Exercices de Probabilités

Christophe Fiszka, Claire Le Goff

POLYTECH© PARIS-UPMC

Section ST

Table des matières

1 Introduction aux probabilités

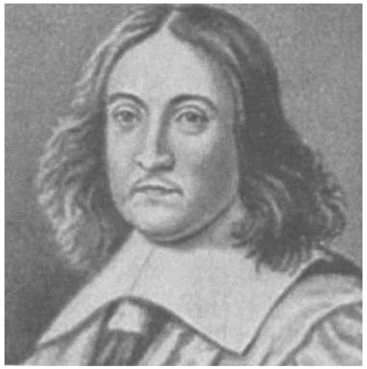
Exercice 1. Le chevalier de Méré est un noble et écrivain français très amateur de jeu d'argent. Contemporain de Blaise Pascal, il s'opposa à ce dernier sur un problème de jeu de dés :

Sur un lancer de 4 dés, il gagne si au moins un « 6 » apparaît.

1. Méré remarque expérimentalement que le jeu lui est favorable et en profite pour s'enrichir. Prouvez que le jeu est effectivement favorable, i.e on gagne en moyenne si on parie sur le « 6 ».
   Malheureusement pour notre chevalier, celui-ci trouva de moins en moins de candidats. Il proposa la variante suivante :
   On lance 24 *fois une paire de dés et il gagne si un « double* 6 *» apparaît.*
   basée sur le raisonnement suivant : la probabilité d'obtenir un « double 6 » est de 1/36 soit 6 fois moins de chance que d'obtenir un simple « 6 ». Donc en jouant six fois plus longtemps, c'est à dire en lançant donc $6 \times 4 = 24$ paires de dés, on doit obtenir un jeu tout aussi favorable que le premier. Pascal et Fermat, dans leur correspondance sur les probabilités, montrèrent que le raisonnement du Chevalier était faux.
2. Pouvez-vous montrer que le second jeu est défavorable ?

Extrait de la lettre du 29 juillet 1654 de Pascal à Fermat mentionnant le problème du chevalier de Méré :

Je n'ai pas eu le temps de vous envoyer la démonstration d'une difficulté qui étonnait fort M. de Méré, car il a très bon esprit, mais il n'est pas géomètre (c'est, comme vous savez, un grand défaut) et même il ne comprend pas qu'une ligne mathématique soit divisible à l'infini et croit fort bien entendre qu'elle est composée de points en nombre fini, et je n'ai jamais pu l'en tirer. Si vous pouviez le faire, on le rendrait parfait. Il me disait donc qu'il avait trouvé fausseté dans les nombres par cette raison :



Pierre de Fermat (1601-1665)

Blaise Pascal (1623-1662)

Si on entreprend de faire un six avec un dé, il y a avantage de l'entreprendre en 4, comme de 671 à 625. Si on entreprend de faire Sonnez avec deux dés, il y a désavantage de l'entreprendre en 24. Et néanmoins 24 est à 36 (qui est le nombre des faces de deux dés) comme 4 à 6 (qui est le nombre des faces d'un dé). Voilà quel était son grand scandale qui lui faisait dire hautement que les propositions n'étaient pas constantes et que l'arithmétique se démentait : mais vous en verrez bien aisément la raison par les principes où vous êtes.

Exercice 2. On considère une pièce que l'on lance 4 fois de suite et on note, dans l'ordre, les résultats obtenus.

1. Quel univers des possibles Ω peut-on choisir ? Quel ensemble des événements E peut-on choisir ? Quelle loi de probabilité P peut-on choisir ?
2. On considère l'événement A={ il y a plus de piles que de faces } et l'événement B={ le premier lancer est pile }.
   Calculer la probabilité de A et celle de B.
3. A et B sont-ils indépendants ?

Exercice 3. On considère un jeu de loterie qui consiste à effectuer un tirage sans remise de 5 boules parmi 50 boules numérotées de 1 à 50 puis un tirage sans remise de 2 étoiles parmi 11 étoiles numérotées de 1 à 11. Chaque personne mise 2 euros et choisit 5 numéros de boules et 2 numéros d'étoile. Après chaque tirage (où l'ordre dans lequel sont tirées les boules et les étoiles n'est pas pris en compte), une personne gagne une certaine somme en fonction du nombre de boules et d'étoiles tirées qu'elle avait préalablement choisi.

1. Quel univers des possibles Ω peut-on choisir ? Quel ensemble des événements E peut-on choisir ? Quelle loi de probabilité P peut-on raisonnablement choisir ?
2. Quelle est la probabilité de tirer le gros lot (ie. d'obtenir les 5 bonnes boules et les 2 bonnes étoiles) ?
3. On suppose que l'on gagne à partir du moment où l'on a au moins 2 bons numéros de boules, ou alors un bon numéro de boules et deux bonnes étoiles. Quelle est la probabilité de gagner quelque chose ? Exprimer ceci sous la forme « on a environ une chance sur ... de gagner ».

4. Est-il plus probable d'avoir deux boules et pas d'étoiles ou alors d'avoir une boule et deux étoiles ? Même question si l'on compare deux boules et une étoile avec une boule et deux étoiles. Est-ce intuitivement cohérent ?

Exercice 4. Un Q.C.M comporte 10 questions. À chaque question, on a 4 choix possibles pour une seule réponse juste.

1. Combien y-a-t-il de grille-réponses possibles ?
2. Quelle est la probabilité de répondre au hasard 6 fois correctement. En conclusion, allez vous répondre au hasard à votre prochain Q.C.M ?

Exercice 5. Alice, Bob, et Jo, au cours d'un safari, tirent en même temps sur un éléphant. L'animal est touché par deux balles avant de s'écrouler. La précision des chasseurs est mesurée par la probabilité qu'il touche la cible (resp. 1/3, 1/2 et 1/4). Calculer pour Alice, Bob et Jo, la probabilité d'avoir raté l'éléphant.

Exercice 6. Au cours d'un voyage low-cost en avion entre Paris et New-York en passant par Hong-Kong et Sidney, Alice perd sa valise. La probabilité que la valise soit perdue à Orly, à JFK, à Kai Tak ou encore à sir Charles Kingsford Smith est la même. Quelle est la probabilté que la valise d'Alice soit encore en Austalie ?

Exercice 7. On considère n urnes numérotées de 1 à n. L'urne numéro k contient k boules vertes et $n-k$ boules rouges. On choisit une urne au hasard puis on tire une boule dans cette urne. Quelle est la probabilité d'obtenir une boule verte ? Quelle est la limite de cette probabilité quand $n \to +\infty$?

Exercice 8. Un marchand reçoit un lot de montres. Il sait que ce lot peut venir soit de l'usine A soit de l'usine B. En moyenne, l'usine A (resp. B) produit une montre défectueuse sur 200 (resp. sur 1000). Notre marchand teste une première montre : elle marche. Quelle est la probabilité que le second test soit positif ?

Exercice 9. Une maladie affecte statistiquement une personne sur 1000. Un test de dépistage permet de détecter la maladie avec une fiabilité de 99%, mais il y a 0.2% de chances que le test donne un faux positif (i.e. une personne est déclarée malade sans l'être).

1. Une personne est testée positivement. Quelle est la probabilité qu'elle soit réellement malade ?
2. Une personne est testée négativement. Quelle est la probabilité qu'elle soit quand même malade ?
3. Ce dépistage remplit-il son rôle ?

Exercice 10. (Paradoxe des anniversaires)

1. Considérons n personnes, quelle est la probabilité notée $p(n)$ d'avoir au moins deux personnes nées le même jour de l'année ? Pour simplifier, toutes les années sont non-bissextiles.
2. En utilisant un DL de l'exponentiel en 0, montrer que si n est « suffisamment petit » on dispose de l'approximation suivante

$$p(n) \simeq 1 - e^{-\frac{n(n-1)}{2 \cdot 365}}$$

n	$p(n)$
5	2,71%
10	11,69%
15	25,29%
20	41,14%
30	56,87%
50	97,04%
100	99,99997%
>365	100%

3. En déduire le nombre de personnes nécessaires pour avoir une chance sur deux que deux personnes aient leurs anniversaires le même jour.

Exercice 11 (Dans un jeu télé). Un candidat se trouve devant 3 portes fermées. Derrière une de ces portes, il y a une superbe voiture à gagner, et un poireau dans les deux autres. Le candidat doit choisir une porte au hasard (sans l'ouvrir). L'animateur ouvre alors une autre porte contenant un poireau.

Que devrait faire le candidat : garder sa porte ou changer d'avis et choisir la dernière porte ? Justifier.

Exercice 12 (Problème des trois prisonniers). Trois prisonniers X,Y et Z sont enfermés dans un cachot sans possibilités de communication. Deux seront condamnés le lendemain. Seul le geôlier connaît le sort de chacun. Le premier prisonnier X interpelle le geôlier : « Je sais que l'un des deux autres prisonniers sera condamné, tu ne m'apprends rien en me révélant lequel ? S'il te plaît, dis moi qui ! ». Après un moment d'hésitation, le geôlier lui répond : « Y sera condamné demain, mais cela ne te donne aucun renseignement sur ton propre sort ». Le prisonnier d'un air fier rétorque : « Détrompes toi geôlier ! Maintenant tout se joue entre moi et Z, je serais donc libre avec probabilité 1/2 et non plus 1/3 ».

Le prisonnier a-t-il raison de penser que sa probabilité d'être gracié à changer ?

2 V.a.r, espérance, fonction de répartition

Exercice 13. Alice et Bob jouent avec une paire de dés. Ils conviennent que Alice gagne si et seulement si elle effectue un double. Elle gagne dans ce cas

5 euros. Combien doit gagner Bob dans les autres cas pour que le jeu soit équitable ?

Exercice 14. La roulette française est constituée de 37 cases dont un 0 qui n'est pas considéré comme pair. Si on gagne en pariant sur la parité du nombre, la banque reverse 2 fois la mise. Si on gagne en pariant sur le bon nombre, la banque reverse 36 fois la mise.

1. L'avantage de la maison est le pourcentage moyen de la perte des joueurs. Le calculer pour un joueur qui ne mise que sur un seul numéro.
2. Alice mise 100 euros sur l'événement A : « le nombre est pair », et 10 euros sur l'événement B : le nombre est 7. Quelle est son espérance de gain ? Et si on choisit 6 au lieu de 7 ?
3. On suppose maintenant que la personne joue plusieurs fois de suite, et autant de fois qu'elle le souhaite, mais seulement sur l'événement A : le nombre est pair. Proposer une stratégie gagnante (en un sens à définir). Pourquoi cette stratégie n'est en fait pas très réaliste ?

Exercice 15. On considère un dé à 6 faces, que l'on lance une infinité de fois. Une face est rouge et les 5 autres faces sont bleues. On écrit sous forme d'une suite les résultats successifs obtenus, par exemple $BRRBBBRRRBRBRRR\ldots$ (B signifiant bleu et R rouge). On s'intéresse à la première série de nombres obtenus, dans le sens suivant, plus simple à définir par des exemples :

1. $BBBRBR\ldots$: la première série est BBB.
2. $RBRBBBRBB\ldots$: la première série est réduite à R.
3. $RRRRRRRRBR\ldots$: la première série est $RRRRRRRR$.

On appelle X la variable aléatoire correspondant à la longueur de la première série. Calculer la loi de X et l'espérance de X.

Exercice 16. Soit (Ω, E, P) un espace probabilisé. On définit pour A une partie de Ω, l'indicatrice 1_A de A par $1_A(\omega) = 1$ si $\omega \in A$ et 0 sinon.

1. Que vaut $E(1_A)$ pour $A \in E$?
2. Soient (A_i), n éléments de E. A partir de l'égalité $1_{\bigcap_k A_k^c} = \prod_{k=1}^n (1 - 1_{A_k})$, montrer que le principe d'inclusion-exclusion :
$$P(A_1 \cup \cdots \cup A_n) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \sum_{1 \leqslant i_1 < \cdots < i_k \leqslant n} P(A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k})$$
3. En déduire que si les A_i sont indépendants, les A_i^c le sont aussi.

Exercice 17. Un canal de transmission transmet des bits avec erreur selon le modèle suivant : il transmet fidèlement un bit avec probabilité p et de façon erronée avec probabilité $1-p$ avec $p \in [0, 1]$. On considère n canaux en série, et que chaque canal fonctionne indépendamment des autres. On note X_k le bit reçu en sortie du k-ième canal et X_0 le bit à l'entrée du premier canal. On désire calculer la probabilité qu'au bout des n canaux, le signal reste inchangé.

1. Que vaut $P(X_{k+1} = 1 | X_k = 0)$ et $P(X_{k+1} = 1 | X_k = 1)$?
2. Posons $A_n = \begin{pmatrix} P(X_n = 1) \\ P(X_n = 0) \end{pmatrix}$ et $M = \begin{pmatrix} p & 1-p \\ 1-p & p \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Montrer que $A_{n+1} = MA_n$.
3. En déduire la probabilité qu'un bit soit fidèlement transmis au bout de n canaux. Que dire à la limite ?
Indication : pour calculer les puissances de M, diagonaliser cette matrice symétrique dont les valeurs propres sont 1 et $2p-1$.

Exercice 18. On souhaite dépister, grâce à un contrôle sanguin, quels sont les bovins atteints par un certain virus dans un troupeau de n bêtes. On sait que chaque bête a, indépendamment des autres, une probabilité $p \in]0, 1[$ d'être atteinte. Comme chaque test coûte cher, on procède de la manière suivante : on forme des groupes de m bêtes (où m divise n) ; dans chaque groupe, on mélange les prélèvements sanguins des bovins en un seul « super-échantillon », dans lequel on teste la présence du virus (il suffit qu'une seule bête du groupe soit infectée pour que le test soit positif). Si on décèle la présence du virus dans un super-échantillon, on teste toutes les bêtes du groupe séparément.

a) Quelle est la loi du nombre de bêtes atteintes dans le troupeau ? Rappeler (sans calcul) son espérance et sa variance.
b) Calculer l'espérance $E(m)$ du nombre de tests effectués.
c) Pour quelles valeurs de p vaut-il mieux choisir $m = n$ plutôt que $m = 1$?
d) Y-a-t-il une valeur de m optimale ?

Exercice 19. Soit X une v.a.r de fonction de répartition F. On supposera F continue, strictement croissante.

1. Donner la loi de $Y = F(X)$.
2. En admettant que l'on sache tirer des nombres aléatoires uniformément répartis sur $[0, 1]$, donner une méthode de tirage de nombres aléatoires répartis suivant la loi de probabilité de X.

3 Lois usuelles

3.1 Loi de Bernoulli, loi binomiale

Exercice 20. 1. Trouver un algorithme permettant à partir d'une pièce de monnaie équilibrée de simuler toute loi de Bernoulli de paramètre p avec $p \in]0, 1[$.

2. De même, à l'aide d'une pièce de monnaie, trouver une manière de choisir au hasard et uniformément un entier dans $[0, n]$.

Exercice 21. 1. Calculer l'espérance et la variance d'une loi de Bernoulli de paramètre p.

2. Faire de même avec une loi binomiale de paramètre (n, p).

3. Retrouver l'espérance et la variance d'une loi Binomiale en utilisant le fait qu'une loi binomiale est la somme de n lois de Bernoulli indépendantes.

Jacques Bernoulli (1654,1705)

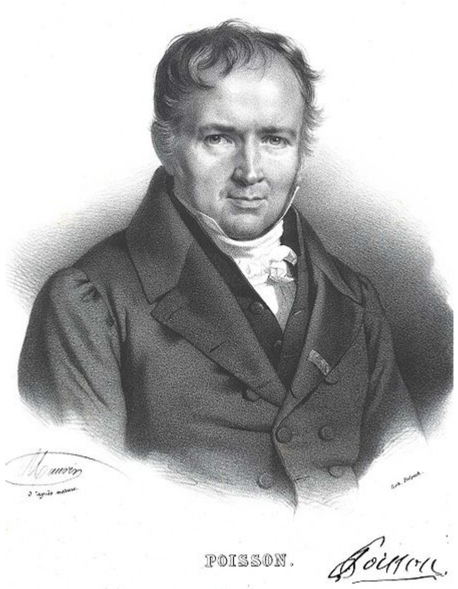
Exercice 22. Soit n et N deux entiers non nuls. Une urne contient n jetons numérotés de 1 à n. On effectue N tirages avec remise dans cette urne. Soit F_i le nombre de fois que le jeton i a été tiré. Calculer la loi de F_i, son espérance et sa variance. On pose $F := \sum_1^n F_i$. Calculer la loi de F, son espérance, sa variance.

Exercice 23. Soit X_n des variables aléatoires i.i.d (indépendantes identiquement distribuées) suivant une loi de Bernoulli de paramètre p. On pose $Y_n = X_n X_{n+1}$ et $U_n = Y_1 + \ldots + Y_n$.

1. Quelle est la loi de Y_n ? Les Y_i sont-elles deux à deux indépendantes ?

2. Calculer l'espérance et la variance de U_n.

3.2 Loi de Poisson



Siméon Denis Poisson (1781-1840).

Exercice 24. 1. Retrouver la valeur de l'espérance et la variance d'une loi de Poisson de paramètre λ.

2. Montrer qu'une somme de deux variables aléatoires indépendantes suivant chacune une loi de Poisson (de paramètre respectif λ et μ) suit encore une loi de Poisson.

Exercice 25. Un insecte pond des oeufs suivant une loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$. Chaque oeuf à une probabilité d'éclore avec une probabilité p, indépendante des autres oeufs. Soit Z le nombre d'oeufs qui ont éclos.

1. Donner la loi de Z.
2. En déduire l'espérance de Z.

Exercice 26. On s'intéresse aux nombres de clients arrivant à l'un des deux guichets (A et B) d'une banque. Pour cela modélisons le problème de la manière suivante :

Le nombre de clients quittant la file d'attente, noté X, est modélisé par une loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$. Le choix de guichet A par le i-ème client est modélisé par une loi Bernoulli $\mathcal{B}(p)$. Ainsi Y_i vaut 1 avec probabilité p si le i-ème client choisit bien.

1. Que signifie $S = \sum_{k=1}^{X} Y_k$?
2. Que vaut $P(S = k|X = n)$?
3. Montrer que S suit une loi de Poisson.

Exercice 27. Un serveur brise en moyenne trois verres et une assiette par mois. Notons X le nombre de verres cassés et Y le nombre d'assiettes cassés par ce serveur.

1. Donner les lois de probabilité des variables aléatoires X et Y.
2. Quelle est la loi de $X + Y$?
3. Calculer la probabilité d'un mois sans assiette ni verre cassé ?
4. Ce serveur maladroit casse aussi des bols. La v.a Z égale au nombre de bols cassés involontairement par an suit une loi de poisson de paramètre 5. Si le soir du 31 décembre, notre serveur n'a pas cassé au moins 5 verres dans l'année, il fête cela en brisant des bols pour avoir au moins le minimum de 5 bols cassés sur l'année. Donner la loi de probabilité et l'espérance de W, où W représente le nombre de bols cassés par an.

3.3 Loi géométrique

Exercice 28 (Premier temps d'arrêt). On jette un dé ordinaire jusqu'à ce que le 1 apparaisse pour la première fois et on appelle X la variable aléatoire égale au nombre de coups nécessaires pour obtenir ce 1. Déterminer la loi de probabilité de X.

Exercice 29. Soit X une v.a. de loi géométrique de paramètre $p \in [0, 1]$,

$$P(X = k) = p(1 - p)^{k-1}, \qquad k > 0.$$

1. Montrer que la loi est sans mémoire, i.e :
$$\forall (k, n) \in \mathbb{N}^{*2}, \qquad P(X > n + k|X > k) = P(X > n).$$
2. Inversement que dire d'une v.a discrète sans mémoire ?
3. Soient X_1 et X_2 deux v.a de loi géométrique respectivement de paramètre p_1, p_2. Calculer la loi de $Y = \min(X_1, X_2)$.

3.4 Loi hypergéométrique

Exercice 30. Soit $S = S_1 \bigcup S_2$ une populations de N individus partitionnée en deux sous populations S_1 et S_2 de tailles respectivement N_1 et N_2. Posons Ω l'espace de toutes les populations de taille n muni de la probabilité uniforme. Soit X la variable qui à chaque sous-population de Ω associe le nombre d'individus appartenant à S_1. Donner la loi de X.

Exercice 31. Bob vient d'acheter un étang. Il voudrait bien connaître le nombre, noté n, de poissons dans son étang. Pour cela il effectue une première pêche. Il ramène ainsi $r = 133$ poissons qu'il relâche après les avoir marqués. Lors d'une seconde pêche de $s = 144$ poissons, il constate que $k = 18$ sont marqués.

1. Quelle était la probabilité $P(n)$ d'avoir péché k poissons marqués.
   Afin d'estimer n, on cherche la valeur de n qui maximise la probabilité $P(n)$. C'est le principe de **l'estimation par le maximum de vraisemblance**. Pour se faire, posons $u_n = \dfrac{P(n)}{P(n-1)}$ et $u_1 = 1$ de sorte que $P(n) = \prod_{k=1}^{n} u_n$.
2. Calculer u_n. Montrer que pour $nk < rs$, u_n est supérieur à 1 et inférieur à 1 si $nk > rs$.
3. En déduire que la valeur maximale de $P(n)$ est obtenue pour :
$$\tilde{n} = \left\lfloor \frac{rs}{k} \right\rfloor$$
4. Vérifier numériquement l'efficacité de cette méthode.

3.5 Loi uniforme

Exercice 32. 1. Donner l'espérance et la variance d'une loi uniforme sur $[a, b]$.

2. Donner la loi de la somme de v.a indépendantes suivant une loi uniforme sur $[0, 1]$?

Exercice 33. On tire au sort au hasard uniformément et indépendamment deux nombres dans $[0, 1]$. Le plus petit des deux nombres est plus grand que $1/3$. Quelle est la probabilité que l'autre soit supérieur à $3/4$?

Exercice 34. Un skieur doit traverser un glacier d'un longueur l. A l'endroit où il devra traverser, on sait qu'il existe une crevasse avec probabilité p. On suppose que, si cette crevasse existe, sa position est uniformément distribuée sur l'intervalle $[0, l]$ du trajet. Le skieur a déjà parcouru une distance $x \leqslant l$ sans encombre et se pose la question : quelle est la probabilité qu'il rencontre une crevasse ? (on pourra noter A l'événement la crevasse existe dans $[0, x]$,

B l'événement la crevasse existe et se trouve après x et C l'événement la crevasse existe).

Exercice 35 (Galette des rois). On considère une galette des rois circulaire de rayon R, une fève de rayon r cachée dans la galette ($R > 2r > 0$). Calculer la probabilité de toucher la fève quand on donne le premier coup de couteau dans la galette. On suppose que le coup de couteau correspond à un rayon de la galette et l'angle est choisi avec une probabilité uniforme sur $[0, 2\pi]$. Donner ensuite un équivalent de cette probabilité pour r petit.

3.6 Loi normale

Exercice 36.

1. Soit X une v.a.r suivant une loi normale $\mathcal{N}(\mu, \sigma)$. Donner la loi de $aX + b$.
2. Soit X suivant une loi normale $\mathcal{N}(0, 1)$. Donner la loi de X^2. Puis celle de $\frac{X^2}{2}$, quelle loi retrouve-t-on ?
3. Que dire de la somme de deux v.a ayant des lois normales indépendantes ?
4. Si S_n est la somme de n normales de mêmes paramètres indépendantes $\mathcal{N}(\mu, \sigma)$. Donner la loi de :

$$\frac{\sqrt{n}}{\sigma}\left(\frac{S_n}{n} - \mu\right)$$

Exercice 37. Un fermier veut faire de la statistique sur sa production d'oeufs de poule. Il sait que sur les deux mille oeufs recueillis dans la journée, 104 avaient un poids inférieur à 53 grammes et 130 supérieur à 63 grammes.

1. En admettant que la variable aléatoire égale à la masse en gramme d'un oeuf suit une loi normale, donner une estimation des paramètres de cette loi.

   Indication : utiliser le tableau de la fonction de répartition de la loi normale $\mathcal{N}(0, 1)$.
2. En déduire le poids moyen d'un oeuf.
3. Combien peut-il espérer vendre de très gros oeufs dans l'année (un très gros oeuf (XL) pèse plus de 71 grammes).

3.7 Loi exponentielle

Exercice 38. Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes de densités continues f_X et f_Y. On pose $U = \min(X, Y)$ et $V = \max(X, Y)$.

1. Calculer les densités de U et V, notées respectivement f_U et f_V. On pourra s'intéresser aux fonctions de répartitions.
2. On considère X_n des variables aléatoires indépendantes de loi exponentielle de paramètres respectifs $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, calculer la loi de $\min(X_1, X_2, \dots X_n)$.
3. On considère n atomes radioactifs différents qui fissionnent selon une loi exponentielle, l'atome numéro i suivant une loi exponentielle de paramètre λ_i. On considère la variable aléatoire Y représentant le premier atome qui fissionne. Calculer la loi de Y.

Exercice 39. Montrer que si X suit une loi exponentielle d'espérance 1, alors la variable $Y = \lceil \theta X \rceil$ suit une loi géométrique de paramètre $p = 1 - e^{-1/\theta}$.

3.8 Autres lois

Exercice 40. Soient θ un réel strictement positif et X la variable aléatoire de densité f_X définie par (loi de Pareto) :

$$\forall x \geqslant 1, \qquad f_X(x) = \frac{1}{\theta} x^{-\frac{1+\theta}{\theta}}, \qquad \text{et 0 sinon}$$

a) Vérifier que f_X est bien une densité de probabilité et déterminer la fonction de répartition associée.
b) Calculer $P(0 < X \leqslant 2)$.
c) Pour quelles valeurs de θ , X admet-elle une espérance ? La calculer quand elle existe.

4 Fonctions caractéristiques

Exercice 41.

1. Déterminer les fonctions caractéristiques des lois de probabilité suivantes :
   (a) binomiale de paramètres n et p,
   (b) poisson de paramètre λ,
   (c) exponentielle de paramètre λ,
   (d) normale centré réduite, puis $\mathcal{N}(\mu, \sigma)$,
   (e) uniforme sur $]-1, 1[$.
2. Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes de fonctions caractéristiques φ_X et φ_Y . Déterminer $aX + b$ où $a, b \in \mathbb{R}$ et φ_{X+Y} en fonction de φ_X et φ_Y .

3. En déduire les lois des v.a. suivantes :
   (a) $X+Y$ où X et Y sont indépendantes de lois respectives $\mathcal{B}(m,p)$ et $\mathcal{B}(n,p)$,
   (b) $X+Y$ où X et Y sont indépendantes de lois respectives $P(\lambda)$ et $P(\mu)$,
   (c) $\sigma X + m$ où X suit une loi $\mathcal{N}(0,1)$,
   (d) $X - Y + 2Z$ où X, Y et Z sont indépendantes de loi $\mathcal{N}(0,1)$.

5 Convergences de v.a.r

Exercice 42. 1. Rappeler les divers modes de convergence et les différents liens entre eux.

2. Si $X_n \underset{\mathcal{L}oi}{\longrightarrow} X$, a-t-on $(X_n - X) \underset{\mathcal{L}oi}{\longrightarrow} 0$?

Exercice 43. Démontrer les convergences suivantes :

1. Soit (X_n) une suite de v.a. où chaque X_n suit une loi binomiale $B(n, p_n)$ telle que $np_n \to \lambda$ quand $n \to +\infty$, alors
$$X_n \text{ converge en loi vers une loi de Poisson } \mathcal{P}(\lambda).$$
2. Soit (X_n) une suite de v.a. où chaque X_n suit une loi hypergèométrique $\mathcal{H}(N,n,p)$ avec N tendant vers $+\infty$ alors
$$X_n \text{ converge en loi vers une variable binomiale } \mathcal{B}(n,p).$$
3. Soit (X_n) une suite de v.a. où chaque X_n suit une loi géométrique $\mathcal{G}(p_n)$ avec $p_n \to 0$ et $a_n p_n \to \lambda$ alors
$$\frac{X_n}{a_n} \text{ converge en loi vers une loi exponentielle.}$$
4. Soit $(X_n)_n$ une suite de v.a. deux à deux indépendantes telle que X_n a pour d'espérance μ_n et pour variance σ_n^2. Supposons de plus que :
   - $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mu_n \to \mu$ (Convergence faible au sens de Césaro).
   - $\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} \sigma_n^2 \to \sigma^2$

   alors $1/n \sum_{i=1}^{n} X_i$ converge en probabilité vers la variable certaine égale à μ.

Exercice 44. Un brillant élève fait en moyenne une faute d'orthographe tous les 500 mots. Quelle est la probabilité qu'il ne fasse pas plus de 5 fautes dans un devoir comptant 2000 mots.

Indication : on pourra approximer le problème par une loi de Poisson.

Exercice 45. Une personne sur 100 fait des probabilités pour s'amuser. Parmi n personnes, notons Y_n le pourcentage de ces fous. Donner une valeur de n à partir de laquelle ce pourcentage se trouve dans l'intervalle $[0,009; 0,011]$ avec une probabilté supérieure à $0,9$:

1. Par application de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev.
2. Par approximation par une loi normale bien choisie.

Exercice 46. Considérons une population dont 55% des votants ont un avis défavorable sur leur président.

1. Soit un sondage avec n électeurs sondés. On supposera ces électeurs choisis indépendamment de leurs convictions. Suivant les différentes valeurs de n, quelle est la probabilité que le sondage soit favorable au président ? $n = 10$, $n = 100$ et $n = 1000$.

   Indication : on approximera le problème via des lois normales bien choisies. Un sondage est favorable si au moins la moitié des sondés a une opinion favorable du président.
2. On choisit n pour avoir une probabilité de sondage favorable égale à $0,15$. Combien doit on effectuer de sondages pour avoir au moins un sondage favorable avec une probabilité supérieure à $0,9$.

Exercice 47. Des pièces de monnaie ont un poids distribué suivant une loi normale de moyenne 10 g et d'écart-type 0.15 g. Pour les compter, on les pèse par lots d'environ un kilo. Quel est le risque de faire une erreur d'une unité ?

Exercice 48. X une variable aléatoire d'espérance $\mu = 20$ et de variance $\sigma^2 = 1$. On considère $S = \sum_{i=1}^{50} X_i$ somme de 50 variables aléatoires indépendantes mutuellement, toutes de même loi que X.

Donner une approximation de la probabilité $P(S > 1050)$.

Exercice 49. Le restaurant universitaire de Jussieu fournit chaque jour n repas, et propose chaque jour 2 succulents plats du jour. Le cuisinier a remarqué que lorsqu'il propose saucisse-lentille et épinard-boudin , chaque client souhaite le plat de saucisse avec la probabilité $p = 0,6$ et le plat aux épinards avec la probabilité $1-p$, et que les choix des clients sont indépendants. Pour tenter de satisfaire sa clientèle, il prépare $np + s$ plats de saucisses, et $n(1-p) + s$ plats d'épinards. On supposera successivement $n = 100$ et $n = 1000$.

Quelle est la valeur minimale de s telle que, avec une probabilité supérieure à $0,95$, tous les clients aient le plat qu'ils souhaitent ? Pour cette valeur, quel est le pourcentage de plats non consommés parmi les plats préparés ? Quel plat pensez vous prendre ?

Exercice 50. (**Décimales de** π via les Aiguilles de Buffon)

1. Bob essaye l'expérience avec 220 aiguilles et affirme que 70 intersectent les lattes du parquet (l'aiguille à une longueur moitié des lattes du parquet). Quelle approximation de π trouve t-on ?
2. À l'aide du théoreme central limite, quelle était la probabilité de trouver cette valeur ? Que dire de l'honnêteté de Bob.
3. Inversement, combien faut-il lancer d'aiguilles pour avoir une approximation de l'ordre de 10^{-3} avec une probabilité de $0,95$.

Buffon, Georges Louis Leclerc, Comte de (1707-1788)

6 Couples de variables aléatoires

Exercice 51 (**Probabilité de rencontre**). Bob et Alice ont projeté de se retrouver pour boire un café entre 19H et 20H. On sait qu'aucun des deux n'attendra l'autre plus de 10 minutes et on se demande si ils ont « peu ou beaucoup de chance » de se rencontrer. On modélise le problème de la manière suivante : ils arrivent indépendamment et à des instants uniformément distribués entre 19H et 20H.

1. Quelle est la probabilité que Bob et Alice se rencontrent ?
2. Bob précise son heure d'arrivée à Alice, quelle est la probabilité qu'ils se rencontrent ?
3. Bob est arrivé et ne voit pas Alice, quelle probabilité a-t-il de rencontrer Alice ?

Exercice 52 (**Cas discret**). On lance trois fois de suite une pièce de monnaie équitable. On note X la variable aléatoire prenant pour valeur le nombre de «face» parmi les deux premiers lancers et Y la variable aléatoire prenant pour valeur le nombre de «pile» parmi les deux derniers lancers.

1. Donner, sous forme d'un tableau, la loi de probabilité conjointe du couple (X, Y).
2. Donner les lois marginales de X et Y. Les variables aléatoires X et Y sont elles indépendantes ?
3. Calculer la covariance du couple (X, Y).

Exercice 53 (**Cas continu**). Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires de densité conjointe

$$f(x, y) = 8xy1_\Delta(x, y)$$

où $\Delta = \{(x, y)|x \in [0, 1], y \in [0, x]\}$.

1. Représenter Δ.
2. Vérifier que f est bien une densité.
3. Déterminer les densités marginales f_X et f_Y.
4. Calculer la covariance σ_{XY}.
5. Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?

Exercice 54. Soit un réel α. Soit (X, Y) un couple de v.a.r. dont la loi jointe a pour densité

$$f(x, y) = \alpha \exp(-x) \exp(-2y)1_{\{x>0,y>0\}}$$

1. Déterminer la constante α.
2. Déterminer la loi marginale de X. On précisera la densité de cette loi marginale si elle existe.
3. Calculer $P(X < Y)$.
4. Les v.a. X et Y sont-elles indépendantes ?

Exercice 55. Soit (U, V) un couple de variables aléatoires de densité conjointe

$$f(u, v) = \alpha u(u - v)1_\Delta(u, v)$$

où $\Delta = \{(u, v) \in [0, 1]^2|u > v\}$.

1. Représenter Δ.
2. Vérifier que f est bien une densité pour une certaine valeur de α à préciser.
3. Déterminer les densités marginales f_U et f_V.

4. Calculer la covariance σ_{UV}.
5. Les variables U et V sont-elles indépendantes ?

Exercice 56. On lance deux dés équilibrés à six faces. Soit Y le plus grand des deux chiffres obtenus et soit X leur somme.

1. Déterminer la loi du couple (X, Y) et les lois marginales.
2. Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?
3. Déterminer la loi conditionnelle de Y sachant que $X = 6$.

7 Introduction aux statistiques

Exercice 57. Une grande entreprise désire faire des statistiques sur la santé de ses employés. Pour cela, elle teste le taux de cholestérol de 100 employés tirés au sort.

taux de cholestérol (en cg)	120	160	200	240	280	320
effectif d'employés	9	22	25	21	16	7

1. Calculer la moyenne m_e et l'écart-type σ_e sur l'échantillon.
2. En déduire une estimation de la moyenne et de l'écart-type pour le taux de cholestérol dans toute l'entreprise.
3. Déterminer un intervalle de confiance pour la moyenne.
4. Déterminer la taille minimum d'échantillon pour que l'amplitude de l'intervalle de confiance soit inférieure à 10.

Exercice 58 (Paramètre d'une loi uniforme)**.** Soit $\theta > 0$. Soit X une v.a.r suivant une loi uniforme sur $]0; \theta[$ et $(X_1, \dots, X_n)$ un n-échantillon de X.

1. Rappeler la définition d'un estimateur sans biais.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $T_n = \dfrac{2}{n}(X_1 + \cdots + X_n)$ est un estimateur sans biais de θ.
3. Considérons $Y_{\min}$ et $Y_{\max}$ définies par :
$$Y_{\min} = \min_{i=1\dots n} X_i \quad Y_{\max} = \max_{i=1\dots n} X_i$$
Pour chacune de ces deux variables, préciser :
   (a) La fonction de répartition,
   (b) La densité de probabilité,
   (c) L'espérance,
   (d) La variance (remarquer que $V(Y_{\min}) = V(Y_{\max})$).
4. Posons $T'_n = \dfrac{n+1}{n} Y_{\max}$. Justifier que T'_n est un estimateur de θ.
5. Quel est le meilleur estimateur de θ entre T'_n et T_n ?
Pour rappel, un estimateur est d'autant meilleur que sa variance est faible.
6. Posons $T''_n = Y_{\min} + Y_{\max}$. Montrer sans calculs que $V(T''_n) \leqslant 4V(Y_{\max})$.
Indication : on pourra justifier que pour Z_1 et Z_2 deux variables aléatoires :
$$V(Z_1 + Z_2) = V(Z_1) + V(Z_2) + 2\operatorname{cov}(Z_1, Z_2)$$
7. En déduire que T''_n est meilleur estimateur de θ que T_n.
8. Après avoir rappeler la définition d'un estimateur convergent, vérifier que chacun de ces estimateurs sont bien convergents.

Exercice 59. Soit X une v.a à densité donnée pour $\theta > 0$ par
$$f_\theta(x) = \frac{2}{\theta}\left(1 - \frac{x}{\theta}\right) 1_{[0,\theta]}$$
Pour un échantillon $(X_1, \dots, X_n)$, on pose
$$\bar{X} = \frac{1}{n}(X_1 + \cdots + X_n)$$
Montrer que $3\bar{X}$ est un estimateur sans biais de θ. Prouver que cet estimateur est convergent.

Exercice 60. Le temps de vie d'un composant électronique est supposé suivre une loi Normale de paramètre (μ, σ) inconnus. A partir des relevés suivants, déduire un intervalle de confiance pour la durée moyenne de vie.

4671	3331	5270	4973	1837	7783	4777	5263	5418	6674

Exercice 61. Construire un intervalle de confiance au seuil de 5% à partir des données suivantes

49	71	55	64	65	72	87	56
56	65	78	58	83	74	64	86

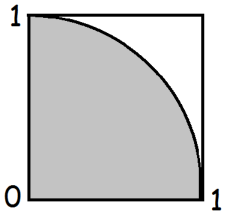
Exercice 62. Une enquète révèle que $60\% \pm 2\%$ des étudiants ont un avis favorable pour l'instalation de transats sur la tour de Jussieu. Sachant que le sondage s'effectue sur 1013 personnes, quel est le niveau de confiance du test ?

8 Compléments

8.1 La méthode de Monte-Carlo

Exercice 63. Illustrons cette méthode par le calcul des décimales de π. Tirons des points uniformément dans le carré $[0,1]^2$.

1. Quelle est la probabilité qu'un point se situe dans le quart de disque ?
2. En déduire un programme pour calculer les premières décimales de π. Analyser numériquement la vitesse de convergence.



Le calcul des décimales de π a beaucoup progressé grâce à l'étude des séries entières. Notons par exemple la relation suivante découlant du développement en série de arc-tangente :

$$\pi = 4\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2k+1} = \frac{4}{1} - \frac{4}{3} + \frac{4}{5} - \frac{4}{7} + \cdots$$

Ou encore sur la même idée, la formule de Machin (1706)

$$\frac{\pi}{4} = 4 \arctan\frac{1}{5} - \arctan\frac{1}{239}$$

Ramanujan (1887-1920)

Plus récemment une formule dûe à Srinivasa Ramanujan avec une très bonne vitesse de convergence :

$$\frac{1}{\pi} = \frac{2\sqrt{2}}{9801}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(4k)!(1103+26390k)}{(k!)^4 396^{4k}}$$

14 nouvelles décimales de π à chaque nouveau terme.

8.2 L'entropie de Shannon

8.3 Datation au Carbone 14

9 Sujets d'examens

9.1 Partiel ELI 2012

Consignes

- Durée 2h. Sans documents ni calculatrice. Chaque exercice est noté sur 5 points.
- On accordera un soin tout particulier à la présentation et à la rédaction.

Exercice 1. Soit (Ω, E, P) un espace probabilisé, donner pour chaque assertion son écriture en symboles mathématiques.

a) A est un événement.

b) A et B sont des événements indépendants.

c) A est l'univers des possibles.

Soient maintenant A et B deux événements tels que $P(A) = \frac{1}{3}$ et $P(B) = \frac{1}{2}$. Calculer $P(A \cup B)$ dans chacun des cas suivants :

d) A et B sont des événements indépendants

e) l'événement A implique l'événement B

f) $P(A|B) = \frac{1}{3}$.

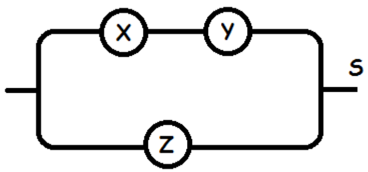
Exercice 2. Dans les modèles simples, l'état S d'un système (S) peut être décrit par

- le système (S) fonctionne. Notons $S = 1$ cet événement.
- le système (S) est en panne. Notons $S = 0$ cet événement.

L'état S du système représenté ci-dessus se définit à partir de l'état X, Y et Z de ses composants (X), (Y) et (Z) par la formule logique, dans l'algèbre de Boole :

$$S = X.Y + Z.$$

Les variables X, Y et Z suivent des lois de Bernoulli respectivement de paramètre p, q et r. Les pannes sont mutuellement indépendantes.



a) Montrer que $X.Y$ suit une loi de Bernoulli dont on précisera le paramètre.

b) Reproduire et remplir le tableau ci-dessous, donnant l'état S du système (S).

+	X.Y=0	X.Y=1
Z=0		
Z=1		

c) Déterminer la probabilité que le système (S) fonctionne.

d) Le système est en panne, quelle est la probabilité que le composant X en soit la cause ?

Exercice 3. Soient θ un réel strictement positif et X la variable aléatoire de densité f_X définie par (loi de Pareto) :

$$\forall x \geqslant 1, \qquad f_X(x) = \frac{1}{\theta} x^{-\frac{1+\theta}{\theta}} \qquad \text{et 0 sinon}$$

a) Vérifier que f_X est bien une densité de probabilité et déterminer la fonction de répartition associée.

b) Calculer $P(0 < X \leqslant 2)$.

c) Pour quelles valeurs de θ , X admet-elle une espérance ? La calculer quand elle existe.

Exercice 4. Le restaurant universitaire de Jussieu compte deux caisses notées A et B. On suppose que le nombre N d'étudiants par heure suit une loi de Poisson de paramètre λ. De plus, avec une probabilité p, les étudiants préfèrent passer par A. Notons X le nombre d'étudiants par heure passant par à la caisse A.

a) Que vaut $P(N = n)$?

b) Après avoir calculé $P(X = k|N = n)$ pour $k \leqslant n$, donner la loi de X.

c) Que constate-t-on ? En déduire l'espérance et la variance de X.

9.2 Partiel ELI 2013

- Durée : 1h.
- Polycopié du cours autorisé.

Exercice 1. Soit (Ω, E, P) un espace probabilisé, A et B deux événements tels que $P(A) = 1/3$ et $P(B) = 1/2$. Calculer $P(A \cup B)$ dans chacun des cas suivants :
- A et B sont des événements incompatibles.
- A et B sont des événements indépendants.
- L'événement A implique l'événement B.
- $P(A/B) = 1/2$.

Exercice 2. Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes. X est une variable discrète qui prend les valeurs -1 et $+1$ équiprobablement, c'est à dire $P(X = -1) = P(X = 1) = 1/2$. Y suit la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0, 1)$. On considère $Z = XY$, la variable aléatoire produit de X et Y. On note F la fonction de répartition de Z et ψ celle de Y.
- Montrer que, pour tout z réel, $F(z) = 1/2\psi(z) + 1/2(1 - \psi(-z))$.
- En déduire la fonction de densité.
- Quelle est la loi de Z ?

Exercice 3. On considère un dé 6 faces, 2faces sont rouges et 4 sont bleues. A chaque lancer du dé on note la couleur de la face sortie, B signifiant bleu et R rouge. On écrit sous forme d'une suite les résultats successifs obtenus. On s'arreête dès que, pour la première fois, les deux couleurs du dé sont sorties. On s'intéresse, alors, à la variable aléatoire X prenant pour valeur la longueur de la première série de lettres identiques. Par exemple :

$X = 3$ pour $RRRB$ ou $BBBR$
$X = 1$ pour RB ou par BR
Pour le tirage $BBBBBR$, la valeur de X est 5.
Calculer la loi de X et l'espérance de X.

9.3 Partiel ST 2013

- Durée : 1h. Sans documents ni calculatrice personnelle.
- On accordera un soin tout particulier à la présentation et à la rédaction.
- X suit une loi de Bernoulli de paramètre p si :

$$P(X = 0) = 1 - p, \qquad P(X = 1) = p$$

- X suit une loi de Poisson de paramètre λ si :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \qquad P(X = k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$$

Exercice 1 (Exercice de TD *4pts*)**.** Une maladie affecte statistiquement une personne sur 1000. Un test de dépistage permet de détecter la maladie avec une fiabilité de 99%, mais il y a 0.2% de chances que le test donne un faux positif (i.e. une personne est déclarée malade sans l'être).

1. Une personne est testée positivement. Quelle est la probabilité qu'elle soit réellement malade ? *(1.5pt)*
2. Une personne est testée négativement. Quelle est la probabilité qu'elle soit quand même malade ? *(1.5pt)*
3. Ce dépistage remplit-il son rôle ? *(1pt)*

Exercice 2 (Axiomatique de Kolmogorov *4pts*)**.** Soit (Ω, E, P) un espace probabilisé ; supposons que $P(A) = 1/2$ et $P(B) = 1/3$.

1. Que signifie respectivement les notations Ω, E et P ? *(1pt)*
2. Calculer $P(A \cup B)$ si les deux événements sont indépendants. *(1pt)*
3. Calculer $P(A \cap B)$ si l'événement B implique l'événement A. *(1pt)*
4. Calculer $P(A \cap B)$ si $P(A|B) = 1/6$. *(1pt)*

Exercice 3. *(4pts)* Dans une suite de parties de pile ou face indépendantes, on considère la variable aléatoire Z égale au rang de la première apparition d'un pile suivi d'un face ou d'un face suivi d'un pile. On suppose que la probabilité d'obtenir un pile lors d'une partie quelconque est p. Par exemple

1. $PFFPFP\ldots$ et $Z = 2$.
2. $PPPFFF\ldots$ et $Z = 4$.
3. $FFPFPF\ldots$ et $Z = 3$.
4. $FFFFFP\ldots$ et $Z = 6$.

Déterminer la loi de la variable Z *(2pts)*. Puis calculer $E(Z)$. *(2pts)*

Exercice 4 (loi de Poisson *4pts*). 1. Que vaut l'espérance d'une loi de Poisson de paramètre λ ? *(1pt)*

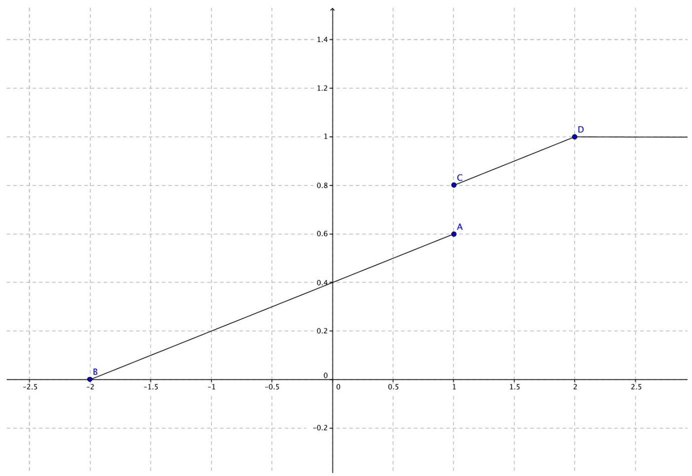
2. Un standard téléphonique reçoit en moyenne 0.7 appel à la minute. Quelle est la probabilité pour que entre 8h59 et 9h, ce standard reçoit :

   (a) aucun appel ; *(1pt)* (b) plus d'un appel ; *(1pt)*

   On justifiera le choix de la modélisation...(1pt)

Exercice 5. *(4pts)* La figure ci-dessous représente le graphe de la fonction de répartition F_X d'une variable aléatoire X. Récopier le tableau et répondre par Vrai ou Faux à chacune des questions suivantes (sans justifications).

a) X suit la loi uniforme sur $[-2, 1]$;
b) X est une v.a continue ;
c) X est une v.a discrète ;
d) $P(X = -1) = 0$;
e) $P(X = 1) = 0,2$;
f) $P(X < 0) = 1/4$;
g) $P(X \geqslant 1) = 0,2$;
h) $\lim_{x \to +\infty} F_X(x) = 1$.



	a)	b)	c)	d)	e)	f)	g)	h)
V								
F								

9.4 Examen ELI 2012

Consignes

- Durée 2h.
- Sans documents ni calculatrice personnelle, calculatrice fournie.
- Chaque exercice est noté sur 4 points.
- On accordera un soin tout particulier à la présentation et à la rédaction.

Données

- $e^{-3} \simeq 0,05$.
- Si X suit une loi de Bernoulli de paramètre p alors :

$$P(X=0) = 1-p \qquad P(X=1) = p \qquad E(X) = p \qquad V(X) = p(1-p)$$

- Si X suit une loi de Binomiale de paramètre n, p alors :

$$P(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \qquad E(X) = np \qquad V(X) = np(1-p)$$

- Si X suit une loi de Poisson de paramètre λ alors $\forall k \in \mathbb{N}$:

$$P(X=k) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!} \qquad E(X) = \lambda \qquad \rho_X(t) = e^{\lambda(e^{it}-1)}$$

- Si X suit une loi normale (μ, σ) alors :

$$P(X \in [a,b]) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx \qquad E(X) = \mu \qquad V(X) = \sigma^2$$

Les exercices

Exercice 1. Un fermier veut faire de la statistique sur sa production d'oeufs de poule. Il sait que sur les dix milles oeufs recueillis dans la journée, 894 avaient un poids supérieur à 50 grammes et 773 inférieur à 60 grammes.

1. En admettant que la variable aléatoire égale à la masse en grammes d'un oeuf suit une loi normale, donner une estimation des paramètres de cette loi.
2. En déduire le poids moyen d'un oeuf.

Exercice 2. Une région comporte dix hôpitaux, chacun ayant une capacité opératoire journalière de 10 patients. Le nombre de personnes se présentant chaque jour pour être opérées dans chacun de ces hôpitaux suit une loi de Poisson de paramètre 8, ces nombres étant indépendants d'un hôpital à l'autre. Pour un jour donné J :

1) Quelle est la probabilité qu'un hôpital donné soit obligé de refuser un patient ?

2) Quelle est la probabilité que l'un au moins des hôpitaux soit obligé de refuser un patient ?

3.a) Montrer que la somme de deux variables aléatoires indépendantes suivant deux lois de Poisson de paramètre respectif μ et λ suit une loi de Poisson $\lambda + \mu$.
On pourra utiliser la fonction caractéristique ρ_X de la loi de Poisson.

3.b) On suppose maintenant qu'un hôpital saturé a la possibilité de se "délester" sur un autre qui ne l'est pas. Quelle est la probabilité pour qu'un patient ne puisse pas se faire opérer ce jour J ?

Exercice 3. En France, il y a environ 1 punk pour 1000 personnes. Dans une salle de 3000 personnes choisies au hasard dans la population, quelle est la probabilité de tomber sur un groupe d'au moins 3 punks ?
On pourra approximer le problème par une loi de Poisson.

Exercice 4. X une variable aléatoire d'espérance $\mu = 20$ et de variance $\sigma^2 = 1$. On considère $S = \sum_{i=1}^{50} X_i$ somme de 50 variables aléatoires indépendantes mutuellement, toutes de même loi que X.
Donner une approximation de la probabilité $P(S > 1050)$.

Exercice 5. On lance deux dés équilibrés à six faces. Soit Y le plus grand des deux chiffres obtenus et
soit X leur somme.

1. Déterminer la loi du couple (X, Y) et les lois marginales.
2. Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?
3. Déterminer la loi conditionnelle de Y sachant que $X = 6$.

9.5 Examen ELI 2013

Consignes

- Durée : 1h.
- Sans documents ni calculatrice personnelle.
- Barème : chaque exercice est sur 5 points.
- On accordera un soin tout particulier à la présentation et à la rédaction.

Données

- Si X suit une loi de Bernoulli de paramètre p alors :

$$P(X = 0) = 1 - p \qquad P(X = 1) = p \qquad E(X) = p \qquad V(X) = p(1 - p)$$

- Si X suit une loi de Binomiale de paramètre n, p alors :

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k} \qquad E(X) = np \qquad V(X) = np(1 - p)$$

- Si X suit une loi de Poisson de paramètre λ alors $\forall k \in \mathbb{N}$:

$$P(X = k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} \qquad E(X) = \lambda \qquad \rho_X(t) = e^{\lambda(e^{it} - 1)}$$

- Si X suit une loi normale (μ, σ) alors :

$$P(X \in [a, b]) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx \qquad E(X) = \mu \qquad V(X) = \sigma^2$$

Les exercices

Exercice 1 (Exercice de TD)**.**
Un brillant élève fait en moyenne une faute d'orthographe tous les 500 mots. Quelle est la probabilité qu'il ne fasse pas plus de 5 fautes dans un devoir comptant 2000 mots.
Indication : on pourra approximer le problème par une loi de Poisson.

Exercice 2. X, variable aléatoire réelle discrète, suit une loi de Poisson de paramètre λ.

1. Calculer, en fonction de λ, la probabilité conditionnelle de l'événement :

$$"X = 0/X \text{ est pair}"$$

2. **Application :** Une ligne de transmission entre émetteur et récepteur transporte des données représentées par 1024 octets (soit 8 192 bits). La probabilité que la transmission d'un bit soit erronée est estimée à 10^{-5} et on admet que les erreurs sont indépendantes les unes des autres. On contrôle la qualité de la transmission avec un calcul de parité (checksum) sur le nombre de 1 envoyés :
   - si il y a un nombre impair d'erreurs, un message d'erreur apparaît.
   - sinon, c'est à dire si il y a un nombre pair d'erreurs, la transmission est acceptée.

   Calculer la probabilité qu'il n'y ait aucune erreur sachant que la transmission est acceptée.

   Indication : On pourra considérer X la variable aléatoire associant à chaque envoi de données, le nombre d'erreurs lors de la transmission, c'est à dire le nombre de bits parmi les 8 192 dont la transmission est erronée.

Exercice 3. La capacité des ascenseurs est déterminée par le fait que la masse d'une personne suit une loi normale de moyenne 75 kg et d'écart-type 5 kg. Dans un ascenseur du type WH1 le nombre maximum de personnes est de 9. Un voyant lumineux affiche qu'il y a surpoids pour une masse supérieure à 700 kg, dans ce cas l'ascenseur ne démarre pas.

1. Calculer la probabilité qu'il y ait surpoids, quand un groupe de 9 personnes monte dans l'ascenseur.
2. Une enquête récente a montré qu'aux USA, le poids moyen est de 76 kg et l'écart-type de 6 kg. Le building de la World-Company, à New York, est équipé d'un ascenseur du type WH1. Calculer la probabilité qu'il y ait surpoids, quand un groupe de 9 personnes monte dans cet ascenseur.

Exercice 4. Une variable aléatoire X suit une loi normale de moyenne $m = 40$ et d'écart-type $\sigma = 4$. La moyenne d'un échantillon de 100 valeurs de X, valeurs obtenues de manière indépendante, est $me = 43$. Cette valeur est elle compatible avec les paramètres de la loi de X, au seuil de risque de 5% ?

9.6 Examen ST 2013

- Durée : 2h.
- Seul le polycopié de cours est autorisé.
- On accordera un soin tout particulier à la présentation et à la rédaction.
- X suit une loi de Poisson de paramètre λ si :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \qquad P(X = k) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$$

- X suit une loi exponentielle de paramètre λ si la densité est

$$\forall t > 0, \qquad f_X(t) = \lambda \exp(-\lambda t)$$

Exercice 1 (Exercice de TD)**.** Soit X une v.a. de loi géométrique de paramètre $p \in [0, 1]$,

$$P(X = k) = p(1-p)^{k-1}, \qquad k > 0.$$

1. Montrer que la loi est sans mémoire, i.e :

$$\forall (k, n) \in \mathbb{N}^{*2}, \qquad P(X > n + k | X > k) = P(X > n).$$

2. Soient X_1 et X_2 deux v.a de loi géométrique respectivement de paramètre p_1, p_2. Posons $Y = \min(X_1, X_2)$.
   (a) Donner la fonction de répartition de Y en fonction de celles de X_1 et X_2.
   (b) Calculer la loi de Y.

Exercice 2 (Couple de variables aléatoires discrètes)**.** 1. Soit X et Y deux variables aléatoires, vérifier que la covariance est donnée par :

$$\text{cov}(X, Y) = E(X.Y) - E(X)E(Y)$$

On considère un couple de variable aléatoire dont la loi conjointe est résumé par le tableau :

Y \ X	-1	0	1
-1	0	1/4	0
0	1/4	0	1/4
1	0	1/4	0

2. Donner la loi de X puis la loi de Y.
3. Vérifier que les variables aléatoires sont non-corrélées, c'est à dire de covariance nulle.

4. Prouver que X et Y ne sont pas indépendantes.

Exercice 3. Un quartier comporte 5 boulangeries, chacune ayant la capacité de préparer 5 fraisiers pour un jour. Pour chaque boulangerie, le nombre de clients par jour désirant un fraisier suit une loi de Poisson de paramètre 4, ces nombres étant indépendants d'une boulangerie à l'autre. Pour le 29 mai

1) Quelle est la probabilité qu'une boulangerie ne puisse pas fournir de fraisier à un client ?
2) Quelle est la probabilité que l'une au moins des boulangeries ne puisse pas fournir un client ?

3.a) Donner (sans le prouver) la fonction caractéristique d'une loi de Poisson.

3.b) Montrer que la somme de deux variables aléatoires indépendantes suivant deux lois de Poisson de paramètre respectif μ et λ suit une loi de Poisson $\lambda + \mu$.
On utilisera la fonction caractéristique ρ_X de la loi...

3.c) On suppose maintenant qu'une boulangerie n'ayant plus de fraisier à la possibilité de récupérer un gateau dans une boulangerie qui en a encore. Quelle est la probabilité pour qu'un client ne puisse pas avoir de fraisier dans le quartier ? On ne demande pas l'application numérique.

Exercice 4. Soit U une variable aléatoire uniforme sur $[0, 1]$

1. Dessiner la fonction de répartition et la fonction de densité de U.
2. Montrer que $X = 1_{\{U<p\}}$ suit une loi de Bernoulli.
3. Après avoir donner la fonction de répartition d'une loi exponentielle, montrer que $Z = -\frac{\ln(U)}{3}$ suit une loi exponentielle dont on calculera le paramètre.

Exercice 5. X une variable aléatoire d'espérance $\mu = 20$ et de variance $\sigma^2 = 1$. Pour $n = 100$, on considère $S = \sum_{i=1}^{n} X_i$ somme de n variables aléatoires indépendantes mutuellement, toutes de même loi que X.

Donner une approximation de la probabilité $P(S > 2010)$.

Exercice 6. (Surbooking) Afin d'augmenter le nombre de personnes transportées, une compagnie aérienne vend plus de billets qu'elle n'a de places en pariant sur les absences de certains de ces passagers. On suppose qu'avec une probabilité p, le passager ne se présente pas à l'embarquement. Notons n la nombre de places sur un vol et l le nombre de billet vendu pour ce même vol. La compagnie rembourse le billet si une personne présente à l'embarquement ne peut voyager à cause du surbooking.

On souhaite calculer l afin que la compagnie ne doivent rembourser les passagers que dans 1% des cas. Considérons

$$X_i = \begin{cases} 1 \text{ si le passager se présente à l'embarquement} \\ 0 \text{ si le passager ne se présente pas à l'embarquement} \end{cases}$$

On supposera les v.a X_i indépendantes.

1. Donner la loi de X_i, puis celle de $S_l = \sum_{i=1}^{l} X_i$.
2. Donner une expression littérale (exacte), en fonction de p, n et l, de la probabilité que la compagnie soit obligé de rembourser.
3. Par application du Théorème central limite (ou de Moivre Laplace), donner une approximation de cette quantité en fonction de n, l, p, $q = 1 - p$ et de la fonction F de répartiton de la loi Normale centrée réduite
.
4. En déduire l pour $n = 100$ et $p = 0,2$.

Exercice 7 (Question bonus)**.** Un élève se trouve devant 3 portes fermées. Derrière une de ces portes, il y a un point bonus à gagner, et un zéro pointé dans les deux autres. L'élève doit choisir une porte au hasard (sans l'ouvrir). Le professeur ouvre alors une autre porte contenant un zéro.

Que devrait faire l'élève : garder sa porte ou changer d'avis et choisir la dernière porte ?

10 Solutions des sujets

Partiel ELI 2012

Exercice 1. a) $A \in E$.

b) $P(A \cap B) = P(A)P(B)$.

c) $A = \Omega$.

On a toujours la relation $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

d) Comme $P(A \cap B) = P(A)P(B) = \frac{1}{6}$, $P(A \cup B) = \frac{2}{3}$.

e) On a maintenant $A \subset B$ d'où $P(A \cup B) = P(B) = \frac{1}{2}$.

f) $P(A \cap B) = P(A|B)P(B) = \frac{1}{6}$, d'où $P(A \cup B) = \frac{2}{3}$.

Exercice 2. a) Il suffit de remarquer que $X.Y$ ne prend ses valeurs que dans $\{0, 1\}$ et par indépendance :

$$P(X.Y = 1) = P(X = 1 \text{ et } Y = 1) = P(X = 1)P(Y = 1) = pq$$

$$P(X.Y = 0) = 1 - P(X.Y = 1) = 1 - pq$$

Finalement $X.Y$ suit une loi de Bernoulli $\mathcal{B}(pq, 1)$.

b)

+	X.Y=0	X.Y=1
Z=0	0	1
Z=1	1	1

Remarque : le + ici signifie "ou".

c) Le système (S) ne fonctionne pas si $X.Y = 0$ et $Z = 0$. Comme $X.Y$ et Z sont indépendants, cet événement a pour probabilité $P(X.Y = 0)P(Z = 0) = (1 - pq)(1 - r)$. La probabilité de (S) de fonctionner est :

$$P(S = 1) = 1 - (1 - pq)(1 - r)$$

d) On cherche à calculer la quantité $P(X = 0|S = 0)$ or

$$P(X = 0|S = 0) = \frac{P(X = 0 \text{ et } S = 0)}{P(S = 0)} = \frac{P(X = 0 \text{ et } Z = 0)}{P(S = 0)}$$

$$= \frac{P(X = 0)(Z = 0)}{P(S = 0)} = \frac{1 - p}{1 - pq}$$

Exercice 3. a) On vérifie que f_X est positive d'intégrale 1. Par intégration, la fonction de répartition est

$$F_X(t) = \int_{-\infty}^{t} f_X = \int_{1}^{\max(1,t)} \frac{1}{\theta} t^{-\frac{1+\theta}{\theta}} dt$$

b) on a $P(0 < X \leqslant 2) = F_X(2) - F_X(0) = F_X(2) = \text{Calcul} = 1 - 2^{-1/\theta}$.

c) X admet une espérance si $t \mapsto t f_X(t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$. Ou encore si $t \mapsto t^{-1/\theta}$ est intégrable en $+\infty$. Rappelons que $t \mapsto t^{-\alpha}$ est intégrable en $+\infty$ ssi $\alpha > 1$. Dans notre cas, il suffit que $\theta < 1$. Dans ce cas l'espérance vaut (Calculs) $1/(1 - \theta)$.

Exercice 4. a) N suit une loi de Poisson...

b) Notons X_i le choix du ième client, $X_i = 1$ si l'étudiant choisit la caisse A, 0 sinon. Par hypothèse $X_i \sim \mathcal{B}(p)$. Les X_i étant indépendant $\sum_{i=1}^{n} X_i$ suit donc une loi Binomiale $\mathcal{B}(n, p)$. On en déduit pour $k \leqslant n$:

$$P(X = k|N = n) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}$$

Puis $P(X = k) = \sum_n P(X = k|N = n)P(N = n)$. On trouve

$$P(X = k) = e^{-\lambda p} \frac{(\lambda p)^k}{k!}$$

c) X suit une loi de Poisson de paramètre λp. La variance et l'espérance sont égales au paramètre, i.e λp.

Partiel ELI 2013

Exercice 1. On a toujours la relation

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

- Si $A \cap B = \emptyset$ alors $P(A \cup B) = 3/4$.
- A et B sont des événements indépendants alors $P(A \cap B) = P(A)P(B)$ et par suite $P(A \cup B) = 5/8$.
- Si $B \subset A$, alors $A \cup B = A$ et $P(A \cup B) = P(A) = 1/2$.
- Par définition de l'espérance conditionnelle $P(B)P(A/B) = P(A \cap B) = 1/8$ et $P(A \cup B) = P(A) = 5/8$.

Exercice 2. – Pour tout z réel, on a :

$$\begin{array}{rcll} F(z) & = & P(Z \leqslant z) & \text{par définition} \\ & = & P(XY \leqslant z) & \\ & = & P(XY \leqslant z \, et \, X = 1) + P(XY \leqslant z \, et \, X = 1) & \\ & = & P(Y \leqslant z)P(X = 1) + P(-Y \leqslant z)P(X = -1) & \text{indépendance} \\ & = & 1/2P(Y \leqslant Z) + 1/2P(Y \geqslant -z) & \\ & = & 1/2P(Y \leqslant Z) + 1/2(1 - P(Y < -z)) & \text{passage au complémentaire} \\ & = & 1/2P(Y \leqslant Z) + 1/2(1 - P(Y \leqslant -z)) & P(Y = z) = 0 \\ F(z) & = & 1/2\psi(z) + 1/2(1 - \psi(-z)) & \end{array}$$

- Comme F est $\mathcal{C}^1$, la fonction de densité f_Z s'obtient par dérivation de la fonction de répartition. Autrement dit,

$$f_Z(z) = 1/2\psi'(z) + 1/2\psi'(-z) = \psi'(z)$$

- On constate que Z et Y ont même fonction de densité. On retrouve un résultat conforme à l'intuition Z suit une loi normale centrée réduite.

Exercice 3. Posons $p = 1 - q = 1/3$. Si la série est bleue, la probabilité d'avoir une longueur exactement k est $p^{k-1} \times q$ car le k-ième coup est forcément rouge et chaque lancer est indépendant des autres. Et inversement. $P(X = k) = P(X = k \cap B) + P(X = k \cap R) = P(X = k|B)P(B) + P(X = k|R)P(R) = q^k \times p + p^k \times q$. Par définition l'espérance est :

$$E(X) = \sum_{k \in \mathbb{N}} kP(X = k) = \sum_{k=0}^{+\infty} kp^k q + kq^k p$$

Or en remarquant que $x\frac{dx^k}{dx} = kx^k$, on a par intervertion entre somme et dérivation :

$$\forall |x| < 1, \quad \sum_{k=0}^{+\infty} kx^k = \frac{x}{(1-x)^2}$$

Dans notre cas, on trouve $E(X) = \frac{p}{q} + \frac{q}{p}$, i.e 3.

Partiel ST 2013

Exercice 1 (Exercice de TD). 1. Notons respectivement M, NM, $-$ et $+$, les événement personne malade, non-malade, test négatif et test positif. On a

$$P(M|+) = \frac{P(M\cap +)}{P(+)} = \frac{P(+|M)P(M)}{P(+)} = \frac{P(+|M)P(M)}{P(+\cap M)+P(+\cap NM)}$$

Soit à peu près 33% de chances.

2. On a aussi

$$P(M|-) = \frac{P(M\cap -)}{P(-)} = \frac{P(M)-P(M\cap +)}{1-P(+)} = 0.001\%$$

3. Il donne malade des gens qui ne le sont pas, et pas qu'un peu ! Mais si on est détecté pas malade, on a de forte chance que cela soit vrai. Par exemple, si le test est peu onéreux/rapide, on commence par celui là, si le test est négatif alors on est déclaré "sain" et si le test est positif, on fait des tests complémentaires.

Exercice 2 (Axiomatique de Kolmogorov). 1. Ω, E et P désignent respectivement l'univers des possibles, la tribu des événements et une probabilité sur E.

2. On a toujours la relation

$$P(A\cup B) = P(A)+P(B)-P(A\cap B)$$

Or par indépendance $P(A\cap B) = P(A)P(B)$, d'où $P(A\cup B) = 2/3$.

3. Dire que l'événement B implique l'événement A, signifie en terme ensembliste que $A\subset B$. D'où $P(A\cap B) = P(B) = 1/3$.

4. En vertu de la définition de probabilité conditionnelle, on a $P(A\cap B) = P(A|B)P(B) = 1/18$.

Exercice 3. Soit $k\in\mathbb{N}\setminus\{0,1\}$, l'évenement $Z=k$ se produit si les $k-1$ premiers lancers sont tous pile et le k-ème est face ou inversement si les $k-1$ premiers lancers sont tous face et le k-ème est pile. Or la probabilité d'obtenir $k-1$ pile puis un face est par indépendance des lancers $p^{k-1}q$. Ainsi :

$$\boxed{P(Z=k) = p^{k-1}q+q^{k-1}p}$$

De plus, l'espérance est par définition

$$E(Z) = \sum_{k=2}^{+\infty} k\left(p^{k-1}q+q^{k-1}p\right)$$

Il est possible de simplifier cette expression, pour cela remarquons que pour tout $x\in]0,1[$

$$\sum_{k=1}^{+\infty} kx^{k-1} = \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{dx^k}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\sum_{k=0}^{+\infty}x^k\right) = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{1-x}\right) = \frac{1}{(1-x)^2}$$

$$\Rightarrow \quad \sum_{k=2}^{+\infty} kx^{k-1} = \frac{1}{(1-x)^2}-1$$

On notera que l'interversion entre la somme et la dérivation est licite par convergence uniforme... Par suite, on obtient

$$E(Z) = q\sum_{k=2}^{+\infty}kp^{k-1} + p\sum_{k=2}^{+\infty}q^{k-1} = \frac{q}{(1-p)^2}-q+\frac{p}{(1-q)^2}-p$$

$$\boxed{E(Z) = \frac{1}{q}+\frac{1}{p}-1 = \frac{1}{qp}-1}$$

Exercice 4 (loi de Poisson). 1. L'espérance d'une loi de Poisson de paramètre λ est égale à son paramètre.

2. La loi de Poisson modélise les«événements rares» (temps d'attente à une caisse, nombre d'appels téléphoniques etc..). On va donc utiliser ce type de lois dans ce cas présent. Reste à déterminer le paramètre. Comme l'espérance (i.e la moyenne) correspond au paramètre, on convient de prendre $\lambda = 0,7$. La probabilité d'aucun appel est :

$$P(N=0) = e^{-0,7}\simeq 1/2$$

La probabilité d'au plus un appel est :

$$P(N\geqslant 1) = 1-P(N=0) = 1-e^{-0,7}\simeq 1/2$$

Exercice 5.

	a)	b)	c)	d)	e)	f)	g)	h)
V				X	X			X
F	X	X	X			X	X	

Examen ELI 2012

Examen ELI 2013

Exercice 1 (Exercice de TD).
On approxime par une loi de Poisson de paramètre 4, on trouve :

$$P(N \leqslant 4) \simeq 0,63$$

Exercice 2. 1. Par définition d'une probabilité conditionnelle

$$P(X = 0 \mid X\, pair) = \frac{P(X = 0\, et\, pair)}{P(X\, pair)} = \frac{P(X = 0)}{P(X\, pair)}$$

Or $P(X = 0) = e^{-\lambda}$ et $P(X\, pair) = \sum_{k \in \mathbb{N}} P(X = 2k) = e^{-\lambda}\operatorname{ch}(\lambda)$. On trouve finalement

$$P(X = 0 \mid X\, pair) = \frac{1}{\operatorname{ch}(\lambda)} = \frac{2}{e^{\lambda} + e^{-\lambda}}$$

2. Application : par indépendance des erreurs sur chaque bit, le nombre total d'erreur suit une loi Binomiale $\mathcal{B}(n,p)$ avec $n = 8152$ et $p = 10^{-5}$. Loi que l'on approche par une loi de Poisson de paramètre $np = 0,08152$. D'après la question précédente, la probabilité qu'il n'y ait aucune erreur sachant que la transmission est acceptée est environ

$$P(X = 0 \mid X\, pair) = \frac{1}{\operatorname{ch}(0,08152)} \simeq 0,997$$

C'est donc un test facile et efficace.

Exercice 3. 1. Notons X_i le poids de la i-ème personne, par hypothèse

$$X_i \sim \mathcal{N}(75, 5)$$

Si l'on suppose que le poids de chaque personne est indépendant du poids des autres personnes présentes dans l'ascenseur alors les X_i sont indépendants et

$$S = X_1 + \cdots X_9 \sim \mathcal{N}(9 \times 75, \sqrt{9} \times 5)$$

$$\Rightarrow \quad S \sim \mathcal{N}(675, 15)$$

On cherche à calculer la probabilité

$$p = P(S > 700)$$

Pour cela, on renormalise avec X suivant une loi Normale centrée réduite

$$p = P\left(\frac{S - 675}{15} > \frac{700 - 675}{15}\right) = P\left(X > \frac{5}{3}\right)$$

Ainsi si F désigne la fonction de répartition de la loi Normale centrée réduite

$$p = 1 - F(5/3) \simeq 0,05 = 5\%$$

2. De même, on trouve 22%. On constate donc que malgré un « faible » écart en les valeurs moyennes, on a quadruplé la probabilté de mettre la machine en panne...

Exercice 4. L'intervalle de confiance de moyenne au risque 5% est

$$I = [40 - 1,96 \times \frac{4}{\sqrt{100}}; 40 + 1,96 \times \frac{4}{\sqrt{100}}] \subset [39,2; 40,8]$$

Comme $43 \notin I$, la valeur n'est pas compatible avec la valeur moyenne de la population.

Examen ST 2013

Exercice 1 (Couple de variables aléatoires discrètes). 1. On a par linéartité de l'espérance et $E(1) = 1$

$$\begin{aligned} \text{cov}(X,Y) &= E\left((X - E(X))(Y - E(Y))\right) \\ &= E(X.Y - E(X)Y - E(Y)X - E(X)E(Y)) \\ &= E(X.Y) - 2E(X)E(Y) + E(X)E(Y) \\ &= E(X.Y) - E(X)E(Y) \end{aligned}$$

2. Pour la loi de X, il suffit de sommer sur la colonne

$$P(X = -1) = P(X = 1) = 1/4 \quad \text{et} \quad P(X = 0) = 1/2$$

Il en va de même pour Y qui suit la même loi (le tableau est symétrique rapport à la diagonale principale).

3. X et Y sont d'espérance nulle. De plus, $X.Y$ ne peut prendre que les valeurs $-1, 0$ et 1. On constate aussi que par symétrie

$$P(X.Y = 1) = P(X.Y = -1)$$

On en déduit que l'espérance de $X.Y$ est nulle. D'après l'expression de la covariance donnée en question 1, on a une covariance nulle.

4. Il suffit de remarquer que

$$\underbrace{P(X = 0)}_{1/2}\,\underbrace{P(Y = 0)}_{1/2} \neq \underbrace{P(X = 0 \ et \ Y = 0)}_{0}$$

Exercice 2. 1) Une boulangerie ne peut pas fournir de fraisier à un client si il y a eu plus de 6 clients dans la journée. On cherche donc pour $N \sim \mathcal{P}(4)$

$$P(N > 5) = 1 - P(N \leqslant 5) = 1 - F_N(5)$$

où F_N désigne la fonction de répartition de la loi de Poisson de paramètre 4. D'après le tableau, on a directement $F_N(5) = 0,785$. Puis la probabilité voulue est

$$P(N > 5) \simeq 0,215$$

2) Par indépendance, la probabilité que toutes les boulangeries fournissent est $(1 - P(N > 5))^5$; La probabilité, qu'une boulangerie au moins ne puisse pas fournir, est donc $1 - (1 - P(N > 5))^5 = 0.73$.

3.a) On a $\rho_X(t) = e^{-\lambda(1-e^{it})}$

3.b) Il suffit de regarder les fonctions caractéristiques qui rappelons-le caractérise la loi. Par indépendance

$$\rho_{X+Y} = \rho_X \rho_Y = e^{-\lambda(1-e^{it})} e^{-\mu(1-e^{it})} = e^{-(\lambda+\mu)(1-e^{it})}$$

C'est la fonction caractéristique d'une loi de Poisson de paramètre $\lambda + \mu$. Donc la somme de deux variables aléatoires indépendantes suivant deux lois de Poisson de paramètre respectif μ et λ suit une loi de Poisson $\lambda + \mu$.

3.c) D'après la question précédente, la loi suit une loi de Poisson de paramètre $4 * 5 = 20$. La probabilité pour qu'un client ne puisse pas avoir de fraisier dans le quartier est donc

$$1 - P(N \leqslant 25) \quad N \sim \mathcal{P}(20)$$

Exercice 3. 1. Cours ;

2. On a $X(\Omega) = \{0, 1\}$et $P(X = 1) = P(U < p) = p$. X suit une loi de Bernoulli de paramètre p.
3. On a pour $t > 0$

$$F_X(t) = P(X \leqslant t) = 1 - P(U \geqslant e^{-3t}) = 1 - e^{-3t}$$

car $e^{-3t} \in [0, 1]$ pour tout $t > 0$. On reconnaît la fonction de répartition d'un loi exponentielle de paramètre 3. Comme la fonction de répartition caractérise la loi

$$X \sim \mathcal{E}(3)$$

Exercice 4. On a

$$P(S > 2010) = P(\frac{S - n\mu}{\sqrt{n}\sigma} > \frac{2010 - n\mu}{\sqrt{n}\sigma})$$

$$= P(\frac{S - n\mu}{\sqrt{n}\sigma} > \frac{2010 - 100 \times 20}{10}) = P(\frac{S - np}{\sqrt{n}\sigma} > 1)$$

D'après le TCl, on a l'approximation

$$P(S > 2010) \simeq P(Z > 1) = 1 - F(1)$$

avec Z suivant une loi normale centrée réduite et F sa fonction de répartition. Comme $F(1) = 0,84$, on trouve $0,16$.

Exercice 5. (Surbooking)

1. X_i suit une loi de Bernoulli de paramètre $q = 1 - p$ et par indépendance $S_l = \sum_{i=1}^{l} X_i$ suit une loi Binomiale de paramètre $(l, 1 - p)$.
2. La compagnie est obligée de rembourser si $S_l > n$. La probabilité recherchée est donc

$$P(S_l > n) = \sum_{k=n+1}^{l} P(S_l = k) = \sum_{k=n+1}^{l} \binom{l}{k} (1-p)^k p^{l-k}$$

3. Renormalisons sachant que $E(S_l) = l(1-p)$ et $V(S_n) = lpq$

$$P(S_l > n) = P\left(\frac{S_l - lq}{\sqrt{lpq}} > \frac{n - lq}{\sqrt{lpq}}\right)$$

Par application du Théorème central limite (ou de Moivre Laplace), $\frac{S_l - lq}{\sqrt{lpq}}$ suit approximativement une loi normale centré réduite :

$$P(S_l > n) \simeq P\left(Z > \frac{n - lq}{\sqrt{lpq}}\right) \qquad Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$$

Finalement, on trouve

$$P(S_l > n) \simeq 1 - F\left(\frac{n - lq}{\sqrt{lpq}}\right)$$

4. Il suffit de résoudre les inéquations

$$\begin{array}{rrcll}
 & P(S_l < n) & \leqslant & 1\% & \\
\Leftrightarrow & F\left(\frac{n - lq}{\sqrt{lpq}}\right) & \geqslant & 0.99 & \\
\Leftrightarrow & F\left(\frac{n - lq}{\sqrt{lpq}}\right) & \geqslant & F(\alpha) & \alpha \simeq 2,38 \\
\Leftrightarrow & \frac{n - lq}{\sqrt{lpq}} & \geqslant & \alpha & F \text{ strict. croissante} \\
\Leftrightarrow & (n - lq)^2 & \geqslant & \alpha^2 lpq & \text{et } n \geqslant ql \\
\Leftrightarrow & x^2 + x & \geqslant & \alpha^2 np & \text{avec } x = n - lq \geqslant 0 \\
\Leftrightarrow & x & \geqslant & \frac{1 + \sqrt{1 + 4\alpha^2 np}}{2} & \text{polynôme second degré}
\end{array}$$

$$\text{A.N} \quad x \geqslant 11.2 \quad \text{et} \quad l \leqslant 111$$

Exercice 6 (Question bonus). Il faut changer. En effet, On perd si on a pris dès le début le point (soit 1 chance sur 3) alors qu'on gagne avec 2 chances sur 3.