Dépendance des extrêmes

Extrêmes bivariés

$(X, Y) \sim G(\cdot, \cdot)$loi bivariée extrême, marginale Fréchet standard F

$$G(x, y) = P(X \leq x, Y \leq y) = \exp(-V(x, y))$$

avec $V(x, y) = 2 \int_0^1 \max\left(\frac{\omega}{x}, \frac{1-\omega}{y}\right) dH(\omega)$ et H distribution sur $[0, 1]$ vérifiant $\int_0^1 \omega dH(\omega) = \frac{1}{2}$.

$P(X \leq x, Y \leq x) = e^{-V(x,x)} = e^{-\frac{V(1,1)}{x}} = (e^{-\frac{1}{x}})^{V(1,1)} \equiv F(x)^{\theta}$

Cas d'un processus spatial :

- $Z(\cdot)$ marginale Fréchet standard
- $Z^{(j)}(\cdot)$, $j = 1, \ldots k$, répétitions indépendantes de $Z(\cdot)$, $\in DA(G(\cdot, \cdot))$,

$G(\cdot, \cdot)$ distribution bivariée extrême.

$$\lim_{k \to \infty} P\left(\max_{j=1,\ldots,k} \max\left(Z^{(j)}(s), Z^{(j)}(s+h)\right) \leq kz\right) = \exp\left(-\frac{\theta(h)}{z}\right)$$

$\leadsto$ $\boxed{\theta(h)\text{: dépendance des extrêmes à distance } h}$

Dépendance extrême : coefficients "usuels" χ et $\bar{\chi}$

On considère un couple de v. a. (X, Y), de loi jointe $K(x, y)$ et de marginale F (on pourra supposer si nécessaire, et sans perte de généralités, que la marginale peut être considérée comme Fréchet standard, ie $F(x) = \exp(-1/x)$).

Le coefficient χ

Upper Tail Dependence Parameter (UTDP) (Joe, 1993) :

$$\chi = \lim_{x \to x^*} \frac{\bar{K}(x, x)}{1 - F(x)} = \lim_{x \to x^*} P(Y > x \mid X > x),$$

où $x^* = \sup\{x \in \mathbb{R} \ : F(x) < 1\}$.

- Si $\chi = 0$, on dit qu'il y a *indépendance asymptotique* :

si $F_X \in \mathcal{D}(\mathcal{G}_1)$ et $F_Y \in \mathcal{D}(\mathcal{G}_2)$, la distribution asymptotique de (X, Y) vérifie alors

$$P\left(\max_{1\leq i\leq n} X_i < a_n x + b_n, \max_{1\leq i\leq n} Y_i < a_n y + b_n)\right) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \mathcal{G}_1(x)\mathcal{G}_2(y),$$

i.e. K appartient au domaine d'attraction de l'indépendance.

- Si $\chi > 0$, on dit qu'il y a *dépendance asymptotique* des extrêmes.

Remarque : χ et domaine d'attraction du maximum de $K(\cdot,\cdot)$: si $K \in \mathcal{D}(\mathcal{G})$ et si χ est le UTDP de K alors χ est le UTDP de $\mathcal{G}$.

Caractérisation de χ : approche copules et mesures $\chi(u)$

$$K(x,y) = P(F(X) \leq F(x), F(Y) \leq F(y)) = C(F(x), F(y))$$

où C fonction sur $[0,1]^2$, de marginales uniformes, fonction copule de (X,Y) (ou de K).

$C(\cdot,\cdot)$ exprime la dépendance entre X et Y de façon invariante à toute transformation des marginales.

Remarque : D'après le théorème de Skar (1959), la copule est unique dès lors que l'on considère une distribution jointe de marginales continues.

$(X, Y) \rightsquigarrow (U, V)$ de même marginale uniforme et on considère

$$\chi = \lim_{u \to 1} P(V > u \mid U > u) = \lim_{u \to 1} \chi(u).$$

on a de façon équivalente

$$\chi(x) = 2 - \frac{\log(P(X < x, Y < x))}{\log(P(X < x))}$$

et

$$\chi = \lim_{x \to x^*} \chi(x)$$

Remarques :

1. Dépendance totale : $\forall u,\ \chi(u) = \frac{P(U>u)}{P(U>u)} = 1$;

2. Indépendance : d'après sa définition $\chi(u) \equiv 0$ et donc $\chi = 0$

3. Pour une distribution bi-variée extrême : $\chi(u)$ est constant ; si l'on considère par exemple le modèle

logistique de paramètre α (Coles (2001)), on a $\chi(u) = 2 - 2^{\alpha}$.

En général, $\chi(u)$ **fonction complexe de** u :

par ex. pour un couple gaussien de corrélation ρ,

- $\chi(u)$ augmente avec ρ ...
- quand $u \to 1$, l'effet de dépendance diminue :

pour $\rho < 1$, $\chi(u) \to 0$ quand $u \to 1$; pour $\rho > 0$, la convergence est très lente et ultimement abrupte ...

- pour u proche de 1, $\chi(u)$ peut être considérablement plus grand que 0 et "foncer" d'un seul coup s'écraser vers 0, i.e. **indépendance extrême qui pourrait facilement passer inaperçue** !

$\rightsquigarrow$ $\boxed{\text{Possibilité de conclure à tort à une dépendance asymptotique des extrêmes}}$

!!!! **extrêmes multivariés** $\not\Leftrightarrow$ **indép. asympt.** !!!!

$\rightsquigarrow$ reflète mal le comportement des extrêmes en dehors d'une dépendance asymptotique !!!!

$\Rightarrow$ **nécessité d'introduire une autre caractérisation de la dépendance :** $\bar{\chi}(\cdot)$ .... à suivre !

Lien entre χ et θ (coefficient extrêmal)

- Soit F marginale max-stable de (X, Y) (F est une GEV)

$$\boxed{\chi = 2 - \theta}$$

- $\chi(x)$ est constant pour les lois bi-variées extrêmes :

$$\chi(x) = 2 - \frac{\log P(X < x, Y < x)}{\log P(X < x)} = 2 - \frac{-V(x,x)}{-1/x} = 2 - V(1,1)$$

donc $\chi = 2 - V(1,1)$. Le paramètre χ résume V et/ou H ... et on a aussi $\theta = V(1,1)$.

Remarque :

Pickands (1981) a donné une autre caractérisation pour les lois bi-variées extrêmes :
G est une distribution extrême bi-variée ssi

$$G(x,y) = exp\left\{-\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)A\left(\frac{x}{x+y}\right)\right\}$$

où $A(\cdot)$ est une fonction convexe de $[0,1]$ dans $[1/2,1]$ (*vérifiant quelques propriétes*) ...

On a :

$$\boxed{\theta = 2A\left(\frac{1}{2}\right)}$$

Le coefficient $\bar{\chi}(\cdot)$

$\rightsquigarrow$ fonction de survie de la distribution (ou de la copule). D'une façon générale, si F_X et F_Y désignent les marginales, on a :

$$P(X > x, Y > y) = 1 - F_X(x) - F_Y(y) + K(x, y) = \bar{C}(F_X(x), F_Y(y))$$

avec $\bar{C}(u, v) = 1 - u - v + C(u, v)$, où $C(\cdot, \cdot)$ copule associée à K.

Pour $0 \leq u \leq 1$, on considère alors le paramètre suivant :

$$\bar{\chi}(u) = \frac{2 \log P(U > u)}{\log P(U > u, V > u)} - 1 \equiv \frac{2 \log(1 - u)}{\log \bar{C}(u, u)} - 1$$

Propriétés :

1. Si indépendance au-delà de u, $\bar{\chi}(u) = 0$;
2. Si dépendance totale au-delà de u, $\bar{\chi}(u) = 1$;
3. $\forall\, 0 \leq u \leq 1$, $-1 < \bar{\chi}(u) \leq 1$;

1. si $\bar{\chi}(u) \in]0,1[$, alors $P(V > U|U > u) > P(U > u)$: les extrêmes sont associés positivement au sens où l'on a une plus grande probabilité de dépassement que sous l'indépendance.

2. si $\bar{\chi}(u) \in]-1,0[$, on aura une association "négative" : $P(V > u|U > u) < P(U > u)$ D'après ce qui précède, $\bar{\chi}(u)$ augmente en valeur absolue avec la dépendance

   Par analogie avec l'approche UTDP précédente, on définit :

$$\bar{\chi} = \lim_{u \to 1} \bar{\chi}(u)$$

Propriétés de $\bar{\chi}$:

1. $-1 < \bar{\chi} \leq 1$;

2. Si dépendance asymptotique des extrêmes, $\bar{\chi} = 1$;

   si indépendance asymptotique des extrêmes, $\bar{\chi} < 1$.

3. Les lois bi-variées des extrêmes sont asymptotiquement dépendantes ($\bar{\chi} = 1$).

4. Dépendance asymptotique : $\bar{\chi} = 1$ et $\chi > 0$. La valeur de χ d'autant plus proche de 1 que la dépendance est forte.

Résumé :

Le couple $(\chi, \bar{\chi})$: caractériser la dépendance des extrêmes

$\chi \in [0,1]$; $(0,1] \rightsquigarrow$ *dépendance asymptotique.*
$\bar{\chi} \in]-1,1]$; $]-1,1) \rightsquigarrow$ *indépendance asymptotique.*

$\Rightarrow$ $(\chi > 0, \bar{\chi} = 1)$: dépendance asymptotique (*et* χ *détermine la force de la dépendance*) ;

$\Rightarrow$ $(\chi = 0, \bar{\chi} < 1)$: indépendance asymptotique (*et* $\bar{\chi}$ *donne une mesure de la force de dépendance*).

Liens entre $\bar{\chi}$ et η (coefficient de dépendance de queue)

Ledford et Tawn ((1996), (1997)) ont proposé la modélisation suivante pour la loi jointe d'un couple de marginales Fréchet standard :

$$P(X > z, Y > z) \sim_{z \to \infty} \mathcal{L}(z) z^{-1/\eta}$$

avec $\mathcal{L}$ fonction à variation lente* ; $\eta \in (0, 1]$.

On a

$$\boxed{\bar{\chi} = 2\eta - 1}$$

* Une fonction $\mathcal{L}$ est dite à variation lente à l'infini si $\forall t > 0$, $\frac{\mathcal{L}(tx)}{\mathcal{L}(x)} \underset{x \to \infty}{\longrightarrow} 0$.

Remarques :

1. Si $\eta = 1$ et $\mathcal{L}(z) \to c$, $0 < c \leq 1$ alors

   (a) $\chi = c$

   (b) $\bar{\chi} = 1$

   $\Rightarrow$ variables asymptotiquement dépendantes, de degré c. Si $c = 1$, la dépendance est complète.

2. si $\eta = \frac{1}{2}$, $\bar{\chi} = 0$ donc indépendance asymptotique.

Bibliographie

Ancona-Navarrete, M.A. and J.A. Tawn (2002). "Diagnostics for pairwise extremal dependence in spatial processes", *Extremes*, 5, 271-285.

Coles, S.G., Hefferman, J.E., et Tawn, J.A. (2000). "Dependence measures for extreme value analyses". *Extremes*, 2, 339-365.

Draisma, G., Drees, H., Ferreira, A. and L. de Haan (2001). "Tail dependence in independence". Pre-print.

Ledford, A.W., and J.A. Tawn (1996). "Statistics for near independence in multivariate extreme values", *Biometrika*, 83, 169-187.

Ledford, A.W., and J.A. Tawn (1997). "Modelling dependance within joint tail regions", *J. R. Statist. Soc.*, B 59, 475-499.

Schlather, M., and J.A. Tawn (2003). "A dependence measure for multivariate and spatial extreme values: Properties and inference", *Biometrika*, 90, 139-156.