

# Examen

3 avril 2024

## 1 Schéma $D_1Q_3$ pour une équation hyperbolique

Considérons l'équation hyperbolique mono-dimensionnelle suivante (équation de transport à vitesse constante)

$$\partial_t u(t, x) + c \partial_x u(t, x) = 0, \quad t > 0, x \in \mathbb{R}, \quad (1)$$

où la vitesse  $c \in \mathbb{R}$ . Nous utilisons un schéma de Boltzmann sur réseau à trois vitesses pour approcher la solution de cette équation.

Considérons  $\mathcal{L} = \Delta x \mathbb{Z}$ , un réseau régulier en dimension un d'espace avec une taille de maille  $\Delta x$ . Le pas de temps  $\Delta t$  est déterminé par l'échelle de vitesse  $\lambda$  selon la relation  $\Delta t = \frac{\Delta x}{\lambda}$ . Pour le schéma noté  $D_1Q_3$ , nous introduisons  $\{c_0 = 0, c_1 = \lambda, c_2 = -\lambda\}$  l'ensemble des trois vitesses. C'est-à-dire que ce schéma contient la vitesse nulle en plus de celles du  $D_1Q_2$ . Nous avons ainsi pour chaque noeud  $x$  de  $\mathcal{L}$ , et chaque vitesse  $c_j, j \in \{0, 1, 2\}$ , le point  $x + c_j \Delta t$  est également un noeud du réseau  $\mathcal{L}$ . Le principe du schéma  $D_1Q_3$  est de calculer le vecteur des fonctions de répartition des particules  $\mathbf{f} = (f_0, f_1, f_2)^T$  sur le réseau  $\mathcal{L}$  pour des valeurs discrètes du temps. Chaque itération en temps du schéma est constitués de deux étapes : la première étape est la relaxation qui est locale en espace, la seconde est l'étape de transport pour laquelle la méthode exacte des caractéristiques est utilisée. Le cadre proposé par d'Humières s'écrit ici pour ce schéma à trois vitesses : trois moments  $\mathbf{m} = (m_0, m_1, m_2)^T$  définis en chaque point du réseau spatial  $x \in \mathcal{L}$  et à chaque instant  $t$  par

$$m_0 = f_0 + f_1 + f_2, \quad m_1 = \lambda(f_1 - f_2), \quad m_2 = \lambda^2(f_1 + f_2). \quad (2)$$

La matrice des moments  $\mathbf{M}$  telle que  $\mathbf{m} = \mathbf{M}\mathbf{f}$  s'écrit

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & \lambda & -\lambda \\ 0 & \lambda^2 & \lambda^2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{M}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{\lambda^2} \\ 0 & \frac{1}{2\lambda} & \frac{1}{2\lambda^2} \\ 0 & -\frac{1}{2\lambda} & \frac{1}{2\lambda^2} \end{pmatrix}. \quad (3)$$

Décrivons à présent une étape du schéma. Le point de départ est le vecteur des densités  $\mathbf{f}(t, x)$  en  $x \in \mathcal{L}$  à l'instant  $t$ , on calcule alors le vecteur des moments

$$\mathbf{m}(t, x) = \mathbf{M}\mathbf{f}(t, x). \quad (4)$$

L'étape de relaxation s'écrit alors

$$m_0^*(t, x) = m_0(t, x), \quad (5)$$

$$m_1^*(t, x) = m_1(t, x) + s(m_1^{\text{eq}}(t, x) - m_1(t, x)), \quad (6)$$

$$m_2^*(t, x) = m_2(t, x) + s(m_2^{\text{eq}}(t, x) - m_2(t, x)), \quad (7)$$

où  $s$  est l'unique paramètre de relaxation et  $m_1^{\text{eq}}$  et  $m_2^{\text{eq}}$  les valeurs des moments à l'équilibre qui ne dépendent que de  $m_0$ . Les fonctions de répartition sont alors calculées par la relation

$$\mathbf{f}^*(t, x) = \mathbf{M}^{-1} \mathbf{m}^*(t, x). \quad (8)$$

L'étape de transport s'écrit finalement

$$f_0(t + \Delta t, x) = f_0^*(t, x), \quad f_1(t + \Delta t, x) = f_1^*(t, x - \Delta x), \quad f_2(t + \Delta t, x) = f_2^*(t, x + \Delta x). \quad (9)$$

### **Exercice 1 : Consistance du schéma**

Dans cette exercice, nous allons fixer les valeurs des paramètres  $m_1^{\text{eq}}$  et  $m_2^{\text{eq}}$  afin d'avoir un schéma consistant avec l'équation de transport à vitesse constante  $c \in \mathbb{R}$ . Comme l'équation visée est linéaire, nous cherchons des équilibres  $m_1^{\text{eq}} = \alpha_1 m_0$  et  $m_2^{\text{eq}} = \alpha_2 m_0$ , où  $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ . L'objectif est de fixer ces deux paramètres.

**Q1.** [Ecriture matricielle du schéma] Montrez que le schéma peut s'écrire sous une forme matricielle

$$\mathbf{m}(t + \Delta t) = \mathbf{A} \mathbf{m}(t) + \mathbf{B} \mathbf{m}^{\text{eq}}(t),$$

où les matrices  $\mathbf{A}$  et  $\mathbf{B}$  sont des matrices de taille  $3 \times 3$  à coefficients dans l'anneau commutatif  $\mathcal{D}_{\Delta x}^1$ . Vous donnerez l'expression des matrices  $\mathbf{A}$  et  $\mathbf{B}$ .

**Q2.** [Méthode] Expliquez pourquoi la forme matricielle obtenue à la question précédente ne permet pas directement d'obtenir la consistance du schéma. Expliquez ensuite quel est le procédé qui permet d'obtenir un schéma uniquement sur le premier moment  $m_0$  mais entre plusieurs instants différents.

Le schéma peut se récrire de manière équivalente uniquement sur le premier moment sous la forme suivante (on ne vous demande pas de le démontrer!) :

$$\begin{aligned} m_0(t + \Delta t) = & \left( s\alpha_1 \frac{x - \bar{x}}{2\lambda} + s\alpha_2 \frac{x - 2 + \bar{x}}{2\lambda^2} + (1 - s)(x + \bar{x}) + 1 \right) m_0(t) \\ & + (s - 1) \left( s\alpha_1 \frac{x - \bar{x}}{2\lambda} - s\alpha_2 \frac{x - 2 + \bar{x}}{2\lambda^2} - (s - 1) + x + \bar{x} \right) m_0(t - \Delta t) \\ & + (s - 1)^2 m_0(t - 2\Delta t). \end{aligned} \quad (10)$$

**Q3.** [Calcul des équations équivalentes] Faites une analyse de consistance du schéma (10) en utilisant une formule de Taylor aux ordres 0, 1 puis 2. Montrez que le choix  $\alpha_1 = c$  et  $\alpha_2 = c^2$  conduit aux équations équivalentes suivantes

$$\partial_t m_0 + c \partial_x m_0 = -\Delta t^2 c (\lambda^2 - c^2) \frac{6 - 6s + s^2}{6s^2} \partial_{xxx} m_0 + \mathcal{O}(\Delta t^3).$$

**Q4.** [Comparaison avec le  $D_1 Q_2$ ] Comparez l'équation équivalente obtenue pour le  $D_1 Q_3$  avec celle du  $D_1 Q_2$  vue en cours. En particulier, pensez-vous qu'ajouter une vitesse (donc allonger le temps de calcul et augmenter la mémoire nécessaire) sera intéressant?

### **Exercice 2 : Stabilité du schéma**

Dans cette exercice, nous nous intéressons à la stabilité du schéma. Nous effectuons pour cela une analyse de von Neumann.

- Q1.** [*Matrice d'amplification*] Construisez la matrice d'amplification du schéma en conservant des valeurs quelconques pour les paramètres  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$ , pour  $\xi \in [-\pi/\Delta x, \pi/\Delta x]$ .
- Q2.** [*Polynôme caractéristique*] Dans le cas  $s = 1$ ,  $\alpha_1 = c$  et  $\alpha_2 = c^2$ , calculez le polynôme caractéristique de la matrice d'amplification. Déduisez-en si le schéma est stable au sens de von Neumann.

## 2 Schéma $D_1Q_2$ pour une équation parabolique

**Attention : ce schéma  $D_1Q_2$  est légèrement différent de celui vu en cours. Faites attention aux notations.**

Considérons l'équation parabolique mono-dimensionnelle suivante (équation de la chaleur)

$$\partial_t u(t, x) = \nu \partial_{xx} u(t, x), \quad t > 0, x \in \mathbb{R}, \quad (11)$$

où le coefficient de diffusion thermique  $\nu \in \mathbb{R}$ . Nous utilisons un schéma de Boltzmann sur réseau à deux vitesses pour approcher la solution de cette équation.

Considérons  $\mathcal{L} = \Delta x \mathbb{Z}$ , un réseau régulier en dimension un d'espace avec une taille de maille  $\Delta x$ . Le pas de temps est noté  $\Delta t$ . Pour le schéma noté  $D_1Q_2$ , nous introduisons  $\{c_0 = -1, c_1 = 1\}$  l'ensemble des deux vitesses. Le principe du schéma  $D_1Q_2$  est de calculer le vecteur des fonctions de répartition des particules  $\mathbf{f} = (f_0, f_1)^T$  sur le réseau  $\mathcal{L}$  pour des valeurs discrètes du temps. Chaque itération en temps du schéma est constitués de deux étapes : la première étape est la relaxation qui est locale en espace, la seconde est l'étape de transport pour laquelle la méthode exacte des caractéristiques est utilisée. Le cadre proposé par d'Humières s'écrit ici pour ce schéma à deux vitesses : deux moments  $\mathbf{m} = (m_0, m_1)^T$  définis en chaque point du réseau spatial  $x \in \mathcal{L}$  et à chaque instant  $t$  par

$$m_0 = f_0 + f_1, \quad m_1 = f_1 - f_0. \quad (12)$$

La matrice des moments  $\mathbf{M}$  telle que  $\mathbf{m} = \mathbf{M} \mathbf{f}$  s'écrit

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{M}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}. \quad (13)$$

Décrivons à présent une étape du schéma. Le point de départ est le vecteur des densités  $\mathbf{f}(t, x)$  en  $x \in \mathcal{L}$  à l'instant  $t$ , on calcule alors le vecteur des moments

$$\mathbf{m}(t, x) = \mathbf{M} \mathbf{f}(t, x). \quad (14)$$

L'étape de relaxation s'écrit alors

$$m_0^*(t, x) = m_0(t, x), \quad (15)$$

$$m_1^*(t, x) = m_1(t, x) + s(m_1^{\text{eq}}(t, x) - m_1(t, x)), \quad (16)$$

où  $s$  est l'unique paramètre de relaxation et  $m_1^{\text{eq}}$  la valeur du moment à l'équilibre qui ne dépend que de  $m_0$ . Les fonctions de répartition sont alors calculées par la relation

$$\mathbf{f}^*(t, x) = \mathbf{M}^{-1} \mathbf{m}^*(t, x). \quad (17)$$

L'étape de transport s'écrit finalement

$$f_0(t + \Delta t, x) = f_0^*(t, x + \Delta x), \quad f_1(t + \Delta t, x) = f_1^*(t, x - \Delta x). \quad (18)$$

**Notez que ce schéma  $D_1Q_2$  ne fait pas intervenir la paramètre  $\Delta x/\Delta t$  à ce niveau.**

**Exercice 3 : Consistance du schéma**

Dans cette exercice, nous allons chercher à savoir si un choix des paramètres du schéma permet d'être consistant avec l'équation de la chaleur.

- Q1.** [*Schéma équivalent*] En reprenant ce qui a été fait en cours, proposez une expression du schéma sous la forme d'un schéma à deux pas de temps uniquement sur le moment conservé  $m_0$ .
- Q2.** [*Consistance*] En effectuant une analyse asymptotique du schéma obtenu à la question précédente, montrez que le schéma est consistant avec l'équation de la chaleur (11) si, et seulement si,

$$m_1^{\text{eq}} = 0 \quad \text{et} \quad \left(\frac{1}{s} - \frac{1}{2}\right) \frac{\Delta x^2}{\Delta t} = \nu. \quad (19)$$

- Q3.** [*Scaling diffusif*] Expliquez en quoi la deuxième relation de (19) n'est pas compatible avec la relation proposée en cours :  $\lambda = \Delta x/\Delta t$  constante. Pouvez-vous expliquer la différence en terme de vitesse de déplacement de l'information dans le schéma comparativement à celle dans l'équation de la chaleur.

**Exercice 4 : Stabilité du schéma**

Dans cette exercice, nous nous intéressons à la stabilité du schéma. Nous effectuons pour cela une analyse de von Neumann.

- Q1.** [*Principe du maximum*] Démontrez le principe du maximum suivant en vous inspirant de celui démontré en cours : en supposant que  $0 < s \leq 1$ , nous avons

$$\forall k \in \mathbb{N}, \forall j \in \mathbb{Z}, \quad \min_{i \in \mathbb{Z}} m_0(0, i\Delta x) \leq m_0(k\Delta t, j\Delta x) \leq \max_{i \in \mathbb{Z}} m_0(0, i\Delta x).$$

- Q2.** [*Analyse de von Neumann*] Construisez la matrice d'amplification du schéma avec le choix particulier  $m_1^{\text{eq}} = 0$ . Montrez que le schéma est stable au sens de von Neumann si, et seulement si,  $0 \leq s \leq 2$ .