EI-SE3 / Probabilités / Contrôle 2

24 mai 2016

Exercice 1 [7 points]

Soit (X_n) une suite de variables aléatoires indépendantes de loi uniforme sur $[0,1]$.
On pose $I_n = \min_{1\leq i\leq n} X_i$ et $S_n = \max_{1\leq i\leq n} X_i$.

(a) Donner la fonction de répartition puis la densité de la variable aléatoire I_n. [2]

Solution :
Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\mathrm{P}(I_n \leq x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x < 0\,, \\ \mathrm{P}\left(\min\limits_{1\leq i\leq n} X_i \leq x\right) = 1 - \mathrm{P}\left(\forall i \in [\![1,n]\!]\; X_i > x\right) \\ \qquad\qquad = 1-(1-x)^n \text{ si } x\in[0,1] \\ 1 \text{ si } x > 1\,, \end{cases}$$

par hypothèse sur les X_i (iid.). Donc $f_{I_n}(x) = \frac{d}{dx}\mathrm{P}(I_n \leq x) = n(1-x)^{n-1}\mathbb{1}_{x\in[0,1]}$.

(b) Étudier la convergence de la suite (I_n) en loi, puis pour les autres modes. [3]

Solution :
Sur $[0,1]$, $F_{I_n}(x) = 1-(1-x)^n$ converge ponctuellement vers la fonction égale à 1 partout sauf en 0. Donc F_{I_n} converge ponctuellement vers $\mathbb{1}_{x>0}$. Cette dernière fonction n'est pas continue à droite en zéro, donc ne peut pas être une fonction de répartition. Elle est cependant égale presque partout à $\mathbb{1}_{x\geq 0}$ qui elle vérifie toutes les propriétés d'une fonction de répartition. On en déduit que I_n converge en loi vers $X = 0$.

Soit $\varepsilon \in]0,1[$. $\mathrm{P}(I_n > \varepsilon) = (1-\varepsilon)^n \longrightarrow 0$, donc il y a convergence en probabilité.
La convergence presque sûre est assurée par la convergence de la série
$\sum_{n=1}^{+\infty} \mathrm{P}(I_n > \varepsilon) = \frac{1-\varepsilon}{\varepsilon} < +\infty$. Finalement, $I_n^r \leq I_n$ pour $r \geq 1$ car I_n est à support dans $[0,1]$; on a donc

$$\mathrm{E}[I_n^r] \leq \mathrm{E}[I_n] = \int_0^1 nx(1-x)^{n-1} = \frac{1}{n+1} \longrightarrow 0\,,$$

après calculs en remarquant que $\frac{d}{dx}(-x(1-x)^n) = -(1-x)^n + nx(1-x)^{n-1}$ (ou en effectuant le changement de variable $y = 1-x$). C'est-à-dire que l'on a convergence en moyenne d'ordre r pour tout $r \geq 1$.

(**c**) Étudier la convergence en loi de la suite $(Y_n = n(1 - S_n))$. [2]

Solution :
$n(1 - S_n) \geq 0$, donc le support est inclus dans $\mathbb{R}^+$. Soit alors $x \in \mathbb{R}^+$.

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(n(1-S_n) \leq x) &= \mathrm{P}\left(S_n \geq 1 - \frac{x}{n}\right) \\
&= 1 - \mathrm{P}\left(S_n < 1 - \frac{x}{n}\right) \\
&= 1 - \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n \\
&\longrightarrow 1 - e^{-x} \text{ en utilisant la propriété rappelée au tableau}
\end{aligned}$$

On reconnaît la fonction de répartition de la loi exponentielle de paramètre $\lambda = 1$: $n(1 - S_n)$ converge en loi vers $Y \sim \mathcal{E}(1)$.

Exercice 2 [2 points]

Soit la suite de variables aléatoires (X_n) définie pour $n \in \mathbb{N}$ par :

$$\begin{cases} \mathrm{P}(X_n = 0) = 1 - \dfrac{1}{n} \\ \mathrm{P}(X_n = n) = \dfrac{1}{n} \end{cases}$$

Montrer que la suite (X_n) converge en probabilité vers $X = 0$ mais que (X_n) ne converge pas en moyenne quadratique. *Bonus : qu'en est-il de la convergence presque sûre ?*

Solution :
Soit $\varepsilon > 0$. On remarque que $\mathrm{P}(X_n > \varepsilon) \leq \mathrm{P}(X_n > 0) = \frac{1}{n} \longrightarrow 0$, donc il y a convergence en probabilité. En revanche, $\mathrm{E}[X_n^2] = \frac{n^2}{n} = n$ qui ne converge pas, donc il n'y a pas convergence en moyenne quadratique.

Concernant la convergence presque sûre la condition suffisante $\sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{P}(X_n > \varepsilon) < +\infty$ n'est pas vérifiée, donc il faut procéder autrement. On applique le lemme de Borel-Cantelli à la suite d'évènements $E_n = \{X_n = n\}$: ceux-ci sont indépendants et l'on vérifie $\sum_{n \in \mathbb{N}} \mathrm{P}(\{X_n = n\}) = +\infty$. Alors avec probabilité 1 une infinité d'évènements E_n se réalisent, et on obtient pour $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}\left(\sup_{N \geq n} X_N > \varepsilon\right) &= \mathrm{P}(\exists N \geq n \,/\, X_N = N) \\
&= \mathrm{P}(\exists N \geq n \,/\, E_N \text{ se réalise}) \\
&= 1
\end{aligned}$$

Il n'y a donc pas convergence presque sûre.

Exercice 3 [4 points]

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant une loi de Bernoulli de même paramètre p. On note $U = X + Y$ et $V = X - Y$.
Déterminer la loi du couple (U, V). U et V sont-elles indépendantes ?

Solution :
U est à valeurs dans $\{0, 1, 2\}$ et V à valeurs dans $\{-1, 0, 1\}$. On remarque que la donnée de U et V détermine X et Y car la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ est inversible. Il suffit donc de donner le tableau des probabilités en résolvant le système associé pour chaque couple de valeurs de (U, V).

U \ V	-1	0	1
0	0	$(1-p)^2$	0
1	$p(1-p)$	0	$p(1-p)$
2	0	p^2	0

On remarque que $\mathrm{P}((U, V) = (0, -1)) = 0$, alors que $\mathrm{P}(U = 0)\mathrm{P}(V = -1) = p(1-p)^3 > 0$: les variables aléatoires U et V ne sont pas indépendantes.

Exercice 4 [7 points]

On définit un couple (X, Y) de variables aléatoires de densité de probabilité f :

$$\begin{cases} f(x, y) = x + y \text{ si } (x, y) \in [0, 1]^2 \\ \qquad 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

(a) Calculer les densités marginales f_X et f_Y respectivement de X et Y. [2]
Ces variables aléatoires sont-elles indépendantes ?

Solution :
$f_X(x) = \int_{y=0}^{1} f(x, y)dy = x + \frac{1}{2}$. De même, $f_Y(y) = \int_{x=0}^{1} f(x, y)dx = y + \frac{1}{2}$.

On observe que $f_X(0)f_Y(0) = \frac{1}{4} \neq 0 = f(0, 0)$, donc X et Y ne sont pas indépendantes.

(b) Déterminer la densité de $Z = X + Y$. [3]
Indication : dessiner la zone correspondant à $Z \leq z$ en fonction des valeurs de z.

Solution :
Soit $z \in \mathbb{R}$. On calcule $\mathrm{P}(Z \leq z)$. Si $z < 0$ cette probabilité vaut 0, et si $z > 2$ elle vaut 1 car $X + Y \in [0, 2]$. On peut donc supposer $z \in [0, 2]$.

$$\mathrm{P}(X+Y \leq z) = \int_{[0,1]^2} \mathbb{1}_{x+y\leq z} f(x,y)dxdy$$

On distingue alors les cas $z \in [0,1]$ et $z \in]1,2]$ (le domaine d'intégration change, faire un dessin pour s'en convaincre). Si $z \in [0,1]$:

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(X+Y \leq z) &= \int_{x=0}^{z} \int_{y=0}^{z-x} (x+y)dxdy \\
&= \int_{x=0}^{z} \frac{z^2 - x^2}{2} dx \\
&= \frac{z^3}{3}
\end{aligned}$$

Et si $z \in [1,2]$:

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(X+Y \leq z) &= \int_{x=0}^{1} \int_{y=0}^{\min(1,z-x)} (x+y)dxdy \\
&= \int_{x=0}^{1} x\min(1,z-x) + \frac{\min(1,z-x)^2}{2} dx \\
&= \int_{x=0}^{z-1} \left(x + \frac{1}{2}\right) dx + \int_{x=z-1}^{1} \frac{z^2 - x^2}{2} dx \\
&= z^2 - \frac{1}{3}(z^3+1)
\end{aligned}$$

On peut finalement donner la densité de la variable aléatoire Z :

$$f_Z(z) = \begin{cases} 0 \text{ si } z < 0\,, \\ z^2 \text{ si } z \in [0,1]\,, \\ 2z - z^2 \text{ si } z \in [1,2]\,, \\ 0 \text{ si } z > 2\,, \end{cases}$$

(**c**) Calculer la covariance du couple (X,Y). [2]

Solution :

$$\mathrm{Cov}(X,Y) = \mathrm{E}[XY] - \mathrm{E}[X]\mathrm{E}[Y]\,.$$

On calcule alors $\mathrm{E}[X] = \int_0^1 x\left(x+\frac{1}{2}\right)dx = \frac{7}{12} = \mathrm{E}[Y]$ par symétrie des rôles, puis $\mathrm{E}[XY] = \int_{x=0}^{1}\int_{y=0}^{1} xy(x+y)dxdy = \frac{1}{3}$, et enfin

$$\mathrm{Cov}(X,Y) = \frac{1}{3} - \frac{49}{144} = \frac{-1}{144}\,.$$