frac{D\chi_E(B_{R\varrho_j})}{|D\chi_E|(B_{R\varrho_j})} = \lim_{j\to\infty}\frac{D\chi_{E_{\varrho_j}}(B_R)}{|D\chi_{E_{\varrho_j}}|(B_R)}.$$

Si on choisit $R > 0$ tel que $\lambda(\partial B_R) = 0$ (ce qui est satisfait sauf pour un ensemble dénombrable de rayons R), d'après la Proposition 1.3.4, on a $D\chi_{E_{\varrho_j}}(B_R) \to D\chi_F(B_R)$. Par ailleurs, la semicontinuité inférieure de la variation totale assure que

$$\begin{aligned}
|D\chi_F|(B_R) &\le \liminf_{j\to\infty} |D\chi_{E_{\varrho_j}}|(B_R)\\
&\le \limsup_{j\to\infty} |D\chi_{E_{\varrho_j}}|(B_R)\\
&= -\lim_{j\to\infty} e_N\cdot D\chi_{E_{\varrho_j}}(B_R)\\
&= -e_N\cdot D\chi_F(B_R) \le |D\chi_F|(B_R),
\end{aligned}\tag{4.4.4}$$

ce qui montre que $|D\chi_F|(B_R) = -e_N\cdot D\chi_F(B_R) = -\int_{B_R}(e_N\cdot\nu_F)\,d|D\chi_F|$. Comme $1 + e_N\cdot\nu_F \ge 0$, $|\nu_F| = 1$ et $|e_N| = 1$ $|D\chi_F|$-p.p. dans $\mathbb{R}^N$, on en déduit que

$$\nu_F = -e_N \quad |D\chi_F|\text{-p.p. dans } \mathbb{R}^N.$$

En particulier, du fait que $D\chi_F = -e_N|D\chi_F|$, il vient que $D_i\chi_F = 0$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$ pour tout $1 \leq i \leq N-1$, ce qui montre que la fonction χ_F ne dépend que de la variable x_N. Comme de plus $D_N\chi_F = -|D\chi_F| \leq 0$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$, on en déduit que χ_F est en fait une fonction décroissante de la variable x_N. Comme χ_F est une fonction caractéristique, il existe une constante $a \in \mathbb{R}$ telle que

$$F = \{x \in \mathbb{R}^N : x_N < a\}.$$

Si $a < 0$, alors $B_{|a|} \cap F = \emptyset$ et donc

$$0 = \mathcal{L}^N(B_{|a|} \cap F) = \lim_{j\to\infty} \mathcal{L}^N(B_{|a|} \cap E_{\varrho_j}) = \lim_{j\to\infty} \frac{\mathcal{L}^N(B_{|a|\varrho_j} \cap E)}{\varrho_j^N},$$

ce qui rentre en contradiction avec le Lemme (4.4.3)-(i). Par conséquent $a \geq 0$ et un argument analogue montre que $a \leq 0$, soit $a = 0$. Il vient alors que $F = H^-$ et comme la limite est indépendante de la sous-suite extraite, il n'y a pas besoin d'extraire de sous-suite.

Comme $\chi_{E_\varrho} \to \chi_{H^-}$ dans $L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^N)$, on a alors

$$\lim_{\varrho\to 0} \frac{\mathcal{L}^N(B_\varrho \cap E \cap H^+)}{\varrho^N} = \lim_{\varrho\to 0} \mathcal{L}^N(B_1 \cap E_\varrho \cap H^+) = \mathcal{L}^N(B_1 \cap H^- \cap H^+) = 0.$$

De même

$$\lim_{\varrho\to 0} \frac{\mathcal{L}^N(B_\varrho \setminus E \cap H^-)}{\varrho^N} = \lim_{\varrho\to 0} \mathcal{L}^N(B_1 \setminus E_\varrho \cap H^-) = \mathcal{L}^N(B_1 \setminus H^- \cap H^-) = 0.$$

Enfin, on utilise (4.4.4) et il vient que

$$\lim_{\varrho\to 0} \frac{|D\chi_E|(B_{R\varrho})}{\varrho^{N-1}} = \lim_{\varrho\to 0} |D\chi_{E_\varrho}|(B_R) = |D\chi_{H^-}|(B_R) = \mathcal{H}^{N-1}(H_0 \cap B_R) = \omega_{N-1}R^{N-1},$$

ce qui conclut la preuve du théorème. $\square$

Nous allons à présent montrer un résultat de structure des ensembles de périmètre fini. Celui-ci repose sur le résultat suivant que nous admettons (voir [2, Theorem 6.5-1]).

Théorème 4.4.6 (Extension de Whitney). *Soient $K \subset \mathbb{R}^N$ un compact et $f : K \to \mathbb{R}$, $d : K \to \mathbb{R}^N$ des fonctions continues. On suppose que*

$$\rho(\delta) := \sup\left\{\frac{|f(y) - f(x) - d(x)\cdot(y-x)|}{|y-x|} : x, y \in K, 0 < |x-y| < \delta\right\} \to 0$$

quand $\delta \to 0$. Alors il existe une fonction $\tilde{f} : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ telle que

$$\tilde{f} = f, \quad \nabla\tilde{f} = d \quad \text{sur } K.$$

Théorème 4.4.7 (De Giorgi - 2). *Soit $E \subset \mathbb{R}^N$ un ensemble de périmètre fini dans Ω. Alors*

(i) la frontière réduite $\partial^* E$ est un ensemble dénombrablement $\mathcal{H}^{N-1}$-rectifiable ;

(ii) $T_x(\partial^* E) = \nu_E(x)^\perp$ pour $\mathcal{H}^{N-1}$-presque tout $x \in \partial^* E$;

(iii) $|D\chi_E| = \mathcal{H}^{N-1} \llcorner \partial^* E$, $D\chi_E = -\nu_E \mathcal{H}^{N-1} \llcorner \partial^* E$;

Démonstration. D'après le théorème 4.4.5, on a pour tout $x \in \partial^* E$,

$$\lim_{\varrho\to 0} \frac{\mathcal{L}^N(B_\varrho(x) \cap E \cap H^+(x))}{\varrho^N} = 0, \quad \lim_{\varrho\to 0} \frac{\mathcal{L}^N(B_\varrho(x) \setminus E \cap H^-(x))}{\varrho^N} = 0. \tag{4.4.5}$$

D'après le théorème d'Egoroff, il existe des ensembles Boréliens deux à deux disjoints $\{F_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ tels que

$$|D\chi_E|\left(\partial^* E \setminus \bigcup_{i\in\mathbb{N}} F_i\right) = 0$$

et les convergences (4.4.5) sont uniformes pour $x \in F_i$. D'après le théorème de Lusin, pour tout $i \in \mathbb{N}$, il existe des ensembles compacts deux à deux disjoints $\{G_i^j\}_{j\in\mathbb{N}}$ tels que

$$|D\chi_E|\left(F_i \setminus \bigcup_{j\in\mathbb{N}} G_i^j\right) = 0$$

et $\nu_E|_{G_i^j}$ est continue sur G_i^j. On réindexe les ensembles $\{G_i^j\}_{i,j\in\mathbb{N}}$ en une famille de compacts $\{K_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ deux à deux disjoints tels que

$$\partial^* E = \bigcup_{j\in\mathbb{N}} K_j \cup Z, \quad |D\chi_E|(Z) = 0,$$

les convergences (4.4.5) sont uniformes dans K_j et $\nu_E|_{K_j}$ est continue sur K_j. D'après le Lemme 4.4.4, on a $\mathcal{H}^{N-1}(Z) = 0$.

Pour tout $j \in \mathbb{N}$ et $\delta > 0$, on définit la quantité

$$\rho_j(\delta) := \sup\left\{\frac{|\nu_E(x)\cdot(y-x)|}{|y-x|} \,:\, x, y \in K_j,\, 0 < |x-y| < \delta\right\}.$$

Montrons que $\rho_j(\delta) \to 0$ quand $\delta \to 0$. Soit $\varepsilon \in (0,1)$, il existe alors $\delta \in (0,1)$ tel que pour $z \in K_j$ et tout $\varrho < 2\delta$,

$$\mathcal{L}^N(B_\varrho(z)\cap E\cap H^+(z)) < \frac{\varepsilon^N}{2^{N+2}}\omega_N \varrho^N, \quad \mathcal{L}^N(B_\varrho(z)\cap E\cap H^-(z)) > \left(\frac{1}{2} - \frac{\varepsilon^N}{2^{N+2}}\right)\omega_N \varrho^N. \tag{4.4.6}$$

Soient x, $y \in K_j$ tels que $0 < |x-y| < \delta$.

Supposons que $\nu_E(x)\cdot(y-x) > \varepsilon|x-y|$. Alors, du fait que $\varepsilon < 1$, on a

$$B_{\varepsilon|x-y|}(y) \subset H^+(x) \cap B_{2|x-y|}(x). \tag{4.4.7}$$

En effet, si $z \in B_{\varepsilon|x-y|}(y)$, alors $|z-x| \le |z-y| + |y-x| < (1+\varepsilon)|x-y| < 2|x-y|$ et donc $z \in B_{2|x-y|}(x)$. De plus

$$\nu_E(x)\cdot(z-x) = \nu_E(x)\cdot(y-x) + \nu_E(x)\cdot(z-y) > \varepsilon|x-y| - |z-y| > 0,$$

soit $z \in H^+(x)$. Par conséquent, en prenant $z = x$ et $\varrho = 2|x-y| < 2\delta$ dans (4.4.6), on a

$$\mathcal{L}^N(B_{2|x-y|}(x)\cap E\cap H^+(x)) < \frac{\varepsilon^N}{2^{N+2}}\omega_N(2|x-y|)^N = \frac{\varepsilon^N\omega_N}{4}|x-y|^N,$$

et en prenant $z = y$ et $\varrho = \varepsilon|x-y| < 2\delta$ dans (4.4.6), il vient

$$\mathcal{L}^N(E\cap B_{\varepsilon|x-y|}(y)) \ge \mathcal{L}^N(E\cap B_{\varepsilon|x-y|}(y)\cap H^-(y)) \ge \left(\frac{1}{2} - \frac{\varepsilon^N}{2^{N+2}}\right)\omega_N(\varepsilon|x-y|)^N > \frac{\varepsilon^N\omega_N}{4}|x-y|^N.$$

On obtient alors une contradiction en appliquant la mesure $\mathcal{L}^N \llcorner E$ à l'inclusion (4.4.7). De manière analogue, on aboutit à une contradiction si $\nu_E(x)\cdot(y-x) < -\varepsilon|x-y|$. Par conséquent, le seul cas possible est $|\nu_E(x)\cdot(y-x)| \le \varepsilon|x-y|$ et on obtient alors que $\rho_j(\delta) \le \varepsilon$.

Montrons que, pour tout $j \in \mathbb{N}$, il existe une hypersurface M_j de classe $\mathcal{C}^1$ telle que $K_j \subset M_j$, ce qui démontrera la rectifiabilité de $\partial^* E$. Du fait que $\rho_j(\delta) \to 0$ quand $\delta \to 0$, le théorème d'extension de Whitney montre alors l'existence d'une fonction $f_j \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^N)$ telle que $f_j = 0$ et $\nabla f_j = \nu_E$ sur K_j. Soit alors

$$M_j = \left\{ x \in \mathbb{R}^N : f_j(x) = 0, \quad |\nabla f_j(x)| \geq \frac{1}{2} \right\}.$$

D'après le théorème des fonctions implicites, M_j est une hypersurface de classe $\mathcal{C}^1$. De plus $K_j \subset M_j$ puisque $f_j = 0$ et $|\nabla f_j| = |\nu_E| = 1 \geq \frac{1}{2}$ sur K_j. On a donc établi la rectifiabilité de $\partial^* E$. De plus, comme $T_x M_j = (\nabla f_j(x))^\perp$ pour tout $x \in M_j$, il vient par localité de l'espace tangent approché que

$$T_x(\partial^* E) = T_x M_j = (\nabla f_j(x))^\perp = \nu_E(x)^\perp \quad \text{pour } \mathcal{H}^{N-1}\text{-presque tout } x \in \partial^* E \cap K_j,$$

ce qui montre que $T_x(\partial^* E) = \nu_E(x)^\perp$ pour $\mathcal{H}^{N-1}$-presque tout $x \in \partial^* E$.

Enfin, d'après le théorème 3.4.3 et le théorème 4.4.5, pour $\mathcal{H}^{N-1}$-presque tout $x \in \partial^* E$, on a

$$\lim_{\varrho \to 0} \frac{\mathcal{H}^{N-1}(\partial^* E \cap B_\varrho(x))}{\omega_{N-1} \varrho^{N-1}} = \lim_{\varrho \to 0} \frac{|D\chi_E|(B_\varrho(x))}{\omega_{N-1} \varrho^{N-1}} = 1$$

ce qui implique que

$$\lim_{\varrho \to 0} \frac{\mathcal{H}^{N-1}(\partial^* E \cap B_\varrho(x))}{|D\chi_E|(B_\varrho(x))} = 1.$$

Comme $\mathcal{H}^{N-1} \llcorner \partial^* E$ est absolument continue par rapport à $|D\chi_E|$, le théorème de différentiation de Besicovitch montre que $\mathcal{H}^{N-1} \llcorner \partial^* E = |D\chi_E|$, puis $D\chi_E = -\nu_E |D\chi_E| = -\nu_E \mathcal{H}^{N-1} \llcorner \partial^* E$. $\square$

4.5 Frontière essentielle

Si $E \subset \mathbb{R}^N$ est un ensemble mesurable, on sait d'après le théorème des points de Lebesgue, que pour $\mathcal{L}^N$-presque tout $x \in E$,

$$\lim_{\varrho \to 0} \frac{\mathcal{L}^N(B_\varrho(x) \cap E)}{\omega_N \varrho^N} = 1$$

et pour $\mathcal{L}^N$-presque tout $x \in \Omega \setminus E$,

$$\lim_{\varrho \to 0} \frac{\mathcal{L}^N(B_\varrho(x) \cap E)}{\omega_N \varrho^N} = 0.$$

Définition 4.5.1. Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un ouvert et $E \subset \mathbb{R}^N$ un ensemble mesurable. La *frontière essentielle* de E, notée $\partial_* E$, est l'ensemble des points $x_0 \in \Omega$ tels que

$$\limsup_{\varrho \to 0} \frac{\mathcal{L}^N(B_\varrho(x_0) \cap E)}{\omega_N \varrho^N} > 0 \quad \text{et} \quad \limsup_{\varrho \to 0} \frac{\mathcal{L}^N(B_\varrho(x_0) \setminus E)}{\omega_N \varrho^N} > 0.$$

Lemme 4.5.2. *L'ensemble $\partial_* E$ est un Borélien de Ω. Si de plus E est de périmètre fini dans Ω, alors $\partial^* E \subset \partial_* E$ et $\mathcal{H}^{N-1}(\partial_* E \setminus \partial^* E) = 0$.*

Démonstration. Pour tout $\varrho > 0$, les fonctions

$$x \mapsto \frac{\mathcal{L}^N(B_\varrho(x) \cap E)}{\omega_N \varrho^N}, \quad x \mapsto \frac{\mathcal{L}^N(B_\varrho(x) \setminus E)}{\omega_N \varrho^N}$$

sont Boréliennes. Par continuité par rapport à ϱ, on en déduit que les fonctions

$$x \mapsto \limsup_{\varrho \to 0} \frac{\mathcal{L}^N(B_\varrho(x) \cap E)}{\omega_N \varrho^N}, \quad x \mapsto \limsup_{\varrho \to 0} \frac{\mathcal{L}^N(B_\varrho(x) \setminus E)}{\omega_N \varrho^N}$$

sont également Boréliennes. Ceci montre que $\partial_* E$ est un ensemble Borélien.

Si E est de périmètre fini dans Ω, les items (i) et (ii) du Lemme 4.4.3 montrent que $\partial^* E \subset \partial_* E$. De plus, comme $\mathcal{H}^{N-1}(\partial^* E) = |D\chi_E|(\Omega) < \infty$, la Proposition 3.2.7 montre que pour $\mathcal{H}^{N-1}$-presque tout $x \notin \partial^* E$

$$\lim_{\varrho \to 0} \frac{|D\chi_E|(B_\varrho(x))}{\varrho^{N-1}} = \lim_{\varrho \to 0} \frac{\mathcal{H}^{N-1}(\partial^* E \cap B_\varrho(x))}{\varrho^{N-1}} = 0.$$

Par conséquent, en notant

$$\alpha(\varrho) := \frac{\mathcal{L}^N(B_\varrho(x) \cap E)}{\omega_N \varrho^N},$$

l'inégalité isopérimétrique relative implique que pour $\mathcal{H}^{N-1}$-presque tout $x \notin \partial^* E$,

$$\lim_{\varrho \to 0} \min\{\alpha(\varrho), 1 - \alpha(\varrho)\} = 0.$$

La fonction α étant continue, il vient soit $\alpha(\varrho) \to 0$ soit $\alpha(\varrho) \to 1$. On a donc montré qu'il existe un ensemble $\mathcal{H}^{N-1}$-négligeable $Z \subset \Omega$ tel que $\Omega \setminus \partial^* E \subset (\Omega \setminus \partial_* E) \cup Z$, autrement dit $\mathcal{H}^{N-1}(\partial_* E \setminus \partial^* E) = 0$. □

Pour finir ce chapitre, notons que les notions de frontières réduites et essentielles permettent de montrer une formule de Gauss-Green généralisée pour les ensembles de périmètre fini.

Théorème 4.5.3. *Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un ouvert et E un ensemble de périmètre fini dans Ω. Pour toute fonction $\varphi \in \mathcal{C}^1_c(\Omega; \mathbb{R}^N)$, on a*

$$\int_E \mathrm{div}\varphi \, dx = \int_{\partial^* E} \varphi \cdot \nu_E \, d\mathcal{H}^{N-1} = \int_{\partial_* E} \varphi \cdot \nu_E \, d\mathcal{H}^{N-1}.$$

Démonstration. Par définition de la dérivée distributionnelle et d'après le théorème de De Giorgi, théorème 4.4.7, on a

$$\int_E \mathrm{div}\varphi \, dx = -\int_\Omega \varphi \cdot dD\chi_E = \int_{\partial^* E} \varphi \cdot \nu_E \, d\mathcal{H}^{N-1} = \int_{\partial_* E} \varphi \cdot \nu_E \, d\mathcal{H}^{N-1},$$

le dernière égalité étant une conséquence du fait que $\mathcal{H}^{N-1}(\partial_* E \setminus \partial^* E) = 0$. □