Mathématiques Orsay

Université Paris Saclay
Master de Mathématiques et Applications

Calcul des Variations
&
Théorie Géométrique de la Mesure

Jean-François Babadjian

Table des matières

Introduction

L'objet de ce cours est d'introduire des outils de base de théorie géométrique de la mesure pour étudier des problèmes singuliers du calcul des variations. Dans l'esprit des distributions, qui généralisent la notion de fonction, nous allons introduire un formalisme permettant de généraliser la notion d'ensembles "réguliers". Si ce nouveau formalisme est assez lourd à introduire et requiert une incursion assez profonde dans la théorie de la mesure, elle permet de gagner en souplesse dans la manipulation des nouveaux objets considérés.

Le fil conducteur est la théorie des fonctions à variation bornée, i.e. les fonctions intégrables dont le gradient distributionnel est une mesure bornée. Après avoir montré les propriétés basiques de cet espace (densité des fonctions régulières, injections continues, injections compactes), nous nous intéresserons à leurs propriétés fines permettant d'aboutir à un théorème de structure du gradient d'une fonction BV. Celui-ci se décompose en la somme de trois mesures étrangères : une première (absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue) qui correspond à la partie "régulière" la mesure ; une deuxième qui correspond à la partie saut pour laquelle il convient de définir un ensemble de saut, des traces de part et d'autre de cet ensemble ainsi qu'une normale à cet ensemble ; une troisième, dite "partie Cantorienne", qui correspond aux singularités diffuses de co-dimension (de Hausdorff) strictement comprise entre 0 et 1.

C'est principalement l'étude de la partie saut qui demandera un grand travail préliminaire. Intuitivement, l'ensemble des sauts correspond à un ensemble $(N-1)$-dimensionnel. Malheureusement, en pratique, on a accès à très peu de régularité sur cet ensemble. En particulier, un tel ensemble n'est pas en général une hypersurface de classe $\mathcal{C}^1$. Les outils classiques de géométrie différentielle ne s'avèrent donc pas assez robustes et il convient d'introduire une classe plus générale d'ensembles qui sont les ensembles rectifiables. Cela requiert l'introduction au prélable de la notion de mesure de Hausdorff qui permettra de montrer que, au sens de la mesure, de tels ensembles possèdent en fait des propriétés analogues aux sous-variétés de dimension $N-1$. On pourra en particulier définir une notion de normale généralisée ainsi que des traces de part et d'autre de tels ensembles.

Une sous classe importante des fonctions à variation bornée concerne les fonctions caractéristiques d'ensembles de périmètre fini, généralisant la notion d'ensemble régulier. C'est l'étude fine de tels ensembles, couplé à la formule de la co-aire dans BV qui permettra d'étudier en détail les propriétés fines des fonctions BV.

Du point de vue du calcul des variations, ces outils permettent d'étudier trois grandes classes de problèmes qui seront considérés dans ce cours :

– les problèmes de type surface minimale, que introduirons ici dans le cadre des ensembles de périmètre fini. C'est un cas particulier du problème plus général dit de Plateau.

– les problèmes de la mécanique du solide, comme l'étude de modèles de type plasticité parfaite, faisant intervenir une énergie à croissance linéaire par rapport au gradient de déplacement.

– les problèmes en imagerie comme le modèle de Rudin-Osher-Fatemi pour le débruitage ou encore le modèle de Mumford-Shah pour la segmentation, prototype des problèmes aux discontinuités libres.

Chapitre 1

Eléments de théorie géométrique de la mesure

Dans ce chapitre, on considère $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un ouvert et on désigne par $\mathcal{B}(\Omega)$ la tribu Borélienne sur Ω.

1.1 Les mesures de Radon

Définition 1.1.1. On dit que $\mu : \mathcal{B}(\Omega) \to [0, +\infty]$ est une *mesure Borélienne positive* si
(i) $\mu(\emptyset) = 0$;
(ii) pour toute suite $\{B_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ de Boréliens deux à deux disjoints,

$$\mu\left(\bigcup_{j=0}^{\infty} B_j\right) = \sum_{j=0}^{\infty} \mu(B_j).$$

Si de plus $\mu(K) < \infty$ pour tout compact $K \subset \Omega$, on dit que μ est une *mesure de Radon positive.*

On notera par la suite $\mathcal{L}^N$ la mesure de Lebesgue dans $\mathbb{R}^N$ qui est une mesure de Radon positive. Les mesures de Radon positives jouissent de propriétés de régularité permettant d'approcher la mesure d'un Borélien par la mesure d'ouverts ou de fermés.

Proposition 1.1.2. *Soit μ une mesure de Radon positive sur Ω. Alors, pour tout Borélien $A \subset \Omega$*

$$\begin{aligned} \mu(A) &= \sup\{\mu(K) : \ K \subset A, \ K \ \textit{compact}\}, \\ &= \inf\{\mu(U) : \ A \subset U \subset \Omega, \ U \ \textit{ouvert}\}. \end{aligned}$$

Démonstration. Commençons par montrer l'approximation intérieure par un compact. On suppose tout d'abord que $\mu(A) < \infty$ et on pose $\nu(B) := \mu(A \cap B)$ pour tout Borélien $B \subset \mathbb{R}^N$, ce qui définit une mesure Borélienne finie sur $\mathbb{R}^N$.

On considère la famille

$$\begin{aligned} \mathcal{F} \ := \ \Big\{ & B \subset \mathbb{R}^N \text{ Borélien : pour tout } \varepsilon > 0, \text{ il existe} \\ & \text{un fermé } C \subset B \text{ tel que } \nu(B \setminus C) < \varepsilon \Big\}. \end{aligned}$$

La famille $\mathcal{F}$ contient évidemment les ensembles fermés.

Montrons que $\mathcal{F}$ est stable par union et intersection dénombrable. Soit donc $\{B_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ une famille d'éléments de $\mathcal{F}$. Pour tout $\varepsilon > 0$ et tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un ensemble fermé $C_n \subset B_n$ tel que

$$\nu(B_n \setminus C_n) < \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}.$$

L'ensemble $C := \bigcap_n C_n$ est fermé et

$$\nu\left(\left(\bigcap_{n=0}^{\infty} B_n\right) \setminus C\right) = \nu\left(\left(\bigcap_{n=0}^{\infty} B_n\right) \setminus \left(\bigcap_{n=0}^{\infty} C_n\right)\right) \leq \nu\left(\bigcup_{n=0}^{\infty}(B_n \setminus C_n)\right) \leq \sum_{n=0}^{\infty} \nu(B_n \setminus C_n) < \varepsilon,$$

ce qui montre que $\bigcap_n B_n \in \mathcal{F}$. Par ailleurs, on a

$$\begin{aligned}\lim_{m\to\infty} \nu\left(\left(\bigcup_{n=0}^{\infty} B_n\right) \setminus \left(\bigcup_{n=0}^{m} C_n\right)\right) &= \mu\left(\left(\bigcup_{n=0}^{\infty} B_n\right) \setminus \left(\bigcup_{n=0}^{\infty} C_n\right)\right) \\ &\leq \nu\left(\bigcup_{n=0}^{\infty}(B_n \setminus C_n)\right) \leq \sum_{n=0}^{\infty} \nu(B_n \setminus C_n) < \varepsilon.\end{aligned}$$

Pour m asssez grand, on a donc en posant $C' := \bigcup_{n=0}^{m} C_n$

$$\nu\left(\bigcup_{n=0}^{\infty} B_n \setminus C'\right) < \varepsilon,$$

ce qui montre, C' étant fermé, que $\bigcup_n B_n \in \mathcal{F}$.

Comme tout ouvert de $\mathbb{R}^N$ peut s'écrire comme une union dénombrable d'ensembles fermés, on en déduit que $\mathcal{F}$ contient tous les ouverts de $\mathbb{R}^N$.

Posons à présent

$$\mathcal{G} := \{B \in \mathcal{F} : \ ^cB \in \mathcal{F}\}$$

de sorte que $\mathbb{R}^N \in \mathcal{G}$ et $\mathcal{G}$ est stable par union dénombrable. Par conséquent, $\mathcal{G}$ est une tribu. Comme les ouverts sont contenus dans $\mathcal{G}$, on en déduit que $\mathcal{G}$ contient la tribu Borélienne. Par conséquent, pour tout $B \subset \mathbb{R}^N$ Borélien et tout $\varepsilon > 0$ il existe un ensemble fermé $C \subset B$ tel que $\nu(B\setminus C) < \varepsilon$. En particulier, pour $B = A$, on obtient un fermé $C \subset A$ tel que $\mu(A\setminus C) < \varepsilon$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $K_n := C \cap \overline{B}(0, n)$ qui est un compact inclu dans A. Comme $\mu(C) \leq \mu(A) < \infty)$, on a $\lim_n \mu(C \setminus K_n) = 0$. Pour n assez grand, on obtient donc un compact $K_n \subset A$ tel que $\mu(A \setminus K_n) < \varepsilon$.

Si $\mu(A) = \infty$, on décompose $A = \bigcup_j (A\cap C_j)$ où $C_j = \{x \in \mathbb{R}^N : \ j \leq |x| < j+1\}$. Comme μ est une mesure de Radon, $\mu(A \cap C_j) < \infty$ pour tout $j \in \mathbb{N}$. Par ce qui a été montré précédemment, il existe un compact $K_j \subset A \cap C_j$ tel que $\mu(K_j) \geq \mu(A \cap C_j) - 2^{-j}$. Par convergence monotone,

$$\lim_{n\to\infty} \mu\left(\bigcup_{j=0}^{n} K_j\right) = \mu\left(\bigcup_{j\in\mathbb{N}} K_j\right) = \sum_{j\in\mathbb{N}} \mu(K_j) \geq \sum_{j\in\mathbb{N}} (\mu(A \cap C_j) - 2^{-j}) = \infty = \mu(A).$$

Comme $\bigcup_{j=0}^{n} K_j$ est compact, on obtient ainsi l'approximation intérieure par des compacts.

Montrons maintenant l'approximation par l'extérieur à l'aide d'ouverts. Soit $\{\omega_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ une suite exhaustive d'ouverts relativement compacts dans Ω tels que $\overline{\omega_n} \subset \omega_{n+1}$ et $\bigcup_n \omega_n = \Omega$. L'ensemble $\omega_n \setminus A$ étant un Borélien de mesure finie (car μ est finie sur les compacts), l'étape précédente montre l'existence d'un fermé $C_n \subset \omega_n \setminus A$ tel que $\mu((\omega_n \setminus A) \setminus C_n) < \varepsilon/2^n$. Posons $U_n = \omega_n \setminus C_n$ qui est un ouvert avec $\omega_n \cap A \subset U_n$ et tel que $\mu(U_n \setminus A) < \varepsilon/2^n$. Si on pose $U := \bigcup_n U_n$ qui est un ouvert, on obtient que $A \subset U$ et $\mu(U \setminus A) \leq \sum_n \mu(U_n \setminus A) < \varepsilon$. $\square$

Une conséquence immédiate du résultat précédent concerne la densité des fonctions continues à support compact.

Corollaire 1.1.3. *Soit μ une mesure de Radon positive sur un ouvert Ω de $\mathbb{R}^N$. Alors l'espace $\mathcal{C}_c(\Omega;\mathbb{R}^d)$ est dense dans $L^1_\mu(\Omega;\mathbb{R}^d)$.*

Soit λ une mesure de Radon positive sur un ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^N$. On rappelle que le *support* de λ est donné par

$$\mathrm{Supp}(\lambda) := \{x \in \Omega : \ \lambda(B_\varrho(x)) > 0 \text{ pour tout } \varrho > 0\}.$$

Lemme 1.1.4. *L'ensemble* $\mathrm{Supp}(\lambda)$ *est fermé dans* Ω *et* $\lambda(\Omega \setminus \mathrm{Supp}(\lambda)) = 0$.

Démonstration. Si $x \notin \mathrm{Supp}(\lambda)$, alors il existe $\varrho > 0$ tel que $B_\varrho(x) \subset \Omega$ et $\lambda(B_\varrho(x)) = 0$. Si $y \in B_\varrho(x)$ alors il existe $R > 0$ tel que $B_R(y) \subset B_\varrho(x)$ de sorte que $\lambda(B_R(y)) \leq \lambda(B_\varrho(x)) = 0$. Par conséquent $B_\varrho(x) \subset \Omega \setminus \mathrm{Supp}(\lambda)$, ce qui montre que $\Omega \setminus \mathrm{Supp}(\lambda)$ est ouvert et donc que $\mathrm{Supp}(\lambda)$ est fermé dans Ω.

Par ailleurs, soit K un compact contenu dans $\Omega \setminus \mathrm{Supp}(\lambda)$. Par compacité, il existe un nombre fini de points $x_1, \ldots, x_m \in K$ et $r_1, \ldots, r_m \in (0, \mathrm{dist}(K, \partial\Omega))$ tels que

$$K \subset \bigcup_{i=1}^m B_{r_i}(x_i), \quad \lambda(B_{r_i}(x_i)) = 0 \text{ pour tout } 1 \leq i \leq m.$$

Par conséquent, $\lambda(K) \leq \sum_{i=1}^m \lambda(B_{r_i}(x_i)) = 0$. Par passage au supremum parmi tous les compacts $K \subset \Omega \setminus \mathrm{Supp}(\lambda)$, on en déduit que $\lambda(\Omega \setminus \mathrm{Supp}(\lambda)) = 0$. □

Définition 1.1.5. On dit que $\mu : \mathcal{B}(\Omega) \to \mathbb{R}^d$ est une *mesure de Radon vectorielle* si

(i) $\mu(\emptyset) = 0$;

(ii) pour toute suite $\{B_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ de Boréliens deux à deux disjoints, la série vectorielle $\sum_j \mu(B_j)$ converge et sa somme est donnée par

$$\sum_{j=0}^\infty \mu(B_j) = \mu\left(\bigcup_{j=0}^\infty B_j\right).$$

En notant $|\cdot|$ la norme Euclidienne sur $\mathbb{R}^d$, on définit, pour tout $B \in \mathcal{B}(\Omega)$, la *variation* de μ par

$$|\mu|(B) = \sup\left\{\sum_{j=0}^\infty |\mu(B_j)| : \ B_j \in \mathcal{B}(\Omega),\, B_i \cap B_j = \emptyset \text{ pour tout } i \neq j,\, B = \bigcup_{j\in\mathbb{N}} B_j\right\}.$$

Remarque 1.1.6. Soit $\mu = (\mu_1, \ldots, \mu_d)$ une mesure de Radon vectorielle où $\mu_1, \ldots, \mu_d$ sont des mesures de Radon réelles. Alors on a

$$|\mu| \leq \sum_{i=1}^d |\mu_i|.$$

Proposition 1.1.7. *Soit μ une mesure de Radon vectorielle, alors $|\mu|$ est une mesure positive finie qui satisfait*

$$|\mu(B)| \leq |\mu|(B) \quad \textit{pour tout } B \in \mathcal{B}(\Omega).$$

Démonstration. Par définition de $|\mu|$, on a bien l'inégalité $|\mu(B)| \leq |\mu|(B)$ pour tout $B \in \mathcal{B}(\Omega)$.

Montrons tout d'abord que $|\mu|$ est une mesure Borélienne. Il est clair que $|\mu|(\emptyset) = 0$. Soit $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Boréliens deux à deux disjoints contenus dans Ω et posons $A := \bigcup_n A_n$. Si $\{B_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ désigne une partition Borélienne de A, alors pour tout $j \in \mathbb{N}$, $\{A_n \cap B_j\}_{n\in\mathbb{N}}$ est une partition Borélienne de B_j et il vient que $\mu(B_j) = \sum_n \mu(A_j \cap B_n)$ et donc

$$\sum_{j=0}^{\infty} |\mu(B_j)| \leq \sum_{j=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} |\mu(A_n \cap B_j)| = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty} |\mu(A_n \cap B_j)| \leq \sum_{n=0}^{\infty} |\mu|(A_n).$$

Par passage au supremum parmi toutes les partitions Boréliennes $\{B_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ de A, il vient

$$|\mu|(A) \leq \sum_{n=0}^{\infty} |\mu|(A_n).$$

Pour montrer l'autre inégalité, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $\varepsilon > 0$, soit $\{E_j^n\}_{j\in\mathbb{N}}$ une partition Borélienne de A_n telle que

$$|\mu|(A_n) \leq \sum_{j=0}^{\infty} |\mu(E_j^n)| + 2^{-n}\varepsilon.$$

Comme $\{E_j^n\}_{(j,n)\in\mathbb{N}^2}$ est une partition Borélienne de A, il vient

$$|\mu|(A) \geq \sum_{j,n=0}^{\infty} |\mu(E_j^n)| = \sum_{n=0}^{\infty} |\mu|(A_n) - 2\varepsilon$$

et l'inégalité vient par passage à la limite quand $\varepsilon \to 0$.

Pour établir que $|\mu|$ est une mesure finie, il suffit de considérer le cas $d = 1$. Supposons qu'il existe $A \in \mathcal{B}(\Omega)$ tel que $|\mu|(A) = \infty$, on peut alors trouver une partition Borélienne $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de A telle que

$$\sum_{n=0}^{\infty} |\mu(A_n)| \geq 2(|\mu(A)| + 1).$$

Soient $E_1 = \bigcup_{\mu(A_n)\geq 0} A_n$ et $E_2 = \bigcup_{\mu(X_n)<0} A_n$ de sorte que $A = E_1 \cup E_2$, $E_1 \cap E_2 = \emptyset$, $\mu(E_1) \geq 0$, $\mu(E_2) \leq 0$ et $|\mu(E_1)| + |\mu(E_2)| \geq 2(|\mu(A)| + 1)$. Il existe donc $i_0 = 1$ ou 2 tel que $|\mu(E_{i_0})| \geq |\mu(A)| + 1$ et on pose $E = E_{i_0}$, $F = A \setminus E$. On a donc $|\mu|(E) \geq |\mu(E)| > 1$, $|\mu|(F) \geq |\mu(F)| = |\mu(A) - \mu(E)| \geq |\mu(E)| - |\mu(A)| > 1$. Comme $\infty = |\mu|(A) = |\mu|(E) + |\mu|(F)$, il vient que $|\mu|(E) = \infty$ ou $|\mu|(F) = \infty$. Supposons sans restreindre la généralité que $|\mu|(F) = \infty$ et posons $Y_0 = E$. On reproduit l'argument précédent avec F au lieu de A. On construit alors par récurrence une suite $\{Y_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ de Boréliens deux à deux disjoints tels que $|\mu(Y_j)| > 1$ pour tout $j \in \mathbb{N}$ ce qui montre que la série de terme général $\{\mu(Y_j)\}_{j\in\mathbb{N}}$ ne peut pas être convergente. On aboutit donc à une contradiction qui montre bien que $|\mu|(A) < \infty$ pour tout $A \in \mathcal{B}(\Omega)$. □

Un exemple typique de mesure vectorielle est celui des mesures à densité.

Définition 1.1.8. Soit λ une mesure de Radon positive sur Ω et $f \in L^1_\lambda(\Omega; \mathbb{R}^d)$. On définit la mesure de Radon vectorielle $\mu := f\lambda$ par

$$\mu(A) = \int_A f\, d\lambda \quad \text{pour tout } A \in \mathcal{B}(\Omega).$$

On montre effectivement que $f\lambda$ est une mesure de Radon vectorielle par convergence dominée. Le résultat suivant détermine la mesure variation d'une mesure à densité.

Proposition 1.1.9. *Soit $\mu = f\lambda$ la mesure vectorielle définie précédemment. Alors, la mesure variation de μ est donnée par $|\mu| = |f|\lambda$, i.e.*

$$|\mu|(A) = \int_A |f|\,d\lambda \quad \textit{pour tout } A \in \mathcal{B}(\Omega).$$

Démonstration. L'inégalité $|\mu| \leq |f|\lambda$ est immédiate. Pour montrer l'inégalité opposée, on considère un sous-ensemble $D = \{z_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ dénombrable et dense dans la sphère $\mathbb{S}^{N-1} = \{x \in \mathbb{R}^N : \ |x| = 1\}$. Soient $A \in \mathcal{B}(\Omega)$, $\varepsilon > 0$ et $k \in \mathbb{N}$, on définit les ensembles Boréliens

$$A_k = \{x \in A : \ f(x)\cdot z_k \geq (1-\varepsilon)|f(x)|\}$$

de sorte que $A = \bigcup_k A_k$. On pose ensuite

$$B_0 = A_0, \quad B_k = A_k \setminus \bigcup_{j=0}^{k-1} A_j \text{ pour tout } k \geq 1,$$

de sorte que $B_k \in \mathcal{B}(\Omega)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ et les ensembles $\{B_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ sont deux à deux disjoints. Comme $\bigcup_k B_k = \bigcup_k A_k = A$, il vient que

$$\begin{aligned}(1-\varepsilon)\int_A |f|\,d\lambda = \sum_{k\in\mathbb{N}}(1-\varepsilon)\int_{B_k}|f|\,d\lambda \leq \sum_{k\in\mathbb{N}}\int_{B_k} z_k\cdot f\,d\lambda \\ = \sum_{k\in\mathbb{N}} z_k\cdot\mu(B_k) \leq \sum_{k\in\mathbb{N}}|\mu(B_k)| \leq |\mu|(A),\end{aligned}$$

ce qui conclut la preuve du résultat. □

Si $d = 1$, on parle aussi de mesure de Radon réelle. On pose alors

$$\mu^{\pm} := \frac{|\mu| \pm \mu}{2}$$

qui définissent des mesures positives finies qui satisfont

$$\mu = \mu^+ - \mu^-, \quad |\mu| = \mu^+ + \mu^-.$$

L'intégration d'une fonction Borélienne $|\mu|$-intégrable $f : \Omega \to \mathbb{R}$ par rapport à μ est alors définie par

$$\int_\Omega f\,d\mu := \int_\Omega f\,d\mu^+ - \int_\Omega f d\mu^-.$$

Si $d \geq 2$ et $\mu = (\mu_1, \ldots, \mu_d)$ est une mesure de Radon vectorielle, on définit l'intégrale

$$\int_\Omega f\,d\mu := \left(\int_\Omega f\,d\mu_1, \ldots, \int_\Omega f\,d\mu_d\right).$$

On a toujours l'inégalité

$$\left|\int_\Omega f\,d\mu\right| \leq \int_\Omega |f|\,d|\mu|.$$

Si $\varphi : \Omega \to \mathbb{R}^d$ est une fonction vectorielle Borélienne $|\mu|$-intégrable, on notera

$$\int_\Omega \varphi\cdot d\mu := \sum_{i=1}^d \int_\Omega \varphi_i\,d\mu_i$$

et on montre que

$$\left|\int_\Omega \varphi\cdot d\mu\right| \leq \int_\Omega |\varphi|\,d|\mu|.$$

1.2 Les mesures de Radon par dualité

On désigne par $\mathcal{C}_c(\Omega)$ l'ensemble des fonctions continues à support compact inclus dans Ω. Toute mesure de Radon positive μ définit une forme linéaire sur $\mathcal{C}_c(\Omega)$. En effet, l'intégrale

$$\int_\Omega f\,d\mu$$

est bien définie puisque, en notant $K = \mathrm{Supp}(f)$ le support (compact) de f, on a

$$\int_K |f|\,d\mu \leq \mu(K)\max_K |f| < \infty.$$

Par conséquent, l'application

$$L : f \mapsto \int_\Omega f\,d\mu$$

définit une forme linéaire positive $\mathcal{C}_c(\Omega)$, *i.e.*,

$$L(\alpha f + \beta g) = \alpha L(f) + \beta L(g) \quad \text{pour tout } f,\, g \in \mathcal{C}_c(\Omega) \text{ et tout } \alpha,\, \beta \in \mathbb{R}, \tag{1.2.1}$$

$$L(f) \geq 0 \quad \text{pour tout } f \in \mathcal{C}_c(\Omega) \text{ avec } f \geq 0. \tag{1.2.2}$$

Nous allons en fait montrer que toute forme linéaire positive sur l'espace $\mathcal{C}_c(\Omega)$ peut être représentée de façon unique par une telle mesure.

Théorème 1.2.1 (Théorème de représentation de Riesz). *Soit $L : \mathcal{C}_c(\Omega) \to \mathbb{R}$ une forme linéaire positive (i.e. qui satisfait (1.2.1) et (1.2.2)). Il existe une unique mesure de Radon positive μ sur Ω telle que*

$$L(f) = \int_\Omega f\,d\mu \quad \textit{pour tout } f \in \mathcal{C}_c(\Omega). \tag{1.2.3}$$

Dans la preuve de l'existence, nous utiliserons le résultat suivant. Le cas $n = 1$ correspond au Lemme d'Urysohn.

Lemme 1.2.2 (Partition de l'unité). *Soient $V_1, \ldots, V_n$ des ouverts de $\mathbb{R}^N$ et K un compact tel que $K \subset \bigcup_{i=1}^n V_i$. Alors, pour tout $i = 1, \ldots, n$, il existe des fonctions $f_i \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^N; [0,1])$ telles que $\mathrm{Supp}(f_i) \subset V_i$ et $\sum_{i=1}^n f_i = 1$ sur K.*

Démonstration. Pour tout $x \in K$, il existe $i \in \{1, \ldots, n\}$ et une boule ouverte B_x centrée en x et telle que $\overline{B_x} \subset V_i$. Par conséquent, $K \subset \bigcup_{x\in K} B_x$, et comme K est compact, on peut extraire un sous recouvrement fini $K \subset \bigcup_{j=1}^p B_{x_j}$. On définit K_i comme l'union des boules fermées $\overline{B_{x_j}}$ qui sont contenues dans V_i. Alors K_i est un compact contenu dans V_i et $K \subset \bigcup_{i=1}^n K_i$. Soit U_i un ouvert borné tel que $K_i \subset U_i \subset \overline{U}_i \subset V_i$, on pose alors

$$f_i(x) := \frac{\mathrm{dist}(x, \mathbb{R}^N \setminus U_i)}{\mathrm{dist}(x, K) + \sum_{j=1}^n \mathrm{dist}(x, \mathbb{R}^N \setminus U_j)} \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}^N,$$

qui satisfait bien les propriétés souhaitées. □

Pour tout ouvert $V \subset \Omega$, on définit

$$\mu^*(V) := \sup\{L(f) :\ f \in \mathcal{C}_c(\Omega; [0,1]),\ \mathrm{Supp}(f) \subset V\}. \tag{1.2.4}$$

Si $U \subset V$, alors $\mu^*(U) \leq \mu^*(V)$ de sorte que l'on peut étendre μ^* à n'importe quel ensemble $A \subset \Omega$ en posant

$$\mu^*(A) := \inf\{\mu^*(V) :\ A \subset V \subset \Omega \text{ ouvert}\}.$$

La propriété de croissance de μ^* reste vraie au sens où $\mu^*(A) \leq \mu^*(B)$ pour tout $A \subset B$.

Lemme 1.2.3. *Pour tout compact $K \subset \Omega$, on a*

$$\mu^*(K) = \inf\{L(g) : \ g \in \mathcal{C}_c(\Omega; [0,1]),\ g = 1 \text{ sur } K\}.$$

En particulier, $\mu^*(K) < \infty$. De plus, pour tout ouvert $U \subset \Omega$,

$$\mu^*(U) = \sup\{\mu^*(K) : \ K \subset U,\ K \text{ compact}\}.$$

Démonstration. Soient $K \subset \Omega$ un compact et $g \in \mathcal{C}_c(\Omega; [0,1])$ telle que $g = 1$ sur K. Pour tout $0 < t < 1$, l'ensemble $V_t := \{g > t\}$, qui est ouvert, satisfait $K \subset V_t$ et $f \leq t^{-1}g$ pour tout $f \in \mathcal{C}_c(\Omega; [0,1])$ avec $\mathrm{Supp}(f) \subset V_t$. Par conséquent, la croissance de L montre que

$$\mu^*(K) \leq \mu^*(V_t) = \sup\{L(f) : \ f \in \mathcal{C}_c(\Omega; [0,1]) \text{ tel que } \mathrm{Supp}(f) \subset V_t\} \leq t^{-1}L(g) < \infty.$$

En faisant tendre $t \to 1^-$, on obtient $\mu(K) \leq L(g)$ et donc, par passage à l'infimum en g,

$$\mu^*(K) \leq \inf\{L(g) : \ g \in \mathcal{C}_c(\Omega; [0,1]),\ g = 1 \text{ sur } K\}.$$

L'autre inégalité se montre en considérant un ouvert arbitraire $U \subset \Omega$ contenant K. Si $f \in \mathcal{C}_c(\Omega; [0,1])$ est une fonction telle que $\mathrm{Supp}(f) \subset U$ et $f = 1$ sur K, il vient par définition de μ^* sur les ouverts que

$$\inf\{L(g) : \ g \in \mathcal{C}_c(\Omega; [0,1]),\ g = 1 \text{ sur } K\} \leq L(f) \leq \mu^*(U),$$

puis, par passage à l'infimum par rapport à U, que

$$\inf\{L(g) : \ g \in \mathcal{C}_c(\Omega; [0,1]),\ g = 1 \text{ sur } K\} \leq \mu^*(K).$$

Pour établir la propriété de régularité intérieure sur les ouverts, considérons un ouvert $U \subset \Omega$. Alors, par définition de μ^* sur les ouverts, pour tout $\alpha < \mu^*(U)$, il existe une fonction $f \in \mathcal{C}_c(\Omega; [0,1])$ telle que $\mathrm{Supp}(f) \subset U$ et $\alpha < L(f)$. Soit $K = \mathrm{Supp}(f)$ et $g \in \mathcal{C}_c(\Omega; [0,1])$ telle que $g = 1$ sur K. Comme $f \leq g$ sur Ω, on a $L(f) \leq L(g)$, puis par passage à l'infimum par rapport à g, on obtient que $L(f) \leq \mu^*(K)$. Ceci montre l'existence d'un compact $K \subset U$ tel que $\alpha < \mu^*(K)$. □

A ce stade, nous avons défini une fonction d'ensembles $\mu^* : \mathcal{P}(\Omega) \to [0, +\infty]$ qui est finie sur les compacts, qui satisfait, par définition, la propriété de régularité extérieure

$$\mu^*(A) = \inf\{\mu^*(V) : \ A \subset V \subset \Omega \text{ ouvert}\} \quad \text{pour tout } A \in \mathcal{P}(\Omega) \tag{1.2.5}$$

et la propriété de régularité intérieure

$$\mu^*(U) = \sup\{\mu^*(K) : \ K \subset U,\ K \text{ compact}\} \quad \text{pour tout ouvert } U \subset \Omega. \tag{1.2.6}$$

Lemme 1.2.4. *La fonction d'ensemble μ^* est une mesure extérieure.*

Démonstration. On a évidemment que $\mu^*(\emptyset) = 0$ et μ^* est une fonction croissante d'ensemble, *i.e.* si $A \subset B$, alors $\mu^*(A) \leq \mu^*(B)$. Il s'agit à présent de montrer que μ^* est dénombrablement sous-additive, *i.e.*, pour toute suite $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de sous-ensembles de Ω, on a

$$\mu^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A_n).$$

Montrons d'abord que si V_1 et V_2 sont des ouverts de Ω,

$$\mu^*(V_1 \cup V_2) \leq \mu^*(V_1) + \mu^*(V_2). \tag{1.2.7}$$

Soit $g \in \mathcal{C}_c(\Omega;[0,1])$ avec $\mathrm{Supp}(g) \subset V_1 \cup V_2$. Soient f_1 et $f_2 \in \mathcal{C}_c(\Omega;[0,1])$ telles que $\mathrm{Supp}(f_1) \subset V_1$, $\mathrm{Supp}(f_2) \subset V_2$ et $f_1 + f_2 = 1$ sur $\mathrm{Supp}(g)$. Par conséquent, pour $i = 1, 2$, $f_i g \in \mathcal{C}_c(\Omega;[0,1])$, $\mathrm{Supp}(f_i) \subset V_i$ et $g = f_1 g + f_2 g$ de sorte que, par linéarité de L et la définition de μ^*,

$$L(g) = L(f_1 g) + L(f_2 g) \leq \mu^*(V_1) + \mu^*(V_2).$$

Par passage au supremum en g, on obtient $\mu^*(V_1 \cup V_2) \leq \mu^*(V_1) + \mu^*(V_2)$.

Si $\mu(A_n) = \infty$ pour un certain $n \in \mathbb{N}$, alors le résultat suit. Sinon, si $\mu(A_n) < \infty$ pour tout n, alors quelque soit $\varepsilon > 0$ il existe un ouvert V_n tel que $A_n \subset V_n$ et $\mu^*(V_n) < \mu^*(A_n) + 2^{-n}\varepsilon$. On définit $V := \bigcup_{n=1}^\infty V_n$ et on considère $f \in \mathcal{C}_c(\Omega;[0,1])$ avec $\mathrm{Supp}(f) \subset V$. Comme $\mathrm{Supp}(f)$ est compact, il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $\mathrm{Supp}(f) \subset \bigcup_{n=1}^p V_n$. En itérant (1.2.7), il vient

$$L(f) \leq \mu^*\left(\bigcup_{n=1}^p V_n\right) \leq \sum_{n=1}^p \mu^*(V_n) \leq \sum_{n=1}^\infty \mu^*(E_n) + 2\varepsilon.$$

Comme cette inégalité est satisfaite quelque soit $f \in \mathcal{C}_c(\Omega;[0,1])$ avec $\mathrm{Supp}(f) \subset V$, et $\bigcup_{n=1}^\infty A_n \subset V$, on en déduit que

$$\mu^*\left(\bigcup_{n=1}^\infty A_n\right) \leq \mu^*(V) \leq \sum_{n=1}^\infty \mu^*(A_n) + 2\varepsilon,$$

ce qui montre la dénombrable sous-additivité, le paramètre $\varepsilon > 0$ étant arbitraire. □

D'après le théorème de Carathéodory (voir le théorème 3.1.3), la classe $\mathcal{A}$ des ensembles μ^*-mesurables, *i.e.*, l'ensemble des parties $A \subset \Omega$ qui satisfont

$$\mu^*(E) = \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \setminus A) \quad \text{pour tout } E \subset \Omega,$$

est une tribu sur Ω, et la restriction $\mu := \mu^*|_{\mathcal{A}}$ de μ^* à cette tribu est une mesure. De plus, pour tout A, $B \subset \Omega$ avec $\mathrm{dist}(A,B) > 0$, on a

$$\mu^*(A \cup B) = \mu^*(A) + \mu^*(B).$$

En effet, par sous-additivité de μ^*, il suffit de montrer que $\mu^*(A \cup B) \geq \mu^*(A) + \mu^*(B)$. Soit $W \subset \Omega$ un ouvert tel que $A \cup B \subset W$. Comme $\mathrm{dist}(A,B) > 0$, il existe des ouverts U et V tels que $A \subset U$, $B \subset V$, $U \cup V \subset W$ et $U \cap V = \emptyset$. Par définition de μ^* sur les ouverts, on a

$$\mu^*(W) \geq \mu^*(U \cup V) \geq \mu^*(U) + \mu^*(V) \geq \mu^*(A) + \mu^*(B).$$

Par passage à l'infimum parmi tous les ouverts $W \supset A \cup B$, on obtient le résultat voulu. Une application immédiate de la Proposition 3.1.4 montre que $\mathcal{B}(\Omega) \subset \mathcal{A}$. Par conséquent, la restriction de μ à $\mathcal{B}(\Omega)$ est une mesure Borélienne. Comme par le Lemme 1.2.3, on a $\mu(K) = \mu^*(K) < \infty$ (puisque les compacts sont Boréliens), on en déduit que μ est une mesure de Radon positive.

Nous sommes à présent en mesure de conclure la preuve du théorème de représentation de Riesz.

Démonstration du théorème 1.2.1. Il reste à établir la propriété de représentation (1.2.3). Soit $f \in \mathcal{C}_c(\Omega)$, par linéarité de L, il suffit d'établir que

$$L(f) \leq \int_\Omega f\, d\mu. \tag{1.2.8}$$

Soit $K := \mathrm{Supp}(f)$ et $[a,b]$ un intervalle compact de $\mathbb{R}$ qui contient $f(K)$. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $y_0, y_1, \dots, y_n \in \mathbb{R}$ tels que $y_0 < a = y_1 < \dots < y_n = b$ et $\max_{1 \leq i \leq n}(y_i - y_{i-1}) < \varepsilon$. On définit, pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$

$$B_i := f^{-1}(]y_{i-1}, y_i]) \cap K.$$

Comme f est continue, les ensembles B_i constituent une partition Borélienne de K. D'après la propriété de régularité extérieure (1.2.5), il existe un ouvert V_i contenant B_i tel que $\mu(V_i) \leq \mu(B_i) + \varepsilon/n$. Par ailleurs, l'ouvert $W_i = f^{-1}(]y_i - \varepsilon, y_i + \varepsilon[)$ contenant B_i, on obtient en posant $U_i = V_i \cap W_i$ un ouvert contenant B_i et satisfaisant

$$\mu(U_i) \leq \mu(B_i) + \frac{\varepsilon}{n}, \quad \sup_{U_i} f \leq y_i + \varepsilon \text{ pour tout } i = 1, \dots, n.$$

Comme $\{U_i\}_{1 \leq i \leq n}$ est un recouvrement ouvert du compact K, on peut trouver une partition de l'unité subordonnée à ce recouvrement, *i.e.* des fonctions $h_i \in \mathcal{C}_c(\Omega; [0,1])$ telles que $\mathrm{Supp}(h_i) \subset U_i$ et $\sum_{i=1}^n h_i = 1$ sur K. Par conséquent, $f = \sum_{i=1}^n h_i f$ et $0 \leq h_i f \leq (y_i + \varepsilon) h_i$ dans Ω, puis par linéarité et croissance de L, il vient

$$L(f) = \sum_{i=1}^n L(h_i f) \leq \sum_{i=1}^n (y_i + \varepsilon) L(h_i) = \sum_{i=1}^n (|a| + y_i + \varepsilon) L(h_i) - |a| \sum_{i=1}^n L(h_i).$$

Comme $\sum_{i=1}^n h_i \in \mathcal{C}_c(\Omega; [0,1])$ est telle que $\sum_{i=1}^n h_i = 1$ sur K, le Lemme 1.2.3 montre que

$$\sum_{i=1}^n L(h_i) = L\left(\sum_{i=1}^n h_i\right) \geq \mu(K).$$

Par ailleurs, la définition de μ^* sur les ouverts (et donc de μ) montre $L(h_i) \leq \mu(U_i) \leq \mu(B_i) + \varepsilon/n$, de sorte que

$$L(f) \leq \sum_{i=1}^n (|a| + y_i + \varepsilon) \left(\mu(B_i) + \frac{\varepsilon}{n}\right) - |a|\mu(K).$$

Comme $\{B_1, \dots, B_n\}$ est une partition de K, on en déduit que

$$\begin{aligned}
L(f) &\leq \sum_{i=1}^n y_i \mu(B_i) + \varepsilon(|a| + |b| + \varepsilon + \mu(K)) \\
&\leq \sum_{i=1}^n y_{i-1} \mu(B_i) + \varepsilon(|a| + |b| + \varepsilon + 2\mu(K)) \\
&\leq \sum_{i=1}^n \int_{B_i} f \, d\mu + \varepsilon(|a| + |b| + \varepsilon + 2\mu(K)) \\
&= \int_\Omega f \, d\mu + \varepsilon(|a| + |b| + \varepsilon + 2\mu(K)),
\end{aligned}$$

ce qui prouve (1.2.8), le paramètre $\varepsilon > 0$ étant arbitraire.

Etablissons enfin l'unicité. Soient μ_1 et μ_2 deux mesures de Radon positives satisfaisant la conclusion du théorème de représentation de Riesz. Par les propriétés de régularité (1.2.5) et (1.2.6), il suffit d'établir que $\mu_1(K) = \mu_2(K)$ pour tout compact $K \subset \Omega$. Soit $\varepsilon > 0$ et $K \subset \Omega$ un compact. D'après (1.2.5), il existe un ouvert V contenant K tel que $\mu_2(V) < \mu_2(K) + \varepsilon$. Par le Lemme d'Urysohn, on peut trouver une fonction $f \in \mathcal{C}_c(\Omega; [0,1])$ telle que $f = 1$ sur K et $\mathrm{Supp}(f) \subset V$ d'où $\chi_K \leq f \leq \chi_V$. Il vient alors

$$\mu_1(K) = \int_\Omega \chi_K \, d\mu_1 \leq \int_\Omega f \, d\mu_1 = L(f) = \int_\Omega f \, d\mu_2 \leq \int_\Omega \chi_V \, d\mu_2 = \mu_2(V) < \mu_2(K) + \varepsilon.$$

Donc $\mu_1(K) \leq \mu_2(K)$ et en échangeant les rôles de μ_1 et μ_2 on en déduit que cette inégalité et une égalité. $\square$

Pour étendre ce résultat à des formes linéaires non signées, il est nécessaire d'imposer une propriété de continuité. L'espace $\mathcal{C}_c(\Omega;\mathbb{R}^d)$ n'étant pas un Banach, il convient de le fermer pour la topologie de la norme uniforme sur $\overline{\Omega}$. On définit alors

$$\mathcal{C}_0(\Omega;\mathbb{R}^d) = \overline{\mathcal{C}_c(\Omega;\mathbb{R}^d)}^{\|\cdot\|_\infty}$$

qui est alors un espace de Banach séparable. Par ailleurs une fonction $f \in \mathcal{C}_0(\Omega;\mathbb{R}^d)$ si et seulement si $f : \Omega \to \mathbb{R}^d$ est continue et pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un compact $K_\varepsilon \subset \Omega$ tel que $|f| < \varepsilon$ sur $\Omega \setminus K_\varepsilon$ (f tend vers 0 sur le bord de Ω).

Définition 1.2.5. L'espace des mesures de Radon bornées sur Ω, noté $\mathcal{M}(\Omega;\mathbb{R}^d)$, est le dual topologique de l'espace de Banach $\mathcal{C}_0(\Omega;\mathbb{R}^d)$.

Grâce au théorème de représentation de Riesz (théorème 1.2.1), on peut caractériser l'espace des mesures de Radon bornées.

Théorème 1.2.6. *Pour tout $L \in \mathcal{M}(\Omega;\mathbb{R}^d)$, il existe une unique mesure de Radon vectorielle μ sur Ω telle que*

$$L(f) = \int_\Omega f \cdot d\mu := \sum_{j=1}^d \int_\Omega f_j \, d\mu_j \qquad \text{pour tout } f \in \mathcal{C}_0(\Omega;\mathbb{R}^d).$$

De plus, en notant $|\mu|$ la mesure variation de μ, on a

$$\|L\|_{\mathcal{M}(\Omega;\mathbb{R}^d)} = |\mu|(\Omega).$$

Commençons par établir que toute forme linéaire continue sur $\mathcal{C}_0(\Omega) = \mathcal{C}_0(\Omega;\mathbb{R})$ (pour $d = 1$) peut s'écrire comme la différence entre deux formes linéaires positives.

Lemme 1.2.7. *Pour tout $L \in \mathcal{M}(\Omega)$, il existe des formes linéaires continues positives L^+ et L^- sur $\mathcal{C}_0(\Omega)$ telles que*

$$L(f) = L^+(f) - L^-(f) \qquad \text{pour tout } f \in \mathcal{C}_0(\Omega).$$

Démonstration. Définissons le cône $\mathcal{C}^+ := \{f \in \mathcal{C}_0(\Omega) : \; f \geq 0 \text{ sur } \Omega\}$ et pour tout $f \in \mathcal{C}^+$,

$$L^+(f) := \sup\{L(g) : \; g \in \mathcal{C}^+, \, g \leq f\}.$$

Etape 1 : *L^+ est positive et finie sur $\mathcal{C}^+$.* Soit $f \in \mathcal{C}^+$, comme $0 \in \mathcal{C}^+$, on a $L^+(f) \geq 0$. Soit maintenant $g \in \mathcal{C}^+$ telle que $0 \leq g \leq f$. Par continuité de L, on a $L(g) \leq \|L\|_{\mathcal{M}(\Omega)}\|g\|_\infty \leq \|L\|_{\mathcal{M}(\Omega)}\|f\|_\infty$, et par passage au sup en g, on obtient que $0 \leq L^+(f) \leq \|L\|_{\mathcal{M}(\Omega)}\|f\|_\infty < \infty$.

Etape 2 : *L^+ est additive sur $\mathcal{C}^+$.* Soient f_1 et $f_2 \in \mathcal{C}^+$ et $g \in \mathcal{C}^+$ telles que $0 \leq g \leq f_1 + f_2$. On décompose g comme $g = \min(f_1, g) + \max(g - f_1, 0)$, où $\min(f_1, g) \leq f_1$ et $\max(g - f_1, 0) \leq f_2$. Comme $\min(f_1, g)$ et $\max(g - f_1, 0) \in \mathcal{C}^+$, alors

$$L(g) = L(\min(f_1, g)) + L(\max(g - f_1, 0)) \leq L^+(f_1) + L^+(f_2),$$

puis par passage au supremum en g,

$$L^+(f_1 + f_2) \leq L^+(f_1) + L^+(f_2).$$

Pour montrer l'autre inégalité, on se donne un $\varepsilon > 0$. Par définition de L^+, il existe g_1 et $g_2 \in \mathcal{C}^+$ tels que $0 \leq g_i \leq f_i$ et $L^+(f_i) \leq L(g_i) + \varepsilon$ pour $i = 1, 2$. Comme $0 \leq g_1 + g_2 \leq f_1 + f_2$, il s'ensuit que

$$L^+(f_1 + f_2) \geq L(g_1 + g_2) = L(g_1) + L(g_2) \geq L^+(f_1) + L^+(f_2) - 2\varepsilon,$$

et le résultat suit par passage à la limite quand $\varepsilon \to 0$.

Etape 3 : *Définition et additivité de L^+ sur $\mathcal{C}_0(\Omega)$.* Soit $f \in \mathcal{C}_0(\Omega)$, on décompose f comme la différence entre sa partie positive et négative $f = f^+ - f^-$ avec $f^\pm \in \mathcal{C}^+$. On pose alors $L^+(f) := L^+(f^+) - L^+(f^-)$. Si f et $g \in \mathcal{C}_0(\Omega)$, alors $(f+g)^+ - (f+g)^- = f^+ - f^- + g^+ - g^-$ de sorte que $(f+g)^+ + f^- + g^- = (f+g)^- + f^+ + g^+$. D'où, par additivité de L^+ sur $\mathcal{C}^+$,

$$L^+((f+g)^+) + L^+(f^-) + L^+(g^-) = L^+((f+g)^-) + L^+(f^+) + L^+(g^+),$$

et donc $L^+(f+g) = L^+(f) + L^+(g)$. En particulier, comme $(-f)^\pm = f^\mp$, alors $L^+(-f) = -L^+(f)$.

Etape 4 : *L^+ est continue sur $\mathcal{C}_0(\Omega)$.* Soit $f \in \mathcal{C}_0(\Omega)$. Comme L^+ est positive, alors $L^+(|f| \pm f) \geq 0$, donc par additivité de L^+ sur $\mathcal{C}_0(\Omega)$, $L^+(|f|) \geq \pm L^+(f)$, *i.e.*, $|L^+(f)| \leq L^+(|f|)$. Soient maintenant f_1 et $f_2 \in \mathcal{C}_0(\Omega)$, alors les étapes 3 et 1 impliquent que,

$$|L^+(f_1) - L^+(f_2)| = |L^+(f_1 - f_2)| \leq L^+(|f_1 - f_2|) \leq \|L\|_{\mathcal{M}(\Omega)} \|f_1 - f_2\|_\infty.$$

Etape 5 : *L^+ est une forme linéaire sur $\mathcal{C}_0(\Omega)$.* L'additivité de L^+ montre que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $L^+(nf) = nL^+(f)$. Comme $L^+(-f) = -L^+(f)$, l'identité précédente a en fait lieu pour $n \in \mathbb{Z}$. Si $r = p/q \in \mathbb{Q}$ avec $p, q \in \mathbb{Z}$ et $q \neq 0$, alors $pL^+(f) = L^+(pf) = L^+(qrf) = qL^+(rf)$, d'où $L^+(rf) = rL^+(f)$. La continuité de L^+ et la densité $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$ implique que $L^+(\alpha f) = \alpha L^+(f)$ pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$.

Etape 6 : *L^- est une forme linéaire continue positive sur $\mathcal{C}_0(\Omega)$.* On définit $L^- := L^+ - L$. Alors L^- est clairement une forme linéaire continue sur $\mathcal{C}_0(\Omega)$. De plus, par définition de L^+, $L^+(f) \geq L(f)$ pour tout $f \in \mathcal{C}^+$, ce qui montre que L^- est également positive. □

Démonstration du théorème 1.2.6. Si $d = 1$, d'après le Lemme 1.2.7, on peut décomposer $L \in \mathcal{M}(\Omega)$ comme $L = L^+ - L^-$ où $L^\pm$ sont des formes linéaires continues positives sur $\mathcal{C}_0(\Omega)$. D'après le théorème de représentation de Riesz, il existe deux mesures de Radon positives $\mu^\pm$ telles que

$$L^\pm(f) = \int_\Omega f \, d\mu^\pm \quad \text{pour tout } f \in \mathcal{C}_c(\Omega).$$

De plus, par définition de $\mu^\pm$ sur les ouverts (voir (1.2.4)) et par définition de la norme dans $\mathcal{M}(\Omega)$, on a

$$\mu^\pm(\Omega) = \sup_{f \in \mathcal{C}_c(\Omega;[0,1])} L^\pm(f) \leq \|L^\pm\|_{\mathcal{M}(\Omega)} < \infty,$$

ce qui montre que $\mu^\pm$ sont des mesures finies. Par conséquent, en posant $\mu := \mu^+ - \mu^-$, μ définit une mesure de réelle telle que

$$L(f) = \int_\Omega f \, d\mu \quad \text{pour tout } f \in \mathcal{C}_c(\Omega).$$

Cette inégalité peut être étendue à toute fonction $f \in \mathcal{C}_0(\Omega)$ par densité de $\mathcal{C}_c(\Omega)$ dans $\mathcal{C}_0(\Omega)$, par continuité de L et par convergence dominée.

Si $d \geq 2$, on applique l'argument précédent aux formes linéaires continues $f \in \mathcal{C}_0(\Omega) \mapsto L_j(f) := L(fe_j)$, pour tout $1 \leq j \leq d$, où e_j désigne le j-ième vecteur de la base canonique de $\mathbb{R}^d$. On montre alors l'existence de mesures de Radon réelles μ_j sur Ω telles que $L_j(f) = \int_\Omega f \, d\mu_j$ pour tout $f \in \mathcal{C}_0(\Omega)$. On pose alors $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_d)$ qui définit une mesure de Radon vectorielle et qui satisfait, pour tout $f \in \mathcal{C}_0(\Omega; \mathbb{R}^d)$

$$L(f) = L\left(\sum_{j=1}^d f_j e_j\right) = \sum_{j=1}^d L(f_j e_j) = \sum_{j=1}^d L_j(f_j) = \sum_{j=1}^d \int_\Omega f_j \, d\mu_j = \int_\Omega f \cdot d\mu.$$

Si $f \in \mathcal{C}_0(\Omega;\mathbb{R}^d)$ est telle que $\|f\|_\infty \le 1$, alors on a

$$|L(f)| \le \int_\Omega |f|\, d|\mu| \le |\mu|(\Omega),$$

puis par passage au supremum par rapport à f, $\|L\|_{\mathcal{M}(\Omega;\mathbb{R}^d)} \le |\mu|(\Omega)$. Réciproquement, soit $\{B_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ une partition Borélienne de Ω. On pose

$$f := \sum_{i\in\mathbb{N},\, |\mu(B_i)|>0} \frac{\mu(B_i)}{|\mu(B_i)|}\chi_{B_i}.$$

Comme $|\mu|$ est une mesure finie et $|f| \le 1$, on en déduit que $f \in L^1_{|\mu|}(\Omega;\mathbb{R}^d)$. Par densité de $\mathcal{C}_c(\Omega;\mathbb{R}^d)$ dans $L^1_{|\mu|}(\Omega;\mathbb{R}^d)$, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une fonction $g \in \mathcal{C}_c(\Omega;\mathbb{R}^d)$ telle que $|g| \le 1$ et $\int_\Omega |f-g|\, d|\mu| \le \varepsilon$. Par conséquent

$$\|L\|_{\mathcal{M}(\Omega;\mathbb{R}^d)} \ge \int_\Omega g \cdot d\mu \ge \int_\Omega f \cdot d\mu - \varepsilon = \sum_{i\in\mathbb{N}} |\mu(B_i)| - \varepsilon.$$

Par passage au supremum parmi toutes les partitions Boréliennes de Ω, il vient

$$\|L\|_{\mathcal{M}(\Omega;\mathbb{R}^d)} \ge |\mu|(\Omega) - \varepsilon,$$

ce qui implique, $\varepsilon > 0$ étant arbitraire, que $\|L\|_{\mathcal{M}(\Omega;\mathbb{R}^d)} \ge |\mu|(\Omega)$.

Concernant l'unicité, soient μ_1 et μ_2 deux mesures vectorielles telles que

$$\int_\Omega f\, d\mu_1 = \int_\Omega f\, d\mu_2 \quad \text{pour tout } f \in \mathcal{C}_c(\Omega).$$

On pose $\lambda := |\mu_1| + |\mu_2|$ et on considère un Borélien $A \subset \Omega$. Par densité de $\mathcal{C}_c(\Omega)$ dans $L^1_\lambda(\Omega)$, pour tout $\varepsilon > 0$ il existe une fonction $f_\varepsilon \in \mathcal{C}_c(\Omega)$ telle que

$$\int_\Omega |f_\varepsilon - \chi_A|\, d\lambda \le \varepsilon.$$

On en déduit alors que

$$\int_\Omega |f_\varepsilon - \chi_A|\, d|\mu_1| \le \varepsilon \quad \text{et} \quad \int_\Omega |f_\varepsilon - \chi_A|\, d|\mu_2| \le \varepsilon.$$

Par passage à la limite dans

$$\int_\Omega f_\varepsilon\, d\mu_1 = \int_\Omega f_\varepsilon\, d\mu_2$$

quand $\varepsilon \to 0$, on en déduit que $\mu_1(A) = \mu_2(A)$. □

1.3 Convergence de mesures

Le théorème de représentation de Riesz permet d'identifier le dual topologique de $\mathcal{C}_0(\Omega;\mathbb{R}^d)$, noté $\mathcal{M}(\Omega;\mathbb{R}^d)$, à l'ensemble des mesures de Radon vectorielles que nous appelerons dorénavant l'*espace des mesures de Radon bornées.* On définit également l'espace des mesures de Radon, $\mathcal{M}_{\mathrm{loc}}(\Omega;\mathbb{R}^d)$, comme l'ensemble des applications $\mu : \mathcal{B}(\Omega) \to \mathbb{R}^d$ telles que $\mu \in \mathcal{M}(\omega;\mathbb{R}^d)$ pour tout ouvert borné ω tel que $\overline{\omega} \subset \Omega$. Une variante du théorème de représentation de Riesz montre qu'on peut identifier l'espace $\mathcal{M}_{\mathrm{loc}}(\Omega;\mathbb{R}^d)$ aux distributions vectorielles d'ordre 0.

En tant qu'espace dual, on peut considérer la topologie faible* sur $\mathcal{M}(\Omega;\mathbb{R}^d)$.

Définition 1.3.1. (i) Une suite $\{\mu_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{M}(\Omega;\mathbb{R}^d)$ converge faible* vers $\mu \in \mathcal{M}(\Omega;\mathbb{R}^d)$ si

$$\int_\Omega \varphi \cdot d\mu_n \to \int_\Omega \varphi \cdot d\mu \quad \text{pour tout } \varphi \in \mathcal{C}_0(\Omega;\mathbb{R}^d).$$

(ii) Une suite $\{\mu_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{M}_{\text{loc}}(\Omega;\mathbb{R}^d)$ converge localement faible* vers $\mu \in \mathcal{M}_{\text{loc}}(\Omega;\mathbb{R}^d)$ si

$$\int_\Omega \varphi \cdot d\mu_n \to \int_\Omega \varphi \cdot d\mu \quad \text{pour tout } \varphi \in \mathcal{C}_c(\Omega;\mathbb{R}^d).$$

La norme étant faible* semi-continue inférieurement, il vient que si $\mu_n \rightharpoonup \mu$ faible* dans $\mathcal{M}(\Omega;\mathbb{R}^d)$, alors pour tout ouvert $U \subset \Omega$,

$$|\mu|(U) \le \liminf_{n\to\infty} |\mu_n|(U).$$

L'espace $\mathcal{C}_0(\Omega;\mathbb{R}^d)$ étant séparable, le résultat suivant provient d'une application immédiate du théorème de Banach-Alaoglu.

Théorème 1.3.2. *Soit $\{\mu_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ une suite bornée d'éléments de $\mathcal{M}(\Omega;\mathbb{R}^d)$. Alors, il existe une sous-suite $\{\mu_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ et $\mu \in \mathcal{M}(\Omega;\mathbb{R}^d)$ telles que $\mu_{n_k} \rightharpoonup \mu$ faible* dans $\mathcal{M}(\Omega;\mathbb{R}^d)$.*

Un exemple typique d'application du théorème de compacité précédent concerne les suites $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ bornée dans $L^1_\lambda(\Omega;\mathbb{R}^d)$, où λ est une mesure de Radon positive. L'espace $L^1_\lambda(\Omega;\mathbb{R}^d)$ étant non réflexif, on ne peut pas en général extraire de sous-suite faiblement convergente dans $L^1_\lambda(\Omega;\mathbb{R}^d)$. Néanmoins on peut définir la suite de mesures de Radon bornées $\mu_n = f_n\lambda \in \mathcal{M}(\Omega;\mathbb{R}^d)$. Comme

$$|\mu_n|(\Omega) = \int_\Omega |f_n|\, d\lambda \le C,$$

la suite $\{\mu_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée dans $\mathcal{M}(\Omega;\mathbb{R}^d)$ de sorte qu'on peut extraire une sous-suite faible* convergente dans $\mathcal{M}(\Omega;\mathbb{R}^d)$ vers une limite $\mu \in \mathcal{M}(\Omega;\mathbb{R}^d)$. En général, μ n'est pas absolument continue par rapport à λ.

Pour les suites de mesures positives, nous avons les conditions suivantes de semi continuité le long d'ouverts ou de compacts.

Proposition 1.3.3. *Si $\{\mu_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de mesures de Radon positives dans Ω qui converge localement faible* dans $\mathcal{M}_{\text{loc}}(\Omega)$ vers une mesure de Radon positive μ, alors*

$$\mu(U) \le \liminf_{n\to\infty} \mu_n(U) \quad \textit{pour tout ouvert } U \subset \Omega,$$

$$\limsup_{n\to\infty} \mu_n(K) \le \mu(K) \quad \textit{pour tout compact } K \subset \Omega,$$

et

$$\lim_{n\to\infty} \mu_n(E) = \mu(E) \quad \textit{pour tout Borélien borné } E \textit{ tel que } \overline{E} \subset \Omega \textit{ et } \mu(\partial E) = 0.$$

Démonstration. Soit $U \subset \Omega$ un ouvert et C un sous ensemble compact de U. On considère une fonction $\psi \in \mathcal{C}_c(\Omega)$ telle que $0 \le \psi \le 1$, $\psi = 1$ sur C et $\psi = 0$ sur $\Omega \setminus U$. Alors

$$\liminf_{n\to\infty} \mu_n(U) \ge \lim_{n\to\infty} \int_\Omega \psi\, d\mu_n = \int_\Omega \psi\, d\mu \ge \mu(C).$$

Le résultat s'obtient par passage au supremum parmi tous les compacts $C \subset U$ et par régularité intérieure de λ.

Si $K \subset \Omega$ est compact, par régularité extérieure de μ, pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un ouvert $V \subset \Omega$ tel que $K \subset V$ et $\mu(V) \leq \mu(K) + \varepsilon$. On peut trouver une fonction $\varphi \in \mathcal{C}_c(\Omega)$ telle que $0 \leq \varphi \leq 1$, $\varphi = 1$ sur K et $\varphi = 0$ sur $\Omega \setminus V$. Par conséquent

$$\limsup_{n\to\infty} \mu_n(K) \leq \lim_{n\to\infty} \int_\Omega \varphi \, d\mu_n = \int_\Omega \varphi \, d\mu \leq \mu(V) \leq \mu(K) + \varepsilon.$$

On obtient le résultat en faisant tendre $\varepsilon \to 0$.

Si $E \subset \Omega$ est un Borélien borné tel que $\overline{E} \subset \Omega$ et $\mu(\partial E) = 0$, alors

$$\mu(E) = \mu(\mathring{E}) \leq \liminf_{n\to\infty} \mu_n(\mathring{E}) \leq \liminf_{n\to\infty} \mu_n(E) \leq \limsup_{n\to\infty} \mu_n(E) \leq \liminf_{n\to\infty} \mu_n(\overline{E}) \leq \mu(\overline{E}) = \mu(E),$$

ce qui conclut la preuve de la proposition. □

Dans le cas d'une suite de mesures vectorielles, nous avons un analogue au dernier point de la Proposition 1.3.3.

Proposition 1.3.4. *Soit $\{\mu_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{M}(\Omega; \mathbb{R}^d)$ telle que $\mu_n \rightharpoonup \mu$ faible* dans $\mathcal{M}(\Omega; \mathbb{R}^d)$ et $|\mu_n| \rightharpoonup \lambda$ faible* dans $\mathcal{M}(\Omega)$ où $\mu \in \mathcal{M}(\Omega; \mathbb{R}^d)$ et $\lambda \in \mathcal{M}(\Omega)$ est une mesure positive. Alors $\lambda \geq |\mu|$ et si E est un Borélien borné tel que $\overline{E} \subset \Omega$ et $\lambda(\partial E) = 0$, alors*

$$\mu_n(E) \to \mu(E).$$

Démonstration. Soit U un ouvert borné tel que $\overline{U} \subset \Omega$. Pour $t > 0$ petit, on pose $U_t := \{x \in U : \operatorname{dist}(x, \partial U) > t\}$ de sorte que $\overline{U}_t \subset U$. Par semi-continuité inférieure de la variation, il vient, pour tout $t > 0$,

$$|\mu|(U_t) \leq \liminf_{n\to\infty} |\mu_n|(U_t) \leq \lambda(\overline{U}_t) \leq \lambda(U).$$

Par passage à la limite quand $t \to 0$, il vient que $|\mu|(U) \leq \lambda(U)$. Par régularité extérieure des mesures de Radon positives $|\mu|$ et λ, on en déduit que $|\mu| \leq \lambda$.

On écrit

$$\mu_n = (\mu_{n,1}, \ldots, \mu_{n,d}), \quad \mu = (\mu_1, \ldots, \mu_d)$$

et, pour tout $1 \leq i \leq d$, $\mu_{n,i} = \mu_{n,i}^+ - \mu_{n,i}^-$ avec $|\mu_{n,i}| = \mu_{n,i}^+ + \mu_{n,i}^-$. Quitte à extraire une sous-suite, il existe une mesure de Radon positive $\nu_i \in \mathcal{M}(\Omega)$ telle que $\mu_{n,i}^+ \rightharpoonup \nu_i$ faible* dans $\mathcal{M}(\Omega)$. De plus, comme $|\mu_n| \geq \mu_{n,i}^+$, il vient par passage à la limite que $\lambda \geq \nu_i$. En particulier, comme $\nu_i(\partial E) \leq \lambda(\partial E) = 0$, on en déduit de la Proposition (1.3.3) que

$$\mu_{n,i}^+(E) \to \nu_i(E). \tag{1.3.1}$$

De même, comme $\mu_{n,i}^- = \mu_{n,i}^+ - \mu_{n,i} \rightharpoonup \nu_i - \mu_i$ faible* dans $\mathcal{M}(\Omega)$ et $|\mu_n| \geq \mu_{n,i}^-$, on en déduit que $\lambda \geq \nu_i - \mu_i$ ce qui implique que

$$\mu_{n,i}^-(E) \to \nu_i(E) - \mu_i(E). \tag{1.3.2}$$

Le résultat suit en faisant la différence entre (1.3.1) et (1.3.2). □

Un outil important pour approcher les fonctions, distributions ou mesures est la convolution.

Définition 1.3.5. Soit $\mu \in \mathcal{M}(\Omega; \mathbb{R}^d)$ et $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ une fonction continue bornée. On définit la convolution de μ et f par la fonction

$$\mu * f(x) := \int_\Omega f(x - y) \, d\mu(y).$$

Une application importante est celle où $f = \eta_\varepsilon$ est une famille de noyaux de convolution de la forme

$$\eta_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon^N}\eta\left(\frac{x}{\varepsilon}\right), \quad x \in \mathbb{R}^N,$$

où $\eta \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ est une fonction positive, paire qui satisfait $\mathrm{Supp}(\eta) \subset \overline{B}_1(0)$ et $\int_{\mathbb{R}^N} \eta(y)\,dy = 1$.

Proposition 1.3.6. *Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un ouvert et $\mu \in \mathcal{M}(\Omega;\mathbb{R}^d)$. Pour $\varepsilon > 0$, on définit*

$$\mu * \eta_\varepsilon(x) = \int_\Omega \eta_\varepsilon(x-y)\,d\mu(y) = \varepsilon^{-N}\int_\Omega \eta\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right)d\mu(y)$$

pour $x \in \Omega_\varepsilon := \{z \in \Omega :\ \mathrm{dist}(z,\partial\Omega) > \varepsilon\}$. Alors

(a) $\mu * \eta_\varepsilon \in \mathcal{C}^\infty(\Omega_\varepsilon;\mathbb{R}^d)$ et $\partial^\alpha(\mu*\eta_\varepsilon) = \mu * (\partial^\alpha \eta_\varepsilon)$ pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^N$;

(b) La mesure $\mu_\varepsilon := (\mu*\eta_\varepsilon)\mathcal{L}^N$ convergence localement faible vers μ dans $\mathcal{M}_{\mathrm{loc}}(\Omega;\mathbb{R}^d)$ et*

$$|\mu_\varepsilon|(A) = \int_A |\mu*\eta_\varepsilon|(x)\,dx \le |\mu|(A + B_\varepsilon(0))$$

pour tout Borélien $A \subset \Omega_\varepsilon$.

Démonstration. (a) On calcule la limite du taux d'accroissement par passage à la limite sous le signe intégrale et convergence dominée, puis on raisonne par récurrence sur α.

(b) Soient $\varphi \in \mathcal{C}_c(\Omega)$ et $\varepsilon > 0$ assez petit tel que $\mathrm{Supp}(\varphi) \subset \Omega_\varepsilon$. A l'aide du théorème de Fubini et de la parité de η, on a

$$\begin{aligned}
\int_\Omega (\mu*\eta_\varepsilon)(x)\varphi(x)\,dx &= \int_\Omega \left(\int_\Omega \eta_\varepsilon(x-y)\,d\mu(y)\right)\varphi(x)\,dx \\
&= \int_\Omega \left(\int_\Omega \eta_\varepsilon(y-x)\varphi(x)\,dx\right)d\mu(y) \\
&= \int_\Omega \varphi*\eta_\varepsilon\,d\mu.
\end{aligned}$$

Comme φ est continue à support compact, $\varphi*\eta_\varepsilon \to \varphi$ uniformément sur Ω et donc, du fait que $|\mu|$ est une mesure finie,

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_\Omega (\mu*\eta_\varepsilon)(x)\varphi(x)\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_\Omega \varphi*\eta_\varepsilon\,d\mu = \int_\Omega \varphi\,d\mu,$$

ce qui montre $\mu_\varepsilon \rightharpoonup \mu$ localement faible* dans $\mathcal{M}_{\mathrm{loc}}(\Omega;\mathbb{R}^d)$. De plus, comme μ_ε est une mesure absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue, on a de nouveau par le théorème de Fubini

$$\begin{aligned}
|\mu_\varepsilon|(A) = \int_A |\mu*\eta_\varepsilon|(x)\,dx &\le \int_A\int_\Omega \eta_\varepsilon(x-y)\,d|\mu|(y)\,dx \\
&\le \int_\Omega\int_A \eta_\varepsilon(x-y)\,dx\,d|\mu|(y) \le \int_{A+B_\varepsilon(0)}\int_A \eta_\varepsilon(x-y)\,dx\,d|\mu|(y) \le |\mu|(A+B_\varepsilon(0)).
\end{aligned}$$

□

1.4 Différentiation de mesures

Dans la suite, nous allons considérer des familles $\mathcal{F}$ de boules fermées dans $\mathbb{R}^N$. Une telle famille $\mathcal{F}$ est un recouvrement de $A \subset \mathbb{R}^N$ si pour tout $x \in A$, il existe une boule $B \in \mathcal{F}$ centrée en x. Nous dirons que $\mathcal{F}$ est un recouvrement fin de A si, pour tout $x \in A$ et tout $\delta > 0$, il existe une boule $B \in \mathcal{F}$ centrée en x telle que $\mathrm{diam}(B) \leq \delta$.

On admet le résultat suivant (voir [1, Theorem 2.17]).

Théorème 1.4.1 (de recouvrement de Besicovitch). *Il existe un entier $\xi = \xi(N) \in \mathbb{N}$ qui ne dépend que de la dimension N avec la propriété suivante : soit $A \subset \mathbb{R}^N$ un ensemble borné et $\mathcal{F}$ un recrouvrement de A par des boules fermées et tel que*

$$\sup\{\mathrm{diam}(B),\ B \in \mathcal{F}\} < \infty.$$

Alors, il existe ξ sous-familles $\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_\xi$ de $\mathcal{F}$ telles que, pour tout $j \in \{1, \dots, \xi\}$, $\mathcal{F}_j$ est une famille dénombrable de boules deux à deux disjointes et

$$A \subset \bigcup_{j=1}^{\xi} \bigcup_{B \in \mathcal{F}_j} B.$$

Un corollaire du résultat précédent concerne les recouvrement d'un ensemble par une union dénombrable composée de boules fermées deux à deux disjointes à un ensemble de mesure μ près, où μ est une mesure de Radon arbitraire.

Corollaire 1.4.2. *Soit $A \subset \mathbb{R}^N$ un ensemble Borélien borné et $\mathcal{F}$ un recouvrement fin de A. Alors, pour toute mesure de Radon positive μ sur $\mathbb{R}^N$, il existe une sous famille $\mathcal{G}_\mu \subset \mathcal{F}$ dénombrable disjointe telle que*

$$\mu\left(A \setminus \bigcup_{B \in \mathcal{G}_\mu} B\right) = 0.$$

Démonstration. Soit $\xi \in \mathbb{N}$ donné par le théorème 1.4.1 et $\delta = 1 - 1/(2\xi)$. En posant $A_0 = A$, il existe ξ sous-familles $\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_\xi$ telles que, pour tout $j \in \{1, \dots, \xi\}$, $\mathcal{F}_j$ est une famille dénombrable composée de boules fermées deux à deux disjointes et

$$A_0 \subset \bigcup_{j=1}^{\xi} \bigcup_{B \in \mathcal{F}_j} B.$$

En particulier, il existe $i \in \{1, \dots, \xi\}$ tel que

$$\mu\left(A_0 \cap \bigcup_{B \in \mathcal{F}_i} B\right) \geq \frac{1}{\xi}\mu(A).$$

Comme $\mu(A_0) < \infty$, on peut donc trouver une sous famille finie $\mathcal{G}_1 \subset \mathcal{F}_1$ qui satisfait

$$\mu\left(A_0 \cap \bigcup_{B \in \mathcal{G}_1} B\right) \geq \frac{1}{2\xi}\mu(A_0).$$

On pose alors $A_1 := A_0 \setminus \bigcup_{B \in \mathcal{G}_1} B$ et on applique le même argument au recouvrement fin de A_1 donné par

$$\mathcal{F}' := \left\{B' \in \mathcal{F} :\ B' \cap \bigcup_{B \in \mathcal{G}_1} B = \emptyset\right\}$$

dont on extrait une sous-famille finie disjointe $\mathcal{G}_2$ telle que

$$\mu\left(A_1 \cap \bigcup_{B\in\mathcal{G}_2} B\right) \geq \frac{1}{2\xi}\mu(A_1).$$

En particulier, $\mathcal{G}_1 \cup \mathcal{G}_2$ est également finie et disjointe et, en posant $A_2 := A_1 \setminus \bigcup_{B\in\mathcal{G}_2} B$, on a $\mu(A_2) \leq \delta\mu(A_1)$.

Par récurrence, on construit pour tout $k \in \mathbb{N}$ un ensemble $A_{k+1} \subset A_k$ telle que $\mu(A_{k+1}) \leq \delta\mu(A_k)$ et une famille finie disjointe $\mathcal{G}_{k+1}$ telle que $\bigcup_{j=1}^{k+1} \mathcal{G}_j$ est disjointe et

$$A_{k+1} = A_k \setminus \bigcup_{B\in\mathcal{G}_{k+1}} B = \cdots = A \setminus \bigcup_{B\in\bigcup_{i=1}^{k+1}\mathcal{G}_i} B.$$

En particulier, comme $\mu(A_k) \to 0$ et la famille dénombrable et disjointe $\mathcal{G} = \bigcup_{k=1}^{\infty} \mathcal{G}_k$ satisfait

$$A \setminus \bigcup_{B\in\mathcal{G}} B \subset \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k,$$

on obtient effectivement que $\mu(A \setminus \bigcup_{B\in\mathcal{G}} B) = 0$. □

Si λ et μ sont deux mesures de Radon positives sur Ω, on définit pour $x \in \mathrm{Supp}(\lambda)$

$$D^+_\lambda\mu(x) := \limsup_{\varrho\to 0} \frac{\mu(B_\varrho(x))}{\lambda(B_\varrho(x))}, \quad D^-_\lambda\mu(x) := \liminf_{\varrho\to 0} \frac{\mu(B_\varrho(x))}{\lambda(B_\varrho(x))}.$$

Lemme 1.4.3. *Pour tout $\varrho > 0$, la fonction $x \in \Omega \mapsto \lambda(B_\varrho(x))$ est semi-continue inférieurement. Pour tout $x \in \Omega$, la fonction $\varrho \mapsto \lambda(B_\varrho(x))$ est continue à gauche.*

Démonstration. Soit $x_k \to x$, $f_k := \chi_{B_\varrho(x_k)}$ et $f = \chi_{B_\varrho(x)}$. Alors on a

$$\liminf_{k\to\infty} f_k(y) \geq f(y) \quad \text{pour tout } y \in \mathbb{R}^N.$$

Cette inégalité est immédiate si $y \notin B_\varrho(x)$. Si en revanche $y \in B_\varrho(x)$, alors $|x - y| < \varrho$, ce qui implique que $|x_k - y| < \varrho$ pour k assez grand. Par conséquent, le Lemme de Fatou implique que

$$\liminf_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}^N} f_k\, d\lambda \geq \int_{\mathbb{R}^N} f\, d\lambda,$$

ce qui montre effectivement que

$$\liminf_{k\to\infty} \lambda(B_\varrho(x_k)) \geq \lambda(B_\varrho(x)).$$

Soit $\varrho_k \nearrow \varrho$, alors la suite d'ensembles $\{B_{\varrho_k}(x)\}_{k\in\mathbb{N}}$ est croissante au sens de l'inclusion et $\bigcup_k B_{\varrho_k}(x) = B_\varrho(x)$. Par convergence monotone, on obtient alors que $\lambda(B_{\varrho_k}(x)) \to \lambda(B_\varrho(x)$. □

Le Lemme 1.4.3 montre que les fonctions $D^\pm_\lambda\mu$ sont Boréliennes sur Ω. De plus comme les boules ouvertes peuvent être approchées par l'intérieur par des boules fermées, les densités $D^\pm_\lambda\mu$ ne changent pas si l'on remplace les boules ouvertes par des boules fermées.

Proposition 1.4.4. *Soient λ et μ deux mesures de Radon positives sur Ω et $t \geq 0$. Pour tout Borélien $A \subset \mathrm{Supp}(\lambda)$, on a les deux implications suivantes :*

$$D^-_\lambda\mu(x) \leq t \quad \forall\, x \in A \implies \mu(A) \leq t\lambda(A); \tag{1.4.1}$$

$$D^+_\lambda\mu(x) \geq t \quad \forall\, x \in A \implies \mu(A) \geq t\lambda(A). \tag{1.4.2}$$

Démonstration. Montrons (1.4.1). Soit U un ouvert contenant A et $\varepsilon > 0$. Pour tout $x \in A$ et tout $\delta > 0$, il existe $\varrho(x) \in (0, \delta)$ tel que $\overline{B}_{\varrho(x)}(x) \subset U$ et

$$\mu(\overline{B}_{\varrho(x)}(x)) \leq (t + \varepsilon)\lambda(\overline{B}_{\varrho(x)}(x)).$$

On définit

$$\mathcal{F}_\varepsilon := \left\{\overline{B}_\varrho(x) : \ x \in A, \, \overline{B}_\varrho(x) \subset U, \, \mu(\overline{B}_\varrho(x)) \leq (t+\varepsilon)\lambda(\overline{B}_\varrho(x))\right\}.$$

Par hypothèse, $\mathcal{F}_\varepsilon$ est un recouvrement fin de A. Le théorème de recouvrement de Besicovitch montre alors l'existence sur sous-famille dénombrable et disjointe $\mathcal{F}'_\varepsilon := \{\overline{B}_i\}_{i \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{F}_\varepsilon$ telle que

$$\mu\left(A \setminus \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \overline{B}_i\right) = 0.$$

Par conséquent,

$$\mu(A) = \sum_{i=0}^{\infty} \mu(\overline{B}_i) \leq (t+\varepsilon) \sum_{i=0}^{\infty} \lambda(\overline{B}_i) = (t+\varepsilon)\lambda\left(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} \overline{B}_i\right) \leq (t+\varepsilon)\lambda(U).$$

Par passage à l'infimum parmi tous les ouverts U contenant A et en faisant tendre $\varepsilon \to 0$, on en déduit que $\mu(A) \leq t\lambda(A)$. La preuve de (1.4.2) est similaire. □

Théorème 1.4.5 (Différentiation de Besicovitch). *Soit λ une mesure de Radon positive sur Ω et $\mu \in \mathcal{M}(\Omega; \mathbb{R}^d)$. Alors pour λ-presque tout $x \in \mathrm{Supp}(\lambda)$, la limite*

$$f(x) := \lim_{\varrho \to 0} \frac{\mu(B_\varrho(x))}{\lambda(B_\varrho(x))}$$

existe dans $\mathbb{R}^d$. De plus la décomposition de Radon-Nikodým de μ est donnée par

$$\mu = f\lambda + \mu^s,$$

où $\mu^s = \mu \llcorner E$ et E est l'ensemble λ-négligeable

$$E = (\Omega \setminus \mathrm{Supp}(\lambda)) \cup \left\{x \in \Omega : \ \lim_{\varrho \to 0} \frac{|\mu|(B_\varrho(x))}{\lambda(B_\varrho(x))} = \infty\right\}.$$

Démonstration. En raisonnant sur chacune des composantes de μ et en décomposant chacune des composantes en la différence entre la partie positive et négative, on peut supposer sans restreindre la généralité que μ est une mesure positive finie.

D'après la Proposition 1.4.4,

$$\lambda(\{D^+_\lambda \mu = \infty\}) \leq \lambda(\{D^+_\lambda \mu \geq t\}) \leq \frac{1}{t}\mu(\{D^+_\lambda \mu \geq t\}) \leq \frac{1}{t}\mu(\Omega) \to 0 \quad \text{quand } t \to \infty,$$

de sorte que $0 \leq D^-_\lambda \mu \leq D^+_\lambda \mu < \infty$ λ-p.p. $x \in \Omega$. Par conséquent, $\lambda(E) = 0$. On pose $F := \Omega \setminus E$ et nous allons montrer que $D^+_\lambda \mu = D^-_\lambda \mu$ λ-p.p. dans Ω. Pour ce faire, on définit pour tout Borélien $A \subset \Omega$,

$$\nu^\pm(A) = \int_A D^\pm_\lambda \mu(x) \, d\lambda(x).$$

Pour tout Borélien $A \subset F$, tout $t > 1$ et tout $n \in \mathbb{Z}$, on introduit

$$A_n = \{x \in A : \ D^+_\lambda \mu(x) \in (t^n, t^{n+1}]\}$$

de sorte que $\bigcup_n A_n = A \cap \{D_\lambda^+ \mu > 0\}$. D'après la Proposition 1.4.4,

$$\nu^+(A_n) \leq t^{n+1}\lambda(A_n) \leq t\mu(A_n),$$

puis en sommant pour $n \in \mathbb{Z}$, on obtient que $\nu^+(A) \leq t\mu(A)$. Par passage à la limite quand $t \to 1$, il vient $\nu^+(A) \leq \mu(A)$ et on montre de même que $\mu(A) \leq \nu^-(A)$ en utilisant le fait que, par la Proposition 1.4.4, on a $\mu(\{D_\lambda^- \mu = 0\}) = 0$. Par conséquent

$$\nu^+ = \nu^- = \mu \llcorner F,$$

ce qui montre que $f := D_\lambda^+ \mu = D_\lambda^- \mu$ λ-p.p. dans Ω et que $\mu \llcorner F = f\lambda$. □

Corollaire 1.4.6 (Points de Lebesgue). *Soit λ une mesure de Radon positive sur un ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ et $f \in L^1_\lambda(\Omega; \mathbb{R}^d)$. Alors, pour λ-presque tout $x \in \Omega$, on a*

$$\lim_{\varrho \to 0} \frac{1}{\lambda(B_\varrho(x))} \int_{B_\varrho(x)} |f(y) - f(x)|\, d\lambda(y) = 0.$$

Démonstration. On applique le théorème de différentiation de Besicovitch à la mesure $\mu = |f - q|\lambda$ où $q \in \mathbb{Q}$, ce qui montre l'existence d'un ensemble Borélien E_q λ-négligeable (et donc aussi μ-négligeable) tel que pour tout $x \in \Omega \setminus E_q$,

$$\lim_{\varrho \to 0} \frac{1}{\lambda(B_\varrho(x))} \int_{B_\varrho(x)} |f(y) - q|\, d\lambda(y) = |f(x) - q|.$$

On pose $E := \bigcup_{q \in \mathbb{Q}} E_q$ qui est un Borélien λ-négligeable de Ω. Pour tout $x \in \Omega \setminus E$ et tout $q \in \mathbb{Q}$, on a alors

$$\begin{aligned} \limsup_{\varrho \to 0} \frac{1}{\lambda(B_\varrho(x))} \int_{B_\varrho(x)} |f(y) - f(x)|\, d\lambda(y) &\leq \lim_{\varrho \to 0} \frac{1}{\lambda(B_\varrho(x))} \int_{B_\varrho(x)} |f(y) - q|\, d\lambda(y) + |f(x) - q| \\ &\leq 2|f(x) - q|. \end{aligned}$$

Par densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$, on peut faire tendre $q \to f(x)$, ce qui implique le résultat. □

Corollaire 1.4.7 (Décomposition polaire d'une mesure vectorielle). *Soit $\mu \in \mathcal{M}(\Omega; \mathbb{R}^d)$. Alors il existe une fonction $f \in L^1_{|\mu|}(\Omega; \mathbb{R}^d)$ telle que*

$$\mu = f|\mu|, \quad |f(x)| = 1 \ |\mu|\text{-presque pour tout } x \in \Omega.$$

Démonstration. On applique le théorème de différentiation de Besicovitch à la mesure $\lambda = |\mu|$. Dans ce cas, $E = \Omega \setminus \mathrm{Supp}(|\mu|)$ et comme $|\mu(E)| \leq |\mu|(E) = 0$, on en déduit que $\mu = f|\mu|$ où, pour $|\mu|$-presque tout $x \in \Omega$,

$$f(x) := \lim_{\varrho \to 0} \frac{\mu(B_\varrho(x))}{|\mu|(B_\varrho(x))}.$$

Comme $|\mu(B_\varrho(x))| \leq |\mu|(B_\varrho(x))$, on a toujours l'inégalité $|f(x)| \leq 1$ pour $|\mu|$-presque tout $x \in \Omega$. Par ailleurs, d'après la Proposition 1.1.9, on a $|\mu| = |f||\mu|$ ce qui implique que

$$\int_\Omega (1 - |f|)\, d|\mu| = 0.$$

On en déduit alors que $|f| = 1$ $|\mu|$-p.p. dans Ω. □

Chapitre 2

Fonctions à variation bornée

2.1 Définition et exemples

Définition 2.1.1. Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un ouvert. L'espace $BV(\Omega)$ des *fonctions à variation bornée* dans Ω est l'ensemble des fonctions $f \in L^1(\Omega)$ telles qu'il existe une mesure de Radon bornée $\mu \in \mathcal{M}(\Omega; \mathbb{R}^N)$ satisfaisant

$$\int_\Omega u \,\mathrm{div}\varphi \, dx = -\int_\Omega \varphi \cdot d\mu \quad \text{pour tout } \varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega; \mathbb{R}^N).$$

En d'autres termes, la dérivée distributionnelle Du de u peut être représentée par une mesure de Radon bornée. On identifiera systématiquement Du et μ et on écrira que $Du \in \mathcal{M}(\Omega; \mathbb{R}^N)$. La variation totale de u est alors donnée par

$$|Du|(\Omega) = \sup \left\{ \int_\Omega u \,\mathrm{div}\varphi \, dx : \ \varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega; \mathbb{R}^N), \ |\varphi| \leq 1 \right\}.$$

De manière générale, on peut définir la variation totale de toute fonction $u \in L^1(\Omega)$ par

$$TV(u, \Omega) := \sup \left\{ \int_\Omega u \,\mathrm{div}\varphi \, dx : \ \varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega; \mathbb{R}^N), \ |\varphi| \leq 1 \right\},$$

cette quantité pouvant éventuellement être infinie. Une application immédiate du théorème de représentation de Riesz montre alors qu'une fonction $u \in L^1(\Omega)$ appartient à $BV(\Omega)$ si et seulement si $TV(u, \Omega) < \infty$.

On vérifie aisément le résultat suivant.

Proposition 2.1.2. *L'espace $BV(\Omega)$ a une structure d'espace de Banach lorsqu'on le munit de la norme*

$$\|u\|_{BV(\Omega)} := \|u\|_{L^1(\Omega)} + |Du|(\Omega).$$

Exemple 2.1.3. (i) L'espace de Sobolev $W^{1,1}(\Omega)$ est contenu dans $BV(\Omega)$. De plus, si $u \in W^{1,1}(\Omega)$, alors $Du = \nabla u \mathcal{L}^N$ et

$$|Du|(\Omega) = \int_\Omega |\nabla u| \, dx,$$

où $\nabla u \in L^1(\Omega; \mathbb{R}^N)$ est la dérivée faible de u. En effet, pour tout $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega; \mathbb{R}^N)$, on a par définition de $W^{1,1}(\Omega)$ que

$$\int_\Omega u \,\mathrm{div}\varphi \, dx = -\int_\Omega \varphi \cdot \nabla u \, dx$$

de sorte que $Du = \nabla u \mathcal{L}^N$. Une application directe de la Proposition 1.1.9 montre alors que $|Du| = |\nabla u| \mathcal{L}^N$.

(ii) L'inclusion de $W^{1,1}(\Omega)$ dans $BV(\Omega)$ est stricte. En effet, si $N = 1$ et $\Omega = (-1, 1)$, on considère la fonction caractéristique $u = \chi_{(0,1)} \in L^1(-1, 1) \setminus W^{1,1}(-1, 1)$. Or, le calcul de sa dérivée distributionnelle montre que

$$Du = \delta_0 \in \mathcal{M}(-1, 1)$$

et donc que $u \in BV(-1, 1)$.

L'exemple précédent est un cas particulier d'ensemble de périmètre fini que nous étudierons en détail au chapitre 4. Un troisième exemple de fonction à variation bornée concerne les fonctions ayant des singularités concentrées sur un ensemble diffus de type Cantor. Pour voir cela, nous allons étudier le cas de fonctions d'une seule variable.

Exemple 2.1.4. Soit $u : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction croissante et intégrable. Alors, $u \in BV(a, b)$ et $|Du|((a, b)) \leq u(b) - u(a)$.

En effet, quitte à étendre u par $u(a)$ sur $(-\infty, a)$ et $u(b)$ sur $(b, +\infty)$, on peut supposer que u est croissante (et localement intégrable) sur $\mathbb{R}$. Soit η_ε un noyau régularisant, on pose $u_\varepsilon := u * \eta_\varepsilon$ de sorte que u_ε est $\mathcal{C}^\infty$ et croissante sur $\mathbb{R}$. D'une part, on a

$$\int_a^b u_\varepsilon' \, dx = u_\varepsilon(b) - u_\varepsilon(a) = \int_{\mathbb{R}} [u(b - s) - u(a - s)] \eta_\varepsilon(s) \, ds \leq u(b) - u(a).$$

D'autre part, pour tout $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(a, b)$ avec $|\varphi| \leq 1$ et tout $\varepsilon > 0$ assez petit

$$\int_a^b u_\varepsilon \varphi' \, dx = \int_a^b u_\varepsilon' \varphi \, dx \leq \int_a^b u_\varepsilon' \, dx,$$

ce qui montre que

$$\int_a^b u_\varepsilon \varphi' \, dx \leq u(b) - u(a).$$

Par passage à la limite quand $\varepsilon \to 0$, on obtient que

$$\int_a^b u \varphi' \, dx \leq u(b) - u(a),$$

puis, par passage au supremum parmi toutes les fonctions test, il vient $|Du|((a, b)) \leq u(b) - u(a)$.

Un exemple important est celui de la fonction de Cantor-Vitali (encore connue sous le nom de l'escalier du diable) représente un dernier exemple de fonction BV. Il s'agit d'une fonction continue croissante dont la dérivé ponctuelle s'annule $\mathcal{L}^1$-presque partout (en fait en dehors de l'ensemble triadique de Cantor). Dans cet exemple, la dérivée distributionnelle est une mesure diffuse concentrée sur l'ensemble triadique de Cantor qui s'avère être un ensemble de dimension de Hausdorff $\ln 2 / \ln 3 \in (0, 1)$.

La variation totale jouit d'une propriété de semicontinuité inférieure.

Proposition 2.1.5. *Soit $\{u_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ une suite dans $L^1(\Omega)$ et $u \in L^1(\Omega)$ telles que $u_k \to u$ dans $L^1(\Omega)$. Alors*

$$TV(u, \Omega) \leq \liminf_{k \to \infty} TV(u_k, \Omega).$$

Démonstration. Pour toute fonction test $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega; \mathbb{R}^N)$ telle que $|\varphi| \leq 1$, on a

$$\int_\Omega u \operatorname{div} \varphi \, dx = \lim_{k \to \infty} \int_\Omega u_k \operatorname{div} \varphi \, dx \leq \liminf_{k \to \infty} TV(u_k, \Omega).$$

Par passage au supremum parmi toutes les fonctions tests, on obtient le résultat escompté. □

2.2 Approximation par des fonctions régulières

La topologie forte de BV est une topologie trop restrictive pour espérer avoir la densité des fonctions lisses dans cet espace. En effet si $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite de fonctions régulières qui approche dans $BV(\Omega)$ une fonction $u \in BV(\Omega)\setminus W^{1,1}(\Omega)$, alors $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans $BV(\Omega)$ et donc également dans $W^{1,1}(\Omega)$. Par complétude de $W^{1,1}(\Omega)$ on aurait alors que $u_k \to v$ dans $W^{1,1}(\Omega)$ puis, par unicité de la limite (au sens des distributions) $u = v \in W^{1,1}(\Omega)$ ce qui est absurde.

Il convient alors d'affaiblir le mode d'approximation. C'est l'objet du résultat suivant qui sera central dans la suite de ce cours.

Théorème 2.2.1 (**Anzellotti-Giaquinta).** *Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un ouvert et soit $u \in BV(\Omega)$. Alors il existe une suite $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ de fonctions dans $\mathcal{C}^\infty(\Omega)\cap BV(\Omega)$ telle que*

1. *$u_k \to u$ fortement dans $L^1(\Omega)$;*
2. *$Du_k \rightharpoonup Du$ faible* dans $\mathcal{M}(\Omega;\mathbb{R}^N)$;*
3. *$|Du_k|(\Omega) \to |Du|(\Omega)$.*

Démonstration. On commence par le cas où $\Omega = \mathbb{R}^N$. On considère un noyau régularisant η_{ε_k} et on pose $u_k := u * \eta_{\varepsilon_k} \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^N)$. On sait par les propriétés classiques de la convolution que $u_k \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^N)$, $u_k \to u$ dans $L^1(\mathbb{R}^N)$ et, par semicontinuité inférieure de la variation totale,

$$|Du|(\mathbb{R}^N) \le \liminf_{k\to\infty} TV(u_k,\mathbb{R}^N).$$

Par ailleurs, comme pour tout $\varphi \in \mathcal{C}^1_c(\mathbb{R}^N;\mathbb{R}^N)$, on a

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^N} u_k \,\mathrm{div}\varphi\, dx = \int_{\mathbb{R}^N} (u*\eta_{\varepsilon_k})\,\mathrm{div}\varphi\, dx = \int_{\mathbb{R}^N} u[(\mathrm{div}\varphi)*\eta_{\varepsilon_k}]\, dx \\ = \int_{\mathbb{R}^N} u\,\mathrm{div}(\varphi*\eta_{\varepsilon_k})\, dx = -\int_{\mathbb{R}^N} \varphi*\eta_{\varepsilon_k}\cdot dDu = -\int_{\mathbb{R}^N} \varphi\cdot(Du*\eta_{\varepsilon_k})\, dx,\end{aligned}$$

alors $\nabla u_k = (Du)*\eta_{\varepsilon_k}$. D'après la Proposition 1.3.6, $Du_k \rightharpoonup Du$ localement faiblement dans $\mathcal{M}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^N;\mathbb{R}^N)$ et

$$TV(u_k,\mathbb{R}^N) \le |Du|(\mathbb{R}^N).$$

Ceci implique que $\{Du_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ est bornée dans $\mathcal{M}(\mathbb{R}^N;\mathbb{R}^N)$, en particulier $u_k \in BV(\mathbb{R}^N)$, ce qui montre que $Du_k \rightharpoonup Du$ faible* dans $\mathcal{M}(\mathbb{R}^N;\mathbb{R}^N)$ ainsi que

$$\limsup_{k\to\infty} |Du_k|(\mathbb{R}^N) \le |Du|(\mathbb{R}^N),$$

ce qui conclut la preuve du théorème dans le cas de tout l'espace.

Cas d'un ouvert général. Soient $k \ge 1$ et $\{\Omega_i\}_{i\ge 1}$ une suite croissante d'ouverts bornés tels que $\overline{\Omega}_i \subset \Omega_{i+1}$, $\bigcup_i \Omega_i = \Omega$ et $|Du|(\Omega\setminus\Omega_1) \le 1/4k$, on pose

$$A_1 := \Omega_2, \quad A_i := \Omega_{i+1}\setminus\overline{\Omega}_{i-1} \text{ pour tout } i \ge 2.$$

On a alors que A_i est ouvert pour tout $i \ge 1$ et $\Omega = \bigcup_i A_i$. Comme ce recouvrement de A_i est localement fini, on peut considérer une partition de l'unité $\theta_i \in \mathcal{C}^\infty_c(A_i)$ telle que $0 \le \theta_i \le 1$ et $\sum_{i=1}^\infty \theta_i = 1$ sur Ω.

Pour tout $i \ge 1$, on choisit $\varepsilon_i > 0$ assez petit de sorte que $\mathrm{Supp}((\theta_i u)*\eta_{\varepsilon_i}) \subset A_i$ et

$$\int_\Omega |(\theta_i u)*\eta_{\varepsilon_i} - \theta_i u|\, dx \le \frac{1}{k2^i} \tag{2.2.1}$$

$$\int_\Omega |(u\nabla\theta_i)*\eta_{\varepsilon_i} - u\nabla\theta_i|\, dx \le \frac{1}{k2^{i+1}}. \tag{2.2.2}$$

On pose alors

$$u_k := \sum_{i=1}^{\infty} (\theta_i u) * \eta_{\varepsilon_i}$$

ce qui définit une fonction $\mathcal{C}^\infty(\Omega)$ du fait que la somme est localement finie. D'une part, comme $u = \sum_{i=1}^{\infty} \theta_i u$, on a d'après (2.2.1)

$$\int_\Omega |u_k - u| \, dx \le \sum_{i=1}^{\infty} \int_\Omega |(\theta_i u) * \eta_{\varepsilon_i} - \theta_i u| \, dx \le \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{k 2^i} = \frac{1}{k} \to 0,$$

ce qui montre que $u_k \to u$ dans $L^1(\Omega)$ et, en particulier, par semicontinuité inférieure de la variation totale, que

$$|Du|(\Omega) \le \liminf_{k\to\infty} TV(u_k, \Omega).$$

On montre maintenant l'autre inégalité. Pour tout $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega; \mathbb{R}^N)$ telle que $|\varphi| \le 1$,

$$\begin{aligned}
\int_\Omega u_k \operatorname{div}\varphi \, dx &= \sum_{i=1}^{\infty} \int_\Omega (\theta_i u) * \eta_{\varepsilon_i} \operatorname{div}\varphi \, dx \\
&= \sum_{i=1}^{\infty} \int_\Omega \theta_i u [(\operatorname{div}\varphi) * \eta_{\varepsilon_i}] \, dx \\
&= \sum_{i=1}^{\infty} \int_\Omega \theta_i u \operatorname{div}(\varphi * \eta_{\varepsilon_i}) \, dx \\
&= \sum_{i=2}^{\infty} \int_\Omega u \operatorname{div}(\theta_i(\varphi * \eta_{\varepsilon_i})) \, dx - \sum_{i=1}^{\infty} \int_\Omega u \nabla\theta_i \cdot (\varphi * \eta_{\varepsilon_i}) \, dx \\
&\quad + \int_\Omega u \operatorname{div}(\theta_1(\varphi * \eta_{\varepsilon_1})) \, dx. \qquad (2.2.3)
\end{aligned}$$

Comme $\theta_1(\varphi * \eta_{\varepsilon_1}) \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega; \mathbb{R}^N)$ satisfait $|\theta_1(\varphi * \eta_{\varepsilon_1})| \le 1$, alors

$$\int_\Omega u \operatorname{div}(\theta_1(\varphi * \eta_{\varepsilon_1})) \, dx \le |Du|(\Omega). \qquad (2.2.4)$$

D'autre par, pour $i \ge 2$, on a $\theta_i(\varphi * \eta_{\varepsilon_i}) \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega; \mathbb{R}^N)$, $|\theta_i(\varphi * \eta_{\varepsilon_i})| \le 1$ et $\operatorname{Supp}(\theta_i(\varphi * \eta_{\varepsilon_i})) \subset A_i$. Par conséquent,

$$\int_\Omega u \operatorname{div}(\theta_i(\varphi * \eta_{\varepsilon_i})) \, dx \le |Du|(A_i) \le |Du|(\Omega_{i+1}) - |Du|(\Omega_{i-1}),$$

puis, en sommant pour $i \ge 2$,

$$\sum_{i=2}^{\infty} \int_\Omega u \operatorname{div}(\theta_i(\varphi * \eta_{\varepsilon_i})) \, dx \le 2|Du|(\Omega \setminus \Omega_1) \le \frac{1}{2k}. \qquad (2.2.5)$$

Enfin, en utilisant le fait que $\sum_{i\ge 1} \nabla\theta_i = 1$, il vient

$$\begin{aligned}
\left| \sum_{i=1}^{\infty} \int_\Omega u \nabla\theta_i \cdot (\varphi * \eta_{\varepsilon_i}) \, dx \right| &= \left| \sum_{i=1}^{\infty} \int_\Omega [(u\nabla\theta_i) * \eta_{\varepsilon_i} \cdot \varphi - u \nabla\theta_i \cdot \varphi] \, dx \right| \\
&\le \sum_{i=1}^{\infty} \int_\Omega |(u\nabla\theta_i) * \eta_{\varepsilon_i}) - u\nabla\theta_i| \, dx \\
&\le \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{k 2^{i+1}} = \frac{1}{2k}, \qquad (2.2.6)
\end{aligned}$$

où l'on a utilisé (2.2.2) dans la dernière inégalité. En regroupant (2.2.3)–(2.2.6), on obtient que

$$\int_\Omega u_k \,\mathrm{div}\varphi\, dx \le |Du|(\Omega) + \frac{1}{k}.$$

Par passage au supremum parmi toutes les fonctions test φ, on en déduit que

$$TV(u_k, \Omega) \le |Du|(\Omega) + \frac{1}{k} < \infty,$$

ce qui montre, à la fois que $u_k \in BV(\Omega)$ avec $|Du_k|(\Omega) = TV(u_k, \Omega) \le |Du|(\Omega) + \frac{1}{k}$. En particulier, la suite $\{Du_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ est bornée dans $\mathcal{M}(\Omega;\mathbb{R}^N)$ et donc $Du_k \rightharpoonup Du$ faible* dans $\mathcal{M}(\Omega;\mathbb{R}^N)$. Enfin, on a bien que $\limsup_k |Du_k|(\Omega) \le |Du|(\Omega)$, ce qui conclut la preuve du théorème. □

Notons que la suite approximante n'est pas régulière jusque sur le bord. Si toutefois le bord est régulier, le résultat peut être améliorer tout comme dans les espaces de Sobolev.

Théorème 2.2.2. *Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un ouvert borné de de frontière Lipschitz et soit $u \in BV(\Omega)$. Alors il existe une suite $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ de fonctions dans $\mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega})$ telle que*

1. *$u_k \to u$ fortement dans $L^1(\Omega)$;*
2. *$Du_k \rightharpoonup Du$ faible* dans $\mathcal{M}(\Omega;\mathbb{R}^N)$;*
3. *$|Du_k|(\Omega) \to |Du|(\Omega)$.*

Démonstration. D'après le Théorème d'Anzellotti-Giaquinta, il existe une suite une suite $\{v_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ de fonctions dans $\mathcal{C}^\infty(\Omega) \cap BV(\Omega) \subset W^{1,1}(\Omega)$ telle que $v_k \to u$ fortement dans $L^1(\Omega)$, $Dv_k \rightharpoonup Du$ faible* dans $\mathcal{M}(\Omega;\mathbb{R}^N)$ et $|Dv_k|(\Omega) \to |Du|(\Omega)$. L'ouvert Ω étant Lipschitzien, l'espace $\mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega})$ est dense dans $W^{1,1}(\Omega)$. Pour tout $k \ge 1$, il existe donc une fonction $u_k \in \mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega})$ telle que

$$\|u_k - v_k\|_{W^{1,1}(\Omega)} \le \frac{1}{k}.$$

En particulier, $u_k \to u$ dans $L^1(\Omega)$ et comme $||Du_k|(\Omega) - |Dv_k|(\Omega)| \le \frac{1}{k} \to 0$, on en déduit que $|Du_k|(\Omega) \to |Du|(\Omega)$. Enfin, comme la suite $\{\nabla u_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ est bornée dans $L^1(\Omega;\mathbb{R}^N)$, on a $Du_k = \nabla u_k \mathcal{L}^N \rightharpoonup Du$ faible* dans $\mathcal{M}(\Omega;\mathbb{R}^N)$. □

2.3 Théorèmes d'injection

Tout comme dans les espaces de Sobolev, les fonctions à variation bornée possèdent de meilleures propriétés d'intégrabilité.

Théorème 2.3.1 (Injection de Sobolev dans $\mathbb{R}^N$). *Il existe une constante $\gamma_N > 0$, qui ne dépend que de la dimension, telle que pour tout $u \in BV(\mathbb{R}^N)$,*

$$\|u\|_{L^{\frac{N}{N-1}}(\mathbb{R}^N)} \le \gamma_N |Du|(\mathbb{R}^N).$$

Démonstration. Soit $u_\varepsilon := u * \eta_\varepsilon \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^N) \cap BV(\mathbb{R}^N) \subset W^{1,1}(\mathbb{R}^N)$. D'après le théorème d'injection de Sobolev pour l'espace $W^{1,1}(\mathbb{R}^N)$, il existe une constante $\gamma_N > 0$ telle que

$$\|u_\varepsilon\|_{L^{\frac{N}{N-1}}(\mathbb{R}^N)} \le \gamma_N \|\nabla u_\varepsilon\|_{L^1(\mathbb{R}^N)}.$$

Comme $u_\varepsilon \to u$ dans $L^1(\mathbb{R}^N)$, il existe une sous-suite telle que $u_\varepsilon \to u$ $\mathcal{L}^N$-p.p. dans $\mathbb{R}^N$. Par ailleurs, comme $\nabla u_\varepsilon = (Du) * \eta_\varepsilon$, la Proposition 1.3.6 montre que $\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_\varepsilon|\, dx \le |Du|(\mathbb{R}^N)$. Par passage à la limite quand $\varepsilon \to 0$ et en utilisant le Lemme de Fatou, on obtient que

$$\|u\|_{L^{\frac{N}{N-1}}(\mathbb{R}^N)} \le \liminf_{\varepsilon\to 0} \|u_\varepsilon\|_{L^{\frac{N}{N-1}}(\mathbb{R}^N)} \le \gamma_N \liminf_{\varepsilon\to 0} \|\nabla u_\varepsilon\|_{L^1(\mathbb{R}^N)} \le \gamma_N |Du|(\mathbb{R}^N),$$

ce qui termine la preuve du résultat. □

Sur un domaine borné, nous avons le résultat suivant.

Théorème 2.3.2 (**Injection de Sobolev dans un domaine borné**). *Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un ouvert borné de frontière Lipschitz. Il existe une constante $C > 0$, qui ne dépend que de la dimension N et de Ω, telle que pour tout $u \in BV(\Omega)$,*

$$\|u\|_{L^{\frac{N}{N-1}}(\Omega)} \le C\|u\|_{BV(\Omega)}.$$

Démonstration. Soit $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ une suite dans $\mathcal{C}^\infty(\Omega) \cap BV(\Omega) \subset W^{1,1}(\Omega)$ telle que $u_k \to u$ dans $L^1(\Omega)$ et $|Du_k|(\Omega) \to |Du|(\Omega)$. Quitte à extraire une sous-suite, on peut également supposer que $u_k \to u$ $\mathcal{L}^N$-p.p. dans Ω. D'après le théorème d'injection de Sobolev pour l'espace $W^{1,1}(\Omega)$, il existe une constante $C > 0$, qui ne dépend que de N et Ω, telle que

$$\|u_k\|_{L^{\frac{N}{N-1}}(\Omega)} \le C\|u_k\|_{W^{1,1}(\Omega)}.$$

Par passage à la limite quand $k \to \infty$ et en utilisant le Lemme de Fatou, on obtient que

$$\|u\|_{L^{\frac{N}{N-1}}(\Omega)} \le \liminf_{k\to\infty} \|u_k\|_{L^{\frac{N}{N-1}}(\Omega)} \le C \liminf_{k\to\infty} \|u_k\|_{W^{1,1}(\Omega)} = C\|u\|_{BV(\Omega)},$$

ce qui termine la preuve du résultat. □

Nous avons également un analogue du théorème de compacité.

Théorème 2.3.3 (**Rellich**). *Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un ouvert borné de frontière Lipschitz. Pour tout $1 \le p < N/(N-1)$, l'injection $BV(\Omega) \subset L^p(\Omega)$ est compacte. En particulier, de toute suite bornée $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ dans $BV(\Omega)$, on peut extraire une sous-suite $\{u_{k_j}\}_{j\in\mathbb{N}}$ telle que $u_{k_j} \to u$ fortement dans $L^1(\Omega)$ et $Du_{k_j} \rightharpoonup Du$ faible* dans $\mathcal{M}(\Omega;\mathbb{R}^N)$ avec $u \in BV(\Omega)$.*

Démonstration. Soit $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ une suite bornée dans $BV(\Omega)$. D'après le théorème d'approximation d'Anzellotti-Giaquinta, pour tout $k \in \mathbb{N}$, il existe une fonction $v_k \in \mathcal{C}^\infty(\Omega) \cap BV(\Omega)$ telle que

$$\|u_k - v_k\|_{L^1(\Omega)} + ||Du_k|(\Omega) - |Dv_k|(\Omega)| \le \frac{1}{k}.$$

En particulier, la suite $\{v_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ est bornée dans $W^{1,1}(\Omega)$ et le théorème de Rellich (pour $W^{1,1}(\Omega)$) montre l'existence d'une sous-suite $\{v_{k_j}\}_{j\in\mathbb{N}}$ qui converge dans $L^1(\Omega)$ vers une fonction $u \in L^1(\Omega)$. Il vient alors que $u_{k_j} \to u$ dans $L^1(\Omega)$ et comme $\{Du_{k_j}\}_{j\in\mathbb{N}}$ est bornée dans $\mathcal{M}(\Omega;\mathbb{R}^N)$, alors $Du_{k_j} \rightharpoonup Du$ faible* dans $\mathcal{M}(\Omega;\mathbb{R}^N)$ avec $u \in BV(\Omega)$. Comme, d'après le théorème 2.3.2, la suite $\{u_{k_j}\}_{j\in\mathbb{N}}$ est également bornée dans $L^{N/(N-1)}(\Omega)$, on en déduit que $u_{k_j} \to u$ dans $L^p(\Omega)$ pour tout $1 \le p < N/(N-1)$. □

L'étude de problèmes variationnels repose très souvent sur des inégalités de type Poincaré permettant de contrôler les valeurs d'une fonction lorsqu'on contrôle son gradient. En voici maintenant une version dans BV.

Théorème 2.3.4 (**Inégalité de Sobolev-Poincaré-Wirtinger**). *Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un ouvert borné connexe de frontière Lipschitz. Il existe une constante $C_\Omega > 0$ (qui ne dépend que de la dimension et Ω) telle que pour tout $u \in BV(\Omega)$,*

$$\|u - u_\Omega\|_{L^{\frac{N}{N-1}}(\Omega)} \le C_\Omega |Du|(\Omega),$$

où $u_\Omega := \mathcal{L}^N(\Omega)^{-1} \int_\Omega u(x)\, dx$ désigne la moyenne de u sur Ω.

Démonstration. Montrons d'abord qu'il existe une constante $C_\Omega > 0$ (qui ne dépend que de la dimension et Ω) telle que pour tout $u \in BV(\Omega)$,

$$\|u - u_\Omega\|_{L^1(\Omega)} \leq C_\Omega |Du|(\Omega),$$

On raisonne par contradiction en supposant qu'il existe une suite $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ dans $BV(\Omega)$ telle que

$$\int_\Omega u_k \, dx = 0, \quad \int_\Omega |u_k| \, dx = 1, \quad |Du_k|(\Omega) \leq \frac{1}{k}.$$

D'après le théorème de Rellich, quitte à extraire une sous-suite, on peut supposer qu'il existe une fonction $u \in BV(\Omega)$ telle que $u_k \to u$ dans $L^1(\Omega)$. De plus, les propriétés précédentes montrent que

$$\int_\Omega u \, dx = 0, \quad \int_\Omega |u| \, dx = 1, \quad |Du|(\Omega) = 0.$$

On en déduit, Ω étant connexe, que $u \equiv c$ est constante sur Ω et par la propriété de la moyenne, que $c = 0$, ce qui contredit le fait que $\|u\|_{L^1(\Omega)} = 1$.

D'après le théorème 2.3.2 ainsi que le cas précédent, il vient

$$\|u - u_\Omega\|_{L^{\frac{N}{N-1}}(\Omega)} \leq C\|u - u_\Omega\|_{BV(\Omega)} \leq C(C_\Omega + 1)|Du|(\Omega),$$

ce qui termine la preuve du théorème. □

2.4 Applications

2.4.1 Le modèle de Rudin-Osher-Fatemi

Un problème classique en traitement d'image concerne le débruitage d'une image au moyen de sa régularisation par variation totale. On suppose qu'une image est donnée par une fonction $g \in L^2(\Omega)$ définie sur un ouvert borné Ω de $\mathbb{R}^2$. On cherche à régulariser l'image en pénalisant les trop grandes variations. Pour ce faire on introduit le problème variationnel suivant, dit de *Rudin-Osher-Fatemi* :

$$\alpha := \inf_{u\in BV(\Omega)} \left\{ |Du|(\Omega) + \frac{\lambda}{2} \int_\Omega |u - g|^2 \, dx \right\},$$

où $\lambda > 0$ est un terme de pénalisation.

Montrons que ce problème est bien posé. Pour ce faire on considère une suite minimisante $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ dans $BV(\Omega)$ telle que

$$|Du_k|(\Omega) + \frac{\lambda}{2} \int_\Omega |u_k - g|^2 \, dx \to \alpha.$$

Notons que $\alpha \in [0, +\infty)$ car en choisissant le compétiteur $u = 0$, on obtient que

$$0 \leq \alpha \leq \frac{\lambda}{2} \int_\Omega |g|^2 \, dx < \infty.$$

Par conséquent, la suite $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ est bornée dans $BV(\Omega) \cap L^2(\Omega)$. On peut donc extraire une sous-suite (toujours notée $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}}$) telle que $u_k \rightharpoonup u_*$ faiblement dans $L^2(\Omega)$ et $Du_k \rightharpoonup Du_*$ faible* dans $\mathcal{M}(\Omega; \mathbb{R}^2)$ avec $u_* \in BV(\Omega) \cap L^2(\Omega)$. Par semicontinuité inférieure de la norme $L^2(\Omega)$ (pour la convergence faible de $L^2(\Omega)$) ainsi que la semicontinuité inférieure de la variation totale, on obtient que

$$\alpha \le |Du_*|(\Omega) + \frac{\lambda}{2}\int_\Omega |u_* - g|^2\,dx \le \liminf_{k\to\infty}\left\{|Du_k|(\Omega) + \frac{\lambda}{2}\int_\Omega |u_k - g|^2\,dx\right\} = \alpha,$$

ce qui montre que u_* est un minimiseur de la fonctionnelle de Rudin-Osher-Fatemi.

Ce problème peut être également interprété comme un modèle simplifié scalaire de fluide de Bingham plastique, parfois connu sous le nom de *problème de Mosolov* sans viscosité.

2.4.2 Elasto-plasticité parfaite

Un modèle simplifié d'élasto-plasticité parfaite consiste à déterminer un champ de contrainte $\sigma : \Omega \to \mathbb{R}^2$ ainsi qu'un déplacement scalaire $u : \Omega \to \mathbb{R}$, définis sur un ouvert borné $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, tels que, en notant $p := \nabla u - \sigma$ le vecteur des déformations permanentes (ou plastiques), (u, σ, p) minimise la fonctionnelle d'énergie

$$J(v,\tau,q) := \frac{1}{2}\int_\Omega |v|^2\,dx + \frac{1}{2}\int_\Omega |\tau|^2\,dx + \int_\Omega |q|\,dx - \int_\Omega fv\,dx$$

parmi tous les triplets $(v,\tau,q) \in W^{1,1}(\Omega) \times L^2(\Omega;\mathbb{R}^2) \times L^1(\Omega;\mathbb{R}^2)$ qui satisfont la condition $\nabla v = \tau + q$ dans Ω. Le premier terme représente l'énergie cinétique en régime stationnaire, le deuxième est l'énergie élastique, le troisième est l'énergie de dissipation plastique et enfin le quatrième n'est autre que le travail des efforts extérieurs dans lequel on suppose que $f \in L^2(\Omega)$.

On pose

$$\alpha := \inf\left\{J(v,\tau,q) :\ (v,\tau,q) \in W^{1,1}(\Omega) \times L^2(\Omega;\mathbb{R}^2) \times L^1(\Omega;\mathbb{R}^2),\ \nabla v = \tau + q \text{ dans } \Omega\right\}$$

et on considère une suite minimisante $\{(u_k, \sigma_k, p_k)\}_{k\in\mathbb{N}}$ telle que

$$J(u_k,\sigma_k,p_k) \to \alpha.$$

Remarquons que $-\frac{1}{2}\|f\|^2_{L^2(\Omega)} \le \alpha \le J(0,0,0)$ de sorte que $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ est bornée dans $L^2(\Omega)$, $\{\sigma_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ est bornée dans $L^2(\Omega;\mathbb{R}^2)$ et $\{p_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ est bornée dans $L^1(\Omega;\mathbb{R}^2)$. Quitte à extraire une sous-suite, on peut supposer que

$$\begin{cases} u_k \rightharpoonup u & \text{faiblement dans } L^2(\Omega),\\ \sigma_k \rightharpoonup \sigma & \text{faiblement dans } L^2(\Omega;\mathbb{R}^2),\\ p_k \rightharpoonup p & \text{faible* dans } \mathcal{M}(\Omega;\mathbb{R}^2),\end{cases}$$

où $(u,\sigma,p) \in L^2(\Omega) \times L^2(\Omega;\mathbb{R}^2) \times \mathcal{M}(\Omega;\mathbb{R}^2)$. De plus en utilisant que $\nabla u_k = \sigma_k + p_k$, on en déduit que $\nabla u_k \mathcal{L}^2 \rightharpoonup \sigma\mathcal{L}^2 + p$ faible* dans $\mathcal{M}(\Omega;\mathbb{R}^2)$, ce qui montre que $u \in BV(\Omega)$ avec $Du = \sigma\mathcal{L}^2 + p$. De plus, par semicontinuité inférieure de la variation totale

$$\liminf_{k\to\infty} J(u_k,\sigma_k,p_k) \ge \tilde{J}(u,\sigma,p),$$

où l'on a posé

$$\tilde{J}(v,\tau,q) := \frac{1}{2}\int_\Omega |v|^2\,dx + \frac{1}{2}\int_\Omega |\tau|^2\,dx + |q|(\Omega) - \int_\Omega fv\,dx$$

pour tout $(v,\tau,q) \in BV(\Omega) \times L^2(\Omega;\mathbb{R}^2) \times \mathcal{M}(\Omega;\mathbb{R}^2)$ tels que $Dv = \tau\mathcal{L}^2 + q$ dans Ω. Montrons que (u,σ,p) minimise la fonctionnelle $\tilde{J}$.

Soit $(v,\tau,q) \in BV(\Omega) \times L^2(\Omega;\mathbb{R}^2) \times \mathcal{M}(\Omega;\mathbb{R}^2)$ tel que $Dv = \tau\mathcal{L}^2 + q$ dans Ω. En adaptant la preuve du théorème d'Anzellotti-Giaquinta (exercice), on montre l'existence d'une suite $\{v_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ dans $\mathcal{C}^\infty(\Omega) \cap BV(\Omega)$ telle que $v_k \to v$ fortement dans $L^2(\Omega)$, $Dv_k \rightharpoonup Dv$ faible* dans $\mathcal{M}(\Omega;\mathbb{R}^2)$ et $|Dv_k - \tau\mathcal{L}^2|(\Omega) \to |Dv - \tau\mathcal{L}^2|(\Omega)$. On pose alors $q_k := Dv_k - \tau \in L^1(\Omega;\mathbb{R}^2)$ de sorte que

$$J(v_k,\tau_k,q_k) \to \tilde{J}(v,\tau,q).$$

Par conséquent,

$$\tilde{J}(u,\sigma,p) \leq \liminf_{k\to\infty} J(u_k,\sigma_k,p_k) = \alpha \leq \limsup_{k\to\infty} J(v_k,\tau_k,q_k) \leq \tilde{J}(v,\tau,q),$$

ce qui montre effectivement que (u,σ,p) minimise l'énergie, dite relaxée, $\tilde{J}$.

Chapitre 3

Mesures de Hausdorff

3.1 Les mesures extérieures

Dans cette section, on désigne par X un ensemble et par $\mathcal{P}(X)$ l'ensemble des parties de X.

Définition 3.1.1. Une application $\mu^* : \mathcal{P}(X) \to [0, +\infty]$ est appelée *mesure extérieure* si elle vérifie
(i) $\mu^*(\emptyset) = 0$;
(ii) Pour tout A, $B \in \mathcal{P}(X)$, on a $\mu^*(A) \leq \mu^*(B)$;
(iii) Pour toute suite $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathcal{P}(X)$, on a

$$\mu^* \left(\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n \right) \leq \sum_{n=0}^{\infty} \mu^*(A_n).$$

Si une mesure sur la tribu triviale $\mathcal{P}(X)$ est toujours une mesure extérieure, la réciproque n'est pas forcément vraie. Toutefois il est possible de restreindre μ^* à une tribu sur laquelle μ^* est une mesure.

Définition 3.1.2. Un ensemble $A \in \mathcal{P}(X)$ est dit μ^**-mesurable* si pour tout $E \in \mathcal{P}(X)$, on a

$$\mu^*(E) = \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \setminus A).$$

Par la sous-additivité d'une mesure extérieure, pour vérifier qu'un ensemble A est μ^*-mesurable, il suffit de montrer que

$$\mu^*(E) \geq \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \setminus A)$$

pour tout $E \in \mathcal{P}(X)$ tel que $\mu^*(E) < \infty$. De plus, par définition, on a que tout ensemble $A \subset X$ tel que $\mu^*(A) = 0$ est μ^*-mesurable.

Théorème 3.1.3. (de Carathéodory) *Soit μ^* une mesure extérieure sur un ensemble X. Alors la classe $\mathcal{A}$ des ensembles μ^*-mesurables est une tribu et la restriction de μ^* à $\mathcal{A}$ est une mesure.*

Démonstration. Montrons tout d'abord que $\mathcal{A}$ est une tribu. Clairement, on a $\emptyset \in \mathcal{A}$ car $\mu^*(\emptyset) = 0$. Par ailleurs $\mathcal{A}$ est stable par passage au complémentaire puisque $E \cap (X \setminus A) = E \setminus A$ et $E \setminus (X \setminus A) = E \cap A$. Il reste donc à montrer que $\mathcal{A}$ est stable par union dénombrable.

Vérifions d'abord que $\mathcal{A}$ est stable par réunion et intersection finie (ce qui fera de $\mathcal{A}$ une algèbre). Si A_1 et A_2 sont μ^*-mesurables, par sous-additivité de μ^*, on a pour tout $E \in \mathcal{P}(X)$,

$$\begin{aligned}
\mu^*(E) &= \mu^*(E \cap A_1) + \mu^*(E \setminus A_1) \\
&= \mu^*(E \cap A_1) + \mu^*((E \setminus A_1) \cap A_2) + \mu^*((E \setminus A_1) \setminus A_2) \\
&= \mu^*(E \cap A_1) + \mu^*(E \cap A_2 \setminus A_1) + \mu^*(E \setminus (A_1 \cup A_2)) \\
&\geq \mu^*(E \cap (A_1 \cup A_2)) + \mu^*(E \setminus (A_1 \cup A_2)),
\end{aligned}$$

ce qui montre que $A_1 \cup A_2 \in \mathcal{A}$. Par passage au complémentaire, on en déduit que $A_1 \cap A_2 \in \mathcal{A}$, puis que $A_1 \setminus A_2 \in \mathcal{A}$.

Soit maintenant $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathcal{A}$, posons $A = \bigcup_n A_n$ et montrons que $A \in \mathcal{A}$. On définit $A'_0 = A_0$ puis $A'_n = A_n \setminus \bigcup_{m<n} A_m$ pour tout $n \geq 1$; $\mathcal{A}$ étant une algèbre, on obtient ainsi une suite $\{A'_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ d'ensembles dans $\mathcal{A}$ disjoints deux à deux et de réunion $\bigcup_n A'_n = \bigcup_n A_n = A$.

Posons $B_n = \bigcup_{k\leq n} A'_k \in \mathcal{A}$, on obtient alors pour tout $E \in \mathcal{P}(X)$

$$\begin{aligned}
\mu^*(E \cap B_{n+1}) &= \mu^*(E \cap B_{n+1} \cap B_n) + \mu^*(E \cap B_{n+1} \setminus B_n) \\
&= \mu^*(E \cap B_n) + \mu^*(E \cap A'_{n+1}),
\end{aligned}$$

car les A'_n sont deux à deux disjoints. Ceci établit par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\mu^*(E \cap B_n) = \sum_{k=0}^{n} \mu^*(E \cap A'_k). \tag{3.1.1}$$

Les ensembles B_n étant μ^*-mesurables, on a

$$\mu^*(E) = \mu^*(E \cap B_n) + \mu^*(E \setminus B_n)$$

ce qui implique, par (3.1.1) et croissance de μ^* ($B_n \subset A$), que

$$\mu^*(E) \geq \sum_{k=0}^{n} \mu^*(E \cap A'_k) + \mu^*(E \setminus A).$$

Par passage à la limite quand $n \to \infty$ et sous-additivité de la mesure extérieure μ^*, il vient

$$\mu^*(E) \geq \sum_{k=0}^{\infty} \mu^*(E \cap A'_k) + \mu^*(E \setminus A) \geq \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \setminus A), \tag{3.1.2}$$

ce qui montre que $A \in \mathcal{A}$ et donc que $\mathcal{A}$ est une tribu.

Si les A_n sont disjoints deux à deux, alors $A'_n = A_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. En prenant $E = A$ dans (3.1.2), on obtient

$$\sum_{k=0}^{\infty} \mu^*(A_k) = \mu^*(A),$$

ce qui montre que μ^* est une mesure sur $\mathcal{A}$. □

Si à présent (X, d) est un espace métrique (que l'on peut donc munir de la tribu Borélienne, $\mathcal{B}(X)$, engendrée par les ouverts), le résultat suivant donne un critère assurant la μ^*-mesurabilité des ensembles Boréliens de X.

Proposition 3.1.4. *Si, pour tout A, $B \subset X$ avec $\operatorname{dist}(A, B) > 0$, on a*

$$\mu^*(A \cup B) = \mu^*(A) + \mu^*(B), \tag{3.1.3}$$

alors $\mathcal{B}(X) \subset \mathcal{A}$.

Démonstration. Puisque la tribu Borélienne $\mathcal{B}(X)$ est aussi engendrée par les fermés, il suffit de montrer que tous les fermés de X sont μ^*-mesurables. Soit $E \subset X$ tel que $\mu^*(E) < \infty$. On pose pour tout $n \geq 1$,

$$C_n = \left\{ x \in X : \ \mathrm{dist}(x, C) \leq \frac{1}{n} \right\}.$$

Comme $\mathrm{dist}(E \setminus C_n, E \cap C) \geq 1/n > 0$, l'hypothèse montre que

$$\mu^*(E \setminus C_n) + \mu^*(E \cap C) = \mu^*((E \setminus C_n) \cup (E \cap C)) \leq \mu^*(E). \tag{3.1.4}$$

Posons

$$R_k := \left\{ x \in E : \ \frac{1}{k+1} < \mathrm{dist}(x, C) \leq \frac{1}{k} \right\}.$$

Comme $\mathrm{dist}(R_i, R_j) > 0$ dès que $|j - i| \geq 2$, on a

$$\sum_{k=1}^{m} \mu^*(R_{2k}) = \mu^* \left(\bigcup_{i=1}^{m} R_{2k} \right) \leq \mu^*(E) < \infty,$$

et

$$\sum_{k=1}^{m} \mu^*(R_{2k+1}) = \mu^* \left(\bigcup_{i=1}^{m} R_{2k+1} \right) \leq \mu^*(E) < \infty,$$

pour tout $m \geq 1$, d'où $\sum_{k=1}^{\infty} \mu^*(R_k) \leq 2\mu^*(E) < \infty$. Comme C est fermé, on a $E \setminus C = (E \setminus C_n) \cup \bigcup_{k \geq n} R_k$, et donc, par sous-additivité de μ^*,

$$\mu^*(E \setminus C_n) \leq \mu^*(E \setminus C) \leq \mu^*(E \setminus C_n) + \sum_{k \geq n} \mu^*(R_k),$$

puis par passage à la limite quand $n \to \infty$, $\mu^*(E \setminus C_n) \to \mu^*(E \setminus C)$. Enfin, en faisant tendre $n \to \infty$ dans (3.1.4), il vient

$$\mu^*(E) \geq \mu^*(E \cap C) + \mu^*(E \setminus C)$$

ce qu'il fallait démontrer. □

Exemple 3.1.5. Soit $Q_r(x) = \{y \in \mathbb{R}^N : \max_i |x_i - y_i| < r\}$ le cube ouvert centré en x et de côté $2r$. Pour tout $A \subset \mathbb{R}^N$, on pose

$$\mathcal{L}^N(A) := \inf \left\{ \sum_{i=0}^{\infty} (2r_i)^N : \ A \subset \bigcup_{i=0}^{\infty} Q_{r_i}(x_i) \right\}.$$

On montre facilement que $\mathcal{L}^N$ est une mesure extérieure. De plus comme tous les cubes $Q_i = Q_{r_i}(x_i)$ peuvent être subdivisés en une union finie disjointe de plus petits cubes de côtés arbitrairement petits, on en déduit que la propriété (3.1.3) est vérifiée. Ceci montre que (la restriction à $\mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$ de) $\mathcal{L}^N$ est une mesure Borélienne. Comme elle est de plus finie sur les compacts, $\mathcal{L}^N$ est une mesure de Radon positive, appelée *mesure de Lebesgue.*

3.2 Définition et propriétés des mesures de Hausdorff

Définition 3.2.1. (i) Soient $A \subset \mathbb{R}^N$, $0 \le s < \infty$ et $\delta > 0$. On définit

$$\mathcal{H}^s_\delta(A) := \inf\left\{ \sum_{i\in I} \omega_s \left(\frac{\mathrm{diam}(A_i)}{2}\right)^s : \quad I \subset \mathbb{N},\ A \subset \bigcup_{i\in I} A_i,\ \mathrm{diam}(A_i) \le \delta \right\},$$

où

$$\omega_s := \frac{\pi^{s/2}}{\Gamma(\frac{s}{2}+1)}$$

et $\Gamma(t) := \int_0^\infty e^{-x}x^{t-1}\,dx$ est la fonction Gamma d'Euler.

(ii) Pour $A \subset \mathbb{R}^N$ et $s \ge 0$, on pose

$$\mathcal{H}^s(A) := \sup_{\delta>0} \mathcal{H}^s_\delta(A) = \lim_{\delta\to 0} \mathcal{H}^s_\delta(A).$$

On appelle $\mathcal{H}^s$ la mesure de Hausdorff s-dimensionnelle sur $\mathbb{R}^N$.

Remarque 3.2.2. (i) La limite définissant $\mathcal{H}^s(A)$ existe et est donnée par le supremum car si $\delta_1 \le \delta_2$, alors $\mathcal{H}^s_{\delta_1}(A) \ge \mathcal{H}^s_{\delta_2}(A)$.

(ii) Si $s = k \in \mathbb{N}$, La constante de renormalisation ω_k coïncide avec le volume de la boule unité dans $\mathbb{R}^k$, i.e.

$$\omega_k = \mathcal{L}^k(\{x \in \mathbb{R}^k : x_1^2 + \cdots + x_k^2 \le 1\}).$$

(iii) Comme $\mathrm{diam}(A) = \mathrm{diam}(\overline{A})$, on peut supposer que les ensembles A_i sont fermés dans la définition de $\mathcal{H}^s_\delta(A)$.

Théorème 3.2.3. *Pour tout $0 \le s < \infty$ et tout $\delta > 0$, $\mathcal{H}^s_\delta$ et $\mathcal{H}^s$ sont des mesures extérieures. De plus, la restriction de $\mathcal{H}^s$ est à $\mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$ est une mesure Borélienne.*

Démonstration. Si $A \subset B$, on a clairement que $\mathcal{H}^s_\delta(A) \le \mathcal{H}^s_\delta(B)$ puis, par passage à la limite quand $\delta \to 0$, on en déduit que $\mathcal{H}^s(A) \le \mathcal{H}^s(B)$. Soit maintenant $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de parties de $\mathbb{R}^N$. Pour tout $\varepsilon > 0$ et $n \in \mathbb{N}$, il existe $I_n \subset \mathbb{N}$ et un recouvrement $\{B_i^n\}_{i\in I_n}$ de A_n tel que $\mathrm{diam}(B_i^n) \le \delta$ et

$$\mathcal{H}^s_\delta(A_n) \ge \sum_{i\in I_n} \omega_s \left(\frac{\mathrm{diam}(B_i^n)}{2}\right)^s - 2^{-n-1}\varepsilon.$$

Comme $\bigcup_n A_n \subset \bigcup_{n,i} B_i^n$, il vient

$$\mathcal{H}^s_\delta\left(\bigcup_{n=0}^\infty A_n\right) \le \sum_{n=0}^\infty \sum_{i\in I_n} \omega_s \left(\frac{\mathrm{diam}(B_i^n)}{2}\right)^s \le \sum_{n=0}^\infty \mathcal{H}^s_\delta(A_n) + \varepsilon$$

et la sous-additivité

$$\mathcal{H}^s_\delta\left(\bigcup_{n=0}^\infty A_n\right) \le \sum_{n=0}^\infty \mathcal{H}^s_\delta(A_n)$$

de $\mathcal{H}^s_\delta$ suit par passage à la limite quand $\varepsilon \to 0$. Par suite, $\mathcal{H}^s$ est également sous-additive par passage au supremum en δ dans l'inégalité précédente.

Pour montrer que $\mathcal{H}^s$ est une mesure de Borel, en vertu de la Proposition 3.1.4, il suffit de montrer que $\mathcal{H}^s(A \cup B) \ge \mathcal{H}^s(A) + \mathcal{H}^s(B)$ pour tout A, $B \subset \mathbb{R}^N$ tels que $\mathrm{dist}(A, B) > 0$. Soient $0 < \delta < \mathrm{dist}(A, B)/4$, $I \subset \mathbb{N}$ et $\{C_i\}_{i\in I}$ une recouvrement de $A \cup B$ avec $\mathrm{diam}(C_i) \le \delta$. On définit

$I_A := \{i \in I : C_i \cap A \neq \emptyset\}$ et $I_B := \{j \in I : C_j \cap B \neq \emptyset\}$ de sorte que $A \subset \bigcup_{i \in I_A} C_i$, $B \subset \bigcup_{j \in I_B} C_j$ et $C_i \cap C_j = \emptyset$ si $i \in I_A$ et $j \in I_B$. Alors

$$\begin{aligned}\sum_{i \in I} \omega_s \left(\frac{\operatorname{diam}(C_i)}{2}\right)^s &\geq \sum_{i \in I_A} \omega_s \left(\frac{\operatorname{diam}(C_i)}{2}\right)^s + \sum_{j \in I_B} \omega_s \left(\frac{\operatorname{diam}(C_j)}{2}\right)^s \\ &\geq \mathcal{H}^s_\delta(A) + \mathcal{H}^s_\delta(B).\end{aligned}$$

Par passage à l'infimum sur tous les recouvrements $\{C_k\}_{i \in I}$ de $A \cup B$ dans le membre de gauche, il vient

$$\mathcal{H}^s_\delta(A \cup B) \geq \mathcal{H}^s_\delta(A) + \mathcal{H}^s_\delta(B),$$

puis, par passage à la limite quand $\delta \to 0$,

$$\mathcal{H}^s(A \cup B) \geq \mathcal{H}^s(A) + \mathcal{H}^s(B).$$

L'autre inégalité est une conséquence immédiate de la sous-additivité de la mesure extérieure $\mathcal{H}^s$. Une application immédiate de la Proposition 3.1.4 montre que $\mathcal{H}^s$ est une mesure de Borel. □

Montrons à présent des proprités basiques des mesures de Hausdorff.

Proposition 3.2.4. *(i) $\mathcal{H}^0$ est la mesure de comptage dans $\mathbb{R}^N$;*
(ii) $\mathcal{H}^1 = \mathcal{L}^1$ dans $\mathcal{B}(\mathbb{R})$;
(iii) $\mathcal{H}^s(\lambda A) = \lambda^s \mathcal{H}^s(A)$ pour tout $\lambda > 0$ et tout $A \subset \mathbb{R}^N$;
(iv) $\mathcal{H}^s(L(A)) = \mathcal{H}^s(A)$ pour toute isométrie affine $L : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^d$ et tout $A \subset \mathbb{R}^N$;
(v) Si $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^d$ est une fonction Lipschitzienne, alors

$$\mathcal{H}^s(f(A)) \leq [\operatorname{Lip}(f)]^s \mathcal{H}^s(A) \quad \text{pour tout } A \subset \mathbb{R}^N;$$

(vi) Si $t > s$ et $A \subset \mathbb{R}^N$, alors

$$\mathcal{H}^t(A) > 0 \quad \Longrightarrow \quad \mathcal{H}^s(A) = \infty.$$

Démonstration. (i) Si $\{a\}$ est un singleton, pour tout $\delta > 0$, on a $a \in B_{\delta/2}(a)$ de sorte que $\mathcal{H}^0_\delta(\{a\}) \leq \omega_0(\delta/2)^0 = 1$ et donc, en faisant tendre $\delta \to 0$, $\mathcal{H}^0(\{a\}) \leq 1$. Si $I \subset I$ et $\{A_i\}_{i \in I}$ est un recouvrement de $\{a\}$ par des ensembles de diamètre plus petit que δ, alors il existe $i_0 \in I$ tel que $a \in A_{i_0}$, d'où

$$\omega_0 \sum_{i \in I} \left(\frac{\operatorname{diam}(A_i)}{2}\right)^0 \geq \omega_0 \left(\frac{\operatorname{diam}(A_{i_0})}{2}\right)^0 = 1.$$

Par passage à l'infimum parmi tous les recouvrements, il vient $\mathcal{H}^0(\{a\}) \geq \mathcal{H}^0_\delta(\{a\}) \geq 1$. Par conséquent, $\mathcal{H}^0(\{a\}) = 1$. Si $A = \{a_1, \ldots, a_k\}$ est un ensemble fini, $\mathcal{H}^0(A) = \sum_{i=1}^k \mathcal{H}^0(\{a_i\}) = k = \#(A)$ et, si A est un ensemble infini $\mathcal{H}^0(A) = \infty = \#(A)$.

(ii) Soit $A \subset \mathbb{R}$ un ensemble Borélien et $A \subset \bigcup_{i=0}^\infty]a_i, b_i[$, pour tout $\delta > 0$ on peut décomposer chacun des intervalles $[a_i, b_i]$ en une union finie de sous intervalles d'intérieurs disjoints et de diamètre plus petit que δ, i.e. $[a_i, b_i] = \bigcup_{j \in I_i} [\alpha_i^j, \beta_i^j]$ avec $\beta_i^j - \alpha_i^j \leq \delta$. Par conséquent,

$$\mathcal{H}^1_\delta(A) \leq \omega_1 \sum_{i=0}^\infty \sum_{j \in I_i} \frac{\operatorname{diam}([\alpha_i^j, \beta_i^j])}{2} = \sum_{i=0}^\infty (b_i - a_i),$$

où l'on a utilisé le fait que $\omega_1 = 2$. Par passage à l'infimum parmi tous les recouvrements $(]a_i, b_i[)_{i \in \mathbb{N}}$, on obtient, par définition de la mesure de Lebesgue, que $\mathcal{H}^1_\delta(A) \leq \mathcal{L}^1(A)$, puis, par passage à la limite quand $\delta \to 0$, $\mathcal{H}^1(A) \leq \mathcal{L}^1(A)$

Pour montrer l'autre inégalité, considérons $I \subset \mathbb{N}$ et un recouvrement $\{A_i\}_{i\in I}$ de A avec $\text{diam}(A_i) \le \delta$, on pose $s_i = \inf A_i$ et $t_i = \sup A_i$ de sorte que $A_i \subset [s_i, t_i]$ et $t_i - s_i = \text{diam}(A_i) \le \delta$. Par définition de la mesure de Lebesgue, on a donc que

$$\mathcal{L}^1(A) \le \sum_{i\in I}(t_i - s_i) = \omega_1 \sum_{i\in I} \frac{\text{diam}(A_i)}{2},$$

puis, par passage à l'infimum par rapport à tous les recouvrements $(A_i)_{i\in I}$, il vient

$$\mathcal{L}^1(A) \le \mathcal{H}^1_\delta(A) \le \mathcal{H}^1(A).$$

(iii) Si $I \subset \mathbb{N}$ et $\{A_i\}_{i\in I}$ est un recouvrement de A avec $\text{diam}(A_i) \le \delta$, alors $\{\lambda A_i\}_{i\in I}$ est un recouvrement de λA avec $\text{diam}(\lambda A_i) \le \lambda\delta$, d'où

$$\mathcal{H}^s_{\lambda\delta}(\lambda A) \le \lambda^s \sum_{i\in I} \omega_s \left(\frac{\text{diam}(A_i)}{2}\right)^s$$

puis, par passage à l'infimum parmi tous les recouvrements $\{A_i\}_{i\in I}$ de A,

$$\mathcal{H}^s_{\lambda\delta}(\lambda A) \le \lambda^s \mathcal{H}^s_\delta(A) \le \lambda^s \mathcal{H}^s(A).$$

Par passage à la limite quand $\delta \to 0$, on obtient $\mathcal{H}^s(\lambda A) \le \lambda^s \mathcal{H}^s(A)$. Pour montrer l'autre inégalité, on note simplement que

$$\mathcal{H}^s(A) = \mathcal{H}^s(\lambda^{-1}(\lambda A)) \le \lambda^{-s}\mathcal{H}^s(\lambda A).$$

(iv) Si $L : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^d$ est une isométrie linéaire, $I \subset \mathbb{N}$ et $\{A_i\}_{i\in I}$ est un recouvrement de A avec $\text{diam}(A_i) \le \delta$, alors $\{L(A_i)\}_{i\in I}$ est un recouvrement de $L(A)$ avec $\text{diam}(L(A_i)) = \text{diam}(A_i) \le \delta$. Par conséquent,

$$\mathcal{H}^s_\delta(L(A)) \le \sum_{i\in I} \omega_s \left(\frac{\text{diam}(L(A_i))}{2}\right)^s = \sum_{i\in I} \omega_s \left(\frac{\text{diam}(A_i)}{2}\right)^s$$

puis, par passage à l'infimum parmi tous les recouvrements $\{A_i\}_{i\in I}$ de A et passage au supremum en δ, on obtient

$$\mathcal{H}^s(L(A)) \le \mathcal{H}^s(A).$$

Comme $L^{-1} : L(\mathbb{R}^N) \to \mathbb{R}^N$ est une isométrie linéaire, il vient

$$\mathcal{H}^s(A) = \mathcal{H}^s(L^{-1}(L(A))) \le \mathcal{H}^s(L(A)),$$

ce qui montre l'autre inégalité.

(v) Si $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^d$ est une fonction Lipschtzienne, $I \subset \mathbb{N}$ et $\{A_i\}_{i\in I}$ est un recouvrement de A avec $\text{diam}(A_i) \le \delta$, alors $\{f(A_i)\}_{i\in I}$ est un recouvrement de $f(A)$ avec $\text{diam}(f(A_i)) \le \text{Lip}(f)\text{diam}(A_i) \le \text{Lip}(f)\delta$. Par conséquent,

$$\mathcal{H}^s_{\text{Lip}(f)\delta}(f(A)) \le \sum_{i\in I} \omega_s \left(\frac{\text{diam}(f(A_i))}{2}\right)^s \le [\text{Lip}(f)]^s \sum_{i\in I} \omega_s \left(\frac{\text{diam}(A_i)}{2}\right)^s$$

puis, par passage à l'infimum parmi tous les recouvrements $\{A_i\}_{i\in I}$ de A et passage au supremum en δ, on obtient

$$\mathcal{H}^s(f(A)) \le [\text{Lip}(f)]^s \mathcal{H}^s(A).$$

(vi) est une conséquence du fait que, par définition de la mesure de Hausdorff, pour tout $\delta > 0$, on a

$$\mathcal{H}^t_\delta(A) \leq \frac{\omega_t}{\omega_s}\left(\frac{\delta}{2}\right)^{t-s}\mathcal{H}^s_\delta(A) \leq \frac{\omega_t}{\omega_s}\left(\frac{\delta}{2}\right)^{t-s}\mathcal{H}^s(A).$$

Par passage à la limite quand $\delta \to 0$, on en déduit que si $\mathcal{H}^s(A) < \infty$, alors $\mathcal{H}^t(A) = 0$. $\square$

Définition 3.2.5. La dimension de Hausdorff d'un ensemble $A \subset \mathbb{R}^N$ est définie par

$$\dim_{\mathcal{H}}(A) := \inf\{s \geq 0 : \ \mathcal{H}^s(A) = 0\}.$$

Par définition de la dimension de Hausdorff, on a que $\mathcal{H}^s(A) = 0$ pour tout $s > \dim_{\mathcal{H}}(A)$ et, d'après la Proposition 3.2.4(v), il vient que $\mathcal{H}^s(A) = \infty$ pour tout $s < \dim_{\mathcal{H}}(A)$.

Un outil très utile concerne les densités s-dimensionnelles d'une mesure de Radon positive.

Définition 3.2.6. Soit μ une mesure de Radon positive finie sur un ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^N$. On définit les densités s-dimensionnelles inférieures et supérieures en $x \in \Omega$ par

$$\Theta_{s,*}(\mu, x) := \liminf_{\varrho\to 0} \frac{\mu(B_\varrho(x))}{\omega_s \varrho^s}, \qquad \Theta^*_s(\mu, x) := \limsup_{\varrho\to 0} \frac{\mu(B_\varrho(x))}{\omega_s \varrho^s}.$$

Si $\Theta_{s,*}(\mu, x) = \Theta^*_s(\mu, x)$ on notera $\Theta_s(\mu, x)$ la valeur commune.

Proposition 3.2.7. *Soit μ une mesure de Radon positive finie sur un ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, $t > 0$ et $A \subset \Omega$ un Borélien. Si $\Theta^*_s(\mu, x) \geq t$ pour tout $x \in A$, alors*

$$\mu \geq t\mathcal{H}^s \llcorner A.$$

De plus, si $E \subset \Omega$ est un Borélien tel que $\mathcal{H}^s(E) < \infty$, alors

$$\lim_{\varrho\to 0} \frac{\mathcal{H}^s(E \cap B_\varrho(x))}{\varrho^s} = 0 \quad \textit{pour } \mathcal{H}^s\textit{-presque tout } x \in \Omega \setminus E.$$

Démonstration. Soient U un ouvert contenant A, $t' < t$ et $\delta > 0$. Par définition de la lim sup, pour tout $x \in A$ et tout $0 < \varepsilon < \delta$, il existe $\varrho_x \in (0, \varepsilon/2)$ tel que $\overline{B}_{\varrho_x}(x) \subset U$ et

$$\mu(B_{\varrho_x}(x)) \geq t'\omega_s \varrho_x^s.$$

Soit $\mathcal{F}$ la famille des boules fermées $\overline{B}$ contenues dans U et telles que $\mathrm{diam}(\overline{B}) \leq \delta$ et $\mu(\overline{B}) \geq t'\omega_s(\mathrm{diam}(B)/2)^s$. Il s'agit d'un recouvrement (fin) de A et le théorème de recouvrement de Besicovitch montre alors l'existence de ξ sous-familles $\mathcal{F}_1, \ldots, \mathcal{F}_\xi$ telles que chacunes des sous familles $\mathcal{F}_i = \{\overline{B}^k_i\}_{k\in\mathbb{N}}$ est dénombrable et disjointe et

$$A \subset \bigcup_{i=1}^{\xi} \bigcup_{\overline{B}\in\mathcal{F}_i} \overline{B}.$$

Par conséquent, par définition de la mesure de Hausdorff, il vient

$$\mathcal{H}^s_\delta(A) \leq \sum_{i=1}^{\xi}\sum_{k=0}^{\infty} \omega_s \left(\frac{\mathrm{diam}(\overline{B}^k_i)}{2}\right)^s \leq \frac{1}{t'}\sum_{i=1}^{\xi}\sum_{k=0}^{\infty} \mu(\overline{B}^k_i) \leq \frac{\xi}{t'}\mu(U).$$

Par passage à la limite quand $\delta \to 0$ et $t' \to t$, on en déduit que $\mathcal{H}^s(A) \leq \frac{\xi}{t}\mu(U) < \infty$.

D'après le Corollaire 1.4.2, comme $\mathcal{F}$ est un recouvrement fin de A, il existe une sous-famille $\{\overline{B}_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ de $\mathcal{F}$ dénombrable et disjointe telle

$$\mathcal{H}^s\left(A \setminus \bigcup_{j\in\mathbb{N}} \overline{B}_j\right) = 0.$$

Par conséquent, comme $\mathcal{H}^s_\delta$ est une mesure extérieure et $\mathcal{H}^s_\delta \leq \mathcal{H}^s$, il vient

$$\mathcal{H}^s_\delta(A) \leq \sum_{j=0}^{\infty} \omega_s \left(\frac{\mathrm{diam}(\overline{B}_j)}{2}\right)^s \leq \frac{1}{t'} \sum_{j=0}^{\infty} \mu(\overline{B}_j) \leq \frac{1}{t'}\mu(U).$$

Par passage à la limite quand $\delta \to 0$ et $t' \to t$, puis passage à l'infimum parmi tous les ouverts U contenant A, obtient que $\mathcal{H}^s(A) \leq t^{-1}\mu(A)$. On peut répéter le même argument en remplaçant A par n'importe quel sous ensemble Borélien de A et établir ainsi que $\mu \geq t\mathcal{H}^s \llcorner A$.

Si $E \subset \Omega$ est un Borélien tel que $\mathcal{H}^s(E) < \infty$, on applique ce résultat à la mesure finie $\mu = \mathcal{H}^s \llcorner E$ avec $A = A_n = \{x \in \Omega \setminus E : \Theta^*_s(\mu, x) > 1/n\}$ et $t = 1/n$. On obtient alors que $0 = \mu(A_n) \geq \frac{1}{n}\mathcal{H}^s(A_n)$. Comme $\bigcup_n A_n = \{x \in \Omega \setminus E : \Theta^*_s(\mu, x) > 0\}$, on en déduit que $\mathcal{H}^s(\{x \in \Omega \setminus E : \Theta^*_s(\mu, x) > 0\}) = 0$. □

3.3 Mesure de volume et mesure de surface

3.3.1 Mesure de volume

Nous allons à présent montrer que la mesure de Hausdorff N-dimensionnelle dans $\mathbb{R}^N$ coïncide avec la mesure de Lebesgue $\mathcal{L}^N$. La démonstration repose sur l'inégalité isodiamétrique qui stipule que le plus grand volume parmi tous les sous ensembles de diamètre d est $\omega_N(d/2)^N$, i.e. le volume de la boule. Remarquons que cette inégalité n'est pas complètement évidente car, comme le montre l'exemple d'un triangle équilatéral, il n'est pas vrai qu'un ensemble quelconque est contenu dans une boule de même diamètre.

Proposition 3.3.1 (Inégalité isodiamétrique). *Pour tout ensemble $\mathcal{L}^N$-mesurable $A \subset \mathbb{R}^N$, on a*

$$\mathcal{L}^N(A) \leq \omega_N \left(\frac{\mathrm{diam}(A)}{2}\right)^N.$$

Démonstration. La preuve repose sur le principe de symétrisation de Steiner. Pour tout $\xi \in \mathbb{R}^N$ avec $|\xi| = 1$, on note Π_ξ l'hyperplan orthogonal à ξ. Si $B \subset \mathbb{R}^N$ est un ensemble $\mathcal{L}^N$-mesurable,

$$B^\xi_y := \{t \in \mathbb{R} : \; y + t\xi \in B\}$$

désigne la section de B dans la direction ξ passant par le point y. D'après le théorème de Fubini, l'application $y \mapsto \mathcal{L}^1(B^\xi_y)$ est $\mathcal{L}^{N-1}$-mesurable dans Π_ξ. Par conséquent l'ensemble

$$S_\xi(B) := \{y + t\xi : \; y \in \Pi_\xi, \; |t| \leq \mathcal{L}^1(B^\xi_y)/2\}$$

est toujours $\mathcal{L}^N$-mesurable. De plus, une nouvelle utilisation du théorème de Fubini montre que $\mathcal{L}^N(S_\xi(B)) = \mathcal{L}^N(B)$.

Par ailleurs, si B est symétrique par rapport à Π_ν avec $\nu \cdot \xi = 0$, alors $S_\xi(B)$ conserve cette propriété. Pour voir cela, notons σ la symétrie par rapport à Π_ν, i.e. $\sigma(x) = x - 2(x \cdot \nu)\nu$, qui satisfait $\sigma^2 = \mathrm{id}$. Alors, on a que

$$\sigma(y + B^\xi_y \xi) = \sigma(y) + B^\xi_{\sigma(y)}\xi.$$

En effet, si $x \in \sigma(y + B^\xi_y \xi)$, alors il existe $t \in B^\xi_y$ tel que $x = \sigma(y + t\xi) = \sigma(y) + t\xi$ car $\xi \cdot \nu = 0$. Comme $y + t\xi \in B$ et $\sigma(B) = B$, on en déduit que $\sigma(y) + t\xi = x = \sigma(y + t\xi) \in B$, ce qui montre que $t \in B^\xi_{\sigma(y)}$ et donc que $x \in \sigma(y) + B^\xi_{\sigma(y)}\xi$. Pour montrer l'autre inclusion, on utilise l'inclusion précédente pour obtenir que

$$\sigma(\sigma(y) + B^\xi_{\sigma(y)}\xi) \subset \sigma^2(y) + B^\xi_{\sigma^2(y)}\xi) = y + B^\xi_y \xi,$$

soit, en appliquant σ à l'inclusion précédente, $\sigma(y) + B^\xi_{\sigma(y)}\xi \subset \sigma(y + B^\xi_y\xi)$. Soit $x \in S_\xi(B)$, alors $x = y + t\xi$ avec $y \in \Pi_\xi$ et $|t| \leq \mathcal{L}^1(B^\xi_y)/2$. En utilisant la Proposition 3.2.4 (ii) et (iv), on en déduit que

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^1(B^\xi_y) = \mathcal{H}^1(B^\xi_y) = \mathcal{H}^1(y + B^\xi_y\xi) = \mathcal{H}^1(\sigma(y + B^\xi_y\xi))& \\ = \mathcal{H}^1(\sigma(y) + B^\xi_{\sigma(y)}\xi) = \mathcal{H}^1(B^\xi_{\sigma(y)}) = \mathcal{L}^1(B^\xi_{\sigma(y)}).&\end{aligned}$$

Par conséquent, $\sigma(x) = \sigma(y) + t\xi$ avec $\sigma(y) \in \Pi_\xi$ et $2|t| \leq \mathcal{L}^1(B^\xi_y) = \mathcal{L}^1(B^\xi_{\sigma(y)})$, ce qui montre que $\sigma(x) \in S_\xi(B)$ et donc que $S_\xi(B)$ est symétrique par rapport à Π_ν.

Montrons à présent que la symétrisation diminue le diamètre. Pour ce faire, pour tout $\varepsilon > 0$, on considère x et $x' \in S_\xi(B)$ tels que

$$\operatorname{diam}(S_\xi(B)) \leq |x - x'| + \varepsilon.$$

Soient $y = x - (x \cdot \xi)\xi$ et $y' = x' - (x' \cdot \xi)\xi \in \Pi_\xi$ et posons

$$r := \inf\{t :\ y + t\xi \in B\}, \quad s := \sup\{t :\ y + t\xi \in B\},$$

et

$$r' := \inf\{t :\ y' + t\xi \in B\}, \quad s' := \sup\{t :\ y' + t\xi \in B\}.$$

Supposons, sans restreindre la généralité que $s' - r \geq s - r'$. Alors

$$s' - r \geq \frac{1}{2}(s' - r) + \frac{1}{2}(s - r') = \frac{1}{2}(s - r) + \frac{1}{2}(s' - r') \geq \frac{1}{2}\mathcal{L}^1(B^\xi_y) + \frac{1}{2}\mathcal{L}^1(B^\xi_{y'}).$$

Comme $|x \cdot \xi| \leq \frac{1}{2}\mathcal{L}^1(B^\xi_y)$ et $|x' \cdot \xi| \leq \frac{1}{2}\mathcal{L}^1(B^\xi_{y'})$, il vient

$$s' - r \geq |x \cdot \xi| + |x' \cdot \xi| \geq |x \cdot \xi - x' \cdot \xi|.$$

Par conséquent, comme $y + r\xi$ et $y' + s'\xi \in \overline{B}$,

$$\begin{aligned}(\operatorname{diam}(S_\xi(B)) - \varepsilon)^2 &\leq |x - x'|^2 = |y - y'|^2 + |x \cdot \xi - x' \cdot \xi|^2 \\ &\leq |y - y'|^2 + (s' - r)^2 = |(y + r\xi) - (y' + s'\xi)|^2 \leq (\operatorname{diam}(\overline{B}))^2 = (\operatorname{diam}(B))^2,\end{aligned}$$

ce qui montre effectivement que $\operatorname{diam}(S_\xi(B)) \leq \operatorname{diam}(B)$.

Nous sommes à présent en mesure de montrer l'inégalité isodiamétrique. Si $\operatorname{diam}(A) = \infty$, il n'y a rien à montrer. Sinon, on considère une base orthonormée $\{e_1, \ldots, e_N\}$ de $\mathbb{R}^N$. On définit $A_1 = S_{e_1}(A)$, $A_2 = S_{e_2}(A_1), \ldots, A_N = S_{e_N}(A_{N-1})$ et on pose $A^* = A_N$. Par construction, $\mathcal{L}^N(A^*) = \mathcal{L}^N(A)$, $\operatorname{diam}(A^*) \leq \operatorname{diam}(A)$ et A^* est symétrique par rapport à Π_{e_k} pour tout $k = 1, \ldots, N$. Par conséquent, si $x \in A^*$, alors $-x \in A^*$ de sorte que $A^* \subset B_{\operatorname{diam}(A^*)/2}(0)$, soit

$$\mathcal{L}^N(A) = \mathcal{L}^N(A^*) \leq \mathcal{L}^N(B_{\operatorname{diam}(A^*)/2}(0)) = \omega_N\left(\frac{\operatorname{diam}(A^*)}{2}\right)^N \leq \omega_N\left(\frac{\operatorname{diam}(A)}{2}\right)^N,$$

ce qui conclut la preuve de l'inégalité. $\square$

L'inégalité isodiamétrique permet montrer que la mesure de Hausdorff N-dimensionnelle coïncide avec la mesure de Lebesgue dans $\mathbb{R}^N$, généralisant ainsi la Proposition 3.2.4 (ii).

Théorème 3.3.2. *$\mathcal{H}^N = \mathcal{L}^N$ dans $\mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$.*

Démonstration. Soit $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$. Pour tout $\delta > 0$ il existe $I \subset \mathbb{N}$ et un recouvrement $\{A_i\}_{i\in I}$ tel que $\operatorname{diam}(A_i) \leq \delta$ et

$$\omega_N \sum_{i\in I} \left(\frac{\operatorname{diam}(A_i)}{2}\right)^N \leq \mathcal{H}^N_\delta(A) + \delta \leq \mathcal{H}^N(A) + \delta.$$

Rappelons que, sans restreindre la généralité, on peut supposer que les A_i sont fermés. Comme $A \subset \bigcup_i A_i$, on obtient grâce à l'inégalité isodiamétrique que

$$\mathcal{L}^N(A) \leq \sum_{i\in I} \mathcal{L}^N(A_i) \leq \omega_N \sum_{i\in I} \left(\frac{\operatorname{diam}(A_i)}{2}\right)^N \leq \mathcal{H}^N(A) + \delta.$$

On obtient que $\mathcal{L}^N(A) \leq \mathcal{H}^N(A)$ par passage à la limite quand $\delta \to 0$.

Pour montrer l'autre inégalité, on commence par établir que $\mathcal{H}^N$ est une mesure de Radon. Pour ce faire, on remarque que si Q est un cube de $\mathbb{R}^N$, alors $\operatorname{diam}(Q) = \sqrt{N}\mathcal{L}^N(Q)^{1/N}$. Soit donc $\{Q_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ un recouvrement de A par des cubes. Si $\delta > 0$, quitte à subdiviser chaque cubes Q_i en plus petits cubes, on peut supposer que $\operatorname{diam}(Q_i) \leq \delta$. Par définition de la mesure de Hausdorff, il vient

$$\mathcal{H}^N_\delta(A) \leq \omega_N \sum_{i=1}^\infty \left(\frac{\operatorname{diam}(Q_i)}{2}\right)^N = \omega_N \left(\frac{\sqrt{N}}{2}\right)^N \sum_{i=0}^\infty \mathcal{L}^N(Q_i).$$

Par passage à l'infimum parmi tous les recouvrements $\{Q_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ de A et par passage à la limite quand $\delta \to 0$, il vient $\mathcal{H}^N(A) \leq C_N\mathcal{L}^N(A)$, ce qui montre effectivement que $\mathcal{H}^N$ est finie sur les compacts et donc que $\mathcal{H}^N$ est une mesure de Radon.

Soit U un ouvert contenant A et $\delta > 0$. Pour tout $x \in A$, il existe $\varrho_x \in (0, \delta/2)$ tel que $\overline{B}_\varrho(x) \subset U$ pour tout $\varrho \leq \varrho_x$ de sorte que $\mathcal{F} = \{\overline{B}_\varrho(x)\}_{x\in A,\, 0<\varrho\leq\varrho_x}$ forme un recouvrement fin de A. D'après le théorème de recouvrement de Besicovitch (Corollaire 1.4.2), il existe une famille dénombrable $\{\overline{B}_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{F}$ de boules fermées deux à deux disjointes, de diamètre plus petit que δ et contenues dans U telles que

$$\mathcal{H}^N\left(A \setminus \bigcup_{k=0}^\infty \overline{B}_k\right) = 0.$$

Par σ-sous additivité de $\mathcal{H}^N_\delta$ il vient

$$\mathcal{H}^N_\delta(A) \leq \sum_{k=0}^\infty \mathcal{H}^N_\delta(\overline{B}_k) \leq \sum_{k=0}^\infty \omega_N \varrho_k^N = \sum_{k=0}^\infty \mathcal{L}^N(\overline{B}_k) = \mathcal{L}^N\left(\bigcup_{k=0}^\infty \overline{B}_k\right) \leq \mathcal{L}^N(U).$$

Par régularité extérieure de la mesure de Lebesgue et passage à la limite quand $\delta \to 0$, il vient $\mathcal{H}^N(A) \leq \mathcal{L}^N(A)$. $\square$

Remarque 3.3.3. Le résultat précédent montre que, pour tout $s < N$, la mesure de Hausdorff $\mathcal{H}^s$ n'est jamais une mesure de Radon dans $\mathbb{R}^N$

3.3.2 Mesure de surface et formule de l'aire

Nous nous intéressons à présent à l'interprétation de la mesure de Hausdorff $\mathcal{H}^k$ pour $k \in \mathbb{N}$ avec $1 \leq k \leq N-1$. La formule de l'aire va nous permettre de montrer que $\mathcal{H}^k$ coïncide avec la mesure de volume sur les sous-variétés de dimension k dans $\mathbb{R}^N$. On rappelle la définition des sous-variétés de $\mathbb{R}^N$.

Définition 3.3.4. Un sous ensemble $M \subset \mathbb{R}^N$ est une *sous-variété* de $\mathbb{R}^N$ de dimension k et de classe $\mathcal{C}^1$ si, pour tout $x_0 \in M$, il existe un voisinage V de x_0 dans $\mathbb{R}^N$, un voisinage U de 0 dans $\mathbb{R}^k$ et une fonction $f : U \to V$ de classe $\mathcal{C}^1$ et injective telle que $f(0) = x_0$, $\nabla f(0)$ est une application linéaire injective de $\mathbb{R}^k$ dans $\mathbb{R}^N$ et f est un homéomorphisme de U sur $M \cap V$. On appelera f un *paramétrisation locale* de M en x_0.

Remarque 3.3.5. Notons qu'une application linéaire $L : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^N$ (avec $k \leq N$) est injective si et seulement $\det(L^T L) > 0$. En particulier, comme le déterminant est une application continue, on peut supposer dans la définition précédente que $\nabla f(x)$ est injective pour tout $x \in U$, quitte à diminuer l'ouvert U.

De même, quitte à réduire encore l'ouvert U, on peut également supposer que la fonction $x \mapsto \nabla f(x)$ est bornée sur U de sorte que, par le théorème des accroissements finis, la fonction f est Lipschitzienne sur U.

Théorème 3.3.6 (Formule de l'aire). *Soient $U \subset \mathbb{R}^k$ et $f : U \to \mathbb{R}^N$ (avec $k \leq N$) une fonction Lipschitzienne, de classe $\mathcal{C}^1$ et injective telle que, pour tout $x \in U$, $\nabla f(x)$ est une application linéaire injective de $\mathbb{R}^k$ dans $\mathbb{R}^N$. Alors pour tout ensemble Borélien $E \subset U$, on a*

$$\mathcal{H}^k(f(E)) = \int_E \sqrt{\det(\nabla f(x)^T \nabla f(x))}\, dx.$$

Démonstration. **Etape 1.** Commençons par établir que $f(E)$ est $\mathcal{H}^k$-mesurable. Par régularité intérieure de la mesure de Lebesgue, il existe une suite de compacts $K_i \subset E$ telle que $\mathcal{L}^k(E \setminus K_i) \to 0$. Par conséquent, f étant de classe $\mathcal{C}^1$, il vient

$$\mathcal{H}^k\left(f(E) \setminus \bigcup_{i=0}^{\infty} f(K_i)\right) \leq \mathcal{H}^k\left(f\left(E \setminus \bigcup_{i=0}^{\infty} K_i\right)\right) \leq [\mathrm{Lip}(f)]^k \mathcal{L}^k\left(E \setminus \bigcup_{i=0}^{\infty} K_i\right) = 0.$$

Comme f est continue et K_i compact, $f(K_i) \subset \mathbb{R}^N$ est compact et $\bigcup_i f(K_i) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$. Par conséquent $f(E)$ est $\mathcal{H}^k$-mesurable comme union d'un ensemble Borélien et d'un ensemble de mesure $\mathcal{H}^k$ nulle.

Etape 2. Supposons d'abord que $f = L$ est une application linéaire injective. On utilise la décomposition polaire pour décomposer $L = O \circ S$ où $S : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$ est une application linéaire inversible, symétrique, définie positive et $O : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^N$ est une application orthogonale. En effet, l'application linéaire $L^T L : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$ est inversible (car injective), symétrique et définie positive. Par le théorème de décomposition spectrale, il existe une base orthonormée $\{e_1, \ldots, e_k\}$ de $\mathbb{R}^k$ et des réels $\lambda_1, \ldots, \lambda_k > 0$ tels que $(L^T L)e_i = \lambda_i e_i$ pour tout $i = 1, \ldots, k$, de sorte que $L^T L = \sum_{i=1}^k \lambda_i e_i \otimes e_i$. On pose alors

$$S := \sum_{i=1}^k \sqrt{\lambda_i} e_i \otimes e_i$$

qui définit une application linéaire $S : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$ inversible, symétrique et définie positive. Posons alors $O := L \circ S^{-1}$ et $v_i := O(e_i) = \frac{1}{\sqrt{\lambda_i}} L(e_i) \in \mathbb{R}^N$. Par construction, $\{v_1, \ldots, v_k\}$ forme un système orthonormé de $\mathbb{R}^N$ ce qui montre que O est une application orthogonale.

On définit la mesure de Radon positive $\nu(E) := \mathcal{H}^k(L(E))$ pour tout Borélien $E \subset U$. Comme $\nu(E) \leq [\mathrm{Lip}(L)]^k \mathcal{L}^k(E)$, on en déduit que ν est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue $\mathcal{L}^k$ et le théorème de différentiation de Besicovitch montre que $\nu = \kappa\mathcal{L}^k$ où

$$\kappa(x) = \lim_{\varrho\to 0} \frac{\nu(B_\varrho(x))}{\omega_k \varrho^k} \quad \text{pour } \mathcal{L}^k\text{-presque tout } x \in U.$$

Or

$$\nu(B_\varrho(x)) = \mathcal{H}^k(L(x) + \varrho L(B_1)) = \varrho^k \mathcal{H}^k(L(B_1))$$

d'où $\kappa(x) = \mathcal{H}^k(L(B_1))/\omega_k$ est constante. Montrons à présent que $\kappa = \sqrt{\det(L^T L)}$. En utilisant la décomposition polaire et le fait que O est une rotation (en particulier une isométrie),

$$\kappa = \frac{\mathcal{H}^k(O \circ S(E))}{\mathcal{L}^k(E)} = \frac{\mathcal{H}^k(S(E))}{\mathcal{L}^k(E)} = \frac{\mathcal{L}^k(S(E))}{\mathcal{L}^k(E)}$$

car $S(E) \subset \mathbb{R}^k$ et $\mathcal{H}^k = \mathcal{L}^k$ sur $\mathbb{R}^k$. En choisissant en particulier

$$E = Q = \{x \in \mathbb{R}^k : \ 0 \leq x \cdot e_i \leq 1 \text{ pour tout } 1 \leq i \leq k\}$$

(le cube unité de $\mathbb{R}^k$ orienté suivant la base $\{e_1, \ldots, e_k\}$), on a que

$$S(Q) = \{y \in \mathbb{R}^k : \ 0 \leq y \cdot e_i \leq \sqrt{\lambda_i} \text{ pour tout } 1 \leq i \leq k\}$$

et donc $\mathcal{L}^k(S(Q)) = \prod_{i=1}^k \sqrt{\lambda_i} = \det(S) = \sqrt{\det(L^T L)}$ ce qui conclut la preuve de la formule de l'aire dans le cas linéaire.

Etape 3. Considérons enfin le cas général d'une fonction $f : U \to \mathbb{R}^N$ de classe $\mathcal{C}^1$ injective telle que $\nabla f(x)$ est injective pour tout $x \in U$. Pour simplifier les notations, on pose $J_f := \sqrt{\det(\nabla f^T \nabla f)}$. Soit K un compact tel que $K \subset U$. Comme f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur U, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que si x, y et $z \in K$ satisfont $|x - y| \leq \delta$ et $|x - z| \leq \delta$, alors

$$|J_f(x) - J_f(y)| \leq \varepsilon, \quad |f(x) - f(y) - \nabla f(z)(y - x)| \leq \varepsilon |\nabla f(z)(x - y)|.$$

En effet, la première condition résulte de l'uniforme continuité de J_f sur le compact K. La deuxième condition se démontre par l'absurde sur supposant l'existence de $\varepsilon_0 > 0$ et de trois suites $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ et $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ dans K telles que $|x_n - y_n| \leq 1/n \to 0$, $|x_n - z_n| \leq 1/n \to 0$ et $o(|x_n - y_n|) = |f(x_n) - f(y_n) - \nabla f(z_n)(x_n - y_n)| > \varepsilon_0 |\nabla f(z_n)(y_n - x_n)|$. On a en particulier que $x_n \neq y_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. De plus, quitte à extraire une sous-suite (car K est compact), on peut supposer que $x_n \to x$, $y_n \to y$, $z_n \to z$ (avec $x = y = z$) et $v_n = (x_n - y_n)/|x_n - y_n| \to v$ avec $|v| = 1$. D'ou $o(1) \geq \varepsilon_0 |\nabla f(z_n)(v_n)|$ puis par passage à la limite $0 = \varepsilon_0 |\nabla f(x)(v)|$. Par conséquent, $v \in \mathbb{S}^{N-1}$ appartient au noyau de $\nabla f(x)$, ce qui est impossible par injectivite de $\nabla f(x)$.

En particulier, pour $\varepsilon < 1$, on a

$$|f(x) - f(y)| \geq |\nabla f(z)(x - y)| - |f(x) - f(y) - \nabla f(z)(y - x)| \geq (1 - \varepsilon)|\nabla f(z)(y - x)|$$

et

$$|f(x) - f(x)| \leq |\nabla f(z)(x - y)| + |f(x) - f(y) - \nabla f(z)(y - x)| \leq (1 + \varepsilon)|\nabla f(z)(y - x)|.$$

Soit $K = \bigcup_{i=1}^m A_i$ une partition Borélienne de K telle que $\mathrm{diam}(A_i) \leq \delta$. On fixe $z_i \in A_i$ et on pose $L_i := \nabla f(z_i)$. Par hypothèse $L_i : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^N$ est une application linéaire injective et pour tout x, $y \in A_i$,

$$(1 - \varepsilon)|L_i(x - y)| \leq |f(x) - f(y)| \leq (1 + \varepsilon)|L_i(x - y)|,$$

ce qui montre que

$$\mathrm{Lip}_{L_i(A_i)}(f|_{A_i} \circ L_i^{-1}) \leq 1 + \varepsilon, \quad \mathrm{Lip}_{f(A_i)}(L_i \circ (f|_{A_i})^{-1}) \leq \frac{1}{1-\varepsilon}.$$

En utilisant le fait que f est injective, on en déduit que $f(E \cap K) = \bigcup_{i=1}^m f(E \cap A_i)$ d'où

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}^k(f(E \cap K)) &= \sum_{i=1}^m \mathcal{H}^k(f(E \cap A_i)) = \sum_{i=1}^m \mathcal{H}^k((f \circ L_i^{-1})(L_i(E \cap A_i))) \\
&\leq (1+\varepsilon)^k \sum_{i=1}^m \mathcal{H}^k(L_i(E \cap A_i)) = (1+\varepsilon)^k \sum_{i=1}^m \int_{E \cap A_i} J_f(z_i)\, dx \\
&\leq (1+\varepsilon)^k \sum_{i=1}^m \int_{E \cap A_i} J_f(x)\, dx + \varepsilon(1+\varepsilon)^k \mathcal{L}^k(K) \\
&= (1+\varepsilon)^k \int_{E \cap K} J_f(x)\, dx + \varepsilon(1+\varepsilon)^k \mathcal{L}^k(K).
\end{aligned}$$

De même,

$$\begin{aligned}
\int_{E \cap K} J_f(x)\, dx &= \sum_{i=1}^m \int_{E \cap A_i} J_f(x)\, dx \leq \sum_{i=1}^m \int_{E \cap A_i} J_f(z_i)\, dx + \varepsilon \mathcal{L}^k(K) \\
&= \sum_{i=1}^m \mathcal{H}^k(L_i(E \cap A_i)) + \varepsilon \mathcal{L}^k(K) = \sum_{i=1}^m \mathcal{H}^k((L_i \circ (f|_{A_i})^{-1}) f(E \cap A_i)) + \varepsilon \mathcal{L}^k(K) \\
&\leq \frac{1}{(1-\varepsilon)^k} \sum_{i=1}^m \mathcal{H}^k(f(E \cap A_i)) + \varepsilon \mathcal{L}^k(K) = \frac{1}{(1-\varepsilon)^k} \mathcal{H}^k(f(E \cap K)) + \varepsilon \mathcal{L}^k(K).
\end{aligned}$$

Par passage à la limite quand $\varepsilon \to 0$, on obtient

$$\mathcal{H}^k(f(E \cap K)) = \int_{E \cap K} J_f(x)\, dx,$$

puis, en choisissant $W = K_n$ où K_n une suite croissante de compacts tels que $\bigcup_n K_n = U$ et en passant à la limite quand $n \to \infty$, on en déduit que

$$\mathcal{H}^k(f(E)) = \int_E J_f(x)\, dx,$$

ce qui conclut la preuve de la formule de l'aire. □

Remarque 3.3.7. (i) Si $k = 1$, la formule de l'aire permet de retrouver la formule du calcul de la longueur d'une courbe

$$\mathcal{H}^1(f(E)) = \int_E |f'(t)|\, dt.$$

(ii) Si $k = N-1$ et $f(x) = (x, a(x))$ où $a : \mathbb{R}^{N-1} \to \mathbb{R}$ est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$, la formule de l'aire permet de retrouver la formule de l'aire du graphe de a

$$\mathcal{H}^{N-1}(\{(x, a(x)) :\ x \in E\}) = \int_E \sqrt{1 + |\nabla a(x)|^2}\, dx.$$

Cette formule (de même que la formule de l'aire en général) reste vraie pour des fonctions a seulement Lipschitziennes en utilisant le théorème de Rademacher qui stipule qu'une fonction Lipschtzienne est différentiable presque partout.

On rappelle la définition d'espace tangent à une sous-variété ainsi qu'une caractérisation en terme de paramétrisation locale.

Définition 3.3.8. Soit M une sous-variété de $\mathbb{R}^N$ de dimension k et de classe $\mathcal{C}^1$. Pour tout $x_0 \in M$, l'*espace tangent* à M en x_0, noté $T_{x_0}M$, est défini par

$$T_{x_0}M := \Big\{v \in \mathbb{R}^N : \text{ il existe un intervalle ouvert } I \text{ contenant } 0 \text{ et } \gamma \in \mathcal{C}^1(I;\mathbb{R}^N) \text{ tels que } \gamma(I) \subset M,\ \gamma(0) = x_0,\ \gamma'(0) = v\Big\}.$$

Proposition 3.3.9. *Soit M une sous-variété de $\mathbb{R}^N$ de dimension k et de classe $\mathcal{C}^1$. Alors, pour tout $x_0 \in M$, $T_{x_0}M$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^N$ de dimension k et si f désigne une paramétrisation locale de M en $x_0 = f(0)$, alors*

$$T_{x_0}M = \nabla f(0)(\mathbb{R}^k).$$

Démonstration. Soit U un voisinage ouvert de 0 dans $\mathbb{R}^k$, V un voisinage ouvert de x_0 dans $\mathbb{R}^N$ et $f : U \to V$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$, injective telle que $f(0) = x_0$, $\nabla f(0)$ est une application linéaire injective et $f : U \to V \cap M$ est un homéomorphisme. On commence par montrer qu'il existe un ouvert W contenant x_0 dans $\mathbb{R}^N$ et un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme $\varphi : W \to \mathbb{R}^N$ tels que

$$\varphi(M \cap W) = \varphi(W) \cap (\mathbb{R}^k \times \{0\}). \tag{3.3.1}$$

En effet, pour tout $(x, y) \in U \times \mathbb{R}^{N-k}$, on pose $g(x, y) = f(x) + (0, y)$ ce qui définit une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $U \times \mathbb{R}^{N-k}$. De plus, $g(0, 0) = x_0$ et $\nabla g(x, y)(h_1, h_2) = \nabla f(x)(h_1) + (0, h_2)$ pour tout $(x, y) \in U \times \mathbb{R}^{N-k}$ et tout $h = (h_1, h_2) \in \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{N-k}$. En particulier $\nabla f(0)$ étant injective, on obtient que l'application linéaire $\nabla g(0, 0) : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ est injective et donc bijective. Le théorème d'inversion locale montre alors que g est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme local au voisinage de $(0, 0)$. En particulier, il existe donc un ouvert $U' \subset U$ contenant 0 dans $\mathbb{R}^k$, un ouvert V' contenant 0 dans $\mathbb{R}^{N-k}$ un ouvert W contenant x_0 dans $\mathbb{R}^N$ et un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme $\varphi : W \to U' \times V'$ tels que

$$\varphi(f(x) + (0, y)) = (x, y) \quad \text{ pour tout } (x, y) \in U' \times V'.$$

En particulier, en prenant $y = 0$, on obtient que $\varphi(f(U')) = (U' \times V') \cap (\mathbb{R}^k \times \{0\})$, ce qui montre effectivement (3.3.1).

Montrons maintenant que $T_{x_0}M$ est un sous espace vectoriel de dimension k dans $\mathbb{R}^N$. Si $v \in T_{x_0}M$, il existe un intervalle ouvert I contenant 0 et $\gamma \in \mathcal{C}^1(I;\mathbb{R}^N)$ tels que $\gamma(I) \subset M$, $\gamma(0) = x_0$ et $\gamma'(0) = v$. Quitte à restreindre l'intervalle I, on peut supposer que $\gamma(I) \subset W$. On peut alors définir $\tilde\gamma(t) = \varphi(\gamma(t))$ pour tout $t \in I$ de sorte que $\tilde\gamma$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I. Comme $\gamma(t) \in M \cap W$ pour tout $t \in I$, alors $\tilde\gamma(t) \in \varphi(W) \cap (\mathbb{R}^k \times \{0\})$ et donc $\tilde\gamma'(0) = \nabla\varphi(\gamma(0))(\gamma'(0)) = \nabla\varphi(x_0)(v) \in \mathbb{R}^k \times \{0\}$. On en déduit que $v \in (\nabla\varphi(x_0))^{-1}(\mathbb{R}^k \times \{0\})$, soit $T_{x_0}M \subset (\nabla\varphi(x_0))^{-1}(\mathbb{R}^k \times \{0\})$.

Pour montrer l'autre inclusion, fixons un élément $w \in \mathbb{R}^k \times \{0\}$. Comme $\varphi(W)$ est ouvert contenant $\varphi(x_0)$, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $\varphi(x_0) + tw \in \varphi(W)$ pour tout $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$. On définit alors

$$\begin{array}{rcl} \gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) & \to & \mathbb{R}^N \\ t & \mapsto & \varphi^{-1}(\varphi(x_0) + tw) \end{array}$$

qui est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$. Comme $\varphi(x_0) + tw \in \varphi(W) \cap (\mathbb{R}^k \times \{0\})$ pour tout $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ et $\varphi(M \cap W) = \varphi(W) \cap [\mathbb{R}^k \times \{0\}]$, on en déduit que $\gamma(t) \in M \cap W$ pour tout $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$. De plus $\gamma(0) = x_0$. Par définition de l'espace tangent, on doit avoir que $\gamma'(0) = \nabla(\varphi^{-1})(\varphi(x_0))(w) = (\nabla\varphi(x_0))^{-1}(w) \in T_{x_0}M$. On a donc bien établi que $\nabla\varphi(x_0)^{-1}(\mathbb{R}^k \times \{0\}) \subset T_{x_0}M$.

Comme $T_{x_0}M = (\nabla\varphi(x_0))^{-1}(\mathbb{R}^k \times \{0\})$ et $\nabla\varphi(x_0)$ est une application linéaire inversible de $\mathbb{R}^N$ dans $\mathbb{R}^N$, on en déduit que $T_{x_0}M$ est un sous-espace vectoriel de dimension k dans $\mathbb{R}^N$.

Montrons enfin la caractérisation en terme de paramétrisation locale. Soit $v \in \mathbb{R}^k$, comme U est un ouvert de $\mathbb{R}^k$ contenant 0, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $tv \in U$ pour tout $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$. On définit alors

$$\begin{array}{rcl} \gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) & \to & \mathbb{R}^N \\ t & \mapsto & f(tv). \end{array}$$

Comme $f(U) = M \cap V$, on en déduit que $\gamma(t) \in M$ pour tout $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$. De plus, la fonction γ est de classe $\mathcal{C}^1$ et satisfait $\gamma(0) = f(0) = x_0$. Par définition de l'espace tangent, on a $\gamma'(0) = \nabla f(0)(v) \in T_{x_0}M$, ce qui montre que $\mathrm{Im}(\nabla f(0)) \subset T_{x_0}M$. On sait déjà que $T_{x_0}M$ est un sous espace vectoriel de dimension k dans $\mathbb{R}^N$. Comme, par ailleurs, $\nabla f(0) : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^N$ est une application linéaire injective, on en déduit que $\mathrm{Im}(\nabla f(0))$ est un sous-espace vectoriel de dimension k dans $\mathbb{R}^N$. On a donc montré que $T_{x_0}M = \mathrm{Im}(\nabla f(0))$. $\square$

Il est possible de caractériser l'espace tangent en terme de limite faible* de mesure.

Proposition 3.3.10. *Soit M une sous-variété de classe $\mathcal{C}^1$ de $\mathbb{R}^N$ de dimension k. Pour tout $x_0 \in M$, la famille de mesures $\{\mu_{x_0,\varrho}\}_{\varrho>0}$ définie par*

$$\int_{\mathbb{R}^N} \varphi \, d\mu_{x_0,\varrho} := \frac{1}{\varrho^k} \int_M \varphi\left(\frac{x - x_0}{\varrho}\right) d\mathcal{H}^k(x) \quad \text{pour tout } \varphi \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^N),$$

converge localement faible dans $\mathcal{M}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^N)$ vers la mesure $\mathcal{H}^k \llcorner T_{x_0}M$.*

Démonstration. Soit $x_0 \in M$, U un voisinage ouvert de 0, V un voisinage ouvert de x_0 dans $\mathbb{R}^N$ et $f : U \to V$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$, injective telle que $f(0) = x_0$, $\nabla f(0)$ est une application linéaire injective et $f : U \to V \cap M$ est un homéomorphisme. Pour tout $\varphi \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^N)$, on considère $\varrho > 0$ assez petit de sorte que $x_0 + \varrho\,\mathrm{Supp}(\varphi) \subset V$, d'où

$$\int_{\mathbb{R}^N} \varphi \, d\mu_{x_0,\varrho} = \frac{1}{\varrho^k} \int_M \varphi\left(\frac{x - x_0}{\varrho}\right) d\mathcal{H}^k(x) = \frac{1}{\varrho^k} \int_{f(U)} \varphi\left(\frac{x - x_0}{\varrho}\right) d\mathcal{H}^k(x).$$

D'après la formule de l'aire et la formule de changement de variable, on obtient en posant $J_f := \sqrt{\det(\nabla f^T \nabla f)}$

$$\int_{\mathbb{R}^N} \varphi \, d\mu_{x_0,\varrho} = \frac{1}{\varrho^k} \int_U \varphi\left(\frac{f(y) - f(0)}{\varrho}\right) J_f(y)\, dy = \int_{\mathbb{R}^k} \mathbf{1}_U(\varrho z)\varphi\left(\frac{f(\varrho z) - f(0)}{\varrho}\right) J_f(\varrho z)\, dz.$$

Comme U est ouvert, φ est continue et f est de classe $\mathcal{C}^1$, il vient pour tout $z \in \mathbb{R}^k$,

$$u_\varrho(z) := \mathbf{1}_U(\varrho z)\varphi\left(\frac{f(\varrho z) - f(0)}{\varrho}\right) J_f(\varrho z) \to \varphi(\nabla f(0)(z)) J_f(0).$$

Afin de passer à la limite sous le signe intégral, il convient de montrer que u_ϱ satisfait la propriété de domination. Par injectivité de $\nabla f(0)$, on a que

$$m = \min_{w \in \mathbb{S}^{N-1}} |\nabla f(0)(w)| > 0.$$

La différentiabilité de f en 0 montre que pour tout $\varepsilon \in (0, m/2)$, il existe $r_0 > 0$ tel que pour tout $y \in B_{r_0}$

$$|f(y) - f(0)| \geq |\nabla f(0)(y)| - \varepsilon|y| \geq (m - \varepsilon)|y| \geq \frac{m}{2}|y|.$$

Par ailleurs, l'injectivité de f montre que

$$\varepsilon_0 := \inf_{y \in U \setminus B_{r_0}} |f(y) - f(0)| > 0$$

de sorte que, pour tout $y \in U$,

$$|f(y) - f(0)| \geq \lambda |y| \quad \text{où} \quad \lambda := \min \left\{ \frac{m}{2}, \frac{\varepsilon_0}{\mathrm{diam}(U)} \right\}.$$

Soit $R > 0$ tel que $\mathrm{Supp}(\varphi) \subset B_R$. Alors, $\mathrm{Supp}(u_\varrho) \subset B_{R/\lambda}$ et donc $|u_\varrho| \leq \|\varphi\|_\infty \|J_f\|_\infty \mathbf{1}_{B_{R/\lambda}}$. Nous sommes alors en mesure d'appliquer le théorème de la convergence dominée qui implique que

$$\int_{\mathbb{R}^N} \varphi \, d\mu_{x_0,\varrho} \to \int_{\mathbb{R}^k} \varphi(\nabla f(0)(z)) J_f(0) \, dz = \int_{\nabla f(0)(\mathbb{R}^k)} \varphi(x) \, d\mathcal{H}^k(x) = \int_{T_{x_0} M} \varphi \, d\mathcal{H}^k,$$

où l'on a de nouveau utilisé la formule de l'aire appliquée à l'application linéaire $z \mapsto \nabla f(0)(z)$. □

3.4 Ensembles rectifiables

Nous allons à présent introduire la notion d'ensemble rectifiable qui généralise celle de sous-variété et sur laquelle il est toujours possible de définir un plan tangent au sens de la mesure.

Définition 3.4.1. Un sous ensemble M de $\mathbb{R}^N$ est *(dénombrablement) $\mathcal{H}^k$-rectifiable* s'il existe un ensemble exceptionnel $Z \subset \mathbb{R}^N$ tel que $\mathcal{H}^k(Z) = 0$ et des sous-variétés M_i de $\mathbb{R}^N$ de dimension k et de classe $\mathcal{C}^1$ tels que

$$M \subset \bigcup_{i \in \mathbb{N}} M_i \cup Z.$$

Définition 3.4.2. Soit $M \subset \mathbb{R}^N$ un ensemble $\mathcal{H}^k$-rectifiable tel que $\mathcal{H}^k(M \cap K) < \infty$ pour tout compact $K \subset \mathbb{R}^N$ et $x_0 \in M$. Pour tout $\varrho > 0$, on définit la mesure $\mu_{x_0,\varrho}$ par

$$\int_{\mathbb{R}^N} \varphi \, d\mu_{x_0,\varrho} := \frac{1}{\varrho^k} \int_M \varphi \left(\frac{x - x_0}{\varrho} \right) d\mathcal{H}^k(x) \quad \text{pour tout } \varphi \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^N).$$

On dit que M admet un *espace tangent approché* en x_0 s'il existe un sous-espace vectoriel π_{x_0} de $\mathbb{R}^N$ de dimension k, tel que $\mu_{x_0,\varrho} \rightharpoonup \mathcal{H}^k \llcorner \pi_{x_0}$ localement faible* dans $\mathcal{M}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^N)$.

Théorème 3.4.3. *Soit $M \subset \mathbb{R}^N$ un ensemble $\mathcal{H}^k$-rectifiable tel que $\mathcal{H}^k(M \cap K) < \infty$ pour tout compact $K \subset \mathbb{R}^N$. Alors, M admet un espace tangent approché en $\mathcal{H}^k$-presque tout $x \in M$ et*

$$\lim_{\varrho \to 0} \frac{\mathcal{H}^k(M \cap B_\varrho(x))}{\omega_k \varrho^k} = 1 \quad \mathcal{H}^k\text{-p.p. tout } x \in M.$$

Démonstration du théorème 3.4.3. Sans restreindre la généralité, on suppose que $\mathcal{H}^k(M) < \infty$. On écrit M sous la forme $M \subset \bigcup_{i \in \mathbb{N}} M_i \cup Z$, où $\mathcal{H}^k(Z) = 0$ et, pour tout $i \in \mathbb{N}$, M_i est une sous-variété de $\mathbb{R}^N$, de dimension k et de classe $\mathcal{C}^1$. On sait déjà d'après la Proposition 3.3.10 que pour tout $i \in \mathbb{N}$, tout $x_0 \in M_i$ et pour tout $\varphi \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^N)$,

$$\frac{1}{\varrho^k} \int_{M_i} \varphi \left(\frac{x - x_0}{\varrho} \right) d\mathcal{H}^k(x) \to \int_{T_{x_0} M_i} \varphi \, d\mathcal{H}^k,$$

On sait par ailleurs d'après la Proposition 3.2.7 que pour tout $i \in \mathbb{N}$, il existe un ensemble $Z_i \subset \mathbb{R}^N$ (indépendant de φ) tel que $\mathcal{H}^k(Z_i) = 0$ et, pour tout $x_0 \in (M \cap M_i) \setminus Z_i$,

$$\frac{\mathcal{H}^k(B_\varrho(x_0) \cap (M \triangle M_i))}{\varrho^k} \to 0$$

et donc, en particulier pour tout $\varphi \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^N)$,

$$\frac{1}{\varrho^k} \int_{M \triangle M_i} \varphi\left(\frac{x - x_0}{\varrho}\right) d\mathcal{H}^k(x) \to 0.$$

Par conséquent, pour tout $x_0 \in (M \cap M_i) \setminus Z_i$, on a

$$\int_{\mathbb{R}^N} \varphi \, d\mu_{x_0,\varrho} = \frac{1}{\varrho^k} \int_M \varphi\left(\frac{x - x_0}{\varrho}\right) d\mathcal{H}^k(x) \to \int_{T_{x_0} M_i} \varphi \, d\mathcal{H}^k.$$

Soit donc $Z_* := Z \cup \bigcup_i Z_i$ qui satisfait $\mathcal{H}^k(Z_*) = 0$. On a donc montré que pour tout $x_0 \in M \setminus Z_*$, il existe un sous-espace vectoriel π_{x_0} de $\mathbb{R}^N$ de dimension k tel que $\mu_{x_0,\varrho} \rightharpoonup \mathcal{H}^k \llcorner \pi_{x_0}$ localement faible* dans $\mathcal{M}_{\text{loc}}(\mathbb{R}^N)$. Comme en particulier $\mathcal{H}^k(\pi_{x_0} \cap \partial B_1) = 0$, on en déduit que

$$\frac{\mathcal{H}^k(B_\varrho(x_0) \cap M)}{\varrho^k} = \mu_{x_0,\varrho}(B_1) \to \mathcal{H}^k(\pi_{x_0} \cap B_1) = \omega_k,$$

ce qui conclut la preuve du résultat. $\square$

La proposition suivante établit une propriété de localité de l'espace tangent approché.

Proposition 3.4.4. *Soient M_1 et M_2 deux ensembles $\mathcal{H}^k$-rectifiables tels que $\mathcal{H}^k(M_1 \cap K) < \infty$ et $\mathcal{H}^k(M_2 \cap K) < \infty$ pour tout compact $K \subset \mathbb{R}^N$. Alors, pour $\mathcal{H}^k$-presque tout $x \in M_1 \cap M_2$,*

$$T_x M_1 = T_x M_2.$$

Démonstration. On suppose sans restreindre la généralité que $\mathcal{H}^{N-1}(M_1) < \infty$ et $\mathcal{H}^{N-1}(M_2) < \infty$. D'après la Proposition 3.2.7, pour $\mathcal{H}^k$-presque tout $x \in M_1 \cap M_2$, on a

$$\lim_{\varrho \to 0} \frac{\mathcal{H}^k((M_1 \triangle M_2) \cap B_\varrho(x))}{\varrho^k} = 0.$$

Par conséquent, pour tout $\varphi \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^N)$, si $\text{Supp}(\varphi) \subset B_R$, on a

$$\left| \frac{1}{\varrho^k} \int_{M_1} \varphi\left(\frac{x - x_0}{\varrho}\right) d\mathcal{H}^k - \frac{1}{\varrho^k} \int_{M_2} \varphi\left(\frac{x - x_0}{\varrho}\right) d\mathcal{H}^k \right| \le \|\varphi\|_\infty \frac{\mathcal{H}^k((M_1 \triangle M_2) \cap B_{\varrho R}(x_0))}{\varrho^k} \to 0.$$

Comme $T_x M_1$ existe $\mathcal{H}^k$-p.p. tout $x \in M_1$ et $T_x M_2$ existe $\mathcal{H}^k$-p.p. tout $x \in M_2$, on en déduit que $T_x M_1 = T_x M_2$ $\mathcal{H}^k$-p.p. tout $x \in M_1 \cap M_2$. $\square$

Chapitre 4

Ensembles de périmètre fini

4.1 Définition et propriétés

Définition 4.1.1. Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un ouvert. Un ensemble Lebesgue mesurable $E \subset \mathbb{R}^N$ est de *périmètre fini dans* Ω si $D\chi_E \in \mathcal{M}(\Omega; \mathbb{R}^N)$. On définit alors le *périmètre de* E *dans* Ω par

$$P(E, \Omega) := |D\chi_E|(\Omega) = \sup \left\{ \int_E \mathrm{div}\varphi \, dx : \; \varphi \in \mathcal{C}_c^1(\Omega; \mathbb{R}^N), \; |\varphi| \leq 1 \right\}.$$

Exemple 4.1.2. Si $E \subset \mathbb{R}^N$ est un ouvert borné de frontière de classe $\mathcal{C}^1$ (par morceaux), alors E est de périmètre fini dans Ω et $D\chi_E = \nu_E \mathcal{H}^{N-1} \llcorner (\partial E \cap \Omega)$ où ν_E désigne la normale unitaire intérieure à E. En effet, si $\varphi \in \mathcal{C}_c^1(\Omega; \mathbb{R}^N)$, en utilisant la formule de la divergence, il vient

$$\int_E \mathrm{div}\varphi \, dx = -\int_{\partial E \cap \Omega} \varphi \cdot \nu_E \, d\mathcal{H}^{N-1},$$

ce qui montre bien que $D\chi_E = \nu_E \mathcal{H}^{N-1} \llcorner (\partial E \cap \Omega)$. Par ailleurs, une application immédiate de la Proposition 1.1.9 montre que $|D\chi_E| = \mathcal{H}^{N-1} \llcorner (\partial E \cap \Omega)$ si bien que

$$P(E, \Omega) = |D\chi_E|(\Omega) = \mathcal{H}^{N-1}(\partial E \cap \Omega).$$

En appliquant l'injection de Sobolev (théorème 2.3.1) aux fonctions caractéristiques d'ensembles de périmètre fini on obtient la fameuse inégalité isopérimétrique.

Théorème 4.1.3 (Inégalité isopérimétrique). *Il existe une constante $\gamma_N > 0$ qui ne dépend que de la dimension telle que pour tout ensemble E de périmètre fini dans $\mathbb{R}^N$ avec $\mathcal{L}^N(E) < \infty$,*

$$\mathcal{L}^N(E)^{\frac{N-1}{N}} \leq \gamma_N P(E, \mathbb{R}^N).$$

Le résultat suivant de compacité est une conséquence immédiate du théorème de Rellich pour les fonctions BV.

Théorème 4.1.4 (Rellich). *Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un ouvert borné. De toute suite $\{E_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ d'ensembles de périmètre fini dans Ω telle que*

$$\sup_{k \in \mathbb{N}} \left\{ \mathcal{L}^N(E_k) + P(E_k, \Omega) \right\} < \infty,$$

on peut extraire une sous-suite $\{E_{k_j}\}_{j \in \mathbb{N}}$ telle que $\chi_{E_{k_j}} \to \chi_E$ fortement dans $L^1(\Omega)$ et $D\chi_{E_{k_j}} \rightharpoonup D\chi_E$ faible dans $\mathcal{M}(\Omega; \mathbb{R}^N)$, où E est un ensemble de périmètre fini dans Ω tel que $\mathcal{L}^N(E) < \infty$.*

Démonstration. Si $u_k = \chi_{E_k}$, le théorème 2.3.3 montre que $\chi_{E_{k_j}} \to u$ dans $L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ (en donc aussi $\mathcal{L}^N$-presque partout quitte à extraire une sous-suite) et $Du_k \rightharpoonup Du$ faible* dans $\mathcal{M}(\Omega;\mathbb{R}^N)$. Par conséquent, $u(x) \in \{0,1\}$ pour $\mathcal{L}^N$-presque tout $x \in \Omega$ et donc, il existe un ensemble E mesurable tel que $u = \chi_E$. D'après le Lemme de Fatou, il vient $\mathcal{L}^N(E) < \infty$. Comme par ailleurs $P(E,\Omega) < \infty$, on en déduit que $u = \chi_E \in BV(\Omega)$.

Il reste à montrer la convergence dans tout $L^1(\Omega)$. Pour ce faire, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un compact $K \subset \Omega$ tel que $\mathcal{L}^N(\Omega \setminus K) \leq \varepsilon$. On considère alors un ouvert borné et Lipschitzien ω tel que $K \subset \omega \subset \overline{\omega} \subset \Omega$. Alors, on a

$$\int_\Omega |\chi_{E_k} - \chi_E|\, dx \leq \int_\omega |\chi_{E_k} - \chi_E|\, dx + 2\mathcal{L}^N(\Omega \setminus \omega) \leq \int_\omega |\chi_{E_k} - \chi_E|\, dx + 2\varepsilon.$$

Par passage à la limite quand $k \to \infty$ puis $\varepsilon \to 0$, on obtient bien que $\chi_{E_k} \to \chi_E$ dans $L^1(\Omega)$. □

Un cas particulier de l'inégalité de Sobolev-Poincaré-Wirtinger dans BV est le cas où $\Omega = B_\varrho(x_0)$ et u est la fonction caractéristique d'un ensemble de périmètre fini. On obtient une version localisée de l'inégalité isopérimétrique.

Théorème 4.1.5 (Inégalité isopérimétrique relative). *Il existe une constante $C_N > 0$, ne dépendant que de la dimension, telle que pour tout ensemble E de périmètre fini dans $\mathbb{R}^N$, pour tout $x_0 \in \mathbb{R}^N$ et tout $\varrho > 0$,*

$$\min\{\mathcal{L}^N(B_\varrho(x_0) \cap E), \mathcal{L}^N(B_\varrho(x_0) \setminus E)\}^{\frac{N-1}{N}} \leq C_N P(E, B_\varrho(x_0)).$$

Démonstration. Si E est un ensemble de périmètre fini dans $\mathbb{R}^N$, alors $u := \chi_E \in BV(B_\varrho(x_0))$. Posons $v(y) := u(x_0 + \rho y)$ pour $y \in B_1$ de sorte que $v \in BV(B_1)$. D'après l'inégalité de Sobolev-Poincaré-Wirtinger, il existe une constante dimensionnelle $C_N > 0$ telle que

$$\|v - v_{B_1}\|_{L^{\frac{N}{N-1}}(B_1)} \leq C_N |Dv|(B_1).$$

Par changement de variable, il vient

$$\|u - u_{B_\varrho(x_0)}\|_{L^{\frac{N}{N-1}}(B_\varrho(x_0))} \leq C_N |Du|(B_\varrho(x_0)),$$

ou encore

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^N(B_\varrho(x_0) \cap E)^{\frac{N-1}{N}} \left(\frac{\mathcal{L}^N(B_\varrho(x_0) \setminus E)}{\mathcal{L}^N(B_\varrho(x_0))}\right) + \mathcal{L}^N(B_\varrho(x_0) \setminus E)^{\frac{N-1}{N}} \left(\frac{\mathcal{L}^N(B_\varrho(x_0) \cap E)}{\mathcal{L}^N(B_\varrho(x_0))}\right)& \\ \leq C_N P(E, B_\varrho(x_0)).&\end{aligned}$$

Si $\mathcal{L}^N(B_\varrho(x_0) \cap E) \leq \mathcal{L}^N(B_\varrho(x_0) \setminus E)$, alors $\mathcal{L}^N(B_\varrho(x_0) \setminus E) \geq \frac{1}{2}\mathcal{L}^N(B_\varrho(x_0))$ et il vient

$$\begin{aligned} C_N P(E, B_\varrho(x_0)) &\geq \mathcal{L}^N(B_\varrho(x_0) \cap E)^{\frac{N-1}{N}} \left(\frac{\mathcal{L}^N(B_\varrho(x_0) \setminus E)}{\mathcal{L}^N(B_\varrho(x_0))}\right) \\ &\geq \frac{1}{2}\mathcal{L}^N(B_\varrho(x_0) \cap E)^{\frac{N-1}{N}}. \end{aligned}$$

L'autre cas se démontre de manière analogue. □

4.2 Applications

4.2.1 Le problème isopérimétrique

Le *problème isopérimétrique* consiste à minimiser le périmètre d'un ensemble à volume prescrit. Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un ouvert borné et $0 < m \leq \mathcal{L}^N(\Omega)$, on cherche à résoudre le problème de minimisation

$$\alpha := \inf\left\{P(E,\Omega) :\ E \subset \Omega \text{ mesurable tel que } \mathcal{L}^N(E) = m\right\}.$$

En choisissant $r > 0$ tel que $\mathcal{L}^N(\Omega \cap B_r) = m$, on a alors que

$$0 \leq \alpha \leq P(\Omega \cap B_r, \Omega) = P(B_r, \Omega) = \mathcal{H}^{N-1}(\Omega \cap \partial B_r) < \infty.$$

Par la méthode directe du calcul des variations, si $\{E_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite minimisante, le théorème de Rellich montre qu'à extraction d'une sous-suite près, on a $\chi_{E_k} \to \chi_E$ dans $L^1(\Omega)$ où $E \subset \Omega$ est un ensemble de périmètre fini dans Ω satisfaisant $\mathcal{L}^N(E) = m$ et $P(E,\Omega) = \alpha$.

Si $\Omega = \mathbb{R}^N$, il est possible de montrer que le problème de minimisation précédent admet toujours des solutions données par les boules de volume m.

4.2.2 Le problème de Cheeger

Un autre exemple d'application est le *problème de Cheeger*. Soient $p > 0$, $N \geq 2$ et $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un ouvert borné. Le p-problème de Cheeger dans Ω est le problème variationnel suivant :

$$C_p(\Omega) := \inf\left\{\frac{P(E,\mathbb{R}^N)}{\mathcal{L}^N(E)^p} :\ E \subset \Omega\right\},$$

avec la convention $\frac{P(E,\mathbb{R}^N)}{\mathcal{L}^N(E)^p} = \infty$ si $\mathcal{L}^N(E) = 0$. Toute solution de ce problème de minimisation est appelé un p-ensemble de Cheeger. Notons tout d'abord que $C_p(\Omega) < \infty$, ce qui se vérifie en prenant $E = B$ une boule contenue dans Ω.

Si $p < (N-1)/N$, alors $C_p(\Omega) = 0$. En effet, si $B_\varepsilon \subset \Omega$ est une boule de rayon $\varepsilon > 0$, alors

$$C_p(\Omega) \leq \frac{P(B_\varepsilon,\mathbb{R}^N)}{\mathcal{L}^N(B_\varepsilon)^p} = \varepsilon^{N-1-Np}\frac{P(B,\mathbb{R}^N)}{\mathcal{L}^N(B)^p} \to 0$$

quand $\varepsilon \to 0$. Par conséquent, s'il existait un ensemble $E \subset \Omega$ (de périmètre fini dans $\mathbb{R}^N$) tel que

$$0 = C_p(\Omega) = \frac{P(E,\mathbb{R}^N)}{\mathcal{L}^N(E)^p},$$

alors $P(E,\mathbb{R}^N) = |D\chi_E|(\mathbb{R}^N) = 0$ et donc χ_E serait constant sur $\mathbb{R}^N$. Si $\chi_E = 1$, on aurait alors que $E = \mathbb{R}^N$ ce qui est impossible puisque $E \subset \Omega$ et Ω est borné. Si en revanche $\chi_E = 0$, alors $\mathcal{L}^N(E) = 0$ ce qui est également impossible. Ceci montre qu'un p-ensemble de Cheeger ne peut pas exister quand $p < (N-1)/N$.

Supposons maintenant que $p \geq (N-1)/N$. Si $E \subset \Omega$, en utilisant l'inégalité isopérimétrique, on obtient que

$$\mathcal{L}^N(E)^p \leq \mathcal{L}^N(E)^{\frac{N-1}{N}}\mathcal{L}^N(\Omega)^{p-\frac{N-1}{N}} \leq \gamma_N P(E,\mathbb{R}^N)\mathcal{L}^N(\Omega)^{p-\frac{N-1}{N}},$$

où $\gamma_N > 0$ est une constante dimensionnelle, ce qui montre que

$$C_p(\Omega) \geq \frac{\mathcal{L}^N(\Omega)^{\frac{N-1}{N}-p}}{\gamma_N} > 0.$$

Considérons alors une suite minimisante $\{E_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ tels que $E_k \subset \Omega$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ et

$$\frac{P(E_k,\mathbb{R}^N)}{\mathcal{L}^N(E_k)^p} \to C_p(\Omega).$$

Comme Ω est borné, on a $\mathcal{L}^N(E_k) \leq \mathcal{L}^N(\Omega)$, et $P(E_k,\mathbb{R}^N) \leq (C_p(\Omega)+1)\mathcal{L}^N(E_k)^p \leq (C_p(\Omega)+1)\mathcal{L}^N(\Omega)^p$ pour k assez grand. On en déduit que $\{\chi_{E_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ est bornée dans $BV(\mathbb{R}^N)$. D'après le théorème de Rellich, quitte à extraire une sous-suite, on peut supposer que $\chi_{E_k} \to \chi_E$ dans $L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^N)$ où $\chi_E \in BV(\mathbb{R}^N)$. Comme $E_k \subset \Omega$, alors $\mathcal{L}^N(E_k \setminus \Omega) = 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ puis, par passage à la limite quand $k \to \infty$, on obtient que $\mathcal{L}^N(E \setminus \Omega) = 0$. Par conséquent, on peut modifier E sur un ensemble de $\mathcal{L}^N$-mesure nulle près (et donc sans changer sa mesure de Lebesgue ni son périmètre) pour assurer que $E \subset \Omega$. De plus, on a $\mathcal{L}^N(E_k) \to \mathcal{L}^N(E)$ et, par semicontinuité inférieure du périmètre $P(E,\mathbb{R}^N) \leq \liminf_k P(E_k,\mathbb{R}^N)$. Par conséquent,

$$C_p(\Omega) \leq \frac{P(E,\mathbb{R}^N)}{\mathcal{L}^N(E)^p} \leq \liminf_{k\to\infty} \frac{P(E_k,\mathbb{R}^N)}{\mathcal{L}^N(E_k)^p} = C_p(\Omega),$$

ce qui montre que E est un p-ensemble de Cheeger. Si $p = N/(N-1)$, il est possible de montrer que toutes les boules contenues dans Ω sont les seuls p-ensembles de Cheeger.

4.3 Formule de la co-aire

La formule de la co-aire permet de reconstruire l'intégrale $\int_\Omega |\nabla u|\,dx$ pour une fonction (régulière) u à partir de la mesure de ses ensembles de niveau. Nous donnons ici une version "faible" pour les fonctions à variation bornée pour calculer la variation totale $|Du|(\Omega)$ d'une fonction $u \in BV(\Omega)$ où la mesure des ensembles de niveau est remplacée par le périmètre des ensembles $\{u > t\}$.

Théorème 4.3.1 (Fleming-Rishel). *Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un ouvert et $u \in BV(\Omega)$. Alors les ensembles $\{u > t\}$ sont de périmètre fini dans Ω pour $\mathcal{L}^1$-presque tout $t \in \mathbb{R}$ et, pour tout Borélien $A \subset \Omega$,*

$$|Du|(A) = \int_{\mathbb{R}} |D\chi_{\{u>t\}}|(A)\,dt, \tag{4.3.1}$$

$$Du(A) = \int_{\mathbb{R}} D\chi_{\{u>t\}}(A)\,dt. \tag{4.3.2}$$

Démonstration. On pose $E_t := \{u > t\}$. Quitte à modifier u sur un ensemble de mesure $\mathcal{L}^N$ nulle, on peut supposer que u est une fonction Borélienne sur Ω, ce qui fait de $\{u > t\}$ un Borélien de Ω. Il vient alors que les fonctions $(x,t) \mapsto u(x) - t$ et $(x,t) \mapsto \chi_{\{u>t\}}(x)$ sont Boréliennes sur $\Omega \times \mathbb{R}$. D'après le théorème de Fubini, pour tout $\varphi \in \mathcal{C}^1_c(\Omega;\mathbb{R}^N)$ avec $|\varphi| \leq 1$, la fonction

$$t \mapsto \int_\Omega \chi_{E_t}(x)\,\mathrm{div}\varphi(x)\,dx$$

est alors Borélienne sur $\mathbb{R}$. Si D est un ensemble dénombrable dense dans $\mathcal{C}^1_c(\Omega;\mathbb{R}^N)$, on en déduit que

$$t \mapsto P(E_t,\Omega) = \sup_{\varphi\in D,\,|\varphi|\leq 1} \left\{ \int_\Omega \chi_{E_t}(x)\,\mathrm{div}\varphi(x)\,dx \right\}$$

est Borélienne sur $\mathbb{R}$.

Etape 1. Pour tout $x \in \Omega$, on a

$$u(x) = \int_{\mathbb{R}^+} \chi_{E_t}(x)\,dt - \int_{\mathbb{R}^-} (1 - \chi_{E_t}(x))\,dt.$$

Par conséquent, pour tout $\varphi \in \mathcal{C}^1_c(\Omega;\mathbb{R}^N)$ avec $|\varphi| \leq 1$, on obtient que

$$\int_\Omega u(x)\,\mathrm{div}\varphi(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}}\int_\Omega \chi_{E_t}(x)\,\mathrm{div}\varphi(x)\,dx\,dt \leq \int_{\mathbb{R}} P(E_t,\Omega)\,dt. \tag{4.3.3}$$

Par passage au supremum parmi toutes les fonctions test φ, il vient

$$|Du|(\Omega) \leq \int_{\mathbb{R}} P(E_t,\Omega)\,dt.$$

Etape 2. Pour montrer l'autre inégalité, on suppose d'abord que u est une fonction affine et continue par morceaux. Il existe alors une partition de $\mathbb{R}^N$ en N-simplexes $A_1,\dots,A_m$ d'intérieurs deux à deux disjoints et des fonctions affines $x \mapsto f_i(x) := a_i \cdot x + b_i$ telles que

$$u(x) = f_i(x) \quad \text{pour tout } x \in A_i.$$

On a alors d'une part que

$$\int_\Omega |\nabla u|\,dx = \sum_{i=1}^m \mathcal{L}^N(A_i \cap \Omega)|a_i|.$$

D'autre part, notant alors $e_i := a_i/|a_i|$, la formule changement de variable donne

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} \mathcal{H}^{N-1}(\Omega \cap \{u=t\})\,dt &= \sum_{i=1}^m \int_{\mathbb{R}} \mathcal{H}^{N-1}(A_i \cap \Omega \cap \{u=t\})\,dt \\
&= \int_{\mathbb{R}} \mathcal{H}^{N-1}(\{x \in A_i \cap \Omega :\ a_i \cdot x + b_i = t\})\,dt \\
&= |a_i| \int_{\mathbb{R}} \mathcal{H}^{N-1}(\{x \in A_i \cap \Omega :\ e_i \cdot x = s\})\,ds,
\end{aligned}$$

puis, en vertu du théorème de Fubini,

$$\int_{\mathbb{R}} \mathcal{H}^{N-1}(\Omega \cap \{u=t\})\,dt = |a_i|\mathcal{L}^N(A_i \cap \Omega),$$

ce qui montre que

$$\int_\Omega |\nabla u|\,dx = \int_{\mathbb{R}} \mathcal{H}^{N-1}(\Omega \cap \{u=t\})\,dt.$$

L'ensemble $\{u>t\}$ étant un ouvert à frontière polyhédrique, on a $|D\chi_{\{u>t\}}|(\Omega) = \mathcal{H}^{N-1}(\Omega \cap \{u = t\})$ et donc

$$\int_\Omega |\nabla u|\,dx = \int_{\mathbb{R}} |D\chi_{\{u>t\}}|(\Omega)\,dt.$$

On suppose maintenant que $u \in W^{1,1}(\Omega)$. Si U est un ouvert borné tel que $\overline{U} \subset \Omega$, on approche u par une suite $\{u_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ de fonctions continues affines par morceaux dans $W^{1,1}(U)$. On a alors que pour tout $j \in \mathbb{N}$,

$$\int_U |\nabla u_j|\,dx = \int_{\mathbb{R}} |D\chi_{\{u_j>t\}}|(U)\,dt.$$

Comme

$$\int_{\mathbb{R}}\int_\Omega |\chi_{\{u_j>t\}} - \chi_{\{u>t\}}|\,dx\,dt = \int_{\mathbb{R}} \mathcal{L}^N(\{u>t\}\triangle\{u_j>t\})\,dt = \int_\Omega |u_j - u|\,dx \to 0,$$

on en déduit que, pour une sous-suite et pour tout $\mathcal{L}^1$-presque tout $t \in \mathbb{R}$, on a $\chi_{\{u_j>t\}} \to \chi_{\{u>t\}}$ dans $L^1(\Omega)$. Par passage à la limite quand $j \to \infty$, en utilisant la semi-continuité inférieure du périmètre et le Lemme de Fatou, on obtient que

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} P(\{u>t\},U)\,dt &\leq \int_{\mathbb{R}} \liminf_{j\to\infty} P(\{u_j>t\},U)\,dt\\ &\leq \liminf_{j\to\infty} \int_{\mathbb{R}} P(\{u_j>t\},U)\,dt\\ &= \lim_{j\to\infty}\int_U |\nabla u_j|\,dx = \int_U |\nabla u|\,dx.\end{aligned}$$

Enfin, en considérant une suite croissante $\{U_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ d'ouverts bornés tels que $\overline{U}_n \subset U_{n+1}$ et $\bigcup_n U_n = \Omega$, on obtient par convergence monotone quand $n \to \infty$

$$\int_{\mathbb{R}} P(\{u>t\},\Omega)\,dt \leq \int_\Omega |\nabla u|\,dx.$$

Enfin, si $u \in BV(\Omega)$, on considère une suite $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{C}^\infty(\Omega)\cap BV(\Omega) \subset W^{1,1}(\Omega)$ telle que $u_k \to u$ dans $L^1(\Omega)$ et $|Du_k|(\Omega) \to |Du|(\Omega)$. Par le même raisonnement que précédemment, on a

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} P(\{u>t\},\Omega)\,dt &\leq \int_{\mathbb{R}} \liminf_{k\to\infty} P(\{u_k>t\},\Omega)\,dt\\ &\leq \liminf_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}} P(\{u_k>t\},\Omega)\,dt\\ &= \lim_{k\to\infty}\int_\Omega |\nabla u_k|\,dx = |Du|(\Omega).\end{aligned}$$

Cette deuxième inégalité montre que, si $u \in BV(\Omega)$, alors $P(E_t,\Omega) < \infty$ pour $\mathcal{L}^1$-presque tout $t \in \mathbb{R}$, et donc que $\{u>t\}$ est de périmètre fini dans Ω pour $\mathcal{L}^1$-presque tout $t \in \mathbb{R}$.

Etape 3. Si $A \subset \Omega$ est un Borélien, par régularité extérieure, pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un ouvert $U \supset A$ tel que $|Du|(U \setminus A) \leq \varepsilon$. En reprenant la démonstration précédente, on obtient que

$$\int_{\mathbb{R}} |D\chi_{\{u>t\}}|(A)\,dt \leq \int_{\mathbb{R}} |D\chi_{\{u>t\}}|(U)\,dt = |Du|(U) \leq |Du|(A)+\varepsilon$$

puis, en faisant tendre $\varepsilon \to 0$, que

$$\int_{\mathbb{R}} |D\chi_{\{u>t\}}|(A)\,dt \leq |Du|(A).$$

Comme

$$A \in \mathcal{B}(\Omega) \mapsto |Du|(A) - \int_{\mathbb{R}} |D\chi_{\{u>t\}}|(A)\,dt$$

est une mesure positive et de masse totale nulle, il vient finalement que

$$\int_{\mathbb{R}} |D\chi_{\{u>t\}}|(A)\,dt = |Du|(A),$$

ce qui établit (4.3.1). Enfin, (4.3.3) implique que

$$\int_\Omega \varphi\cdot dDu = -\int_\Omega u\,\mathrm{div}\varphi\,dx = -\int_{\mathbb{R}}\int_\Omega \chi_{E_t}\,\mathrm{div}\varphi\,dx\,dt = \int_{\mathbb{R}}\left(\int_\Omega \varphi\cdot dD\chi_{E_t}\right)dt$$

pour tout $\varphi \in \mathcal{C}^1_c(\Omega;\mathbb{R}^N)$ ce qui montre (4.3.2). □

Un cas particulier important concerne le cas où $u(x) = |x|$ qui est une fonction appartenant à $BV(B_R)$ pour tout $R > 0$ dont la dérivée distributionnelle est donnée par la fonction $\nabla u(x) = x/|x|$. Donc ce cas, les ensembles de sur-niveau de u sont donnés par

$$\{u > r\} = \mathbb{R}^N \setminus \overline{B}_r.$$

Comme ces ensembles sont réguliers, pour tout $r < R$ et tout Borélien $A \subset B_R$, on a

$$|D\chi_{\{u>r\}}|(A) = \mathcal{H}^{N-1}(\partial B_r \cap A) = r^{N-1}\mathcal{H}^{N-1}(\mathbb{S}^{N-1} \cap (A/r)).$$

Une application immédiate de la formule de la co-aire donne alors que pour tout Borélien borné $A \subset \mathbb{R}^N$,

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^N(A) = \int_{\mathbb{R}^+} \mathcal{H}^{N-1}(\partial B_r \cap A)\, dr &= \int_{\mathbb{R}^+} \int_{\partial B_r} \chi_A(x)\, d\mathcal{H}^{N-1}(x)\, dr \\ &= \int_{\mathbb{R}^+} \int_{\mathbb{S}^{N-1}} \chi_A(ry) r^{N-1}\, d\mathcal{H}^{N-1}(y)\, dr.\end{aligned}$$

Par approximation, si $g : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^+$ est une fonction Borélienne, on a

$$\int_{\mathbb{R}^N} g(x)\, dx = \int_{\mathbb{R}^+} \int_{\partial B_r} g(x)\, d\mathcal{H}^{N-1}(x)\, dr = \int_{\mathbb{R}^+} \int_{\mathbb{S}^{N-1}} g(ry) r^{N-1}\, d\mathcal{H}^{N-1}(y)\, dr,$$

ce qui correspond à la formule de changement de variables en coordonnées polaires en dimension quelconque.

4.4 Frontière réduite

Nous allons montrer que tout ensemble de périmètre fini possède une structure similaire à un ensemble régulier au sens où sa dérivée distributionnelle est concentrée sur un sous-ensemble dénombrablement $\mathcal{H}^{N-1}$-rectifiable sur lequel il est possible de définir une normale approchée.

Dans la suite de cette section, $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ est un ouvert et E est un ensemble de périmètre fini dans Ω.

Définition 4.4.1. La *frontière réduite* $\partial^* E$ est l'ensemble des points $x_0 \in \Omega \cap \mathrm{Supp}(|D\chi_E|)$ tels que la limite

$$\lim_{\varrho \to 0} \frac{D\chi_E(B_\varrho(x_0))}{|D\chi_E|(B_\varrho(x_0))} =: \nu_E(x_0)$$

existe et satisfait $|\nu_E(x_0)| = 1$. La fonction $\nu_E : \partial^* E \to \mathbb{S}^{N-1}$ s'appelle la *normale intérieure généralisée.*

Remarque 4.4.2. (i) D'après le Corollaire 1.4.7 sur la décomposition polaire d'une mesure vectorielle, on a

$$|D\chi_E|(\Omega \setminus \partial^* E) = 0,$$

autrement dit, $D\chi_E$ est concentrée sur $\partial^* E$, et

$$D\chi_E = \nu_E |D\chi_E|.$$

(ii) Comme $\mathrm{Supp}(|D\chi_E|) \subset \partial E$, on en déduit que $\partial^* E \subset \partial E$.

(iii) Comme les fonctions $x \mapsto D\chi_E(B_\varrho(x))$ et $x \mapsto |D\chi_E|(B_\varrho(x))$ sont Boréliennes sur Ω, on en déduit que $\partial^* E$ est un Borélien de Ω et que la fonction $\nu_E : \partial^* E \to \mathbb{S}^{N-1}$ est Borélienne.

Lemme 4.4.3. *Il existe des constantes $A_1, \dots, A_5 > 0$ telles que pour tout $x_0 \in \partial^* E$,*

(i) $\displaystyle\liminf_{\varrho\to 0} \frac{\mathcal{L}^N(B_\varrho(x_0)\cap E)}{\varrho^N} > A_1$,

(ii) $\displaystyle\liminf_{\varrho\to 0} \frac{\mathcal{L}^N(B_\varrho(x_0)\setminus E)}{\varrho^N} > A_2$,

(iii) $\displaystyle\liminf_{\varrho\to 0} \frac{|D\chi_E|(B_\varrho(x_0))}{\varrho^{N-1}} > A_3$,

(iv) $\displaystyle\limsup_{\varrho\to 0} \frac{|D\chi_E|(B_\varrho(x_0))}{\varrho^{N-1}} \le A_4$,

(v) $\displaystyle\limsup_{\varrho\to 0} \frac{|D\chi_{E\cap B_\varrho(x_0)}|(\mathbb{R}^N)}{\varrho^{N-1}} \le A_5$.

Démonstration. **Etape 1.** Soit $x_0 \in \partial^* E$, on pose $\delta := \mathrm{dist}(x_0, \partial\Omega)$. On commence par montrer que pour $\mathcal{L}^1$-presque tout $\varrho \in (0,\delta)$,

$$|D\chi_{E\cap B_\varrho(x_0)}|(\mathbb{R}^N) \le |D\chi_E|(B_\varrho(x_0)) + \mathcal{H}^{N-1}(E\cap \partial B_\varrho(x_0)). \tag{4.4.1}$$

Soit $\varphi \in \mathcal{C}^1_c(\mathbb{R}^N;\mathbb{R}^N)$ et $g(t) = \chi_{[0,\varrho)}(t)$ de sorte que $\chi_{B_\varrho(x_0)}(y) = g(|y-x_0|)$. On régularise la fonction caractéristique en posant

$$g_\varepsilon(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \le t \le \varrho, \\ \frac{\varrho+\varepsilon-t}{\varepsilon} & \text{si } \varrho \le t \le \varrho+\varepsilon, \\ 0 & \text{si } t \ge \varrho+\varepsilon, \end{cases}$$

de sorte que

$$g'_\varepsilon(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \le t < \varrho, \\ -\frac{1}{\varepsilon} & \text{si } \varrho < t < \varrho+\varepsilon, \\ 0 & \text{si } t > \varrho+\varepsilon. \end{cases}$$

On pose alors $h_\varepsilon(y) = g_\varepsilon(|y-x_0|)$ qui définit une fonction Lipschitzienne et satisfait

$$\nabla h_\varepsilon(y) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \le |y-x_0| < \varrho \text{ ou } |y-x_0| > \varrho+\varepsilon, \\ -\frac{1}{\varepsilon}\frac{y-x_0}{|y-x_0|} & \text{si } \varrho < |y-x_0| < \varrho+\varepsilon. \end{cases}$$

Par conséquent, comme $h_\varepsilon\varphi$ est Lipschtzienne et $\mathrm{Supp}(h_\varepsilon\varphi) \subset \Omega$, on a

$$-\int_\Omega h_\varepsilon\varphi\cdot dD\chi_E = \int_E \mathrm{div}(h_\varepsilon\varphi)\,dy = \int_E h_\varepsilon \mathrm{div}\varphi\,dy - \frac{1}{\varepsilon}\int_{E\cap\{y\in\Omega:\varrho<|y-x_0|<\varrho+\varepsilon\}} \varphi(y)\cdot\frac{y-x_0}{|y-x_0|}\,dy.$$

D'après la formule de la co-aire et le théorème de différentiation de Besicovitch, on a pour $\mathcal{L}^1$-presque tout $\varrho > 0$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\varepsilon}\int_{E\cap\{y\in\Omega:\varrho<|y-x_0|<\varrho+\varepsilon\}} \varphi(y)\cdot\frac{y-x_0}{|y-x_0|}\,dy &= \frac{1}{\varepsilon}\int_\varrho^{\varrho+\varepsilon}\int_{E\cap\partial B_r(x_0)} \varphi(y)\cdot\frac{y-x_0}{|y-x_0|}\,d\mathcal{H}^{N-1}(y)\,dr \\ &\to \int_{E\cap\partial B_\varrho(x_0)} \varphi(y)\cdot\frac{y-x_0}{|y-x_0|}\,d\mathcal{H}^{N-1}(y). \end{aligned}$$

Par passage à la limite quand $\varepsilon \to 0$, on en déduit que

$$\int_{E\cap B_\varrho(x_0)} \mathrm{div}\varphi\,dy = -\int_{B_\varrho(x_0)} \varphi\cdot dD\chi_E + \int_{E\cap\partial B_\varrho(x_0)} \varphi(y)\cdot\frac{y-x_0}{|y-x_0|}\,d\mathcal{H}^{N-1}(y). \tag{4.4.2}$$

Par passage au supremum par rapport à $\varphi \in \mathcal{C}_c^1(\mathbb{R}^N;\mathbb{R}^N)$ tels que $|\varphi| \le 1$, on en déduit (4.4.1).

Etape 2. Dans (4.4.2), on choisit $\varphi = \nu_E(x_0)$ dans $B_\varrho(x_0)$. On obtient alors

$$\nu_E(x_0)\cdot D\chi_E(B_\varrho(x_0)) = \int_{E\cap\partial B_\varrho(x_0)} \nu_E(x_0)\cdot\nu(y)\,d\mathcal{H}^{N-1}(y).$$

Comme $x_0 \in \partial^* E$,

$$\lim_{\varrho\to 0} \nu_E(x_0)\cdot\frac{D\chi_E(B_\varrho(x_0))}{|D\chi_E|(B_\varrho(x_0))} = |\nu_E(x_0)|^2 = 1.$$

Il existe donc $\varrho_0 = \varrho_0(x_0) \in (0,\delta)$ tel que pour $\mathcal{L}^1$-presque tout $\varrho < \varrho_0$, $|\nu_E(x_0)\cdot D\chi_E(B_\varrho(x_0))| \ge \frac{1}{2}|D\chi_E|(B_\varrho(x_0))$ de sorte que

$$|D\chi_E|(B_\varrho(x_0)) \le 2\mathcal{H}^{N-1}(E\cap\partial B_\varrho(x_0))$$

puis, en reportant dans (4.4.1),

$$|D\chi_{E\cap B_\varrho(x_0)}|(\mathbb{R}^N) \le 3\mathcal{H}^{N-1}(E\cap\partial B_\varrho(x_0)).$$

Comme $\mathcal{H}^{N-1}(E\cap\partial B_\varrho(x_0)) \le \mathcal{H}^{N-1}(\partial B_\varrho(x_0)) = \varrho^{N-1}\mathcal{H}^{N-1}(\partial B_1(0))$, les deux dernières inégalités donnent (iv) et (v).

Etape 3. D'après la formule de la co-aire, on a

$$g(\varrho) := \int_0^\varrho \mathcal{H}^{N-1}(\partial B_r(x_0)\cap E)\,dr = \mathcal{L}^N(E\cap B_\varrho(x_0)) < \infty,$$

et en vertu du théorème de différentiation de Besicovitch, pour $\mathcal{L}^1$-presque tout $\varrho > 0$,

$$g'(\varrho) = \mathcal{H}^{N-1}(\partial B_\varrho(x_0)\cap E).$$

D'après l'inégalité isopérimétrique,

$$\begin{aligned} g(\varrho)^{\frac{N-1}{N}} &= \mathcal{L}^N(E\cap B_\varrho(x_0))^{\frac{N-1}{N}} \\ &\le \gamma_N |D\chi_{E\cap B_\varrho(x_0)}|(\mathbb{R}^N) \\ &\le 3\gamma_N\mathcal{H}^{N-1}(E\cap\partial B_\varrho(x_0)) \\ &= 3\gamma_N g'(\varrho). \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\frac{1}{3\gamma_N} \le g(\varrho)^{\frac{1-N}{N}} g'(\varrho) = N[g(\varrho)^{\frac{1}{N}}]'$$

de sorte que

$$g(\varrho)^{\frac{1}{N}} \ge \frac{\varrho}{3N\gamma_N}.$$

On en déduit que pour $\mathcal{L}^1$-presque tout $\varrho \in (0,\varrho_0)$

$$\mathcal{L}^N(E\cap B_\varrho(x_0)) = g(\varrho) \ge \frac{\varrho^N}{(3N\gamma_N)^N},$$

ce qui établit (i). Comme pour tout $\varphi \in \mathcal{C}_c^1(\Omega;\mathbb{R}^N)$

$$0 = \int_\Omega \mathrm{div}\varphi\,dy = \int_E \mathrm{div}\varphi\,dy + \int_{\Omega\setminus E}\mathrm{div}\varphi\,dy,$$

on en déduit que $D\chi_E = -D\chi_{\Omega\setminus E}$ et de que $P(\Omega \setminus E, \Omega) = P(E, \Omega) < \infty$, ce qui montre que $\Omega \setminus E$ est un ensemble de périmètre fini dans Ω. Comme $\partial^*(\Omega \setminus E) = \partial^* E$, l'argument précédent appliqué à $\Omega \setminus E$ montre alors la validité de (ii).

L'inégalité isopérimétrique relative montre ensuite que

$$\begin{aligned}
\liminf_{\varrho\to 0} \frac{|D\chi_E|(B_\varrho(x_0))}{\varrho^{N-1}} &\geq C \min\left\{\liminf_{\varrho\to 0} \frac{\mathcal{L}^N(E\cap B_\varrho(x_0))}{\varrho^N}, \liminf_{\varrho\to 0} \frac{\mathcal{L}^N(B_\varrho(x_0)\setminus E)}{\varrho^N}\right\}^{\frac{N-1}{N}} \\
&\geq C \min\{A_1, A_2\}^{\frac{N-1}{N}},
\end{aligned}$$

ce qui implique (iii). □

Le résultat suivant permet de montrer que $\mathcal{H}^{N-1} \llcorner \partial^* E$ est une mesure absolument continue par rapport à $|D\chi_E|$.

Lemme 4.4.4. *Il existe une constante $c_N > 0$ telle que pour tout Borélien $A \subset \Omega$,*

$$\mathcal{H}^{N-1}(A \cap \partial^* E) \leq c_N |D\chi_E|(A).$$

Démonstration. On utilise un argument de recouvrement. Par régularité extérieure de $|D\chi_E|$, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un ouvert $U \subset \Omega$ contenant A tel que

$$|D\chi_E|(U) \leq |D\chi_E|(A) + \varepsilon.$$

D'après le Lemme 4.4.3-(iii), pour tout $x \in A \cap \partial^* E$ et tout $\delta > 0$, il existe $\varrho_x \in (0, \delta)$ tel que $\overline{B}_{\varrho_x}(x) \subset U$ et $|D\chi_E|(B_{\varrho_x}(x)) > A_3 \varrho^{N-1}$. On pose

$$\mathcal{F} := \{\overline{B}_\varrho(x) : x \in A \cap \partial^* E,\ 0 < \varrho < \delta,\ \overline{B}_\varrho(x) \subset U,\ |D\chi_E|(B_\varrho(x)) > A_3 \varrho^{N-1}\},$$

ce qui définit un recouvrement de $A \cap \partial^* E$. D'après le théorème de recouvrement de Besicovitch, il existe ξ sous-recouvrements dénombrables disjoints $\mathcal{F}_1, \ldots, \mathcal{F}_\xi$ tels que

$$A \subset \bigcup_{i=1}^{\xi} \bigcup_{B\in\mathcal{F}_i} B.$$

En particulier,

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}^{N-1}_{2\delta}(A \cap \partial^* E) &\leq \omega_{N-1} \sum_{i=1}^{\xi} \sum_{B\in\mathcal{F}_i} \left(\frac{\operatorname{diam}(B)}{2}\right)^{N-1} \\
&= \frac{\omega_{N-1}}{A_3} \sum_{i=1}^{\xi} \sum_{B\in\mathcal{F}_i} |D\chi_E|(B) \\
&\leq \frac{\omega_{N-1}}{A_3} \sum_{i=1}^{\xi} |D\chi_E|(U) \\
&\leq \frac{\xi\omega_{N-1}}{A_3} (|D\chi_E|(A) + \varepsilon).
\end{aligned}$$

La conclusion suit par passage à la limite quand $\varepsilon \to 0$ et $\delta \to 0$. □

Nous allons à présent améliorer le résultat précédent en montrant qu'en fait $|D\chi_E| = \mathcal{H}^{N-1} \llcorner \partial^* E$.

Théorème 4.4.5 (De Giorgi - 1). *Soit $x_0 \in \partial^* E$, on pose $E_{x_0,\varrho} := (E - x_0)/\varrho$ et*

$$H^{\pm}(x_0) := \{y \in \mathbb{R}^N : \pm\nu_E(x_0) \cdot (y - x_0) > 0\}.$$

Alors

$$\chi_{E_{x_0,\varrho}} \to \chi_{H^+(0)} \qquad \textit{dans } L^1_{\rm loc}(\mathbb{R}^N).$$

De plus,

(i) $\displaystyle\lim_{\varrho\to 0} \frac{\mathcal{L}^N(B_\varrho(x_0) \cap E \cap H^-(x_0))}{\varrho^N} = 0$;

(ii) $\displaystyle\lim_{\varrho\to 0} \frac{\mathcal{L}^N(B_\varrho(x_0) \setminus E \cap H^+(x_0))}{\varrho^N} = 0$;

(iii) $\displaystyle\lim_{\varrho\to 0} \frac{|D\chi_E|(B_\varrho(x_0))}{\omega_{N-1}\varrho^{N-1}} = 1.$

Démonstration. On suppose pour simplifier que $x_0 = 0$, $\nu_E(0) = e_N = (0, \ldots, 0, 1)$ et on pose $E_\varrho := E_{0,\varrho}$, $H^\pm := H^\pm(0)$, $H_0 = e_N^\perp$.

Soit $R > 0$. Pour tout $\varphi \in \mathcal{C}^1_c(B_R; \mathbb{R}^N)$ avec $|\varphi| \le 1$, on a

$$\int_{E_\varrho} {\rm div}\varphi(x)\, dx = \frac{1}{\varrho^N}\int_E {\rm div}\varphi\left(\frac{y}{\varrho}\right) dy = \frac{1}{\varrho^{N-1}}\int_E {\rm div}\varphi_\varrho(y)\, dy \le \frac{|D\chi_E|(B_{R\varrho})}{\varrho^{N-1}} \le C_R$$

d'après le Lemme 4.4.3-(iv), où l'on a posé $\varphi_\varrho := \varphi(\frac{\cdot}{\varrho}) \in \mathcal{C}^1_c(B_{R\varrho}; \mathbb{R}^N)$. Par conséquent, $P(E_\varrho, B_R) \le C_R$, ce qui montre que la suite $\{\chi_{E_\varrho}\}_{\varrho>0}$ est bornée dans $BV(B_R)$ pour tout $R < \infty$. En utilisant le théorème de Rellich et un principe d'extraction diagonal, il existe une sous-suite et un ensemble de périmètre localement fini $F \subset \mathbb{R}^N$ tels que $\chi_{E_{\varrho_j}} \to \chi_F$ dans $L^1_{\rm loc}(\mathbb{R}^N)$ et $D\chi_{E_{\varrho_j}} \rightharpoonup D\chi_F$ localement faible* dans $\mathcal{M}_{\rm loc}(\mathbb{R}^N; \mathbb{R}^N)$. Quitte à extraire une nouvelle sous-suite, on peut également supposer que $|D\chi_{E_{\varrho_j}}| \rightharpoonup \lambda$ localement faible* dans $\mathcal{M}_{\rm loc}(\mathbb{R}^N)$ où λ est une mesure de Radon positive sur $\mathbb{R}^N$.

Pour tout $R > 0$, on a

$$|D\chi_{E_{\varrho_j}}|(B_R) = \frac{|D\chi_E|(B_{R\varrho_j})}{\varrho_j^{N-1}}, \quad D\chi_{E_{\varrho_j}}(B_R) = \frac{D\chi_E(B_{R\varrho_j})}{\varrho_j^{N-1}}, \tag{4.4.3}$$

de sorte que

$$e_N = \nu_E(0) = \lim_{j\to\infty} \frac{D\chi_E(B_{R\varrho_j})}{|D\chi_E|(B_{R\varrho_j})} = \lim_{j\to\infty} \frac{D\chi_{E_{\varrho_j}}(B_R)}{|D\chi_{E_{\varrho_j}}|(B_R)}.$$

Si on choisit $R > 0$ tel que $\lambda(\partial B_R) = 0$ (ce qui est satisfait sauf pour un ensemble dénombrable de rayons R), d'après la Proposition 1.3.4, on a $D\chi_{E_{\varrho_j}}(B_R) \to D\chi_F(B_R)$. Par ailleurs, la semicontinuité inférieure de la variation totale assure que

$$\begin{aligned} |D\chi_F|(B_R) &\le \liminf_{j\to\infty} |D\chi_{E_{\varrho_j}}|(B_R) \\ &\le \limsup_{j\to\infty} |D\chi_{E_{\varrho_j}}|(B_R) \\ &= \lim_{j\to\infty} e_N \cdot D\chi_{E_{\varrho_j}}(B_R) \\ &= e_N \cdot D\chi_F(B_R) \le |D\chi_F|(B_R), \end{aligned} \tag{4.4.4}$$

ce qui montre que $|D\chi_F|(B_R) = e_N \cdot D\chi_F(B_R) = \int_{B_R} (e_N \cdot \nu_F)\, d|D\chi_F|$. Comme $1 - e_N \cdot \nu_F \ge 0$, $|\nu_F| = 1$ et $|e_N| = 1$ $|D\chi_F|$-p.p. dans $\mathbb{R}^N$, on en déduit que

$$\nu_F = e_N \quad |D\chi_F|\text{-p.p. dans } \mathbb{R}^N.$$

En particulier, du fait que $D\chi_F = e_N|D\chi_F|$, il vient que $D_i\chi_F = 0$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$ pour tout $1 \leq i \leq N-1$, ce qui montre que la fonction χ_F ne dépend que de la variable x_N. Comme de plus $D_N\chi_F = |D\chi_F| \geq 0$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$, on en déduit que χ_F est en fait une fonction croissante de la variable x_N. Comme χ_F est une fonction caractéristique, il existe une constante $a \in \mathbb{R}$ telle que

$$F = \{x \in \mathbb{R}^N : x_N > a\}.$$

Si $a < 0$, alors $B_{|a|} \cap F = \emptyset$ et donc

$$0 = \mathcal{L}^N(B_{|a|} \cap F) = \lim_{j\to\infty} \mathcal{L}^N(B_{|a|} \cap E_{\varrho_j}) = \lim_{j\to\infty} \frac{\mathcal{L}^N(B_{|a|\varrho_j} \cap E)}{\varrho_j^N},$$

ce qui rentre en contradiction avec le Lemme (4.4.3)-(i). Par conséquent $a \geq 0$ et un argument analogue montre que $a \leq 0$, soit $a = 0$. Il vient alors que $F = H^+$ et comme la limite est indépendante de la sous-suite extraite, il n'y a pas besoin d'extraire de sous-suite.

Comme $\chi_{E_\varrho} \to \chi_{H^+}$ dans $L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^N)$, on a alors

$$\lim_{\varrho\to 0} \frac{\mathcal{L}^N(B_\varrho \cap E \cap H^-)}{\varrho^N} = \lim_{\varrho\to 0} \mathcal{L}^N(B_1 \cap E_\varrho \cap H^-) = \mathcal{L}^N(B_1 \cap H^+ \cap H^+-) = 0.$$

De même

$$\lim_{\varrho\to 0} \frac{\mathcal{L}^N(B_\varrho \setminus E \cap H^+)}{\varrho^N} = \lim_{\varrho\to 0} \mathcal{L}^N(B_1 \setminus E_\varrho \cap H^+) = \mathcal{L}^N(B_1 \setminus H^+ \cap H^+) = 0.$$

Enfin, on utilise (4.4.4) et il vient que

$$\lim_{\varrho\to 0} \frac{|D\chi_E|(B_{R\varrho})}{\varrho^{N-1}} = \lim_{\varrho\to 0} |D\chi_{E_\varrho}|(B_R) = |D\chi_{H^+}|(B_R) = \mathcal{H}^{N-1}(H_0 \cap B_R) = \omega_{N-1}R^{N-1},$$

ce qui conclut la preuve du théorème. □

Nous allons à présent montrer un résultat de structure des ensembles de périmètre fini. Celui-ci repose sur le résultat suivant que nous admettons (voir [2, Theorem 6.5-1]).

Théorème 4.4.6 (Extension de Whitney). *Soient $K \subset \mathbb{R}^N$ un compact et $f : K \to \mathbb{R}$, $d : K \to \mathbb{R}^N$ des fonctions continues. On suppose que*

$$\rho(\delta) := \sup\left\{\frac{|f(y) - f(x) - d(x)\cdot(y-x)|}{|y-x|} : x, y \in K, 0 < |x-y| < \delta\right\} \to 0$$

quand $\delta \to 0$. Alors il existe une fonction $\tilde{f} : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ telle que

$$\tilde{f} = f, \quad \nabla\tilde{f} = d \quad \text{sur } K.$$

Théorème 4.4.7 (De Giorgi - 2). *Soit $E \subset \mathbb{R}^N$ un ensemble de périmètre fini dans Ω. Alors*
(i) la frontière réduite ∂^*E est un ensemble dénombrablement $\mathcal{H}^{N-1}$-rectifiable ;
(ii) $T_x(\partial^*E) = \nu_E(x)^\perp$ pour $\mathcal{H}^{N-1}$-presque tout $x \in \partial^*E$;
(iii) $|D\chi_E| = \mathcal{H}^{N-1} \llcorner \partial^*E$, $D\chi_E = \nu_E\mathcal{H}^{N-1} \llcorner \partial^*E$;

Démonstration. D'après le théorème 4.4.5, on a pour tout $x \in \partial^*E$,

$$\lim_{\varrho\to 0} \frac{\mathcal{L}^N(B_\varrho(x) \cap E \cap H^-(x))}{\varrho^N} = 0, \quad \lim_{\varrho\to 0} \frac{\mathcal{L}^N(B_\varrho(x) \setminus E \cap H^+(x))}{\varrho^N} = 0. \tag{4.4.5}$$

D'après le théorème d'Egoroff, il existe des ensembles Boréliens deux à deux disjoints $\{F_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ tels que

$$|D\chi_E|\left(\partial^* E\setminus\bigcup_{i\in\mathbb{N}}F_i\right)=0$$

et les convergences (4.4.5) sont uniformes pour $x\in F_i$. D'après le théorème de Lusin, pour tout $i\in\mathbb{N}$, il existe des ensembles compacts deux à deux disjoints $\{G_i^j\}_{j\in\mathbb{N}}$ tels que

$$|D\chi_E|\left(F_i\setminus\bigcup_{j\in\mathbb{N}}G_i^j\right)=0$$

et $\nu_E|_{G_i^j}$ est continue sur G_i^j. On réindexe les ensembles $\{G_i^j\}_{i,j\in\mathbb{N}}$ en une famille de compacts $\{K_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ deux à deux disjoints tels que

$$\partial^* E=\bigcup_{j\in\mathbb{N}}K_j\cup Z,\quad |D\chi_E|(Z)=0,$$

les convergences (4.4.5) sont uniformes dans K_j et $\nu_E|_{K_j}$ est continue sur K_j. D'après le Lemme 4.4.4, on a $\mathcal{H}^{N-1}(Z)=0$.

Pour tout $j\in\mathbb{N}$ et $\delta>0$, on définit la quantité

$$\rho_j(\delta):=\sup\left\{\frac{|\nu_E(x)\cdot(y-x)|}{|y-x|}\ :\ x,y\in K_j,\, 0<|x-y|<\delta\right\}.$$

Montrons que $\rho_j(\delta)\to 0$ quand $\delta\to 0$. Soit $\varepsilon\in(0,1)$, il existe alors $\delta\in(0,1)$ tel que pour $z\in K_j$ et tout $\varrho<2\delta$,

$$\mathcal{L}^N(B_\varrho(z)\cap E\cap H^-(z))<\frac{\varepsilon^N}{2^{N+2}}\omega_N\varrho^N,\quad \mathcal{L}^N(B_\varrho(z)\cap E\cap H^+(z))>\left(\frac{1}{2}-\frac{\varepsilon^N}{2^{N+2}}\right)\omega_N\varrho^N. \tag{4.4.6}$$

Soient x, $y\in K_j$ tels que $0<|x-y|<\delta$.

Supposons que $\nu_E(x)\cdot(y-x)<-\varepsilon|x-y|$. Alors, du fait que $\varepsilon<1$, on a

$$B_{\varepsilon|x-y|}(y)\subset H^-(x)\cap B_{2|x-y|}(x). \tag{4.4.7}$$

En effet, si $z\in B_{\varepsilon|x-y|}(y)$, alors $|z-x|\le|z-y|+|y-x|<(1+\varepsilon)|x-y|<2|x-y|$ et donc $z\in B_{2|x-y|}(x)$. De plus

$$\nu_E(x)\cdot(z-x)=\nu_E(x)\cdot(y-x)+\nu_E(x)\cdot(z-y)<-\varepsilon|x-y|+|z-y|<0,$$

soit $z\in H^-(x)$. Par conséquent, en prenant $z=x$ et $\varrho=2|x-y|<2\delta$ dans (4.4.6), on a

$$\mathcal{L}^N(B_{2|x-y|}(x)\cap E\cap H^-(x))<\frac{\varepsilon^N}{2^{N+2}}\omega_N(2|x-y|)^N=\frac{\varepsilon^N\omega_N}{4}|x-y|^N,$$

et en prenant $z=y$ et $\varrho=\varepsilon|x-y|<2\delta$ dans (4.4.6), il vient

$$\mathcal{L}^N(E\cap B_{\varepsilon|x-y|}(y))\ge\mathcal{L}^N(E\cap B_{\varepsilon|x-y|}(y)\cap H^+(y))\ge\left(\frac{1}{2}-\frac{\varepsilon^N}{2^{N+2}}\right)\omega_N(\varepsilon|x-y|)^N>\frac{\varepsilon^N\omega_N}{4}|x-y|^N.$$

On obtient alors une contradiction en appliquant la mesure $\mathcal{L}^N\llcorner E$ à l'inclusion (4.4.7). De manière analogue, on aboutit à une contradiction si $\nu_E(x)\cdot(y-x)>\varepsilon|x-y|$. Par conséquent, le seul cas possible est $|\nu_E(x)\cdot(y-x)|\le\varepsilon|x-y|$ et on obtient alors que $\rho_j(\delta)\le\varepsilon$.

Montrons que, pour tout $j \in \mathbb{N}$, il existe une hypersurface M_j de classe $\mathcal{C}^1$ telle que $K_j \subset M_j$, ce qui démontrera la rectifiabilité de $\partial^* E$. Du fait que $\rho_j(\delta) \to 0$ quand $\delta \to 0$, le théorème d'extension de Whitney montre alors l'existence d'une fonction $f_j \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^N)$ telle que $f_j = 0$ et $\nabla f_j = \nu_E$ sur K_j. Soit alors

$$M_j = \left\{ x \in \mathbb{R}^N : f_j(x) = 0, \quad |\nabla f_j(x)| \geq \frac{1}{2} \right\}.$$

D'après le théorème des fonctions implicites, M_j est une hypersurface de classe $\mathcal{C}^1$. De plus $K_j \subset M_j$ puisque $f_j = 0$ et $|\nabla f_j| = |\nu_E| = 1 \geq \frac{1}{2}$ sur K_j. On a donc établi la rectifiabilité de $\partial^* E$. De plus, comme $T_x M_j = (\nabla f_j(x))^\perp$ pour tout $x \in M_j$, il vient par localité de l'espace tangent approché que

$$T_x(\partial^* E) = T_x M_j = (\nabla f_j(x))^\perp = \nu_E(x)^\perp \quad \text{pour } \mathcal{H}^{N-1}\text{-presque tout } x \in \partial^* E \cap K_j,$$

ce qui montre que $T_x(\partial^* E) = \nu_E(x)^\perp$ pour $\mathcal{H}^{N-1}$-presque tout $x \in \partial^* E$.

Enfin, d'après le théorème 3.4.3 et le théorème 4.4.5, pour $\mathcal{H}^{N-1}$-presque tout $x \in \partial^* E$, on a

$$\lim_{\varrho \to 0} \frac{\mathcal{H}^{N-1}(\partial^* E \cap B_\varrho(x))}{\omega_{N-1} \varrho^{N-1}} = \lim_{\varrho \to 0} \frac{|D\chi_E|(B_\varrho(x))}{\omega_{N-1} \varrho^{N-1}} = 1$$

ce qui implique que

$$\lim_{\varrho \to 0} \frac{\mathcal{H}^{N-1}(\partial^* E \cap B_\varrho(x))}{|D\chi_E|(B_\varrho(x))} = 1.$$

Comme $\mathcal{H}^{N-1} \llcorner \partial^* E$ est absolument continue par rapport à $|D\chi_E|$, le théorème de différentiation de Besicovitch montre que $\mathcal{H}^{N-1} \llcorner \partial^* E = |D\chi_E|$, puis $D\chi_E = \nu_E |D\chi_E| = \nu_E \mathcal{H}^{N-1} \llcorner \partial^* E$. $\square$

4.5 Frontière essentielle

Si $E \subset \mathbb{R}^N$ est un ensemble mesurable, on sait d'après le théorème des points de Lebesgue, que pour $\mathcal{L}^N$-presque tout $x \in E$,

$$\lim_{\varrho \to 0} \frac{\mathcal{L}^N(B_\varrho(x) \cap E)}{\omega_N \varrho^N} = 1$$

et pour $\mathcal{L}^N$-presque tout $x \in \Omega \setminus E$,

$$\lim_{\varrho \to 0} \frac{\mathcal{L}^N(B_\varrho(x) \cap E)}{\omega_N \varrho^N} = 0.$$

Définition 4.5.1. Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un ouvert et $E \subset \mathbb{R}^N$ un ensemble mesurable. La *frontière essentielle* de E, notée $\partial_* E$, est l'ensemble des points $x_0 \in \Omega$ tels que

$$\limsup_{\varrho \to 0} \frac{\mathcal{L}^N(B_\varrho(x_0) \cap E)}{\omega_N \varrho^N} > 0 \quad \text{et} \quad \limsup_{\varrho \to 0} \frac{\mathcal{L}^N(B_\varrho(x_0) \setminus E)}{\omega_N \varrho^N} > 0.$$

Lemme 4.5.2. *L'ensemble $\partial_* E$ est un Borélien de Ω. Si de plus E est de périmètre fini dans Ω, alors $\partial^* E \subset \partial_* E$ et $\mathcal{H}^{N-1}(\partial_* E \setminus \partial^* E) = 0$.*

Démonstration. Pour tout $\varrho > 0$, les fonctions

$$x \mapsto \frac{\mathcal{L}^N(B_\varrho(x) \cap E)}{\omega_N \varrho^N}, \quad x \mapsto \frac{\mathcal{L}^N(B_\varrho(x) \setminus E)}{\omega_N \varrho^N}$$

sont Boréliennes. Par continuité par rapport à ϱ, on en déduit que les fonctions

$$x \mapsto \limsup_{\varrho \to 0} \frac{\mathcal{L}^N(B_\varrho(x) \cap E)}{\omega_N \varrho^N}, \quad x \mapsto \limsup_{\varrho \to 0} \frac{\mathcal{L}^N(B_\varrho(x) \setminus E)}{\omega_N \varrho^N}$$

sont également Boréliennes. Ceci montre que $\partial_* E$ est un ensemble Borélien.

Si E est de périmètre fini dans Ω, les items (i) et (ii) du Lemme 4.4.3 montrent que $\partial^* E \subset \partial_* E$. De plus, comme $\mathcal{H}^{N-1}(\partial^* E) = |D\chi_E|(\Omega) < \infty$, la Proposition 3.2.7 montre que pour $\mathcal{H}^{N-1}$-presque tout $x \notin \partial^* E$

$$\lim_{\varrho \to 0} \frac{|D\chi_E|(B_\varrho(x))}{\varrho^{N-1}} = \lim_{\varrho \to 0} \frac{\mathcal{H}^{N-1}(\partial^* E \cap B_\varrho(x))}{\varrho^{N-1}} = 0.$$

Par conséquent, en notant

$$\alpha(\varrho) := \frac{\mathcal{L}^N(B_\varrho(x) \cap E)}{\omega_N \varrho^N},$$

l'inégalité isopérimétrique relative implique que pour $\mathcal{H}^{N-1}$-presque tout $x \notin \partial^* E$,

$$\lim_{\varrho \to 0} \min\{\alpha(\varrho), 1 - \alpha(\varrho)\} = 0.$$

La fonction α étant continue, il vient soit $\alpha(\varrho) \to 0$ soit $\alpha(\varrho) \to 1$. On a donc montré qu'il existe un ensemble $\mathcal{H}^{N-1}$-négligeable $Z \subset \Omega$ tel que $\Omega \setminus \partial^* E \subset (\Omega \setminus \partial_* E) \cup Z$, autrement dit $\mathcal{H}^{N-1}(\partial_* E \setminus \partial^* E) = 0$. □

Pour finir ce chapitre, notons que les notions de frontières réduites et essentielles permettent de montrer une formule de Gauss-Green généralisée pour les ensembles de périmètre fini.

Théorème 4.5.3. *Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un ouvert et E un ensemble de périmètre fini dans Ω. Pour toute fonction $\varphi \in \mathcal{C}_c^1(\Omega; \mathbb{R}^N)$, on a*

$$\int_E \mathrm{div}\varphi \, dx = -\int_{\partial^* E} \varphi \cdot \nu_E \, d\mathcal{H}^{N-1} = -\int_{\partial_* E} \varphi \cdot \nu_E \, d\mathcal{H}^{N-1}.$$

Démonstration. Par définition de la dérivée distributionnelle et d'après le théorème de De Giorgi, théorème 4.4.7, on a

$$\int_E \mathrm{div}\varphi \, dx = -\int_\Omega \varphi \cdot dD\chi_E = -\int_{\partial^* E} \varphi \cdot \nu_E \, d\mathcal{H}^{N-1} = -\int_{\partial_* E} \varphi \cdot \nu_E \, d\mathcal{H}^{N-1},$$

le dernière égalité étant une conséquence du fait que $\mathcal{H}^{N-1}(\partial_* E \setminus \partial^* E) = 0$. □

Chapitre 5

Propriétés fines des fonctions à variation bornée

Dans ce chapitre, $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ désigne un ouvert et $u \in BV(\Omega)$.

5.1 Différentiabilité approchée

D'après le théorème de différentiation de Besicovitch, on peut décomposer la mesure Du en

$$Du = D^a u + D^s u$$

où $D^a u$ est une mesure absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue $\mathcal{L}^N$ et $D^s u$ est étrangère par rapport à $\mathcal{L}^N$. Le théorème de Radon-Nikodym donne l'existence d'une densité $\nabla u \in L^1(\Omega; \mathbb{R}^N)$, appelée *gradient approché*, telle que

$$D^a u = \nabla u \mathcal{L}^N.$$

De plus, le théorème de différentiation de Besicovitch montre que

$$\nabla u(x) = \lim_{\varrho \to 0} \frac{Du(B_\varrho(x))}{\omega_N \varrho^N} \qquad \text{pour } \mathcal{L}^N\text{-presque tout } x \in \Omega.$$

Le résultat suivant caractérise le gradient approché d'une fonction BV.

Théorème 5.1.1 (Calderon-Zygmund). *Pour $\mathcal{L}^N$-presque tout $x \in \Omega$, on a*

$$\lim_{\varrho \to 0} \frac{1}{\varrho^N} \int_{B_\varrho(x)} \frac{|u(y) - u(x) - \nabla u(x) \cdot (y - x)|}{\varrho} \, dy = 0.$$

Démonstration. Soit $x \in \Omega$ tel que

(a) $\displaystyle \lim_{\varrho \to 0} \frac{1}{\varrho^N} \int_{B_\varrho(x)} |u(y) - u(x)| \, dy = 0$;

(b) $\displaystyle \lim_{\varrho \to 0} \frac{1}{\varrho^N} \int_{B_\varrho(x)} |\nabla u(y) - \nabla u(x)| \, dy = 0$;

(c) $\displaystyle \lim_{\varrho \to 0} \frac{|D^s u|(B_\varrho(x))}{\varrho^N} = 0$.

D'après le théorème des points de Lebesgue et comme les mesures $|D^s u|$ et $\mathcal{L}^N$ sont étrangères, il s'avère que $\mathcal{L}^N$-presque tous les points $x \in \Omega$ satisfont ces propriétés.

Supposons sans restreindre la généralité que $x = 0$. Soit $\varepsilon_0 > 0$ assez petit de sorte que $B_{\varepsilon_0}(0) \subset \Omega$. Pour $\varepsilon < \varepsilon_0$ et $y \in \Omega_\varepsilon := \{z \in \Omega : \operatorname{dist}(z, \partial\Omega) > \varepsilon\}$, on considère la convolution $u_\varepsilon(y) := (u * \eta_\varepsilon)(y)$. D'après le théorème fondamental de l'analyse, on a

$$\begin{aligned} u_\varepsilon(y) &= u_\varepsilon(0) + \int_0^1 \nabla u_\varepsilon(ty) \cdot y \, dt \\ &= u_\varepsilon(0) + \nabla u_\varepsilon(0) \cdot y + \int_0^1 [\nabla u_\varepsilon(ty) - \nabla u_\varepsilon(0)] \cdot y \, dt. \end{aligned}$$

Pour $\varrho < \varepsilon_0$, on multiplie cette égalité par $\varphi \in \mathcal{C}_c^1(B_\varrho(0))$ avec $|\varphi| \leq 1$ et on obtient d'après le théorème de Fubini et la formule de changement de variables

$$\begin{aligned} &\int_{B_\varrho(0)} \varphi(y)[u_\varepsilon(y) - u_\varepsilon(0) - \nabla u_\varepsilon(0) \cdot y] \, dy \\ &\qquad = \int_0^1 \frac{1}{s^{N+1}} \int_{B_{s\varrho}(0)} \varphi\left(\frac{y}{s}\right) [\nabla u_\varepsilon(y) - \nabla u_\varepsilon(0)] \cdot y \, dy \, ds. \end{aligned} \tag{5.1.1}$$

Par suite, on a pour tout $s \in (0,1)$,

$$\begin{aligned} g_\varepsilon(s) &:= \int_{B_{s\varrho}(0)} \varphi\left(\frac{y}{s}\right) \nabla u_\varepsilon(y) \cdot y \, dy = -\int_{B_{s\varrho}(0)} \operatorname{div}\left(\varphi\left(\frac{y}{s}\right) y\right) u_\varepsilon(y) \, dy \\ &\to -\int_{B_{s\varrho}(0)} \operatorname{div}\left(\varphi\left(\frac{y}{s}\right) y\right) u(y) \, dy = \int_{B_{s\varrho}(0)} \varphi\left(\frac{y}{s}\right) y \cdot \, dDu(y) \\ &= \int_{B_{s\varrho}(0)} \varphi\left(\frac{y}{s}\right) y \cdot \nabla u(y) \, dy + \int_{B_{s\varrho}(0)} \varphi\left(\frac{y}{s}\right) y \cdot \, dD^s u(y). \end{aligned}$$

De plus, d'après les propriétés de la convolution de mesure, on a pour tout $s \in (0,1)$,

$$\begin{aligned} \frac{g_\varepsilon(s)}{s^{N+1}} &\leq \frac{\varrho}{s^N} \int_{B_{s\varrho}(0)} |\nabla u_\varepsilon(y)| \, dy \\ &\leq \frac{\varrho}{s^N} \int_{B_{s\varrho}(0)} \int_{B_\varepsilon(y)} \eta_\varepsilon(y - z) \, d|Du|(z) \, dy \\ &\leq \frac{\varrho}{s^N} \int_{B_{s\varrho+\varepsilon}(0)} \int_{B_{s\varrho}(0) \cap B_\varepsilon(z)} \eta_\varepsilon(y - z) \, dy \, d|Du|(z) \\ &\leq C \frac{\min\{(s\varrho)^N, \varepsilon^N\}}{\varepsilon^N s^N} |Du|(B_{s\varrho+\varepsilon}(0)) \\ &\leq C \frac{\min\{(s\varrho)^N, \varepsilon^N\}}{\varepsilon^N s^N} (s\varrho + \varepsilon)^N \leq C, \end{aligned}$$

où on a utilisé (b) et (c) dans l'avant dernière inégalité. Par convergence dominée, il vient alors que

$$\begin{aligned} &\int_0^1 \frac{1}{s^{N+1}} \int_{B_{s\varrho}(0)} \varphi\left(\frac{y}{s}\right) \nabla u_\varepsilon(y) \cdot y \, dy \, ds \\ &\quad \to \int_0^1 \frac{1}{s^{N+1}} \int_{B_{s\varrho}(0)} \varphi\left(\frac{y}{s}\right) \nabla u(y) \cdot y \, dy \, ds + \int_0^1 \frac{1}{s^{N+1}} \int_{B_{s\varrho}(0)} \varphi\left(\frac{y}{s}\right) y \cdot \, dD^s u(y) \, ds. \end{aligned} \tag{5.1.2}$$

Par ailleurs, comme 0 est un point de Lebesgue de u et ∇u, on en déduit que $u_\varepsilon(0) \to u(0)$ et $\nabla u_\varepsilon(0) \to \nabla u(0)$. Par passage à la limite quand $\varepsilon \to 0$ dans (5.1.1) et en utilisant (5.1.2) ainsi que (a) et (b), on en déduit que

$$\begin{aligned}
&\int_{B_\varrho(0)} \varphi(y)[u(y) - u(0) - \nabla u(0) \cdot y]\, dy \\
&\le \int_0^1 \frac{1}{s^{N+1}} \int_{B_{s\varrho}(0)} \varphi\left(\frac{y}{s}\right) [\nabla u(y) - \nabla u(0)] \cdot y\, dy\, ds + \int_0^1 \frac{1}{s^{N+1}} \int_{B_{s\varrho}(0)} \varphi\left(\frac{y}{s}\right) y \cdot dD^s u(y)\, dt \\
&\qquad\qquad \le C\varrho \int_0^1 \frac{1}{s^N} \int_{B_{s\varrho}(0)} |\nabla u(y) - \nabla u(0)|\, dy\, ds + C\varrho \int_0^1 \frac{|D^s u|(B_{s\varrho}(0))}{s^N}\, ds.
\end{aligned}$$

En passant au supremum parmi toutes les fonctions φ, il vient

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\varrho^{N+1}} \int_{B_\varrho(0)} |u(y) - u(0) - \nabla u(0) \cdot y|\, dy \\
&\qquad\qquad \le C \int_0^1 \frac{1}{(s\varrho)^N} \int_{B_{s\varrho}(0)} |\nabla u(y) - \nabla u(0)|\, dy\, ds + C \int_0^1 \frac{|D^s u|(B_{s\varrho}(0))}{(s\varrho)^N}\, ds.
\end{aligned}$$

Par passage à la limite quand $\varrho \to 0$, on obtient bien la propriété souhaitée. □

La proposition suivante traduit une propriété de localité du gradient approché.

Proposition 5.1.2. *Soient u et $v \in BV(\Omega)$. Alors*

$$\nabla u = \nabla v \quad \mathcal{L}^N\text{-p.p. sur } \{u = v\}.$$

Démonstration. Soit $x_0 \in \{u = v\}$ un point de Lebesgue de u et v tel que $u(x_0) = v(x_0)$,

$$\lim_{\varrho \to 0} \frac{1}{\varrho^N} \int_{B_\varrho(x_0)} \frac{|u(y) - u(x_0) - \nabla u(x_0) \cdot (y - x_0)|}{\varrho}\, dy = 0,$$

$$\lim_{\varrho \to 0} \frac{1}{\varrho^N} \int_{B_\varrho(x_0)} \frac{|v(y) - v(x_0) - \nabla v(x_0) \cdot (y - x_0)|}{\varrho}\, dy = 0$$

et

$$\lim_{\varrho \to 0} \frac{\mathcal{L}^N(\{u = v\} \cap B_\varrho(x_0))}{\omega_N \varrho^N} = 1.$$

Notons que $\mathcal{L}^N$-presque tous les points $x_0 \in \{u = v\}$ satisfont ces propriétés.

Pour $z \in B_1$, posons

$$u_\varrho(z) := \frac{u(x_0 + \varrho z) - u(x_0)}{\varrho}, \quad v_\varrho(z) := \frac{v(x_0 + \varrho z) - v(x_0)}{\varrho}$$

de sorte que $u_\varrho(z) \to \nabla u(x_0) \cdot z$ et $v_\varrho(z) \to \nabla v(x_0) \cdot z$ dans $L^1(B_1; \mathbb{R}^N)$. En particulier, $u_\varrho(z) - v_\varrho(z) \to \nabla u(x_0) \cdot z - \nabla v(x_0) \cdot z$ en mesure dans B_1 et donc, pour tout $\varepsilon > 0$, on a

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}^N(\{z \in B_1 :\ |\nabla u(x_0) \cdot z - \nabla v(x_0) \cdot z| \ge \varepsilon\}) &\le \limsup_{\varrho \to 0} \mathcal{L}^N(\{|u_\varrho - v_\varrho| \ge \varepsilon/4\} \cap B_1) \\
&\le \limsup_{\varrho \to 0} \frac{\mathcal{L}^N(\{u \ne v\} \cap B_\varrho(x_0))}{\varrho^N} = 0.
\end{aligned}$$

On en déduit que $\nabla u(x_0) \cdot z = \nabla v(x_0) \cdot z$ pour $\mathcal{L}^N$-presque tout $z \in B_1$, soit $\nabla u(x_0) = \nabla v(x_0)$. □

5.2 Continuité approchée

On souhaite désormais aller plus loin dans la compréhension de la structure du gradient d'une fonction BV.

Définition 5.2.1. On définit les *limites approximatives supérieures* $u^+(x)$ *et inférieures* $u^-(x)$ *en* $x \in \Omega$ par

$$\begin{aligned} u^+(x) &:= \inf\left\{ t \in \mathbb{R} : \lim_{\varrho \to 0} \frac{\mathcal{L}^N(\{u > t\} \cap B_\varrho(x))}{\varrho^N} = 0 \right\}, \\ u^-(x) &:= \sup\left\{ t \in \mathbb{R} : \lim_{\varrho \to 0} \frac{\mathcal{L}^N(\{u < t\} \cap B_\varrho(x))}{\varrho^N} = 0 \right\}. \end{aligned}$$

Remarquons que si $t > u^+(x)$, alors

$$\lim_{\varrho \to 0} \frac{\mathcal{L}^N(\{u > t\} \cap B_\varrho(x))}{\varrho^N} = 0,$$

et si $t < u^-(x)$, on a

$$\lim_{\varrho \to 0} \frac{\mathcal{L}^N(\{u < t\} \cap B_\varrho(x))}{\varrho^N} = 0.$$

Lemme 5.2.2. *Les fonctions* $u^\pm$ *sont Boréliennes sur* Ω.

Démonstration. En constatant que $u^- = -(-u)^+$, il suffit de montrer que u^+ est Borélienne. On remarque d'abord que $u^+(x) < s$ si et seulement s'il existe un $t \in \mathbb{Q}$ avec $t < s$ tel que

$$\lim_{\varrho \to 0} \frac{\mathcal{L}^N(\{u > t\} \cap B_\varrho(x))}{\varrho^N} = 0.$$

Par conséquent

$$\{u^+ < s\} = \bigcup_{t \in \mathbb{Q},\, t < s} \left\{ x \in \Omega : \lim_{\varrho \to 0} \frac{\mathcal{L}^N(\{u > t\} \cap B_\varrho(x))}{\varrho^N} = 0 \right\}.$$

Comme l'application $x \mapsto \mathcal{L}^N(\{u > t\} \cap B_\varrho(x))$ est Borélienne et $\varrho \mapsto \mathcal{L}^N(\{u > t\} \cap B_\varrho(x))$ est continue, on en déduit que

$$x \mapsto \lim_{\varrho \to 0} \frac{\mathcal{L}^N(\{u > t\} \cap B_\varrho(x))}{\varrho^N} = \lim_{\varrho \to 0, \varrho \in \mathbb{Q}^+} \frac{\mathcal{L}^N(\{u > t\} \cap B_\varrho(x))}{\varrho^N}$$

est Borélienne, ce qui montre que $\{u^+ < s\}$ est un Borélien de Ω, et donc que u^+ est une fonction Borélienne sur Ω. $\square$

On a toujours l'inégalité $u^-(x) \leq u^+(x)$. Si $u^-(x) = u^+(x)$, on notera $\tilde{u}(x)$ la valeur commune et on dira que x est un *point de continuité approché* pour u. Dans ce cas, $\tilde{u}(x)$ satisfait pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\lim_{\varrho \to 0} \frac{\mathcal{L}^N(B_\varrho(x) \cap \{|u - \tilde{u}(x)| > \varepsilon\})}{\varrho^N} = 0.$$

En particulier, si x est un point de Lebesgue de u, alors x est un point de continuité approché car

$$\frac{\mathcal{L}^N(B_\varrho(x) \cap \{|u - \tilde{u}(x)| > \varepsilon\})}{\varrho^N} \leq \frac{1}{\varepsilon \varrho^N} \int_{B_\varrho(x)} |u(y) - \tilde{u}(x)|\, dy \to 0.$$

On déduit du théorème des points de Lebesgue que $u(x) = \tilde{u}(x)$ pour $\mathcal{L}^N$-presque tout $x \in \Omega$. Autrement dit, en notant

$$S_u := \{x \in \Omega : \ u^-(x) < u^+(x)\}$$

l'*ensemble singulier* de u, on a $\mathcal{L}^N(S_u) = 0$.

Théorème 5.2.3. *L'ensemble S_u est Borélien, dénombrablement $\mathcal{H}^{N-1}$-rectifiable et σ-fini pour la mesure $\mathcal{H}^{N-1}$. De plus, il existe une fonction Borélienne $\nu_u : S_u \to \mathbb{S}^{N-1}$ telle que pour $\mathcal{L}^1$-presque tout $t \in \mathbb{R}$,*

$$\nu_u = \nu_{\{u>t\}} \quad \mathcal{H}^{N-1}\text{-presque partout sur } S_u \cap \partial^*\{u > t\}.$$

Démonstration. Les fonctions $u^\pm$ étant Boréliennes, on obtient immédiatement que S_u est Borélien.

D'après la formule de la co-aire, les ensembles $\{u > t\}$ sont de périmètre fini pour $\mathcal{L}^1$-presque pour tout $t \in \mathbb{R}$. Par ailleurs, les ensembles $\{u = t\}$ étant deux à deux disjoints, on a également que $\mathcal{L}^N(\{u = t\}) = 0$ pour $\mathcal{L}^1$-presque tout $t \in \mathbb{R}$. Par conséquent, il existe un ensemble D dénombrable et dense dans $\mathbb{R}$ tel que $\{u > t\}$ est de périmètre fini et $\mathcal{L}^N(\{u = t\}) = 0$ pour tout $t \in D$.

Si $x \in J_u$, il existe alors $t \in D$ tel que $u^-(x) < t < u^+(x)$. Par définition des limites approximatives supérieures et inférieures, on a

$$\limsup_{\varrho\to 0} \frac{\mathcal{L}^N(\{u > t\} \cap B_\varrho(x))}{\varrho^N} > 0, \quad \limsup_{\varrho\to 0} \frac{\mathcal{L}^N(\{u \le t\} \cap B_\varrho(x))}{\varrho^N} > 0,$$

d'où $x \in \partial_*\{u > t\}$. On en déduit alors que

$$S_u \subset \bigcup_{t\in D} \partial_*\{u > t\},$$

ce qui montre que S_u est dénombrablement $\mathcal{H}^{N-1}$-rectifiable. Par ailleurs, comme pour tout $t \in D$,

$$\mathcal{H}^{N-1}(\partial_*\{u > t\}) = \mathcal{H}^{N-1}(\partial^*\{u > t\}) = |D\chi_{\{u>t\}}|(\Omega) < \infty,$$

on en déduit que S_u est σ-fini pour la mesure $\mathcal{H}^{N-1}$. De plus, comme pour $t \in D$, on a $\mathcal{H}^{N-1}(\partial_*\{u > t\} \setminus \partial^*\{u > t\}) = 0$, l'ensemble $Z := \bigcup_{t\in D}(\partial_*\{u > t\} \setminus \partial^*\{u > t\}) \subset \Omega$ est un Borélien $\mathcal{H}^{N-1}$-négligeable tel que

$$S_u \subset \bigcup_{t\in D} \partial^*\{u > t\} \cup Z.$$

Montrons que si s, $t \in D$ avec $s < t$, on a

$$\nu_{\{u>s\}}(x) = \nu_{\{u>t\}}(x) \quad \text{pour tout } x \in \partial^*\{u > s\} \cap \partial^*\{u > t\}.$$

Soit donc $x_0 \in \partial^*\{u > s\} \cap \partial^*\{u > t\}$. D'après le théorème de De Giorgi (théorèmes 4.4.5 et 4.4.7) les normales approchées $\nu_{\{u>s\}}(x_0)$ et $\nu_{\{u>t\}}(x_0)$ sont bien définies. On définit les demi-espaces

$$H_s^\pm := \{x \in \mathbb{R}^N : \pm\nu_{\{u>s\}}(x_0) \cdot (x - x_0) > 0\}, \quad H_t^\pm := \{x \in \mathbb{R}^N : \pm\nu_{\{u>t\}}(x_0) \cdot (x - x_0) > 0\}.$$

Comme $\{u > t\} \subset \{u > s\}$, le théorème 4.4.5 montre que

$$\mathcal{L}^N(B_1 \cap H_t^- \cap H_s^+) = \lim_{\varrho\to 0} \frac{\mathcal{L}^N(B_\varrho(x_0) \cap \{u > t\} \cap H_s^+)}{\varrho^N} \le \lim_{\varrho\to 0} \frac{\mathcal{L}^N(B_\varrho(x_0) \cap \{u > s\} \cap H_s^+)}{\varrho^N} = 0$$

et

$$\mathcal{L}^N(B_1 \setminus H_s^- \cap H_t^-) = \lim_{\varrho\to 0} \frac{\mathcal{L}^N(B_\varrho(x_0) \setminus \{u > s\} \cap H_t^-)}{\varrho^N} \le \lim_{\varrho\to 0} \frac{\mathcal{L}^N(B_\varrho(x_0) \setminus \{u > t\} \cap H_t^-)}{\varrho^N} = 0.$$

Il vient alors que $H_t^\pm = H_s^\pm$ et donc que $\nu_{\{u>s\}}(x_0) = \nu_{\{u>t\}}(x_0)$. On a donc montré que pour tout $x \in S_u \setminus Z$, il existe un vecteur unitaire $\nu_u(x) \in \mathbb{S}^{N-1}$ tel que $\nu_u(x) = \nu_{\{u>t\}}(x)$ si $t \in D$ et $x \in S_u \cap \partial^*\{u > t\}$.

Si $t \notin D$ et $\{u > t\}$ est de périmètre fini dans Ω, on peut trouver t_1 et $t_2 \in D$ tels que $t_1 < t < t_2$. En raisonnant comme précédemment, on montre que pour tout $x \in \partial^*\{u > t_1\} \cap \partial^*\{u > t\} \cap \partial^*\{u > t_2\}$, on a

$$\nu_{\{u>t\}}(x) = \nu_{\{u>t_1\}}(x) = \nu_{\{u>t_2\}}(x) = \nu_u(x).$$

On obtient ainsi une application Borélienne $\nu_u : S_u \to \mathbb{S}^{N-1}$ telle que pour $\mathcal{L}^1$-presque tout $t \in \mathbb{R}$, $\nu_u = \nu_{\{u>t\}}$ $\mathcal{H}^{N-1}$-p.p. sur $S_u \cap \partial^*\{u > t\}$. □

Montrons à présent que les fonctions Boréliennes $u^\pm$ sont essentiellement finies.

Proposition 5.2.4. *Pour $\mathcal{H}^{N-1}$-presque tout $x \in \Omega$, on a*

$$-\infty < u^-(x) \leq u^+(x) < +\infty.$$

Démonstration. **Etape 1.** Montrons que $\mathcal{H}^{N-1}(\{u^- = +\infty\}) = \mathcal{H}^{N-1}(\{u^+ = -\infty\}) = 0$. Comme $u^+ = -(-u)^-$, il suffit de vérifier que $\mathcal{H}^{N-1}(\{u^- = +\infty\}) = 0$.

Soient $U \subset \mathbb{R}^N$ un ouvert borné tel que $\overline{U} \subset \Omega$ et V un ouvert tel que $\overline{U} \subset V \subset \overline{V} \subset \Omega$. Soit $\zeta \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ une fonction telle que $0 \leq \varphi \leq 1$ dans $\mathbb{R}^N$, $\varphi = 1$ sur U et $\mathrm{Supp}(\varphi) \subset V$. On pose $v := \varphi u \in BV(\mathbb{R}^N)$ qui est donc à support compact K, avec $v^\pm = u^\pm$ sur U.

Soient $E_t = \{x \in \mathbb{R}^N : v(x) > t\}$ et $F_t := \{x \in \mathbb{R}^N : v^-(x) > t\}$. Comme $\mathcal{L}^N(S_v) = 0$, on en déduit que $v = v^-$ $\mathcal{L}^N$-p.p. dans $\mathbb{R}^N$ si bien que E_t et F_t diffèrent d'un ensemble $\mathcal{L}^N$-négligeable. Par conséquent, on a $P(F_t, \mathbb{R}^N) = P(E_t, \mathbb{R}^N)$ et par la formule de la co-aire,

$$\int_{\mathbb{R}} P(F_t, \mathbb{R}^N)\, dt = |Dv|(\mathbb{R}^N) < \infty,$$

ce qui montre que

$$\liminf_{t \to +\infty} P(F_t, \mathbb{R}^N) = 0.$$

Comme v est à support compact K, il existe $d > 0$ tel que pour tout $\varrho > d$, tout $x \in \mathbb{R}^N$ et tout $t > 0$,

$$\frac{\mathcal{L}^N(B_\varrho(x) \cap F_t)}{\omega_N \varrho^N} \leq \frac{\mathcal{L}^N(K)}{\omega_N \varrho^N} \leq \frac{1}{8}.$$

Par ailleurs, si $v^-(x) > t$, il vient par définition de $v^-(x)$ que

$$\lim_{\varrho \to 0} \frac{\mathcal{L}^N(B_\varrho(x) \cap F_t)}{\omega_N \varrho^N} = \lim_{\varrho \to 0} \frac{\mathcal{L}^N(B_\varrho(x) \cap E_t)}{\omega_N \varrho^N} = 1.$$

Par continuité de la fonction $\varrho \mapsto \frac{\mathcal{L}^N(B_\varrho(x) \cap F_t)}{\omega_N \varrho^N}$, il existe $\varrho(x) \in (0, d)$ tel que

$$\mathcal{L}^N(B_{\varrho(x)}(x) \cap F_t) = \frac{1}{4} \omega_N \varrho(x)^N$$

et l'inégalité isopérimétrique relative montre alors que

$$C_N |D\chi_{F_t}|(B_{\varrho(x)}(x)) \geq \left(\frac{\omega_N}{4}\right)^{\frac{N-1}{N}} \varrho(x)^{N-1}.$$

La famille $\mathcal{F} = \{\overline{B}_{\varrho(x)}(x)\}_{x\in F_t}$ forme un recouvrement de F_t et le théorème de recouvrement de Besicovitch montre l'existence de ξ sous-familles $\mathcal{F}_1, \ldots, \mathcal{F}_\xi$ dénombrables et disjointes telles que

$$F_t \subset \bigcup_{i=1}^{\xi} \bigcup_{B\in\mathcal{F}_i} B.$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned}\mathcal{H}^{N-1}_{2d}(F_t) &\leq \sum_{i=1}^{\xi} \sum_{B\in\mathcal{F}_i} \omega_{N-1} \left(\frac{\mathrm{diam}(B)}{2}\right)^{N-1} \\ &\leq c \sum_{i=1}^{\xi} \sum_{B\in\mathcal{F}_i} |D\chi_{F_t}|(B) \leq c|D\chi_{F_t}|(\mathbb{R}^N) = c\,P(F_t,\mathbb{R}^N) \to 0\end{aligned}$$

quand $t \to +\infty$, d'où $\mathcal{H}^{N-1}_{2d}(\{v^- = +\infty\}) = 0$. Pour tout $\varepsilon > 0$ il existe donc un recouvrement $\{A_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ de $\{v^- = +\infty\}$ tel que $\mathrm{diam}(A_i) \leq 2d$ pour tout $i \in \mathbb{N}$ et

$$\omega_{N-1} \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{\mathrm{diam}(A_i)}{2}\right)^{N-1} \leq \varepsilon.$$

L'inégalité précédente implique que $\mathrm{diam}(A_i) \leq 2(\frac{\varepsilon}{\omega_{N-1}})^{\frac{1}{N-1}} = \delta(\varepsilon)$ de sorte que $\mathcal{H}^{N-1}_{\delta(\varepsilon)}(\{v^- = +\infty\}) \leq \varepsilon$ et donc $\mathcal{H}^{N-1}(\{v^- = +\infty\}) = 0$ par passage à la limite quand $\varepsilon \to 0$. Comme $v^- = u^-$ dans U, on en déduit que $\mathcal{H}^{N-1}(U \cap \{u^- = +\infty\}) = 0$. En considérant une suite croissante d'ouverts $\{U_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $\overline{U}_n \subset U_{n+1}$ et $\bigcup_n U_n = \Omega$, on en déduit par passage à la limite quand $n \to \infty$ que $\mathcal{H}^{N-1}(\{u^- = +\infty\}) = 0$.

Etape 2. Montrons que $u^+ - u^- < \infty$ $\mathcal{H}^{N-1}$-p.p. dans Ω.

Comme S_u est σ-fini pour la mesure $\mathcal{H}^{N-1}$ on peut appliquer le théorème de Fubini à la mesure produit $\mathcal{H}^{N-1} \otimes \mathcal{L}^1$ sur $S_u \times \mathbb{R}$ qui implique que

$$\begin{aligned}&(\mathcal{H}^{N-1} \otimes \mathcal{L}^1)(\{(x,t) \in S_u \times \mathbb{R} :\ u^-(x) < t < u^+(x)\} \\ &\qquad = \int_{S_u} (u^+ - u^-)\, d\mathcal{H}^{N-1} = \int_{\mathbb{R}} \mathcal{H}^{N-1}(\{x \in S_u :\ u^-(x) < t < u^+(x)\})\, dt.\end{aligned}$$

Or si $u^-(x) < t < u^+(x)$, alors $x \in \partial_*\{u > t\}$ et donc, d'après la formule de la co-aire,

$$\int_{S_u} (u^+ - u^-)\, d\mathcal{H}^{N-1} \leq \int_{\mathbb{R}} \mathcal{H}^{N-1}(\partial_*\{u > t\})\, dt = \int_{\mathbb{R}} |D\chi_{\{u>t\}}|(\Omega)\, dt = |Du|(\Omega) < \infty,$$

ce qui montre effectivement que $u^+ - u^- < \infty$ $\mathcal{H}^{N-1}$-p.p. dans Ω.

Etape 3. On a $u^+ = (u^+ - u^-) + u^- < +\infty$ $\mathcal{H}^{N-1}$-p.p. dans Ω et $u^- = -(u^+ - u^-) + u^+ > -\infty$ $\mathcal{H}^{N-1}$-p.p. dans Ω. □

On décompose à présent la partie singulière $D^s u$ en

$$D^s u = D^j u + D^c u,$$

où $D^j u := D^s u \llcorner S_u$ est la partie saut de Du et $D^c u := D^s u \llcorner (\Omega \setminus S_u)$ est la partie Cantor de Du. Remarquons que, du fait que $\mathcal{L}^N(S_u) = 0$, alors $D^j u = Du \llcorner S_u$.

Théorème 5.2.5. *La partie saut $D^j u$ de Du est absolument continue par rapport à $\mathcal{H}^{N-1}$ et on a la représentation*

$$D^j u = (u^+ - u^-)\nu_u \mathcal{H}^{N-1} \llcorner S_u.$$

De plus la partie Cantor $D^c u$ est étrangère par rapport à $\mathcal{H}^{N-1}$, i.e.

$$\mathcal{H}^{N-1}(A) < \infty \quad \Longrightarrow \quad |D^c u|(A) = 0$$

pour tout Borélien $A \subset \Omega$.

Démonstration. Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on notera pour simplifier $E_t := \{u > t\} = \{x \in \Omega : \ u(x) > t\}$. On remarque d'abord que si $x \in S_u$, alors

$$(u^-(x), u^+(x)) \subset \{t \in \mathbb{R} : \ x \in \partial_* E_t\} \subset [u^-(x), u^+(x)]$$

de sorte que $\mathcal{L}^1(\{t \in \mathbb{R} : \ x \in \partial_* E_t\}) = u^+(x) - u^-(x)$. D'après la formule de la co-aire dans BV et le théorème de Fubini, il vient pour tout Borélien $A \subset \Omega$,

$$\begin{aligned}
D^j u(A) &= Du(A \cap S_u) = \int_{\mathbb{R}} D\chi_{E_t}(A \cap S_u)\, dt \\
&= \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\partial_* E_t \cap A \cap S_u} \nu_{E_t}\, d\mathcal{H}^{N-1} \right) dt \\
&= \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\partial_* E_t \cap A \cap S_u} \nu_u\, d\mathcal{H}^{N-1} \right) dt \\
&= \int_{A \cap S_u} \left(\int_{\mathbb{R}} \chi_{\{t \in \mathbb{R} :\, x \in \partial_* E_t\}}\, dt \right) \nu_u\, d\mathcal{H}^{N-1} \\
&= \int_{A \cap S_u} (u^+ - u^-)\nu_u\, d\mathcal{H}^{N-1},
\end{aligned}$$

ce qui montre effectivement que $D^j u = (u^+ - u^-)\nu_u \mathcal{H}^{N-1} \llcorner S_u$.

Si $A \subset \Omega$ est un Borélien tel que $\mathcal{H}^{N-1}(A) < \infty$, on a en particulier que $\mathcal{L}^N(A) = 0$ et donc

$$|D^c u|(A) = |Du|(A \setminus S_u) = \int_{\mathbb{R}} \mathcal{H}^{N-1}(\partial_* E_t \cap A \setminus S_u)\, dt.$$

Or, si $x \in \partial_* E_t \cap A \setminus S_u$, alors $\tilde{u}(x) = t$. En effet, si $t > \tilde{u}(x) = u^+(x)$, on aurait alors que

$$\lim_{\varrho \to 0} \frac{\mathcal{L}^N(\{u > t\} \cap B_\varrho(x))}{\varrho^N} = 0,$$

ce qui contredirait le fait que $x \in \partial_* E_t$. Par conséquent, $t \leq \tilde{u}(x)$ et on montre de même que $t = \tilde{u}(x)$. Par conséquent,

$$\partial_* E_t \cap A \setminus S_u \subset \{\tilde{u} = t\}$$

et comme les ensembles $\{\tilde{u} = t\}$ sont deux à deux disjoints et la mesure $\mathcal{H}^{N-1} \llcorner A$ est finie, on en déduit que

$$\mathcal{H}^{N-1}(A \cap \{\tilde{u} = t\}) > 0$$

pour au plus une quantité dénombrable de $t \in \mathbb{R}$. En particulier $\mathcal{H}^{N-1}(\partial_* E_t \cap A \setminus S_u) \leq \mathcal{H}^{N-1}(A \cap \{\tilde{u} = t\}) = 0$ pour $\mathcal{L}^1$-presque tout $t \in \mathbb{R}$, ce qui montre bien que $|D^c u|(A) = 0$. $\square$

La dénomination de partie Cantor provient de l'exemple de la fonction de Cantor-Vitali $u : [0,1] \to \mathbb{R}$. Il s'agit d'une fonction continue et croissante sur $[0,1]$ qui satisfait $u(0) = 0$, $u(1) = 1$ et $u' = 0$ $\mathcal{L}^1$-p.p. sur $(0,1)$. D'après l'exemple 2.1.4, il s'agit d'une fonction à variation bornée dans l'intervalle $(0,1)$ telle que $|Du|((0,1)) \leq 1$, dont nous allons montrer que la dérivéee distributionnelle est purement de type Cantor. En effet, cette fonction étant continue, on a que $S_u = \emptyset$ de sorte que la partie saut $D^j u = 0$. Montrons par ailleurs que la partie absolument continue $D^a u = 0$. Pour ce faire, on considère la fonction auxiliaire $v : [0,1] \to \mathbb{R}$ définie par

$$v(x) = Du((0,x)) \quad \text{pour tout } x \in [0,1].$$

Comme u est croissante et bornée, la mesure Du est positive et finie, ce qui montre que v est une fonction croissante et bornée. Par ailleurs, pour toute fonction test $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty((0,1))$, le théorème de Fubini montre que

$$\int_0^1 v(x)\varphi'(x)\,dx = \int_0^1 \left(\int_0^x dDu(y)\right) dx = \int_0^1 \left(\int_y^1 \varphi'(x)\,dx\right) dDu(y) = -\int_0^1 \varphi(y)\,dDu(y).$$

On en déduit que $Dv = Du$ et comme $u(0) = 0 = v(0)$, il vient que $u = v$. Par conséquent, comme $u'(x) = 0$ pour $\mathcal{L}^1$-presque tout $x \in (0,1)$, on en déduit que pour $\mathcal{L}^1$-presque tout $x \in (0,1)$,

$$0 = \lim_{h\to 0^+} \frac{u(x+h) - u(x)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{v(x+h) - v(x)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{Du([x, x+h))}{h} = \nabla u(x)$$

ce qui montre que $D^a u = 0$. On en déduit que $Du = D^c u$. Par ailleurs, si $Du = 0$ on aurait que u est constant sur $[0,1]$ ce qui n'est pas possible puisque $u(0) = 0$ et $u(1) = 1$. On peut en fait montrer que $D^c u$ est une mesure portée par la mesure de Hausdorff $\mathcal{H}^s \llcorner C$ où $C \subset [0,1]$ est l'ensemble triadique de Cantor et $s = \frac{\ln 2}{\ln 3}$ est sa dimension de Hausdorff.

Théorème 5.2.6 (Chain rule). *Soit $u \in BV(\Omega)$ et $\psi \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ une fonction Lipschitzienne telle que $\psi(0) = 0$ si $\mathcal{L}^N(\Omega) = \infty$. Alors $v = \psi \circ u \in BV(\Omega)$ et*

$$D^j v = (\psi(u^+) - \psi(u^-))\nu_u \mathcal{H}^{N-1} \llcorner S_u, \quad \nabla v = \psi'(u)\nabla u, \quad D^c v = \psi'(\tilde{u}) D^c u.$$

Démonstration. D'après le théorème d'approximation d'Anzellotti-Giaquinta, il existe une suite $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ dans $\mathcal{C}^\infty(\Omega) \cap BV(\Omega)$ telle que $u_k \to u$ dans $L^1(\Omega)$ et $|Du_k|(\Omega) \to |Du|(\Omega)$. En particulier, $v_k := \psi \circ u_k$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur Ω et $\nabla v_k = \psi'(u_k)\nabla u_k$. Comme $\psi(0) = 0$ si $\mathcal{L}^N(\Omega) = \infty$, on obtient que v_k et $v \in L^1(\Omega)$. En notant $L > 0$ la constante de Lipschitz de ψ, on obtient que $|\nabla v_k| \leq L|\nabla u_k|$. Comme

$$\int_\Omega |v_k - v|\,dx = \int_\Omega |\psi(u_k) - \psi(u)|\,dx \leq L \int_\Omega |u_k - u|\,dx \to 0,$$

on en déduit que $v_k \to v$ dans $L^1(\Omega)$. Par semicontinuité inférieure de la variation totale, il vient

$$TV(v,\Omega) \leq \liminf_{k\to\infty} TV(v_k,\Omega) = \liminf_{k\to\infty} \int_\Omega |\nabla v_k| \leq L \liminf_{k\to\infty} \int_\Omega |\nabla u_k|\,dx = L|Du|(\Omega),$$

ce qui montre, du fait que $TV(v,\Omega) < \infty$, que $v \in BV(\Omega)$.

Comme toute fonction $\psi \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ peut s'écrire comme la différence de deux fonctions Lipschitz ψ_1, $\psi_2 \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ avec $\psi_i' \geq 1$ pour $i = 1, 2$ [1], on ne restreint pas la généralité en supposant dès le départ que $\psi \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ satisfait $\psi' \geq 1$. Comme ψ est continue et strictement croissante, on a que

$$v^+ = \psi(u^+), \quad v^- = \psi(u^-), \quad S_v = S_u, \quad \nu_u = \nu_v.$$

1. Il suffit de poser $\psi_2(t) := (1 + \|\psi'\|_\infty)t$ et $\psi_1 := \psi + \psi_2$

Par conséquent,

$$D^j v = Dv \llcorner S_v = (v^+ - v^-)\nu_v \mathcal{H}^{N-1} \llcorner S_v = (\psi(u^+) - \psi(u^-))\nu_u \llcorner \mathcal{H}^{N-1} \llcorner S_u,$$

ce qui démontre la représentation de la partie saut.

Soit $A \subset \Omega$ un Borélien, d'après la formule de la co-aire dans BV, on a

$$\begin{aligned}
Dv(A \setminus S_v) &= Dv(A \setminus S_u) = \int_{\mathbb{R}} D\chi_{\{v>t\}}(A \setminus S_u)\, dt \\
&= \int_{\mathbb{R}} D\chi_{\{u>\psi^{-1}(t)\}}(A \setminus S_u)\, dt \\
&= \int_{\mathbb{R}} D\chi_{\{u>s\}}(A \setminus S_u)\psi'(s)\, ds \\
&= \int_{\mathbb{R}} \int_{\partial_*\{u>s\}\cap A\setminus S_u} \psi'(s)\nu_{\{u>s\}}(x)\, d\mathcal{H}^{N-1}(x)\, ds.
\end{aligned}$$

Nous avons déjà vu que si $x \in \partial_*\{u > s\} \setminus S_u$, alors $\tilde{u}(x) = s$, par conséquent

$$\begin{aligned}
Dv(A \setminus S_v) &= \int_{\mathbb{R}} \int_{\partial_*\{u>s\}\cap A\setminus S_u} \psi'(\tilde{u}(x))\nu_{\{u>s\}}(x)\, d\mathcal{H}^{N-1}(x)\, ds \\
&= \int_{\mathbb{R}} \int_{A\setminus S_u} \psi'(\tilde{u}(x))\, dD\chi_{E_s}(x)\, ds \\
&= \int_{A\setminus S_u} \psi'(\tilde{u})\, dDu,
\end{aligned}$$

où nous avons de nouveau appliqué la formule de la co-aire dans la dernière égalité. Comme $Dv \llcorner (\Omega \setminus S_v) = D^a v + D^c v$ et $Du \llcorner (\Omega \setminus S_u) = D^a u + D^c u$, il vient

$$D^a v + D^c v = \psi'(\tilde{u})D^a u + \psi'(\tilde{u})D^c u.$$

Enfin, comme les mesures $D^a v - \psi'(\tilde{u})D^a u$ et $D^c v - \psi'(\tilde{u})D^c u$ sont étrangères (la première étant absolument continue par rapport à $\mathcal{L}^N$ et la deuxième étant singulière par rapport à $\mathcal{L}^N$), on en déduit finalement que $D^a v = \psi'(\tilde{u})D^a u$ et $D^c v = \psi'(\tilde{u})D^c u$. $\square$

Chapitre 6

Fonctions spéciales à variation bornée

6.1 Definition et caractérisation

Définition 6.1.1. L'espace $SBV(\Omega)$ des *fonctions spéciales à variation bornée* dans un ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ est défini comme étant l'ensemble des fonctions $u \in BV(\Omega)$ telles que $D^c u = 0$.

Autrement dit, si $u \in SBV(\Omega)$, la partie singulière du gradient de u est purement de type saut et

$$Du = \nabla u \mathcal{L}^N + (u^+ - u^-)\nu_u \mathcal{H}^{N-1} \llcorner S_u.$$

Il s'agit d'un sous-espace strict de $BV(\Omega)$.

Exemple 6.1.2. (i) $W^{1,1}(\Omega) \subset SBV(\Omega)$ car si $u \in W^{1,1}(\Omega)$, $Du = \nabla u \mathcal{L}^N$ et donc, en particulier $D^c u = 0$.

(ii) Si $E \subset \Omega$ est un ensemble mesurable tel que $\mathcal{L}^N(E) + P(E, \Omega) < \infty$, alors $\chi_E \in SBV(\Omega)$ car $D\chi_E = -\nu_E \mathcal{H}^{N-1} \llcorner \partial_* E$. Par conséquent, comme $\partial_* E = S_{\chi_E}$, on en déduit que $D\chi_E = D\chi_E \llcorner S_{\chi_E} =: D^j \chi_E$ et donc $D^c \chi_E = 0$.

(iii) *Crack tip.* En dimension $N = 2$, la fonction définie en coordonnées polaire par

$$u(r, \theta) := \sqrt{r} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right), \quad 0 \leq r < 1, \ \theta \in (-\pi, \pi)$$

appartient à $SBV(B_1)$ avec $S_u = (-1, 0) \times \{0\}$.

(iv) En dimension $N = 1$, la fonction de Cantor-Vitali u (qui est une fonction dans $BV(0,1)$ puisque croissante) n'appartient pas à $SBV(0,1)$ car on a déjà vu que $Du = D^c u \neq 0$.

Nous allons commencer par donner une caractérisation de cet espace. Pour ce faire, pour toute fonction Lipschtzienne $\psi \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ on introduit la notation

$$\|\psi\|_* := \sup\{|\psi(t) - \psi(s)| : s, \, t \in \mathbb{R}\}.$$

De plus, on vérifie aisément que pour tout s, $t \in \mathbb{R}$ avec $s \neq t$,

$$\sup_{\psi \in X} \frac{|\psi(s) - \psi(t)|}{\|\psi\|_*} = 1,$$

où $X := \{\psi \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}) : \ \psi' \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}), \, \psi \text{ non constante}\}$.

Proposition 6.1.3 (Caractérisation de SBV). *Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un ouvert borné et $u \in BV(\Omega)$. Supposons qu'il existe une fonction $a \in L^1(\Omega;\mathbb{R}^N)$ et une mesure positive finie μ sur Ω telle que pour toute fonction Lipschitzienne $\psi \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$*

$$|D\psi(u) - \psi'(u)a\mathcal{L}^N| \leq \|\psi\|_* \mu. \tag{6.1.1}$$

Alors $u \in SBV(\Omega)$, $a = \nabla u$ $\mathcal{L}^N$-p.p. dans Ω et $\mu \geq \mathcal{H}^{N-1} \llcorner S_u$.

Réciproquement si $u \in SBV(\Omega)$ et $\mathcal{H}^{N-1}(S_u) < \infty$, alors (6.1.1) est satisfait avec $a = \nabla u$ et $\mu = \mathcal{H}^{N-1} \llcorner S_u$.

Démonstration. On montre d'abord la condition nécessaire. Si $u \in SBV(\Omega)$ et $\psi \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ est une fonction Lipschitz, le théorème 5.2.6 montre que $\psi(u) \in SBV(\Omega)$ avec

$$D\psi(u) = \psi'(u)\nabla u\mathcal{L}^N + (\psi(u^+) - \psi(u^-))\nu_u \mathcal{H}^{N-1} \llcorner S_u$$

et donc

$$|D\psi(u) - \psi'(u)\nabla u\mathcal{L}^N| \leq \|\psi\|_* \mathcal{H}^{N-1} \llcorner S_u,$$

ce qui montre bien (6.1.1) avec $a = \nabla u$ et $\mu = \mathcal{H}^{N-1} \llcorner S_u$.

Pour la condition suffisante, on considère $x_0 \in \Omega$ un point de Lebesgue de a et u, qui est aussi un point de différentiabilité approché de u et tel que la limite

$$\lim_{\varrho \to 0} \frac{\mu(B_\varrho(x_0))}{\varrho^N}$$

existe et est finie. D'après le théorème de différentiation de Besicovitch et le théorème de Calderon-Zygmund, $\mathcal{L}^N$-presque tous les points $x_0 \in \Omega$ satisfont ces propriétés.

On pose $u_0(y) = \nabla u(x_0) \cdot y$ et on considère une fonction $\psi \in \mathcal{C}^1_c(\mathbb{R})$ telle que $\psi(t) = t$ si $t \in u_0(B_1)$ et une fonction test $\varphi \in \mathcal{C}^1_c(B_1)$. Pour tout $\varrho > 0$ tel que $B_\varrho(x_0) \subset \Omega$, on pose alors

$$\psi_\varrho(t) := \psi\left(\frac{t - u(x_0)}{\varrho}\right), \quad \varphi_\varrho(x) = \varphi\left(\frac{x - x_0}{\varrho}\right).$$

On note tout d'abord que

$$\frac{\|\psi_\varrho\|_* \mu(B_\varrho(x_0))}{\varrho^{N-1}} = \varrho \frac{\|\psi\|_* \mu(B_\varrho(x_0))}{\varrho^N} \to 0.$$

En changeant de variable, on obtient d'une part

$$\begin{aligned} \int_\Omega \psi_\varrho(u) \nabla\varphi_\varrho \, dx &= \frac{1}{\varrho} \int_\Omega \psi\left(\frac{u(x) - u(x_0)}{\varrho}\right) \nabla\varphi\left(\frac{x - x_0}{\varrho}\right) dx \\ &= \varrho^{N-1} \int_{B_1} \psi(u_\varrho(y)) \nabla\varphi(y) \, dy, \end{aligned} \tag{6.1.2}$$

où $u_\varrho(y) = [u(x_0 + \varrho y) - u(x_0)]/\varrho$. D'autre part,

$$\begin{aligned} \int_\Omega \psi_\varrho(u) \nabla\varphi_\varrho \, dx &= -\int_\Omega \varphi_\varrho \, dD\psi_\varrho(u) \\ &= -\int_\Omega \varphi_\varrho \, d[D\psi_\varrho(u) - a\psi'_\varrho(u)\mathcal{L}^N] - \int_\Omega \varphi_\varrho a \psi'_\varrho(u) \, dx \\ &= o(\varrho^{N-1}) - \varrho^{N-1} \int_{B_1} \varphi(y) a(x_0 + \varrho y) \psi'(u_\varrho(y)) \, dy \end{aligned} \tag{6.1.3}$$

car
$$\left|\int_\Omega \varphi_\varrho \, d[D\psi_\varrho(u) - a\psi'_\varrho(u)\mathcal{L}^N]\right| \leq \|\varphi\|_\infty \|\psi_\varrho\|_* \mu(B_\varrho(x_0)) = o(\varrho^{N-1}).$$
En regroupant (6.1.2) et (6.1.3), il vient
$$\int_{B_1} \psi(u_\varrho(y))\nabla\varphi(y)\, dy = o(1) - \int_{B_1} \varphi(y)a(x_0+\varrho y)\psi'(u_\varrho(y))\, dy.$$
D'après le choix du point x_0, on obtient par passage à la limite quand $\varrho \to 0$ que
$$\int_{B_1} \psi(u_0(y))\nabla\varphi(y)\, dy = -\int_{B_1} \varphi(y)a(x_0)\psi'(u_0(y))\, dy,$$
puis, suite à une intégration par partie dans le membre de gauche de la précédente inégalité $\nabla[\psi(u_0(y))] = a(x_0)\psi'(u_0(y))$ pour $\mathcal{L}^N$-presque tout $y \in B_1$. Comme ψ est l'identité sur $u_0(B_1)$, il vient que $\nabla u(x_0) = a(x_0)$.

D'après le théorème 5.2.6, $D^a\psi(u) = \psi'(u)\nabla u\mathcal{L}^N$ et donc pour toute fonction Lipschitz $\psi \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$, on a
$$|D^s\psi(u)| \leq \|\psi\|_*\mu. \tag{6.1.4}$$
En particulier, une nouvelle utilisation du théorème 5.2.6 montre que
$$|\psi'(\tilde{u})D^c u| = |D^c\psi(u)| = |D^s\psi(u)|\llcorner(\Omega\setminus S_u) \leq \|\psi\|_*\mu\llcorner(\Omega\setminus S_u).$$
En choisissant $\psi^1_\varepsilon(t) = \sin(t/\varepsilon)$ et $\psi^2_\varepsilon(t) = \cos(t/\varepsilon)$, on obtient en utilisant que $|\cos t| + |\sin t| \geq 1$
$$|D^c u| \leq 4\varepsilon\mu\llcorner(\Omega\setminus S_u),$$
puis que $|D^c u| = 0$ en faisant tendre $\varepsilon \to 0$. On a donc bien montré que $u \in SBV(\Omega)$.

D'après (6.1.4) et le théorème 5.2.6,
$$|\psi(u^+) - \psi(u^-)|\mathcal{H}^{N-1}\llcorner S_u = |D^s\psi(u)|\llcorner S_u \leq \|\psi\|_*\mu\llcorner S_u.$$
Soit $X := \{\psi \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}) : \psi' \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}), \psi \text{ non constante}\}$ qui est un sous-espace séparable de $W^{1,\infty}(\mathbb{R})$ car la dérivé d'une fonction $\psi \in X$ appartient à $\mathcal{C}_c(\mathbb{R})$ qui est lui même séparable. On considère alors un sous-ensemble D dénombrable dense dans X. D'après le théorème de différentiation de Besicovitch et le fait que S_u est rectifiable (voir théorème 3.4.3), pour tout $\psi \in D$, il existe un ensemble $Z_\psi \subset S_u$ Borélien $\mathcal{H}^{N-1}$-négligeable tel que
$$|\psi(u^+(x_0)) - \psi(u^-(x_0))| \leq \|\psi\|_* \limsup_{\varrho\to 0} \frac{\mu(B_\varrho(x_0))}{\omega_{N-1}\varrho^{N-1}} \quad \text{pour tout } x_0 \in S_u \setminus Z_\psi.$$
En posant $Z = \bigcup_{\psi\in D} Z_\psi$ qui reste un Borélien $\mathcal{H}^{N-1}$-négligeable, l'inégalité précédente reste vraie pour tout $x_0 \in S_u \setminus Z$ et pour tout $\psi \in D$. Comme
$$1 = \sup_{\psi\in X} \frac{|\psi(u^+(x_0)) - \psi(u^-(x_0))|}{\|\psi\|_*} = \sup_{\psi\in D} \frac{|\psi(u^+(x_0)) - \psi(u^-(x_0))|}{\|\psi\|_*},$$
on en déduit que
$$\limsup_{\varrho\to 0} \frac{\mu(B_\varrho(x_0))}{\omega_{N-1}\varrho^{N-1}} \geq 1 \quad \text{pour tout } x_0 \in S_u \setminus Z.$$
La Proposition 3.2.7 montre alors que $\mu \geq \mu\llcorner(S_u\setminus Z) \geq \mathcal{H}^{N-1}\llcorner(S_u\setminus Z) = \mathcal{H}^{N-1}\llcorner S_u$, ce qui conclut la preuve du résultat. $\square$

Nous allons nous intéresser à des propriétés de fermeture de cet espace. Notons que si $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite de fonctions dans $SBV(\Omega)$ telles que $\sup_k \|u_k\|_{BV(\Omega)} < \infty$, alors, quitte à extraire une sous-suite $u_k \to u$ dans $L^1(\Omega)$ avec $u \in BV(\Omega)$, mais en général, $u \notin SBV(\Omega)$. Par exemple, en dimension $N = 1$, la fonction de Cantor-Vitali est la limite (uniforme) dans $(0,1)$ d'une suite $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ de fonctions Lipschitziennes croissantes sur $(0,1)$. En particulier $u_k \in SBV(\Omega)$ et $\|u_k\|_{BV(\Omega)} \le u_k(1) - u_k(0) = 1$, mais $u \notin SBV(0,1)$ car $Du = D^c u \neq 0$.

Nous allons montrer un résultat de compacité "faible" dans l'espace SBV.

Théorème 6.1.4 (Ambrosio). *Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un ouvert borné et $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ une suite dans $SBV(\Omega)$ telle que*

$$\sup_{k\in\mathbb{N}} \left\{ \|u_k\|_\infty + \|\nabla u_k\|_2 + \mathcal{H}^{N-1}(S_{u_k}) \right\} < \infty.$$

Alors, il existe une sous-suite $\{u_{k_j}\}_{j\in\mathbb{N}}$ et une fonction $u \in SBV(\Omega)$ telles que

$$\begin{cases} u_{k_j} \rightharpoonup u \quad \textit{faible* dans } L^\infty(\Omega), \\ \nabla u_{k_j} \rightharpoonup \nabla u \quad \textit{faiblement dans } L^2(\Omega;\mathbb{R}^N), \\ \mathcal{H}^{N-1}(S_u) \le \liminf_j \mathcal{H}^{N-1}(S_{u_{k_j}}). \end{cases}$$

Démonstration. D'après les définitions des limites approximatives, on a clairement que $|u_k^\pm| \le \|u_k\|_\infty$ de sorte que

$$|Du_k|(\Omega) = \int_\Omega |\nabla u_k|\, dx + \int_{S_{u_k}} |u_k^+ - u_k^-|\, d\mathcal{H}^{N-1} \le \sqrt{\mathcal{L}^N(\Omega)}\|\nabla u_k\|_2 + 2\|u_k\|_\infty \mathcal{H}^{N-1}(S_{u_k}) \le C.$$

D'après les hypothèses (on rappelle que Ω est borné), la suite $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ est bornée dans $BV(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$, la suite $\{\nabla u_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ est bornée dans $L^2(\Omega;\mathbb{R}^N)$ et la suite de mesures $\{\mathcal{H}^{N-1} \llcorner S_{u_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ est bornée dans $\mathcal{M}(\Omega)$. On peut donc extraire une sous-suite, toujours notée $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ pour simplifier, telle que

$$\begin{cases} u_k \rightharpoonup u \quad \text{faible* dans } L^\infty(\Omega), \\ \nabla u_k \rightharpoonup a \quad \text{faiblement dans } L^2(\Omega;\mathbb{R}^N), \\ \mathcal{H}^{N-1} \llcorner S_{u_k} \rightharpoonup \mu \quad \text{faible* dans } \mathcal{M}(\Omega), \end{cases}$$

où $u \in BV(\Omega)$, $a \in L^2(\Omega;\mathbb{R}^N)$ et $\mu \in \mathcal{M}(\Omega)$ est une mesure positive. De plus, par injection compacte de Rellich on a également que $u_k \to u$ fortement dans $L^1_{\text{loc}}(\Omega)$. En utilisant de nouveau la borne $L^\infty(\Omega)$ sur $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ on en déduit que $u_k \to u$ fortement dans $L^p(\Omega)$ pour tout $1 \le p < \infty$.

Soit $\psi \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ une fonction Lipschitzienne. En particulier, $D\psi(u_k) \rightharpoonup D\psi(u)$ faible* dans $\mathcal{M}(\Omega;\mathbb{R}^N)$. Comme $\psi'(u_k) \to \psi'(u)$ fortement dans $L^2(\Omega)$ et ψ' est une fonction bornée, on en déduit que $\psi'(u_k)\nabla u_k \rightharpoonup \psi'(u)a$ faiblement dans $L^2(\Omega;\mathbb{R}^N)$. Par ailleurs, comme en vertu du théorème 5.2.6, on a

$$D\psi(u_k) = \psi'(u_k)\nabla u_k \mathcal{L}^N + (\psi(u_k^+) - \psi(u_k^-))\nu_{u_k} \mathcal{H}^{N-1} \llcorner S_{u_k},$$

il vient

$$|D\psi(u_k) - \psi'(u_k)\nabla u_k \mathcal{L}^N| \le \|\psi\|_* \mathcal{H}^{N-1} \llcorner S_{u_k},$$

puis par semicontinuité inférieure de la variation totale

$$|D\psi(u) - \psi'(u)a\mathcal{L}^N| \le \|\psi\|_* \mu.$$

Par application du théorème 6.1.3, on en déduit que $a = \nabla u$, $\mathcal{H}^{N-1} \llcorner S_u \le \mu$ et, en particulier,

$$\mathcal{H}^{N-1}(S_u) \le \mu(\Omega) \le \liminf_{k\to\infty} \mathcal{H}^{N-1}(S_{u_k}),$$

ce qui conclut la preuve du théorème de compacité. □

6.2 Le problème de Mumford-Shah

On considère une image donnée par un niveau de gris $g : \Omega \to [0,1]$, $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ est un ouvert borné, que l'on cherche à segmenter, i.e., trouver une bonne approximation des contours. Un problème variationnel proposé par Mumford-Shah consiste à déterminer un ensemble $K \subset \Omega$ (correspondant aux contours) de longueur minimale et une fonction $u : \Omega \setminus K \to \mathbb{R}$ "proche" de g et "régulière" en dehors de K. On considère alors le problème de minimisation suivant :

$$\inf \left\{ \int_{\Omega \setminus K} |\nabla u|^2 \, dx + \mathcal{H}^1(K) + \int_\Omega |u-g|^2 \, dx \right\},$$

où l'infimum est pris parmi tous les ensembles fermés $K \subset \Omega$ et toutes les fonctions $u \in H^1(\Omega \setminus K)$. Une formulation faible, proposée par Ambrosio et De Giorgi, consiste à assimiler K à l'ensemble des sauts de u. Le problème peut alors se reformuler dans le cadre des fonctions à variation bornée

$$\alpha := \inf_{u \in BV(\Omega)} \left\{ \int_\Omega |\nabla u|^2 \, dx + \mathcal{H}^1(S_u) + \int_\Omega |u-g|^2 \, dx \right\}.$$

Il s'avère que l'espace $BV(\Omega)$ est trop grand car on peut montrer, par exemple en dimension 1, que toute fonction $g \in L^\infty(\Omega)$ peut être approchée dans $L^2(\Omega)$ par une suite de fonctions $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ dans $BV(\Omega)$ telles que $\nabla u_k = 0$ et $\mathcal{H}^{N-1}(S_{u_k}) = 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}$, de sorte que $\alpha = 0$.

C'est précisément pour cette raison que l'espace $SBV(\Omega)$ a été introduit par Ambrosio et De Giorgi. On définit alors la fonctionnelle de Mumford-Shah

$$F(u) := \int_\Omega |\nabla u|^2 \, dx + \mathcal{H}^{N-1}(S_u) + \int_\Omega |u-g|^2 \, dx, \quad u \in SBV(\Omega)$$

où $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ est un ouvert borné et $g \in L^\infty(\Omega)$. Nous allons montrer qu'il existe une fonction $u \in SBV(\Omega)$ telle que

$$F(u) \le F(v) \quad \text{pour tout } v \in SBV(\Omega).$$

Notons

$$I := \inf\{F(v) : \ v \in SBV(\Omega)\},$$

de sorte que $0 \le I \le F(0) \le \int_\Omega |g|^2 \, dx$. On considère une suite minimisante $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ dans $SBV(\Omega)$ telle que $F(u_k) \to I$. On note $M := \|g\|_\infty$ et on pose $\psi(t) = \min(\max(t, -M), M)$ qui est une fonction 1-Lipschitz, croissante et borné. On régularise ensuite ψ en posant $\psi_\varepsilon := \psi * \eta_\varepsilon$ qui est une fonction croissante, bornée, de classe $\mathcal{C}^\infty$ et 1-Lipschtzienne. Comme $\psi_\varepsilon \to \psi$ ponctuellement sur $\mathbb{R}$, on en déduit que $\psi_\varepsilon(u_k) \to \psi(u_k)$ $\mathcal{L}^N$-p.p. dans Ω, puis que $\psi_\varepsilon(u_k) \to \psi(u_k)$ dans $L^1(\Omega)$ quand $\varepsilon \to 0$, par convergence dominée. De plus, $|D\psi_\varepsilon(u_k)|(\Omega) \le |Du_k|(\Omega)$, ce qui montre que la suite $\{D\psi_\varepsilon(u_k)\}_{\varepsilon>0}$ est bornée dans $\mathcal{M}(\Omega;\mathbb{R}^N)$ et donc que $D\psi_\varepsilon(u_k) \rightharpoonup D\psi(u_k)$ faible* dans $\mathcal{M}(\Omega;\mathbb{R}^N)$. Il vient alors que $v_k := \psi(u_k) \in BV(\Omega)$ puis, par semicontinuité inférieure de la variation totale, on a aussi que $|Dv_k| \le |Du_k|$. La fonction ψ étant 1-Lipschitz, on a que $S_{v_k} \subset S_{u_k}$. Par conséquent,

$$|D^c v_k| = |D^s v_k| \llcorner (\Omega \setminus S_{v_k}) \le |D^s u_k| \llcorner (\Omega \setminus S_{v_k}) = |D^j u_k| \llcorner (S_{u_k} \setminus S_{v_k}).$$

Comme d'après le théorème 5.2.3, l'ensemble $S_{u_k} \setminus S_{v_k}$ est σ-fini par rapport à la mesure $\mathcal{H}^{N-1}$, le théorème 5.2.5 montre que $|D^c v_k| = 0$ et donc que $v_k \in SBV(\Omega)$. Par construction $\|v_k\|_\infty \le M$. De plus, par la propriété de localité du gradient approché, on a

$$\begin{cases} \nabla v_k = \nabla u_k & \mathcal{L}^N\text{-p.p. sur } \{u_k = v_k\}, \\ \nabla v_k = 0 & \mathcal{L}^N\text{-p.p. sur } \{v_k = -M\} \cup \{v_k = M\}, \end{cases}$$

de sorte que $|\nabla v_k| \leq |\nabla u_k|$. Par conséquent, en utilisant également le fait que ψ est 1-Lipschitz, on en déduit que

$$I \leq F(v_k) \leq F(u_k) \to I,$$

et donc $\{v_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ est une nouvelle suite minimisante. Comme $I < \infty$, on en déduit que

$$\sup_{k\in\mathbb{N}} \left\{ \|v_k\|_\infty + \|\nabla v_k\|_2 + \mathcal{H}^{N-1}(S_{v_k}) \right\} < \infty$$

et le théorème de compacité d'Ambrosio montre l'existence d'une sous-suite $\{v_{k_j}\}_{j\in\mathbb{N}}$ et une fonction $u \in SBV(\Omega)$ telles que

$$\begin{cases} v_{k_j} \rightharpoonup u \quad \text{faible* dans } L^\infty(\Omega), \\ \nabla v_{k_j} \rightharpoonup \nabla u \quad \text{faiblement dans } L^2(\Omega; \mathbb{R}^N), \\ \mathcal{H}^{N-1}(S_u) \leq \liminf_j \mathcal{H}^{N-1}(S_{v_{k_j}}). \end{cases}$$

Par conséquent

$$I \leq F(u) \leq \liminf_{j\to\infty} F(v_{k_j}) = I,$$

ce qui montre effectivement que $F(u) = I$ et donc que u est une solution du problème de minimisation de Mumford-Shah.

Bibliographie

[1] L. Ambrosio, N. Fusco, D. Pallara : *Functions of Bounded Variation and Free Discontinuity Problems*, Oxford University Press, Oxford, 2000.

[2] L.C. Evans, R.F. Gariepy : *Measure Theory and Fine Properties of Functions*, CRC Press, Boca Raton, 1992.

[3] H. Federer : *Geometric Measure Theory*, Springer-Verlag, New York, 1969.

[4] E. Giusti : *Minimal Surfaces and Functions of Bounded Variation*, Basel, Birkhaüser Verlag, 1984.

[5] F. Maggi : *Sets of Finite Perimeter and Geometric Variational Problems. An Introduction to Geometric Measure Theory*, Cambridge University Press, 2012.

[6] W. Rudin : *Real and Complex Analysis*, McGraw-Hill Book Co., New York-Toronto, Ont.-London (1966).