

Polytech Paris-UPMC
ROB 4
Probabilité avril 2014
Aucun document autorisé
Calculatrice non autorisée
Formulaire joint
1h

Exercice 1

Une région comporte dix hôpitaux, chacun ayant une capacité opératoire journalière de 10 patients. Le nombre de personnes se présentant chaque jour pour être opérées dans chacun de ces hôpitaux suit une loi de Poisson de paramètre 8, ces nombres étant indépendants d'un hôpital à l'autre. Pour un jour donné J :

1. Quelle est la probabilité qu'un hôpital donné soit obligé de refuser un patient ?

Méthode : considérer la variable aléatoire X = nombre de personnes se présentant le jour J à l'hôpital considéré : loi de X ? réponse à la question

Pour la suite de l'exercice on prendra comme valeur 0,2.

2. Quelle est la probabilité que l'un au moins des hôpitaux soit obligé de refuser un patient ?

Méthode : considérer la variable aléatoire Y = nombre d'hôpitaux obligés de refuser un patient le jour J : loi de Y ? réponse à la question

3. On suppose maintenant qu'un hôpital saturé a la possibilité de se "délester" sur un autre qui ne l'est pas. Quelle est la probabilité pour qu'un patient ne puisse pas se faire opérer ce jour J ?

Méthode : considérer la variable aléatoire = nombre de personnes ayant besoin le jour J d'être opérés : loi de Z (rappel la somme de lois de Poisson indépendantes suit une loi de Poisson) ? approximation ? réponse à la question

Exercice 2

Soit X une variable aléatoire qui suit la loi $U[-1;1]$, loi uniforme continue sur l'intervalle $[-1,1]$.

1. Calculer $P(-0,5 < X < 0,5)$

Soient X_n , pour n variant de 1 à 10 000, 10 000 variables mutuellement indépendantes, toutes de même loi que X .

On considère leur valeur moyenne $\bar{X}_{10000} = \frac{1}{10000} \sum_{n=1}^{10000} X_n$

2. Donner une estimation de $P(-0,5 < \bar{X}_{10000} < 0,5)$

Exercice 3

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes.

X est une variable discrète qui prend les valeurs -1 et $+1$ équiprobablement,

c'est à dire $P(X=-1)=P(X=+1)=\frac{1}{2}$.

Y suit la loi normale centrée réduite $N(0,1)$.

On considère $Z = XY$, la variable aléatoire produit de X et Y .

On note F la fonction de répartition de Z et Φ celle de Y .

1. Montrer que, pour tout z réel, $F(z) = \frac{1}{2}\Phi(z) + \frac{1}{2}(1 - \Phi(-z))$
2. En déduire la fonction de densité de Z .
3. Quelle est la loi de Z ?

Exercice 4

Une variable aléatoire X suit une loi normale de moyenne $m = 20$ et d'écart-type $\sigma = 2$.

La moyenne d'un échantillon de 100 valeurs de X , valeurs obtenues de manière indépendante, est $m_e = 21$.

Cette valeur est elle compatible avec les paramètres de la loi de X , au seuil de risque de 10% ?

Documents joints :

Lois discrètes classiques

Lois continues classiques

Table fonction de répartition pour lois de Poisson, paramètre de 1 à 8

Table numérique de la fonction de répartition de la loi normale $N(0,1)$

Barème : ex1 = 6 pts, ex2= 5 pts, ex3= 6pts, ex4= 3pts