

Chapitre 5.3

Hierarchical modelling for univariate data : nonstationary spatial process model

S. Banerjee, B. Carlin, A. Gelfand

19 octobre 2006

Processus stationnaires

$Z(s), s \in D \subset \mathbb{R}^2$ processus spatial

faiblement stationnaire :

$$\begin{aligned} E(Z(s)) &= \mu \in \mathbb{R} \\ \text{Cov}(Z(s+h), Z(s)) &= C(h), h \in \mathbb{R}^2 \end{aligned}$$

Plus fort, **faiblement stationnaire isotrope** :

$$\begin{aligned} E(Z(s)) &= \mu \in \mathbb{R} \\ \text{Cov}(Z(s+h), Z(s)) &= C(\|h\|), h \in \mathbb{R}^2 \end{aligned}$$

Un peu moins fort, **intrinsèquement stationnaires** :

$$\begin{aligned} E(Z(s) - Z(s+h)) &= 0 \\ \text{Var}(Z(s+h), Z(s)) &= \gamma C(h), h \in \mathbb{R}^2 \end{aligned}$$

Processus non stationnaires

Dans la plupart des applications (environnement, écologie, climatologie, ...), les trois hypothèses sont irréalistes :

Processus non stationnaires

Dans la plupart des applications (environnement, écologie, climatologie, ...), les trois hypothèses sont irréalistes :

- **anisotropie**, bien maitrisee (anisotropie géométrique, zonale, ...)

Processus non stationnaires

Dans la plupart des applications (environnement, écologie, climatologie, ...), les trois hypothèses sont irréalistes :

- **anisotropie**, bien maitrisee (anisotropie géométrique, zonale, ...)
- **tendance**

$$E(Z(s)) = \mu(s) = \text{par exemple } x^T(s)\beta$$

et $Z(s) = \mu(s) + \eta(s)$, avec η de moyenne nulle (intrinsèquement) stationnaire.

Processus non stationnaires

Dans la plupart des applications (environnement, écologie, climatologie, ...), les trois hypothèses sont irréalistes :

- **anisotropie**, bien maitrisee (anisotropie géométrique, zonale, ...)
- **tendance**

$$E(Z(s)) = \mu(s) = \text{par exemple } x^T(s)\beta$$

et $Z(s) = \mu(s) + \eta(s)$, avec η de moyenne nulle (intrinsèquement) stationnaire.

- **covariance** $\text{Cov}(Z(s), Z(s')) = C(s, s')$

Processus non stationnaires

Dans la plupart des applications (environnement, écologie, climatologie, ...), les trois hypothèses sont irréalistes :

- **anisotropie**, bien maitrisee (anisotropie géométrique, zonale, ...)
- **tendance**

$$E(Z(s)) = \mu(s) = \text{par exemple } x^T(s)\beta$$

et $Z(s) = \mu(s) + \eta(s)$, avec η de moyenne nulle (intrinsèquement) stationnaire.

- **covariance** $\text{Cov}(Z(s), Z(s')) = C(s, s')$

On s'intéresse au dernier cas.

Modèles non stationnaires : approche constructive

$$Y(s) = \mu(s) + \sigma w(s) + \varepsilon(s)$$

$w(s)$ stationnaire, de moyenne 0, de fonction de corrélation $\rho(\cdot)$ de variance 1.

On remplace $w(s)$ par

- $v(s) = \sigma(s)w(s)$.

$$\text{Var } v(s) = \sigma^2(s)$$

$$\text{Cov}(v(s), v(s')) = \sigma(s)\sigma(s')\rho(s - s').$$

La variance de Z varie suivant la localisation.

- $v(s) = \sigma w(s) + \delta z(s)$, $z(s) > 0$, δ v.a. de moyenne 0, de variance σ_δ^2 .

$$\text{Var } v(s) = \sigma^2 + z^2(s)\sigma_\delta^2$$

$$\text{Cov}(v(s), v(s')) = \sigma^2\rho(s - s') + z(s)z(s')\sigma_\delta^2.$$

La variance augmente lorsque l'on s'éloigne d'un site de référence.

Modèles non stationnaires : approche par déformation

$C(\cdot)$ une fonction de covariance stationnaire isotropique,
 $g : D \longrightarrow G \subset \mathbb{R}^2$ une déformation de l'espace

$$\text{Cov}(Z(s), Z(s')) = C(\|g(s) - g(s')\|)$$

Sampson, Guttorp (92)

Il faut estimer C et g .

Modèles non stationnaires : approche par déformation

$C(\cdot)$ une fonction de covariance stationnaire isotropique,
 $g : D \longrightarrow G \subset \mathbb{R}^2$ une déformation de l'espace

$$\text{Cov}(Z(s), Z(s')) = C(\|g(s) - g(s')\|)$$

Sampson, Guttorp (92)

Il faut estimer C et g .

- Perrin, Senoussi, Guyon, ...

Modèles non stationnaires : approche par déformation

$C(\cdot)$ une fonction de covariance stationnaire isotropique,
 $g : D \longrightarrow G \subset \mathbb{R}^2$ une déformation de l'espace

$$\text{Cov}(Z(s), Z(s')) = C(\|g(s) - g(s')\|)$$

Sampson, Guttorp (92)

Il faut estimer C et g .

- Perrin, Senoussi, Guyon, ...
- Damian, Sampson, Guttorp (2001) approche bayésienne pour estimer g par splines plaques minces.

Modèles non stationnaires : approche par déformation

$C(\cdot)$ une fonction de covariance stationnaire isotropique,
 $g : D \longrightarrow G \subset \mathbb{R}^2$ une déformation de l'espace

$$\text{Cov}(Z(s), Z(s')) = C(\|g(s) - g(s')\|)$$

Sampson, Guttorp (92)

Il faut estimer C et g .

- Perrin, Senoussi, Guyon, ...
- Damian, Sampson, Guttorp (2001) approche bayésienne pour estimer g par splines plaques minces.
- Schmidt, O'Hagan (2003) approche bayésienne pour estimer les sites transformés comme réalisations d'un processus Gaussien avec prior sur les paramètres.

Modèles non stationnaires : approche par déformation

$C(\cdot)$ une fonction de covariance stationnaire isotropique,
 $g : D \longrightarrow G \subset \mathbb{R}^2$ une déformation de l'espace

$$\text{Cov}(Z(s), Z(s')) = C(\|g(s) - g(s')\|)$$

Sampson, Guttorp (92)

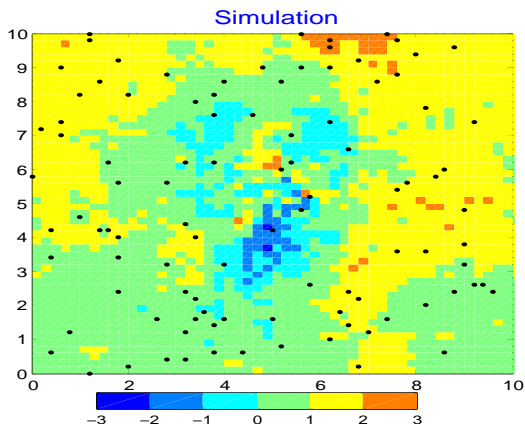
Il faut estimer C et g .

- Perrin, Senoussi, Guyon, ...
- Damian, Sampson, Guttorp (2001) approche bayésienne pour estimer g par splines plaques minces.
- Schmidt, O'Hagan (2003) approche bayésienne pour estimer les sites transformés comme réalisations d'un processus Gaussien avec prior sur les paramètres.

Dans tous les cas on a besoin de répétitions.

Modèles non stationnaires : approche par déformation

Exemple : $g(s) = \left(\frac{1}{\sqrt{2.5(\|s-O\|)}}(x-5); \frac{1}{\sqrt{2.5(\|s-O\|)}}(y-5) \right)$
 $\text{Cov}(Z(s), Z(s')) = \exp(-\|g(s) - g(s')\|)$



Modèles non stationnaires : mélanges par noyaux

$$w(s) = \int_{\mathbb{R}^2} k(s-t)z(t)dt$$

k noyau stationnaire, z stationnaire de fonction de covariance $\sigma^2\rho(\cdot)$.

w stationnaire de covariance

$$\text{Cov}(w(s), w(s')) = \sigma^2 \int_{\mathbb{R}^2} \int_{\mathbb{R}^2} k(s-s'+u)k(u')\rho(u-u')dudu'$$

Modèles non stationnaires : mélanges par noyaux

Approximation par une somme finie

$$w(s) = \sum_{j=1}^L k(s - t_j) z(t_j)$$

w non stationnaire de covariance

$$\text{Cov}(w(s), w(s')) = \sigma^2 \sum_{j=1}^L \sum_{j'=1}^L k(s - t_j) k(s' - t_{j'}) \rho(t_j - t_{j'})$$

Avec un noyau non stationnaire,

$k(s - s', s) = (\text{par exemple}) \exp(-\frac{1}{2}(s - s')^T V_s(s - s'))$

$z(t_1), \dots, z(t_L)$ variables latentes.

Higdon, Swall, Kern (1999).

Modèles non stationnaires : mélanges par noyaux

$$w(s) = \int_{\mathbb{R}^2} k(s-t)z_{\theta(t)}(s)dt$$

$z_{\theta(t)}(s)$ indépendants, stationnaires de fonction de covariance paramétrée par $\theta(\cdot)$.

w non stationnaire de fonction de covariance

$$\text{Cov}(w(s), w(s')) = \sigma^2 \int_{\mathbb{R}^2} \int_{\mathbb{R}^2} k(s-t)k(s'-t)C(s-s', \theta(t))dt$$

Modèles non stationnaires : mélanges par noyaux

Approximation par une somme finie

$$w(s) = \sum_{j=1}^L k(s - t_j) z_j(s)$$

de covariance

$$\text{Cov}(w(s), w(s')) = \sigma^2 \sum_{j=1}^L \sum_{j=1}^L k(s - t_j) k(s' - t_j) C_j(s - s')$$

Processus localement stationnaires. Il faut déterminer L et estimer les C_j .

Fuentes (2002, 2003)

Bayésien non paramétrique : Spatial Dirichlet Process

$\theta_k^* = \{\theta_k^*(s), s \in D\}$ des réalisations d'un processus spatial
Gaussien, stationnaire de moyenne nulle, G_0 .

q_1, q_2, \dots , v.a. i.i.d. $\sim \beta(1, \alpha)$,

$p_1 = q_1, p_2 = q_2(1 - q_1), \dots, p_k = q_k \prod_{j=1}^{k-1} (1 - q_j), \dots$

Spatial Dirichlet Process :

$$G(\cdot) = \sum_{k=1}^{\infty} p_k \delta_{\theta_k^*}(\cdot)$$

Spatial Dirichlet Prior ordre K : $(p_1, \dots, p_K) \sim \text{Dir}(\alpha_1, \dots, \alpha_K)$

$$G(\cdot) = \sum_{k=1}^K p_k \delta_{\theta_k^*}(\cdot)$$

Bayésien non paramétrique : Spatial Dirichlet Process

Si $\{\theta_k^*(s), s \in D\}$ champ aléatoire, t.q.
 $\theta|G \sim G$ et $G \sim SPD_K(\alpha, G_0)$

$$E(\theta(s)|G) = \sum_{k=1}^K p_k \theta_k^*(s)$$

$$\text{Cov}(\theta(s_i), \theta(s_j)|G) = \sum_{k=1}^K p_k \theta_k^*(s_i) \theta_k^*(s_j) - \sum_{k=1}^K p_k \theta_k^*(s_i) \sum_{k=1}^K p_k \theta_k^*(s_j)$$

Non stationnaire

Bayésien non paramétrique : Spatial Dirichlet Process

Avec des répétitions.

$$Y_t, \theta_t, \theta_t | G^{(n)} \sim G^{(n)}, t = 1 \dots T.$$

Modèle semiparamétrique hiérarchique

$$\begin{aligned} Y_1, Y_2, \dots, Y_T | \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_T, \beta, \tau^2 &\sim \mathcal{N}(X_t^T \beta + \theta_t, \tau^2 I_n) \\ \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_T | G^{(n)} &\sim G^{(n)} \end{aligned}$$

Si G_0 champ Gaussien de variance σ^2 et fonction de corrélation $\rho_\Phi(\cdot)$, on peut avoir

$$G^{(n)} | \alpha, \sigma^2, \Phi \sim DPK(\alpha G_0^{(n)})$$

et les priors adéquats pour les autres paramètres du modèle.

Attrape des distributions multi-modales.

Generalized Spatial Dirichlet Process (Gelfand, Guindani, Petrone, Valencia ISBA 2006)

Bayésien non paramétrique : Spatial Dirichlet Process

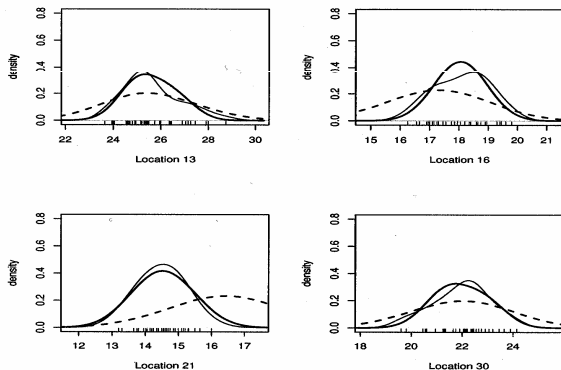


Figure 3: Posterior predictive densities $Y_{new}(s)$ data for the SDP (thick line -) and GP (thick dotted line = -). The lighter dotted line (-) is the estimated density from the 40 replicates in the Colorado dataset (real data).

Bayésien non paramétrique : Spatial Dirichlet Process

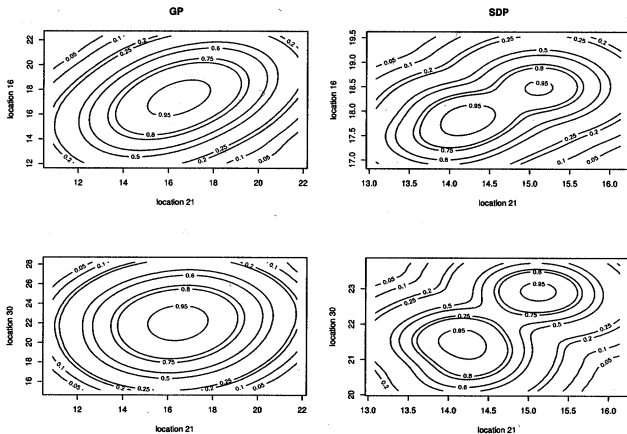


Figure 4: Bivariate contour plots of the posterior distributions of the mean in the SDP and GP models for locations 16 and 21 as well as 21 and 30 and the 40 replicates in the Colorado dataset (real data). See section 4.

Bayésien non paramétrique : Spatial Dirichlet Process

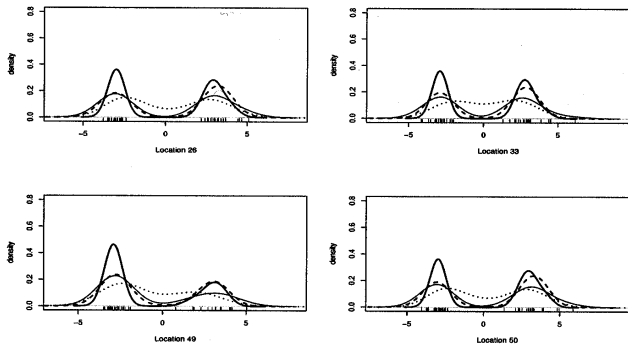


Figure 6: True density (lighter line -) and predictive posterior density, respectively, under the SDP (light dotted line), the GSDP (thick dotted line) and the GSDP_K models for the simulation example in Section 6.

Bayésien non paramétrique : Spatial Dirichlet Process

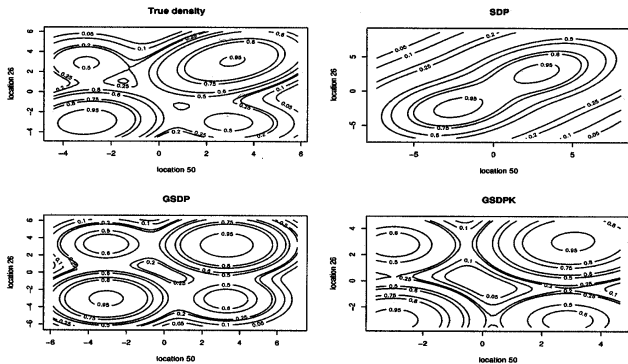


Figure 7: Bivariate contour plots of the true densities and the posterior distributions of the mean of the SDP, GSDP and GSDPK models for locations 26 and 50. See section 6.

Bayésien non paramétrique : Spatial Dirichlet Process

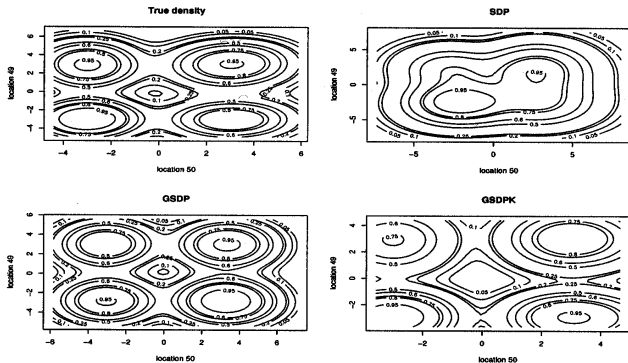


Figure 8: Bivariate contour plots of the true densities and the posterior distributions of the mean of the SDP, GSDP and GSDPK models for locations 49 and 50. See section 6.

Covariance non stationnaire spatialement adaptative

X processus stationnaire au second ordre,

$$C(s, t) = \int_{\Omega} \exp(i\omega(s - t)) d\mu(\omega)$$

μ mesure positive, et

$$X(t) = \int_{\Omega} \exp(i\omega t) dZ(\omega)$$

avec $E(dZ(\omega)dZ(\omega')) = \delta(\omega, \omega')d\mu(\omega)$.

$\mu(\omega)$ mesure spectrale, si $d\mu(\omega) = f(\omega)d\omega$, f est la densité spectrale de X .

Covariance non stationnaire spatialement adaptative

Corrélation gaussienne

$$C(s, t) = \exp(-\alpha \|s - t\|^2) \quad f(\omega) = (4\pi\alpha)^{N/2} \exp(-\omega\omega'/4\alpha)$$

portée grande \rightsquigarrow basses fréquences ; portée faible \rightsquigarrow hautes fréquences

Covariance de Matern

$$C(s, t) = \frac{\pi^{N/2}}{2^{\nu-1} \Gamma(\nu + N/2) c^{2\nu}} (c \|s - t\|)^{\nu} K_{\nu}(c \|s - t\|)$$

$$f(\omega) = C(c^2 + \|\omega\|^2)^{-\nu-N/2}$$

Plus ν est grand plus le processus est régulier.

Covariance non stationnaire spatialement adaptative

Idée : faire varier spatialement les paramètres de la densité spectrale.

$$f_{NS}^s(\omega) = f(\omega, s, \theta(s))$$

La régularité locale du processus est régie par $\theta(\cdot)$.

Donne une covariance admissible si $\int_{\Omega} |f(\omega, s, \theta(s))| d\omega < \infty$.

Gaussien :

$$f_{NS}^s(\omega) = h(s)^2 (4\pi\alpha(s))^{N/2} \exp(-\alpha(s)\omega\omega'/4)$$

$$C_{NS}(s, t) = 2^{N/2} \frac{(\alpha(s)\alpha(t))^{N/4}}{(\alpha(s) + \alpha(t))^{N/2}} \exp(-\alpha\|s-t\|^2 \frac{2}{\alpha(s) + \alpha(t)})$$

Matern

$$f_{NS}^s(\omega) = h(s)^2 (c^2 + \|\omega\|^2)^{-\nu(s)-N/2}$$

$$C_{NS}(s, t) = \frac{h(s)h(t)\pi^{N/2}}{2^{\nu_{s,t}-1}\gamma(\nu_{s,t} + N/2)c^{2\nu_{s,t}}} (c\|s-t\|)_{s,t}^{\nu} K_{\nu_{s,t}}(c\|s-t\|)$$

Covariance non stationnaire spatialement adaptative

$f(\omega)$ densité spectrale, non paramétrique par exemple
décomposition sur une base (Karhunen-Loève ...)

$$f_{NS}^s(\omega) = C(f(\omega))^{\eta(s)}$$

Si $\eta(s) > 1$, plus de basses fréquences et processus plus régulier,
si $\eta(s) < 1$ plus de hautes fréquences et processus plus chahuté.

On obtient une covariance valide si $\int_{\Omega} |f(\omega)|^{\eta(s)} d\omega < \infty$.

Karhunen-Loève : $\phi_0(\cdot), \phi_1(\cdot), \dots$ base orthonormée de \mathbb{R}^N ,
représentation spectrale

$$Z(s) = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i \phi_i(s) \quad ; \quad C(s_i, s_j) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \phi_k(s_i) \phi_k(s_j)$$

$$C_{NS}(s_i, s_j) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^{\eta(s_i)/2} \phi_k(s_i)^{\eta(s_i)/2} \phi_k(s_j)^{\eta(s_j)/2}$$

Covariance non stationnaire spatialement adaptative

Approche bayésienne

$\theta(s) = \eta(s)\theta$, θ la valeur du paramètre dans le cas stationnaire.
 $\eta(s)$ mesure l'écart à la stationnarité et doit être régulière en s .

Régression splines bayésienne

$$\log \eta(s) = \beta_0 + s\beta_1 + \sum_{j=1}^k \psi(s, u_j)\beta_{j+2}$$

Holmes, Pintore (2005)

Covariance non stationnaire spatialement adaptative

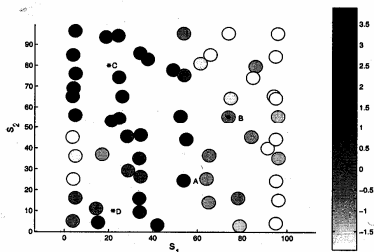


Figure 19: Plot 1: Bubble patch of the measurements of concentrations at the $n = 60$ data locations, Section 10.

Covariance non stationnaire spatialement adaptative

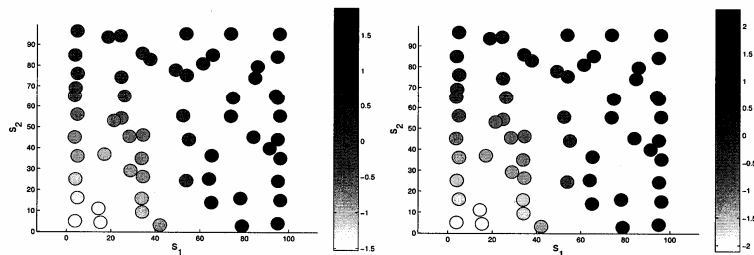


Figure 20: From the left, Plot 1: Bubble patch of $\log \eta_i$'s for the non-stationary model using the Karhunen-Loève expansion. Plot 2: Bubble patch of $\log \eta_i$'s for the non-stationary model using the Fourier representation., Section 10.

Covariance non stationnaire spatialement adaptative

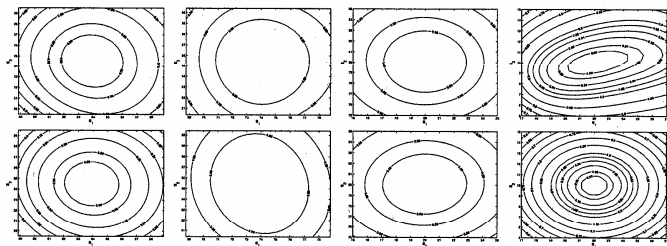


Figure 21: From the left, Top row plots: Correlation structure around points A, B, C and D using the Karhunen-Loève representation. From the left, Bottom row plots: Correlation structure around points A, B, C and D using the Fourier representation, Section 10.