

Examen

9 avril 2024

Considérons l'équation des ondes mono-dimensionnelle suivante

$$\partial_{tt}u(t, x) - c^2\partial_{xx}u(t, x) = 0, \quad t > 0, x \in \mathbb{R}, \quad (1)$$

où la vitesse $c \in \mathbb{R}$. Nous utilisons un schéma de Boltzmann sur réseau à trois vitesses pour approcher la solution de cette équation.

Considérons $\mathcal{L} = \Delta x\mathbb{Z}$, un réseau régulier en dimension un d'espace avec une taille de maille Δx . Le pas de temps Δt est déterminé par l'échelle de vitesse λ selon la relation $\Delta t = \frac{\Delta x}{\lambda}$. Pour le schéma noté D_1Q_3 , nous introduisons $\{c_0 = 0, c_1 = \lambda, c_2 = -\lambda\}$ l'ensemble des trois vitesses. C'est-à-dire que ce schéma contient la vitesse nulle en plus de celles du D_1Q_2 . Nous avons ainsi pour chaque noeud x de \mathcal{L} , et chaque vitesse $c_j, j \in \{0, 1, 2\}$, le point $x + c_j\Delta t$ est également un noeud du réseau \mathcal{L} . Le principe du schéma D_1Q_3 est de calculer le vecteur des fonctions de répartition des particules $\mathbf{f} = (f_0, f_1, f_2)^T$ sur le réseau \mathcal{L} pour des valeurs discrètes du temps. Chaque itération en temps du schéma est constitués de deux étapes : la première étape est la relaxation qui est locale en espace, la seconde est l'étape de transport pour laquelle la méthode exacte des caractéristiques est utilisée. Le cadre proposé par d'Humières s'écrit ici pour ce schéma à trois vitesses : trois moments $\mathbf{m} = (m_0, m_1, m_2)^T$ définis en chaque point du réseau spatial $x \in \mathcal{L}$ et à chaque instant t par

$$m_0 = f_0 + f_1 + f_2, \quad m_1 = \lambda(f_1 - f_2), \quad m_2 = \lambda^2(f_1 + f_2). \quad (2)$$

La matrice des moments \mathbf{M} telle que $\mathbf{m} = \mathbf{M}\mathbf{f}$ s'écrit

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & \lambda & -\lambda \\ 0 & \lambda^2 & \lambda^2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{M}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{\lambda^2} \\ 0 & \frac{1}{2\lambda} & \frac{1}{2\lambda^2} \\ 0 & -\frac{1}{2\lambda} & \frac{1}{2\lambda^2} \end{pmatrix}. \quad (3)$$

Décrivons à présent une étape du schéma. Le point de départ est le vecteur des densités $\mathbf{f}(t, x)$ en $x \in \mathcal{L}$ à l'instant t , on calcule alors le vecteur des moments

$$\mathbf{m}(t, x) = \mathbf{M}\mathbf{f}(t, x). \quad (4)$$

L'étape de relaxation s'écrit alors

$$m_0^*(t, x) = m_0(t, x), \quad (5)$$

$$m_1^*(t, x) = m_1(t, x), \quad (6)$$

$$m_2^*(t, x) = m_2(t, x) + s(m_2^{\text{eq}}(t, x) - m_2(t, x)), \quad (7)$$

où s est l'unique paramètre de relaxation et m_2^{eq} la valeur du moment à l'équilibre qui ne dépendent que de m_0 et de m_1 . Les fonctions de répartition sont alors calculées par la relation

$$\mathbf{f}^*(t, x) = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{m}^*(t, x). \quad (8)$$

L'étape de transport s'écrit finalement

$$f_0(t + \Delta t, x) = f_0^*(t, x), \quad f_1(t + \Delta t, x) = f_1^*(t, x - \Delta x), \quad f_2(t + \Delta t, x) = f_2^*(t, x + \Delta x). \quad (9)$$

Exercice 1 : Consistance du schéma

Dans cette exercice, nous allons fixer les valeurs du paramètre m_2^{eq} afin d'avoir un schéma consistant avec l'équation des ondes à vitesse constante $c \in \mathbb{R}$. Comme l'équation visée est linéaire, nous cherchons un équilibre $m_2^{\text{eq}} = \alpha_0 m_0 + \alpha_1 m_1$, où $\alpha_0, \alpha_1 \in \mathbb{R}$. L'objectif est de fixer ces deux paramètres.

Q1. [Ecriture matricielle du schéma] Montrez que le schéma peut s'écrire sous une forme matricielle

$$\mathbf{m}(t + \Delta t) = \mathbf{A}\mathbf{m}(t) + \mathbf{B}\mathbf{m}^{\text{eq}}(t),$$

où les matrices \mathbf{A} et \mathbf{B} sont des matrices de taille 3×3 à coefficients dans l'anneau commutatif $\mathcal{D}_{\Delta x}^1$. Vous donnerez l'expression des matrices \mathbf{A} et \mathbf{B} .

Q2. [Méthode] Expliquez pourquoi la forme matricielle obtenue à la question précédente ne permet pas directement d'obtenir la consistance du schéma. Expliquez ensuite quel est le procédé qui permet d'obtenir un schéma uniquement sur les premiers moments m_0 et m_1 mais entre plusieurs instants différents.

Le schéma peut se récrire de manière équivalente uniquement sur les deux premiers moments conservés sous la forme suivante (on ne vous demande pas de le démontrer!) :

$$m_0(t + \Delta t) = (1 + (2 - s)\iota + s\frac{\alpha_0}{\lambda^2}(\iota - 1))m_0(t) + s\frac{\alpha_1}{\lambda^2}(\iota - 1)m_1(t) + (\frac{\alpha_0}{\lambda^2}s(\iota - 1) + s(\iota + 1) - 2\iota - 1)m_0(t - \Delta t) + (\iota - 1)s\frac{\alpha_1}{\lambda^2}m_1(t - \Delta t) + (1 - s)m_0(t - 2\Delta t), \quad (10)$$

$$m_1(t + \Delta t) = (\frac{\alpha_1}{\lambda}s\delta + (2 - s)\iota)m_1(t) + \frac{\alpha_0}{\lambda}s\delta m_0(t) - (1 - s)m_1(t - \Delta t). \quad (11)$$

Q3. [Nombre de pas du schéma] Proposez une explication sur le nombre de pas des deux équations définissant le schéma. En particulier, remarquez que l'équation (10) fait intervenir trois pas tandis que l'équation (11) seulement deux. Pouvez-vous faire le lien avec la remarque suivante : en notant $P(X) = X^2 + (2 - s)\iota X + 1 - s$, nous avons

$$P(A) = \begin{pmatrix} (s - 2)(\iota - 1) & s\delta & 2(1 - s)(\iota - 1) \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}?$$

Q4. [Consistance du schéma sur m_0] Faites une analyse de consistance du schéma (10) en utilisant une formule de Taylor. Montrez, en supposant $s \neq 0$, que le choix $\alpha_0 = c^2$ et $\alpha_1 = 0$ conduit aux équations équivalentes suivantes

$$\partial_{tt}m_0 - c^2\partial_{xx}m_0 = \mathcal{O}(\Delta t).$$

Q5. [Consistance du schéma sur m_1] Faites une analyse de consistance du schéma (11) et calculez l'EDP équivalente correspondante. Le moment m_1 vérifie-t-il également une équation de type onde? Détaillez votre réponse en particulier selon le choix de la donnée initiale $m_0(t = 0)$ et $m_1(t = 0)$.

Exercice 2 : Stabilité du schéma

Dans cette exercice, nous nous intéressons à la stabilité du schéma. Dans un premier temps, nous cherchons à savoir si les fonctions de répartitions f_0 , f_1 et f_2 vérifient un principe du maximum.

Q1. [*Principe du maximum*] Nous nous plaçons dans cette question sous l'hypothèse $\alpha_0 = c^2$, $\alpha_1 = 0$. Déterminez la matrice qui effectue l'opération de relaxation sur les fonctions de répartition $\mathbf{R}^f = \mathbf{M}^{-1}(\mathbf{I} - \mathbf{S} + \mathbf{S}\mathbf{E})\mathbf{M}$ où

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s \end{pmatrix}, \quad \mathbf{E} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \alpha_0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Est-il possible de choisir les paramètres λ et s pour que tous les coefficients de la matrice \mathbf{R}^f soient positifs ou nuls? Qu'en concluez-vous pour le principe du maximum de ce schéma?

Nous nous intéressons à présent à l'analyse de stabilité au sens de von Neumann. Nous effectuons pour cela une analyse de von Neumann.

Q2. [*Matrice d'amplification*] Construisez la matrice d'amplification du schéma en conservant des valeurs quelconques pour les paramètres α_0 et α_1 , pour $\xi \in [-\pi/\Delta x, \pi/\Delta x]$.

Q3. [*Polynôme caractéristique*] Dans le cas $s = 1$, $\alpha_0 = c^2$ et $\alpha_1 = 0$, calculez le polynôme caractéristique de la matrice d'amplification. Déduisez-en la condition sur λ (le seul paramètre libre qu'il reste) pour que le schéma soit stable au sens de von Neumann.