MA261. Introduction au calcul scientifique
TP 1 : Introduction à Matlab.

Exercice 1 Soient les vecteurs colonnes et la matrice suivants

$$\vec{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \ \vec{u}_2 = \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \vec{u}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 7 \end{pmatrix}, \ A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 7 & 6 & 5 \\ 2 & 8 & 7 \end{pmatrix}.$$

1. **Structures Matlab**
   (a) Entrer ces données sous Matlab.
   (b) Calculer $\vec{u}_1 + 3\vec{u}_2 - \vec{u}_3/5$.
   (c) Calculer le produit scalaire entre les vecteurs $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$.
   (d) Calculer le produit $A\vec{u}_1$.
2. **Commandes Matlab**
   Trouver les commandes Matlab permettant de :
   (a) calculer $\|\vec{u}_1\|_2$, $\|\vec{u}_2\|_1$, $\|\vec{u}_3\|_\infty$;
   (b) déterminer les dimensions de la matrice A, en extraire le nombre de colonnes ;
   (c) calculer le déterminant et l'inverse de A.
3. **Résolution de systèmes linéaires**
   Proposer deux méthodes permettant de résoudre le problème $A\vec{x} = \vec{u}_1$, et déterminer les commandes Matlab associées.

Exercice 2 Soient la matrice et les vecteurs colonnes suivants

$$A = \begin{pmatrix} 5/8 & -1/4 & 1/8 \\ 1/4 & 0 & 1/4 \\ 1/8 & -1/4 & 5/8 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{u}_1 = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

On définit, pour $n \geq 1$, la suite de vecteurs $\vec{u}_{n+1} = A\vec{u}_n + \vec{b}$.

1. Construire une fonction `suite.m` calculant les premiers termes de la suite $\vec{u}_n$. Cette fonction aura comme arguments d'entrée les données suivantes : la matrice A, le second membre $\vec{b}$, le terme initial $\vec{u}_1$, et le nombre de termes voulus nb_{it}.
2. Représenter graphiquement l'évolution de chacune des composantes.
   Qu'observe-t-on ?
3. Soient
$$\vec{u}_{1b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, A_b = \begin{pmatrix} 5 & 6 & 3 \\ -1 & 5 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$
   Observe-t-on le même comportement si on remplace $\vec{u}_1$ par $\vec{u}_{1b}$? Que se passe-t-il si on remplace A par A_b (quel que soit le terme initial) ?

Exercice 3 Soit $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. On introduit le vecteur p_L^A (resp. p_C^A), appartenant à $\mathbb{R}^n$, des indices des colonnes (resp. des lignes) du premier coefficient non nul de chaque ligne (resp. de chaque colonne). Par convention, si tous les coefficients d'une ligne (resp. d'une colonne) sont nuls, le nombre reporté est $n+1$. Par exemple, pour la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 6 & 3 & 0 \\ 0 & 5 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 4}, \text{on a } p_L^A = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ et } p_C^A = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Les profils en ligne P_L^A et en colonne P_C^A peuvent alors se définir comme étant :

$$P_L^A = \left\{(i,j) \in \{1,\ldots,n\}^2 \ : \ (p_L^A)_i \leq j\right\}.$$

$$P_C^A = \left\{(i,j) \in \{1,\ldots,n\}^2 \ : \ (p_C^A)_j \leq i\right\}.$$

Leur utilité première est d'éviter de stocker les composantes nulles en début de chaque ligne ou colonne.

1. Écrire une fonction qui pour toute matrice calcule son profil ligne et colonne, i.e. renvoie les vecteurs p_L^A et p_C^A.
   `Aide : utiliser la fonction Matlab retournant le minimum d'un ensemble.`
2. Comment pourrait-on simplement améliorer les profils en ligne et en colonne ?
3. Que peut-on dire des profils des matrices symétriques et symétriques définies-positives ? Modifier en conséquence votre fonction.

Exercice 4

1. Écrire une fonction Matlab `GenereMatrice` générant une matrice d'ordre quelconque avec des éléments aléatoires.
2. Écrire une fonction Matlab `GenereSysteme` construisant des systèmes linéaires aléatoires, et les résolvant (lorsque c'est possible).