MA261. Introduction au calcul scientifique
TP 2 : Construction de matrices pour discrétisation par différences finies.

Exercice 5 : le Laplacien 1d (fil pesant, poutre en flexion).
Discrétisation du problème du fil pesant : *trouver u tel que*

$$-u'' = f \text{ sur }]0,1[, \quad u(0) = u(1) = 0.$$

1. Ecrire une fonction qui construise la matrice tridiagonale $\mathbb{A}_1$ d'ordre N obtenue par la discrétisation par différences finies du problème du fil pesant ou de la poutre en flexion (schéma à trois points pour le Laplacien 1d).
2. Comparer les temps de construction ainsi que la faisabilité, selon que la structure associée à $\mathbb{A}_1$ est pleine ou creuse, en fonction de N.

Exercice 6 : le Laplacien 2d (membrane élastique).

Discrétisation du problème de la membrane, posé dans $\Omega_2 =]0,1[^2$: *trouver u tel que*

$$-\Delta_2 u = f \text{ sur } \Omega_2, \quad u = 0 \text{ sur } \partial\Omega_2.$$

Le but de cet exercice est de construire *rapidement* la matrice $\mathbb{A}_2$ d'ordre N obtenue par la discrétisation par différences finies du problème de la membrane élastique (schéma à cinq points pour le Laplacien 2d).

Pour cela, on dispose d'une grille de $N = n \times n$ points, représentant les points de discrétisation *intérieurs* du domaine de calcul. D'un point de vue *algorithmique*, on veut utiliser des vecteurs de $\mathbb{R}^N$, dont les composantes correspondent à des valeurs aux points de la grille, ainsi que des matrices de $\mathbb{R}^{N\times N}$, qui représentent une action sur ces vecteurs.

1. Pourquoi les points de discrétisation de la frontière du domaine ne sont-ils pas pris en compte ? Comment numéroter les points de la grille ? Quels sont les voisins des points du bord de la grille ?
2. Soit $\mathbb{A}_2$ la matrice de $\mathbb{R}^{N\times N}$ telle que :
   Pour $I \in \{1,\cdots,N\}$: $(\mathbb{A}_2)_{I,I} = 4(n+1)^2$.
   Pour $I, J \in \{1,\cdots,N\}$, $I \neq J$:
   $(\mathbb{A}_2)_{I,J} = -(n+1)^2$ si I et J sont deux points voisins sur la grille (voisins de gauche, droite, haut, bas).
   $(\mathbb{A}_2)_{I,J} = 0$ sinon.
   Pourquoi cette matrice $\mathbb{A}_2$ est-elle la matrice du Laplacien 2d ?
3. Proposer un algorithme *rapide* de construction de $\mathbb{A}_2$. Ecrire la fonction Matlab correspondante. Effectuer une étude du temps de construction en fonction de N.

Exercice 7 : le Laplacien 3d (cavité électrostatique).
Discrétisation du problème de la cavité, posé dans $\Omega_3 =]0,1[^3$: *trouver u tel que*

$$-\Delta_3 u = f \text{ sur } \Omega_3, \quad u = 0 \text{ sur } \partial\Omega_3.$$

On dispose maintenant d'une grille de $N = n \times n \times n$ points, représentant les points de discrétisation *intérieurs* du domaine de calcul. Comme pour l'exercice 2, les vecteurs à manipuler appartiennent à $\mathbb{R}^N$, et les matrices qui représentent une action sur ces vecteurs sont dans $\mathbb{R}^{N\times N}$.

1. Comment numéroter les points de la grille ?
2. A quoi est égale la matrice $\mathbb{A}_3$ du Laplacien 3d ? Proposer un algorithme *rapide* de construction de $\mathbb{A}_3$. Ecrire la fonction Matlab correspondante. Effectuer une étude du temps de construction en fonction de N.