REPRÉSENTATIONS LOCALEMENT ANALYTIQUES DE $\mathrm{GL}_3(\mathbb{Q}_p)$

par

Benjamin Schraen

Résumé. — Nous construisons un complexe de représentations localement analytiques de $\mathrm{GL}_3(\mathbb{Q}_p)$, associé à certaines représentations semi-stables de dimension 3 du groupe de Galois absolu de $\mathbb{Q}_p$. Nous montrons ensuite que l'on peut retrouver le (φ, N)-module filtré de la représentation galoisienne en considérant les morphismes, dans la catégorie dérivée des $D(\mathrm{GL}_3(\mathbb{Q}_p))$-modules, de ce complexe dans le complexe de de Rham de l'espace de Drinfel'd de dimension 2. La preuve requiert le calcul de certains espaces de cohomologie localement analytiques de sous-groupes unipotents à coefficients dans des séries principales localement analytiques.

***Abstract* (Locally analytic representations of $\mathrm{GL}_3(\mathbb{Q}_p)$).** — We construct a complex of locally analytic representations of $\mathrm{GL}_3(\mathbb{Q}_p)$, which is associated to some semi-stable 3-dimensional representations of the absolute Galois group of $\mathbb{Q}_p$. Then we show that we can retrieve the (φ, N)-filtered module of the Galois representation in the space of morphisms, in the derived category of $D(\mathrm{GL}_3(\mathbb{Q}_p))$-modules, of this complex in the de Rham-complex of the 2-dimensional Drinfel'd's space. For the proof, we compute some spaces of locally analytic cohomology of unipotent subgroups with coefficients in some locally analytic principal series.

1. Introduction

Soient p un nombre premier et K une extension finie de $\mathbb{Q}_p$. Si k est un entier plus grand que 2, les K-représentations du groupe $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p)$ semi-stables non cristallines de dimension 2, à poids de Hodge-Tate $(0, k-1)$, apparaissent en famille $(V(k, \mathcal{L}))$ dépendant d'un paramètre $\mathcal{L} \in K$. En appliquant le foncteur D_{st}^* de Fontaine à ces représentations, on obtient une famille de (φ, N)-modules filtrés dont les (φ, N)-modules sous-jacents sont tous isomorphes. Le paramètre $\mathcal{L}$ détermine donc la filtration de Hodge de ces modules. Cette situation est particulièrement intéressante pour étudier la correspondance de Langlands p-adique. En effet, la représentation unitaire continue de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ associée à une représentation semi-stable est un complété d'une représentation localement algébrique de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$, laquelle ne dépend que du (φ, N)-module sous-jacent ainsi que des poids de Hodge-Tate ([**7**], [**8**], [**15**]). Dans le cas présent, la représentation localement algébrique est $\mathrm{Sym}^{k-2}(K^2) \otimes \mathrm{St}_2 \otimes |\det|^{\frac{k-2}{2}}$. Dans [**7**], Christophe Breuil construit une famille $(\Sigma(k, \mathcal{L}))$ de représentations localement analytiques de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$, de telle sorte que $\Sigma(k, \mathcal{L}) \simeq \Sigma(k, \mathcal{L}')$ implique $\mathcal{L} = \mathcal{L}'$. La représentation $\Sigma(k, \mathcal{L})$ est construite comme une extension de la représentation localement algébrique $\mathrm{Sym}^{k-2}(K^2) \otimes |\det|^{\frac{k-2}{2}}$ par la représentation $\Sigma(k)$, cette dernière est un analogue localement analytique de la représentation Steinberg. Le paramètre $\mathcal{L}$ définit alors la classe d'isomorphisme d'une telle extension. Il a ensuite été prouvé par Christophe Breuil et Ariane Mézard dans certains cas ([**6**] et [**8**]), puis dans tous les cas par Pierre Colmez ([**15**] et [**14**]), que le complété universel unitaire de $\Sigma(k, \mathcal{L})$ est non nul, admissible, et que sa classe d'isomorphisme dépend effectivement de $\mathcal{L}$.

Dans [**49**], nous montrons comment $\Sigma(k, \mathcal{L})$ permet de réaliser le (φ, N)-module filtré $D_{st}^*(V(k, \mathcal{L}))$ dans la cohomologie de de Rham du demi-plan de Drinfel'd $\mathcal{X}_1 = \mathbb{C}_p \backslash \mathbb{Q}_p$. Notons $R\Gamma_{dR}(k)$ le complexe de de Rham de $\mathcal{X}_1$ tensorisé avec la représentation $\mathrm{Sym}^{k-2}(K^2)' \otimes |\det|^{-\frac{k-2}{2}}$. C'est un complexe de

Mots clefs. — Correspondance de Langlands p-adique, espaces de Drinfel'd, représentations localement analytiques p-adiques.

représentations localement analytiques de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$, de caractère central $a \mapsto (a|a|)^{2-k}$. D'après Schneider et Teitelbaum ([**45**, §3]), une représentation localement analytique est munie d'une structure de $D(\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p))$-module, $D(\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p))$ étant l'algèbre des distributions localement analytiques de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ à valeurs dans K. Soit $\mathcal{D}$ la catégorie dérivée de la catégorie des $D(\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p))$-modules de caractère central $a \mapsto (a|a|)^{2-k}$. On définit des endomorphismes φ et N de $R\Gamma_{dR}(k)$ dans la catégorie $\mathcal{D}$, ainsi qu'une filtration $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$-stable du complexe $R\Gamma_{dR}(k)$. Pour toute représentation localement analytique Σ de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$, ces constructions munissent le K-espace vectoriel $\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(\Sigma'[-1], R\Gamma_{dR}(k))$ d'une structure de (φ, N)-module filtré. On a alors un isomorphisme de (φ, N)-modules filtrés

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(\Sigma(k,\mathcal{L})'[-1], R\Gamma_{dR}(k)) \simeq D^*_{st}(V(k,\mathcal{L})). \tag{1.1}$$

Le but de cet article est d'étudier une situation analogue pour une famille de K-représentations de dimension 3 de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p)$ dépendant d'un triplet $\underline{\mathcal{L}} \in K^3$. Plus précisément, nous utilisons (1.1) comme fil directeur pour construire un complexe de représentations localement analytiques de $\mathrm{GL}_3(\mathbb{Q}_p)$ dépendant du triplet $\underline{\mathcal{L}}$, de telle sorte que le même procédé permette de « réaliser » le (φ, N)-module filtré dans la cohomologie de de Rham de l'espace de Drinfel'd de dimension 2.

1.1. Notations. — Quand nous l'avons pu, nous avons essayé de formuler nos résultats dans le cadre le plus général possible, en vue de généraliser ce travail à d'autres groupes que $\mathrm{GL}_3(\mathbb{Q}_p)$.

Soit $\underline{G}$ un groupe algébrique réductif déployé sur $\mathbb{Q}_p$, $\underline{T}$ un sous-tore déployé maximal et $X(T) = \mathrm{Hom}(\underline{T}, \mathbb{G}_m)$ son groupe des caractères. Soit Φ l'ensemble des racines de $\underline{G}$ relativement à $\underline{T}$, Δ une base de racines simples du système $(X(T), \Phi)$ et Φ^+ le sous-ensemble des racines positives pour Δ. Soit W le groupe de Weyl du système $(X(T), \Phi)$. Si $w \in W$, on fixe $w \in \underline{G}(\mathbb{Q}_p)$ un relevé de w. On note $\underline{B}^+$ le sous-groupe de Borel associé à Δ et $\underline{B}$ le sous-groupe de Borel opposé. Pour $\alpha \in \Delta$, $s_\alpha \in W$ désigne la réflexion simple associée à α et si S est un sous-ensemble de Δ, on note $\underline{P}_S^+$ le sous-groupe parabolique contenant $\underline{B}^+$ et engendré par les éléments s_α pour $\alpha \in S$, ainsi que $\underline{P}_S$ le parabolique opposé. Le radical unipotent de $\underline{P}_S$ est noté N_S, celui de $\underline{P}_S^+$, N_S^+, et $N = N_\Delta$, $N^+ = N_\Delta^+$.

On note également $\underline{L}_S$ l'unique sous-groupe de Lévi de $\underline{P}_S$ (ou de $\underline{P}_S^+$) contenant $\underline{T}$. Pour tout sous-groupe $\underline{H} \subset \underline{G}$, on note $\overline{\underline{H}}$ le quotient de $\underline{H}$ par le centre de $\underline{G}$. Le symbole w_0 désigne l'unique élément de longueur maximale dans W.

On note X_S^+ l'ensemble des poids $\lambda \in X(T)$ tels que $\langle \lambda, \alpha \rangle \in \mathbb{N}$ pour tout $\alpha \in S$. Pour un tel λ, il existe une unique représentation algébrique irréductible de dimension finie de $\underline{L}_S$ et de plus haut poids λ que l'on note $F_{\lambda,S}$. On note $X^+ = X_\Delta^+$, $F_\lambda = F_{\lambda,S}$, c'est alors une représentation de $\underline{G}$.

Soit $\delta = \frac{1}{2}\sum_{\alpha\in\Phi^+} \alpha$. On définit l'action tordue de W sur $X \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$ par $w \cdot \lambda = w(\lambda + \delta) - \delta$. Nous utiliserons également l'action $w * \lambda = w(\lambda - \delta) + \delta = -w \cdot (-\lambda)$. Il s'agit de l'action tordue obtenue en choisissant $-\Delta$ comme base de racines positives.

Si $\mathfrak{g}$ est l'algèbre de Lie de G, $\mathfrak{p}$ une sous-algèbre parabolique de $\mathfrak{g}$ et ρ une K-représentation de dimension finie de $\mathfrak{p}$, on note $\mathfrak{m}_{\mathfrak{p}}(\rho) = U(\mathfrak{g}) \otimes_{U(\mathfrak{p})} \rho$. C'est un $U(\mathfrak{g})$-module appelé module de Verma généralisé. Si $\mathfrak{b}$ est l'algèbre de Lie de B, on note $\mathfrak{m}(\rho) = \mathfrak{m}_{\mathfrak{b}}(\rho)$, c'est un module de Verma.

Dans le cas particulier qui nous intéresse, $\underline{G}$ est le plus souvent $\mathrm{GL}_{3,\mathbb{Q}_p}$. Dans ce cas on choisit pour $\underline{T}$ le sous-groupe des matrices diagonales et $\Delta = \{\alpha_1, \alpha_2\}$ où $\alpha_1 = \epsilon_0\epsilon_1^{-1}$ et $\alpha_2 = \epsilon_1\epsilon_2^{-1}$, ϵ_i étant le caractère du tore

$$\begin{pmatrix} t_0 & 0 & 0 \\ 0 & t_1 & 0 \\ 0 & 0 & t_2 \end{pmatrix} \mapsto t_i. \tag{1.2}$$

On abrégera sinsi $P_i = P_{\{\alpha_i\}}$, $s_i = s_{\alpha_i}$, $\mathfrak{m}_i(\rho) = \mathfrak{m}_{P_i}(\rho)$, $F_{\lambda,i} = F_{\lambda,\{\alpha_i\}}$, $N_i = N_{\alpha_i}$.

Si $\underline{H}$ est un groupe algébrique défini sur $\mathbb{Q}_p$, on note $H = \underline{H}(\mathbb{Q}_p)$ son groupe des $\mathbb{Q}_p$-points, c'est toujours un groupe de Lie $\mathbb{Q}_p$-analytique. On fixe alors G_0 un sous-groupe compact maximal spécial de G et pour tout sous-groupe fermé H de G, on pose $H_0 = H \cap G_0$.

Pour V un espace vectoriel muni d'une topologie localement convexe séparée, on note $C^{an}(H, V)$ l'espace des fonctions localement analytiques sur H à valeurs dans V défini dans [**45**, §2]. Une représentation localement analytique de H est la donnée d'une action de H sur un espace vectoriel localement convexe séparé Σ par des endomorphismes continus et telle que les applications orbites $g \mapsto g \cdot v$ appartiennent à $C^{an}(G, \Sigma)$. Une représentation localement algébrique est une représentation localement analytique dont l'espace sous-jacent est muni de la topologie localement convexe la plus fine ([**47**, §6]) et dont les applications orbites sont localement algébriques. Une représentation lisse est une représentation localement algébrique dont les applications orbites sont localement constantes.

La représentation de Steinberg lisse du groupe $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Q}_p)$ est notée St_n.

Si V est un espace vectoriel localement convexe, on note V' son dual topologique muni de la topologie forte ([**42**, §9]). On note $D(H) = C^{an}(H,K)'$, c'est l'algèbre des distributions de H ([**45**, §2]). On note également $C_c^{an}(H,K)$ l'espace des fonctions localement analytiques à support compact et $\mathcal{D}_c(H)$ son dual fort ([**48**, §2]). On désigne par $\mathcal{M}(H)$ la catégorie des $D(H)$-modules. Si (ρ,Σ) est une représentation localement analytique, pour $\mu \in D(H)$, $f \in \Sigma'$ et $v \in \Sigma$, on pose

$$(\mu \cdot f)(v) = \mu(h \mapsto f(\rho(h)\cdot v)). \tag{1.3}$$

Ceci munit Σ' d'une structure de $D(H)$-module. Si $\lambda \in X(T)$, sa restriction au centre Z de H est un caractère de Z, et donne lieu à un caractère de l'algèbre $D(Z)$. En général, si χ est un caractère de Z, on note $\mathcal{M}(H)_\chi$ la catégorie des $D(H)$-modules sur lesquels l'algèbre $D(Z)$ agit via le caractère χ^{-1}, et $D^b(\mathcal{M}(H)_\chi)$ sa catégorie dérivée bornée.

On note $C_1^\omega(H,K)$ l'espace des germes de fonctions localement analytiques en 1 défini dans [**45**, §2] et $D(H)_1$ son dual qui est alors une sous-algèbre de $D(H)$. L'action par translation à gauche de H sur $C^{an}(H,K)$ est différentiable, donc induit une action de l'algèbre de Lie $\mathfrak{h}$ sur $C^{an}(H,K)$. De plus, cette action passe au quotient pour donner une action de $\mathfrak{h}$ sur $C_1^\omega(H,K)$. Cette action se prolonge naturellement en une action de l'algèbre enveloppante $U(\mathfrak{h})$. L'accouplement

$$\langle X, f\rangle = (X\cdot f)(1) \tag{1.4}$$

induit une injection de $U(\mathfrak{h})$ dans $D(H)_1$ et donc dans $D(H)$. Si $h \in H$ on note δ_h l'élément de $D(H)$ défini par $\delta_h(f) = f(h)$. Ainsi l'application $\sum a_h h \mapsto \sum a_h \delta_h$ est une injection de l'algèbre de groupe $K[H]$ dans $D(H)$. D'après [**33**, lemme 1.1.1], l'image de cette injection est dense dans $D(H)$.

Si H est un groupe de Lie $\mathbb{Q}_p$-analytique compact, $D(H)$ est un espace de Fréchet nucléaire ([**42**, §19]). Un espace de Fréchet nucléaire est un espace réflexif, autrement dit, l'application $V \to (V')'$ est un isomorphisme topologique. De plus, le foncteur $V \mapsto V'$ induit une équivalence entre la catégorie des espaces de Fréchet nucléaires et la catégorie des espaces de type compact ([**45**, §1]).

Si V et W sont deux K-espaces vectoriels localement convexes, on note $V\otimes_{K,\iota}W$ leur produit tensoriel muni de la topologie inductive ([**42**, §17]), et $V\hat{\otimes}_{K,\iota}W$ le complété de ce produit tensoriel pour cette topologie. Si V et W sont en plus munis d'une structure de $D(H)$-module, on note $V\tilde{\otimes}_{D(H),\iota}W$ le quotient de $V\hat{\otimes}_{K,\iota}W$ par le sous-K-espace vectoriel image de l'application $V\hat{\otimes}_{K,\iota}D(H)\hat{\otimes}_{K,\iota}W \to V\hat{\otimes}_{K,\iota}W$ définie par $v\otimes\mu\otimes w \mapsto v\mu\otimes w - v\otimes \mu w$ pour $(v,\mu,w) \in V\times D(H)\times W$, on le munit de la topologie quotient. On note $V\hat{\otimes}_{D(H),\iota}W$ le quotient de $V\tilde{\otimes}_{D(H),\iota}W$ par l'adhérence de $\{0\}$. De même on désigne par $\hat{\otimes}_{K,\pi}$ le produit tensoriel muni de la topologie projective ([**42**, §17]), et on définit de même $\hat{\otimes}_{K,\pi}$. Lorsque V et W sont des espaces de Fréchet, on oublie le ι dans le produit tensoriel car, dans ce cas, toutes les topologies produit tensoriel sont les mêmes ([**42**, proposition 17.6]). De plus, on note $\mathcal{L}(V,W)$ l'espace des application linéaires continues de V dans W muni de la topologie forte ([**42**, §6]). Si V et W sont munis d'actions continues d'un groupe topologique H, on note $\mathcal{L}_H(V,W)$ le sous-espace des applications linéaires continues commutant à l'action de H, on le munit de la topologie de sous-espace.

Dans l'algèbre de Lie $\mathfrak{sl}_n$, nous numérotons les lignes et les colonnes de 0 à $n-1$ et notons $u_{i,j}$ la matrice élémentaire ayant un 1 dans la case (i,j) et 0 ailleurs, elle engendre un sous-espace de poids $\epsilon_i - \epsilon_j$ pour l'action adjointe du sous-tore des matrices diagonales.

Si f est une fonction sur un espace X et $x \in X$, on note ev_x l'application d'évaluation en x.

Si $C^\cdot$ est un complexe, $C^\cdot_{\geq i}$ désignera la troncation bête

$$[0 \to \cdots \to 0 \to C^i \to C^{i+1} \to \cdots]. \tag{1.5}$$

Si ρ est une représentation d'un groupe H et $h \in H$, on désigne par ρ^h la représentation $\rho(h^{-1}\cdot h)$.

On utilise toujours des notations « gothiques » pour désigner les algèbres de Lie. Les lettres $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{n}$, $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{h}$ désignent donc les algèbres de Lie des groupes notés G, N, P, H.

1.2. Énoncé des résultats. —

1.2.1. Le côté galoisien. — Soit K une extension finie de $\mathbb{Q}_p$ contenant une racine de l'équation $X^3 - p$ et fixons pour le reste de l'article une telle racine $p^{1/3} \in K$. Fixons égalements un triplet d'entiers $\underline{h} = (h_0,h_1,h_2)$ tel que $h_2 > h_1 > h_0$ et $\underline{\mathcal{L}} = (\mathcal{L},\mathcal{L}',\mathcal{L}'') \in K^3$. Soit $D(\underline{h},\underline{\mathcal{L}})$ le (φ,N)-module filtré défini de la façon suivante.

$$D(\underline{h},\underline{\mathcal{L}}) = Ke_0 \oplus Ke_1 \oplus Ke_2, \begin{cases} \varphi(e_0) = p^{\frac{h_0+h_1+h_2}{3}-1}e_0, \\ \varphi(e_1) = p^{\frac{h_0+h_1+h_2}{3}}e_1, \\ \varphi(e_2) = p^{\frac{h_0+h_1+h_2}{3}+1}e_2, \end{cases} \begin{cases} N(e_0) = 0, \\ N(e_1) = e_0, \\ N(e_2) = e_1, \end{cases} \tag{1.6}$$

$$\mathrm{Fil}^i(D(\underline{h},\underline{\mathcal{L}})) = \begin{cases} D(\underline{h},\underline{\mathcal{L}}) & \text{si } i \leq h_0, \\ K(e_2 + \mathcal{L}'e_1 + \mathcal{L}''e_0) \oplus K(e_1 + \mathcal{L}e_0) & \text{si } h_0 + 1 \leq i \leq h_1, \\ K(e_2 + \mathcal{L}'e_1 + \mathcal{L}''e_0) & \text{si } h_1 + 1 \leq i \leq h_2, \\ 0 & \text{si } i \geq h_2 + 1. \end{cases} \tag{1.7}$$

Ce (φ, N)-module filtré est faiblement admissible au sens de [**21**, 4.4.3], il existe donc, d'après le théorème de Colmez-Fontaine ([**16**]), une K-représentation $V(\underline{h},\underline{\mathcal{L}})$ de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p)$, semi-stable, de dimension 3, telle que $D^*_{st}(V(\underline{h},\underline{\mathcal{L}})) \simeq D(\underline{h},\underline{\mathcal{L}})$. Les poids de Hodge-Tate de $V(\underline{h},\underline{\mathcal{L}})$ sont alors (h_0, h_1, h_2). Remarquons que $V(\underline{h},\underline{\mathcal{L}}) \simeq V(\underline{h}',\underline{\mathcal{L}}')$ implique $\underline{h} = \underline{h}'$ et $\underline{\mathcal{L}} = \underline{\mathcal{L}}'$. Notons λ le poids dominant (h_2-2, h_1-1, h_0), la représentation localement algébrique associée par Christophe Breuil et Peter Schneider à $V(\underline{h},\underline{\mathcal{L}})$ dans [**9**, §4] est alors

$$F_\lambda \otimes \mathrm{St}_3 \otimes |\det|^{\frac{h_2+h_1+h_0}{3}-1}. \tag{1.8}$$

Remarque 1.1. — À la différence du cas de la dimension 2, les représentations ci-dessus ne donnent pas toutes les représentations semi-stables de dimension 3 ayant un opérateur de monodromie de rang 2. C'est le cas uniquement si $2h_1 - 2 \leq h_2 \leq 2h_1 + 2$. En général on peut trouver des représentations de dimension 3 de poids de Hodge-Tate (h_0, h_1, h_2) et telles que $N^2 \neq 0$ qui ne sont pas de la forme précédente. Ces représentations n'entrent pas dans le cadre de cet article. Cependant, ces représentations exceptionnelles sont exactement celles pour lesquelles la filtration de Hodge et la filtration de monodromie ne sont pas transverses. Ainsi, si la conjecture de Schneider ([**41**],§3) sur la transversalité des filtrations de Hodge et de monodromie est vraie, alors ces représentations exceptionnelles n'apparaissent pas dans la cohomologie des variétés uniformisées par l'espace de Drinfel'd. Ceci expliquerait alors pourquoi elles échappent à nos techniques.

1.2.2. Le côté localement analytique. — Comme dans le cas de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$, commençons par définir un analogue localement analytique de la représentation de Steinberg dépendant du poids λ :

$$\Sigma(\lambda) = \mathrm{Ind}_B^G(\lambda)/(\mathrm{Ind}_{P_1}^G(\lambda) + \mathrm{Ind}_{P_2}^G(\lambda)), \tag{1.9}$$

où les représentations $\mathrm{Ind}_{P_i}^G(\lambda)$ sont des induites localement analytiques qui seront définies dans la section 2.4. Il s'agit d'une représentation localement analytique fortement admissible dont le sous-espace des vecteurs localement algébriques est isomorphe à $F_\lambda \otimes \mathrm{St}_3$. Comme la cohomologie de de Rham de l'espace de Drinfel'd fait également intervenir la représentation de Steinberg généralisée $v_{P_1} = \mathrm{Ind}_{P_1}^G(1)^\infty/1$, nous introduisons son équivalent localement analytique

$$v_{P_1}^{an}(\lambda) = \mathrm{Ind}_{P_1}^G(\lambda)/F_\lambda. \tag{1.10}$$

Même si la représentation v_{P_2} n'apparaît pas dans la cohomologie de l'espace de Drinfel'd, les travaux de Jean-François Dat ([**17**]) montrent que cette représentation est présente, en un certain sens, dans le complexe de de Rham. C'est pourquoi nous utilisons également la représentation $v_{P_2}^{an}(\lambda)$. Nous définissons alors, de façon analogue au cas $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$, une extension

$$0 \to \Sigma(\lambda) \to \Sigma(\lambda, \mathcal{L}, \mathcal{L}') \to v_{P_1}^{an}(\lambda) \oplus v_{P_2}^{an}(\lambda) \to 0 \tag{1.11}$$

dépendant des deux paramètres $\mathcal{L}$ et $\mathcal{L}'$, c'est-à-dire

$$\Sigma(\lambda, \mathcal{L}_1, \mathcal{L}_1') \simeq \Sigma(\lambda, \mathcal{L}_2, \mathcal{L}_2') \Rightarrow (\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_1') = (\mathcal{L}_2, \mathcal{L}_2'). \tag{1.12}$$

Les espoirs consistant à placer le dernier paramètre $\mathcal{L}''$ dans une extension

$$0 \to \Sigma(\lambda, \mathcal{L}, \mathcal{L}') \to ? \to F_\lambda \to 0 \tag{1.13}$$

se trouvent réduits à néant après le calcul donnant $\dim_K \mathrm{Ext}^1_{G,\lambda}(F_\lambda, \Sigma(\lambda, \mathcal{L}, \mathcal{L}')) = 1$. La première surprise vient alors de l'égalité $\dim_K \mathrm{Ext}^2_{G,\lambda}(F_\lambda, \Sigma(\lambda, \mathcal{L}, \mathcal{L}')) = 2$. La théorie cohomologique des représentations localement analytiques de Jan Kohlhaase nous permet de voir cet espaces comme un groupe d'extensions dans la catégorie dérivée d'une catégorie exacte, l'interprétation de Yonéda de ces extensions ([**52**]) permet alors de construire un complexe $\Sigma(\lambda, \underline{\mathcal{L}})$ de représentations localement analytiques s'insérant dans un triangle distingué

$$\Sigma(\lambda, \mathcal{L}, \mathcal{L}') \to \Sigma(\lambda, \underline{\mathcal{L}}) \to F_\lambda[-1] \to \tag{1.14}$$

et dont la classe d'isomorphisme, dans la catégorie dérivée citée plus haut, dépend du paramètre $\mathcal{L}''$. Nous avons construit une famille de complexes de représentations non isomorphes entre eux, il reste à définir le paramétrage exact de ces complexes en fonction de $\mathcal{L}''$. Nous proposons dans le paragraphe 5.3, une paramétrisation faisant intervenir le dilogarithme p-adique défini par Coleman dans [**13**]. Plus précisément, on montre qu'il existe une application linéaire naturelle

$$\kappa : H^2(\overline{T}, 1) \simeq \bigwedge^2 \mathrm{Hom}(\overline{T}, K) \to \mathrm{Ext}^2_{G,\lambda}(F_\lambda, \Sigma(\lambda)) \tag{1.15}$$

dont l'image est de dimension 4. Les éléments de $\mathrm{Hom}(\overline{T}, K)$ sont construits à partir du logarithme p-adique et de la valuation. Le dilogarithme p-adique nous permet alors de construire un élément de $\mathrm{Ext}^2_{G,\lambda}(F_\lambda, \Sigma(\lambda))$ n'appartenant pas à l'image de κ. En utilisant cet élément, nous définissons une paramétrisation $\underline{\mathcal{L}} \mapsto \Sigma(\lambda, \underline{\mathcal{L}})$. Si Q est un polynôme de degré 2,nous notons $\Sigma(\lambda, \underline{\mathcal{L}})_Q = \Sigma(\lambda, (\mathcal{L}, \mathcal{L}', \mathcal{L}'' - Q(\mathcal{L}, \mathcal{L}')))$.

1.2.3. Le côté espace de Drinfel'd. — Soit $\mathcal{X}_2 = \mathbb{P}^2(\mathbb{C}_p) \backslash \bigcup_{H \in \mathcal{H}_{\mathbb{Q}_p}} H(\mathbb{C}_p)$ l'espace de Drinfel'd de dimension 2, $\mathcal{H}_{\mathbb{Q}_p}$ désignant l'ensemble des hyperplans $\mathbb{Q}_p$-rationnels de $\mathbb{P}^2_{\mathbb{Q}_p}$. Il s'agit d'un espace analytique rigide de dimension 2 muni d'une action du groupe $G = \mathrm{GL}_3(\mathbb{Q}_p)$. Cet espace étant quasi-Stein, son complexe de de Rham est le complexe des sections globales

$$R\Gamma_{dR}(\mathcal{X}_2) = [\mathcal{O}(\mathcal{X}_2) \to \Omega^1(\mathcal{X}_2) \to \Omega^2(\mathcal{X}_2)]. \tag{1.16}$$

On définit alors le complexe tordu comme étant

$$R\Gamma_{dR}(\lambda) = R\Gamma_{dR}(\mathcal{X}_2) \otimes_K F'_\lambda, \tag{1.17}$$

c'est un complexe de $D(G)$-modules ([**46**, proposition 2.1]). Si Σ est un complexe de représentations localement analytiques, on note Σ' le complexe de $D(G)$-modules obtenu par passage terme à terme au dual fort. Il est alors naturel, par prolongement du cas de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$, de considérer l'espace

$$\mathrm{Hom}_{D^b(\mathcal{M}(G)_\lambda)}(\Sigma(\lambda, \underline{\mathcal{L}})'[-1], R\Gamma_{dR}(\lambda)). \tag{1.18}$$

La deuxième (bonne) surprise est que cet espace est de dimension 3 et peut être muni d'une structure de (φ, N)-module filtré redonnant $D(\underline{h}, \underline{\mathcal{L}})$. Pour énoncer un résultat précis, nous avons besoin de détailler un peu la construction de φ et N, la filtration étant déduite de la filtration de Schneider ([**23**, (14)]) sur $R\Gamma_{dR}(\lambda)$.

La définition de φ et N est un peu plus problématique. L'idée est de construire des endomorphismes de $R\Gamma_{dR}(\lambda)$ dans la catégorie dérivée des $D(G)$-modules. Il semble naturel d'utiliser l'isomorphisme de « Hyodo-Kato » construit par Elmar Große-Klönne dans [**24**] : $R\Gamma_{dR}(\mathcal{X}_2) \simeq R\Gamma_{rig}(\mathcal{X}_2)$. Le complexe $R\Gamma_{rig}(\mathcal{X}_2)$ porte alors des endomorphismes de Frobenius et de monodromie qui sont les bienvenus. Cependant ces endomorphismes ne sont pas des morphismes dans la catégorie dérivée des représentations de G, mais plutôt des morphismes dans la catégorie dérivée des espaces vectoriels commutant à l'action du groupe G. L'auteur ne voit donc pas comment les remonter en des morphismes de la première catégorie, même s'il est certainement possible de le faire. La solution de rechange consiste à remarquer que l'annulation de groupes d'extensions entre les espaces de cohomologie de $\mathcal{X}_2$ implique que le complexe de de Rham est scindé dans la catégorie dérivée des $D(G)$-modules. Pour cela, on utilise les calculs d'extensions entre représentations lisses de Dat et Orlik ([**17**, théorème 1.3] et [**38**, théorème 1]). En fait, ces mêmes calculs déterminent l'algèbre des endomorphismes de $R\Gamma_{dR}(\lambda)$ dans la catégorie $D^b(\mathcal{M}(G)_\lambda)$, ce qui nous permet de définir directement des opérateurs N et φ. Plus exactement, nous définissons l'opérateur de Frobenius sur le complexe scindé comme étant le Frobenius calculé par Elmar Große-Klönne dans [**24**, théorème 6.3]. La conjecture de monodromie-poids, désormais un théorème ([**17**], [**50**], [**28**]), exige que N soit tel que $N^2 \neq 0$ et $N\varphi = p\varphi N$, ce qui donne une idée très précise de ce que doit être N. Ainsi, à chaque scindage du complexe de de Rham correspond une définition de φ et de N. Pour des raisons techniques, nous ne choisirons pas un scindage mais un isomorphisme quelconque, c'est-à-dire n'induisant pas nécessairement l'identité en cohomologie. Une fois tout ceci défini, on fixe donc un tel isomorphisme

$$R\Gamma_{dR}(\lambda) \xrightarrow{s} \bigoplus_i H^i_{dR}(\lambda)[-i] \tag{1.19}$$

et on pose

$$D_{s,\lambda}(\Sigma(\lambda,\underline{\mathcal{L}})'[-1]) = \mathrm{Hom}_{D^b(\mathcal{M}(G)_\lambda)}(\Sigma(\lambda,\underline{\mathcal{L}})'[-1], R\Gamma_{dR}(\lambda)) \tag{1.20}$$

que l'on munit d'endomorphismes φ et N donnés par $\varphi(f) = \varphi \circ f$ et $N(f) = N \circ f$, ainsi que d'une filtration

$$\mathrm{Fil}^i(D_{s,\lambda}(\Sigma(\lambda,\underline{\mathcal{L}}))'[-1]) = \\ \mathrm{Im}(\mathrm{Hom}_{D^b(\mathcal{M}(G)_\lambda)}(\Sigma(\lambda,\underline{\mathcal{L}})'[-1], Fil^i(R\Gamma_{dR}(\lambda))) \to D_{s,\lambda}(\Sigma(\lambda,\underline{\mathcal{L}}))'[-1]). \tag{1.21}$$

Théorème 1.2. — *Il existe un choix de Q et un isomorphisme s tels que pour tout $\underline{\mathcal{L}} \in K^3$, les (φ, N)-modules filtrés suivants sont isomorphes*

$$D_{s,\lambda}(\Sigma(\lambda,\underline{\mathcal{L}})'_Q[-1]) \simeq D(\underline{h},\underline{\mathcal{L}}). \tag{1.22}$$

Remarque 1.3. — La preuve de ce résultat est essentiellement de la théorie des représentations. Il reste bien entendu à prouver un résultat géométrique consistant à déterminer l'isomorphisme s. La première étape devrait être de reprendre ou modifier la construction du complexe de cohomologie rigide $R\Gamma_{rig}(\mathcal{X}_2)$ pour obtenir un objet de la catégorie dérivée des $D(G)$-modules muni d'endomorphismes φ et N. Alors l'action de l'endomorphisme φ agissant sur la cohomologie ainsi qu'un résultat de Dat ([**17**, corollaire A.1.3]) impliquent qu'il existe un unique scindage

$$R\Gamma_{dR}(\mathcal{X}_2) \simeq \bigoplus_i H^i_{dR}(\mathcal{X}_2)[-i] \tag{1.23}$$

commutant au Frobenius. Il est naturel d'espérer que l'isomorphisme du théorème soit justement ce scindage. C'est en tous cas ce que suggère le théorème de Robert Coleman et Adrian Iovita [**12**] pour $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$. Il est alors probable qu'il faille modifier notre construction de N par un élément diagonal dans ce scindage, ce qui ne pose aucun problème.

Remarque 1.4. — La remarque qui suit n'est qu'une spéculation, mais ouvre peut-être la voie à une connexion avec le travail de Christophe Breuil et Peter Schneider ([**9**]), cette idée a émergé suite à des discussions avec Christophe Breuil et Alain Genestier. D'après la conjecture 4.3 de [**9**], la représentation localement algébrique $F_\lambda \otimes \mathrm{St}_3 \otimes |\det|^{\frac{h_2+h_1+h_0}{3}-1}$ devrait être munie d'une norme invariante. Dans l'esprit de la correspondance pour $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ ([**7**], [**15**]), si cette conjecture est vraie, on pourrait s'attendre à ce qu'il existe une famille de normes $||\cdot||_{\underline{\mathcal{L}}}$ indexée par les triplets $\underline{\mathcal{L}}$ dont les complétés seraient des représentations unitaires admissibles $B(\lambda,\underline{\mathcal{L}})$ de $\mathrm{GL}_3(\mathbb{Q}_p)$ de telle sorte que $B(\lambda,\underline{\mathcal{L}}) \simeq B(\lambda,\underline{\mathcal{L}}')$ implique $\underline{\mathcal{L}} = \underline{\mathcal{L}}'$, il est par ailleurs possible que la situation soit plus complexe encore. Voici comment notre complexe $\Sigma(\lambda,\underline{\mathcal{L}})$ pourrait apparaître dans ce cadre. Notons, s'il existe, $B(\lambda,\mathcal{L},\mathcal{L}')$ le complété unitaire universel de $\Sigma(\lambda,\mathcal{L},\mathcal{L}')$ ([**19**, Definition 1.1]). L'espace $B(\lambda,\underline{\mathcal{L}})$ pourrait alors être obtenu comme le complété de $\Sigma(\lambda,\mathcal{L},\mathcal{L}')$ pour une certaine norme admissible $||\cdot||_{\mathcal{L}''}$ dépendant du paramètre $\mathcal{L}''$. Ainsi $B(\lambda,\underline{\mathcal{L}})$ apparaîtrait comme un quotient de $B(\lambda,\mathcal{L},\mathcal{L}')$. Si une telle situation se produit, la représentation $B(\lambda,\mathcal{L},\mathcal{L}')$ n'est pas admissible, excepté si $\lambda = 0$. Or le foncteur $V \mapsto V_{an}$ de Peter Schneider et Jeremy teitelbaum ([**47**, Theorem 7.1]) n'est exact que sur la catégorie des représentations unitaires admissibles. Ainsi, il est envisageable qu'en appliquant le foncteur $(\cdot)_{an}$ à la suite exacte

$$0 \to J \to B(\lambda,\mathcal{L},\mathcal{L}') \to B(\lambda,\underline{\mathcal{L}}) \to 0, \tag{1.24}$$

on obtienne une suite exacte

$$0 \to \Sigma(\lambda,\mathcal{L},\mathcal{L}') \to B(\lambda,\underline{\mathcal{L}})_{an} \to R^1(\cdot)_{an}J \to R^1(\cdot)_{an}B(\lambda,\mathcal{L},\mathcal{L}') \to 0 \tag{1.25}$$

où retrouver le complexe $\Sigma(\lambda,\underline{\mathcal{L}})$.

1.3. Plan de l'article. — Dans le chapitre 2 nous décrivons une décomposition des induites paraboliques localement anlytiques pour $\mathrm{GL}_3(\mathbb{Q}_p)$, en particulier nous isolons dans les représentations de Steinberg localement analytiques des représentations que nous retrouverons plus tard dans les espaces de formes différentielles sur l'espace de Drinfel'd. Dans la partie 3, nous précisons le cadre catégorique dans lequel nous travaillons et calculons dans la partie 4 un certain nombre d'extensions entre représentations localement analytiques. En particulier, une bonne partie de ce chapitre est consacrée au calcul d'homologie unipotente, ingrédient essentiel pour déterminer ces espaces d'extensions. Le chapitre 5 applique ces calculs d'extensions à la construction de $\Sigma(\lambda,\underline{\mathcal{L}})$. Enfin le chapitre 6 est consacré au lien avec l'espace de Drinfel'd. On y rappelle un certain nombre de résultats obtenus par Peter Schneider, Jeremy Teitelbaum et Sascha Orlik sur la structure des séries discrètes holomorphes en les précisant légèrement et la partie 6.6 contient la preuve du théorème 1.2. Enfin, un appendice contient la preuve d'un analogue p-adique du théorème de Bloch sur les fonctions mesurables vérifiant l'équation fonctionnelle du dilogarithme, ingrédient du chapitre 5, mais dont la preuve fait appel à des techniques un peu différentes.

1.4. Remerciements. — Je remercie avant tout Christophe Breuil à qui revient l'idée de chercher à généraliser les résultats de [**49**] à $\mathrm{GL}_3(\mathbb{Q}_p)$, et qui a suivi toute l'évolution de ce travail, c'est lui qui m'a le premier suggéré que le dilogarithme p-adique doit intervenir. Je remercie aussi Jan Kohlhaase pour m'avoir communiqué une première version de [**32**] et pour ses remarques très éclairantes sur une partie de ce travail. Ses idées pour calculer la cohomologie unipotente des induites localement analytiques m'ont beaucoup aidé pour donner une démonstration rigoureuse des formules de la section 4.5.5. Enfin je remercie tous ceux qui ont bien voulu porter de l'attention à ce travail, en discussions ou invitations.

2. Séries principales localement analytiques

2.1. Cadre général. — Nous nous plaçons dans le cas général où G est le groupe des $\mathbb{Q}_p$-points d'un groupe algébrique déployé sur $\mathbb{Q}_p$, $P = P_S$ un sous-groupe parabolique contenant B, et $L = L_S$ un sous-groupe de Lévi contenant T. Notons $W_P \subset W$ le groupe de Weyl de L. Rappelons qu'une représentation localement analytique ρ d'un groupe de Lie p-adique H est dite fortement admissible ([**45**, §3]) si l'espace vectoriel topologique sous-jacent est de type compact et s'il existe un sous-groupe compact ouvert H_0 tel que ρ' soit un $D(H_0)$-module de type fini. Soit (ρ, V) une représentation localement analytique de L. Par inflation, on l'étend en une représentation localement analytique de P. On note $\mathrm{Ind}_P^G(\rho)$ l'induite localement analytique de P à G. Il s'agit de l'espace des fonctions localement analytiques de G dans V vérifiant

$$f(gp) = \rho(p^{-1})f(g) \tag{2.1}$$

pour tout $g \in G$ et $p \in P$. Cet espace est muni de la topologie induite par la topologie de $C^{an}(G, V)$ définie dans [**45**, §2] et de l'action de G par translation à gauche, c'est-à-dire

$$[g \cdot f](x) = f(g^{-1}x). \tag{2.2}$$

L'application $f \mapsto f(1)$ est une application P-équivariante continue de $\mathrm{Ind}_P^G(\rho)|_P$ dans ρ et donne par dualité un morphisme de $D(P)$-modules $\rho' \to (\mathrm{Ind}_P^G(\rho))'$, puis un morphisme de $D(G)$-modules

$$D(G) \otimes_{D(P)} \rho' \to (\mathrm{Ind}_P^G(\rho))'. \tag{2.3}$$

Si ρ est une représentation lisse, on note $\mathrm{Ind}_P^G(\rho)^\infty$ le sous-espace de $\mathrm{Ind}_P^G(\rho)$ constitué des fonctions lisses. C'est alors une sous-représentation lisse de $\mathrm{Ind}_P^G(\rho)$.

Proposition 2.1. — *Si ρ' est une représentation localement analytique fortement admissible de P telle que ρ' soit un $D(P_0)$-module de présentation finie, la représentation $\mathrm{Ind}_P^G(\rho)$ est une représentation localement analytique fortement admissible de G et l'application* (2.3) *est un isomorphisme. C'est en particulier le cas si ρ est localement algébrique irréductible.*

Démonstration. — Rappelons que G_0 désigne un sous-groupe compact ouvert spécial de G et que l'on a $G = G_0P$. Ainsi, on a

$$\mathrm{Ind}_P^G(\rho)|_{G_0} \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ind}_{P_0}^{G_0}(\rho|_{P_0}). \tag{2.4}$$

Comme ρ' est un espace de Fréchet nucléaire, la proposition 5.3 de [**32**] montre que l'on a un isomorphisme

$$D(G_0)\tilde{\otimes}_{D(P_0)}\rho' \xrightarrow{\sim} (\mathrm{Ind}_{P_0}^{G_0}(\rho))'. \tag{2.5}$$

On a donc une suite exacte stricte

$$D(P_0)^m \to D(P_0)^n \to \rho' \to 0. \tag{2.6}$$

En lui appliquant le lemme 4.13, on obtient un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & D(G_0)^m \arrow[r] \arrow[d] & D(G_0)^n \arrow[r] \arrow[d] & D(G_0) \otimes_{D(P_0)} \rho' \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & D(G_0)\tilde{\otimes}_{D(P_0),\iota}D(P_0)^m \arrow[r] & D(G_0)\tilde{\otimes}_{D(P_0),\iota}D(P_0)^n \arrow[r] & D(G_0)\tilde{\otimes}_{D(P_0),\iota}\rho' \arrow[r] & 0.
\end{tikzcd} \tag{2.7}$$

D'après [**32**, lemme 2.6], les flèches verticales de gauche sont des isomorphismes, donc la flèche verticale de droite est bijective. Comme $D(G)$ est un quotient de $D(G_0) \otimes_K K[P]$, l'application (2.3) est un isomorphisme. La forte admissibilité de $\mathrm{Ind}_P^G(\rho)$ est aussi conséquence de la proposition 2.1.2 de [**20**]. Le fait qu'une représentation localement algébrique irréductible vérifie les conditions de l'énoncé est une conséquence des résultats plus généraux du début de la section 4.4. □

Si ρ est une représentation localement algébrique irréductible de L, d'après [**40**], elle se décompose de façon unique $\rho = \rho_{alg} \otimes \rho_\infty$, ρ_{alg} étant une représentation algébrique irréductible de $\underline{G}$ et ρ_∞ une représentation lisse irréductible de G. Alors d'après [**44**, proposition 2.2], ρ_∞ est fortement admissible, c'est donc aussi le cas de ρ.

Nous allons à présent expliquer comment construire des morphismes entre induites localement analytiques au moyen de morphismes entre modules de Verma généralisés. Soient ψ et ρ deux représentations algébriques de dimension finie de L et ρ_∞ une représentation lisse fortement admissible de L. On les prolonge par inflation en des représentations de P.

Proposition 2.2. — *Si φ est un morphisme $U(\mathfrak{g})$-équivariant entre les modules de Verma généralisés $\mathfrak{m}_\mathfrak{p}(\psi')$ et $\mathfrak{m}_\mathfrak{p}(\rho')$, il existe un unique morphisme continu de $D(G)$-modules $M(\varphi)$ entre $D(G) \otimes_{D(P)} (\psi \otimes \rho_\infty)'$ et $D(G) \otimes_{D(P)} (\rho \otimes \rho_\infty)'$ prolongeant $\varphi \otimes id$ de $\mathfrak{m}_\mathfrak{p}(\psi') \otimes \rho'_\infty$ dans $\mathfrak{m}_\mathfrak{p}(\rho') \otimes \rho'_\infty$.*

Démonstration. — Notons $\widetilde{\varphi}$ la composition de φ avec l'inclusion $\mathfrak{m}_\mathfrak{p}(\rho') \subset D(G) \otimes_{D(P)} \rho'$. Le sous-espace $\widetilde{\varphi}(1 \otimes \psi')$ est alors inclus dans $H^0(\mathfrak{n}_P, U(\mathfrak{g}) \otimes_{U(\mathfrak{p})} \rho')$. L'action de P sur $U(\mathfrak{g}) \otimes_{U(\mathfrak{p})} \rho'$ est, pour $p \in P$,

$$p \cdot (\lambda \otimes v) = (\delta_p \lambda \delta_{p^{-1}}) \otimes \rho'(p) v. \tag{2.8}$$

L'action de P sur $\mathfrak{m}_\mathfrak{p}(\rho')$ est donc algébrique. Or une action $\mathfrak{p}$-équivariante entre représentations algébriques de P est P-équivariante. L'application $\widetilde{\varphi} \otimes id$ est alors P-équivariante de $(\psi \otimes \rho_\infty)'$ dans $D(G) \otimes_{D(P)} (\rho \otimes \rho_\infty)'$. Par densité de $K[P]$ dans $D(P)$, l'application $\widetilde{\varphi} \otimes id$ est $D(P)$-équivariante. Elle se prolonge donc en une application $D(G)$-équivariante de $D(G) \otimes_{D(P)} (\psi \otimes \rho_\infty)'$ dans $D(G) \otimes_{D(P)} (\rho \otimes \rho_\infty)'$. □

On notera également $I(\varphi)$ l'application duale de $M(\varphi)$

$$\mathrm{Ind}_P^G(\rho \otimes \rho_\infty) \xrightarrow{I(\varphi)} \mathrm{Ind}_P^G(\psi \otimes \rho_\infty). \tag{2.9}$$

On vérifie facilement la propriété $I(\varphi \circ \theta) = I(\theta) \circ I(\varphi)$.

Soit $\mathfrak{d}$ l'image de φ dans $\mathfrak{m}_\mathfrak{p}(\rho')$. On définit la représentation $\mathrm{Ind}_P^G(\rho)^\mathfrak{d}$ par

$$\mathrm{Ind}_P^G(\rho \otimes \rho_\infty)^\mathfrak{d} = \ker(I(\varphi)) \subset \mathrm{Ind}_P^G(\rho \otimes \rho_\infty). \tag{2.10}$$

Il faut bien entendu vérifier que cette définition ne dépend que de $\mathfrak{d}$. C'est en fait évident car le dual de $\mathrm{Ind}_P^G(\rho \otimes \rho_\infty)^\mathfrak{d}$ s'identifie au quotient de $D(G) \otimes_{D(P)} (\rho \otimes \rho_\infty)'$ par le sous-$D(G)$-module engendré par $\mathfrak{d} \otimes \rho'_\infty$. Ce sous-module est fermé car image d'une application dans la catégorie abélienne des $D(G)$-modules coadmissibles ([**47**, corollaire 3.4]).

Exemple 2.3. — Comme exemple, décrivons le cas où $\rho = \lambda \otimes \chi$, avec λ un poids dominant, χ un caractère lisse, P est le sous-groupe de Borel B et $\mathfrak{d} = \sum_{\alpha \in \Delta} \mathfrak{m}(-s_\alpha \cdot \lambda)$. Alors $\mathrm{Ind}_B^G(\lambda \otimes \chi)^\mathfrak{d}$ est le produit tensoriel $F_\lambda \otimes \mathrm{Ind}_B^G(\chi)^\infty$ qui est irréductible si et seulement si $\mathrm{Ind}_B^G(\chi)^\infty$ l'est. Plus généralement, on peut supposer $\lambda \in X_S^+$, c'est-à-dire que λ est un poids dominant relativement à $P = P_S$. Si $\mathfrak{d}$ désigne le noyau de la flèche $\mathfrak{m}(-\lambda) \to \mathfrak{m}_\mathfrak{p}(-\lambda)$, on a un isomorphisme

$$\mathrm{Ind}_B^G(\lambda \otimes \chi)^\mathfrak{d} \simeq \mathrm{Ind}_P^G(F_{\lambda,S} \otimes \mathrm{Ind}_B^P(\chi)^\infty), \tag{2.11}$$

où $F_{\lambda,S}$ désigne la représentation de dimension finie de P de plus haut poids λ.

Remarque 2.4. — Si H est un sous-groupe compact ouvert de G, le même raisonnement que pour la proposition 2.2 montre que si π est une représentation lisse de dimension finie de $H \cap P$, il existe une unique application $D(H)$-équivariante

$$D(H) \otimes_{D(H \cap P)} (\psi \otimes \pi)' \xrightarrow{M(\varphi)} D(H) \otimes_{D(H \cap P)} (\rho \otimes \pi)' \tag{2.12}$$

prolongeant $\varphi \otimes 1$. Soit G_0 un sous-groupe compact ouvert spécial de G, π une représentation lisse de dimension finie de $P_0 = G_0 \cap P$. Choisissons également $I \subset G_0$ un sous-groupe parahorique adapté à P. Pour $w \in W$, on pose $P_w = wPw^{-1} \cap I$ et on obtient des applications $D(I)$-équivariantes

$$D(I) \otimes_{D(P_w)} (\psi^w \otimes \pi^w)' \xrightarrow{M(\varphi^w)} D(I) \otimes_{D(P_w)} (\rho^w \otimes \pi^w)', \tag{2.13}$$

prolongeant l'application $\varphi^w \otimes 1 = (\mathrm{Ad}(w) \circ \varphi \circ \mathrm{Ad}(w)^{-1}) \otimes 1$ de $\mathfrak{m}_{\mathfrak{p}_w}((\psi^w)') \otimes (\pi^w)'$ dans $\mathfrak{m}_{\mathfrak{p}_w}((\rho^w)') \otimes (\pi^w)'$. En utilisant la décomposition de Bruhat-Iwahori

$$G_0 = \bigcup_{w \in W_P \backslash W / W_P} IwP_0, \tag{2.14}$$

on obtient un isomorphisme $D(I)$-équivariant

$$D(G_0) \otimes_{D(P_0)} (U \otimes \pi)' \simeq \bigoplus_{w \in W_P \backslash W / W_P} D(I) \otimes_{D(P_w)} (U^w \otimes \pi^w)', \tag{2.15}$$

lorsque $U \in \{\rho, \psi\}$. On a alors une égalité

$$M(\varphi) = \sum_{w \in W_P \backslash W / W_P} M(\varphi^w). \tag{2.16}$$

2.2. Une suite exacte. — Cette partie a pour but de montrer comment une suite exacte de modules de Verma donne lieu à une suite exacte de représentations localement analytiques. Soit H un groupe de Lie localement $\mathbb{Q}_p$-analytique compact. Dans [**47**], Peter Schneider et Jeremy Teitelbaum définissent, pour $\frac{1}{p} < r < 1$, une famille de normes $||\cdot||_r$ sur $D(H)$. La multiplication étant continue pour ces normes, le complété $D(H)_r$ de $D(H)$ relativement à $||\cdot||_r$ est une K-algèbre de Banach. On a alors

$$D(H) \simeq \varprojlim_r D(H)_r, \tag{2.17}$$

ce qui munit $D(H)$ d'une structure de K-algèbre de Fréchet-Stein, c'est-à-dire que chaque $D(H)_r$ est un anneau noethérien à gauche et $D(H)_r$ est un $D(H)_{r'}$-module plat pour $r < r'$. Notons $U(\mathfrak{h})_r$ la complétion de $U(\mathfrak{h}) \otimes_{\mathbb{Q}_p} K \subset D(H)$ pour la norme $||\cdot||_r$. Dans sa thèse ([**22**]), Henning Frommer a prouvé que chaque $D(H)_r$ est un $U(\mathfrak{h})_r$-module libre de rang fini et que l'algèbre de Banach $U(\mathfrak{h})_r$ a la description suivante. Il existe une base $(z_1, \ldots, z_s)$ de $\mathfrak{h}$ telle que, en posant $Z_\alpha = z_1^{\alpha_1} \cdots z_s^{\alpha_s}$ pour tout multi-indice $\alpha \in \mathbb{N}^s$, tout élément de $U(\mathfrak{g})_r$ s'écrit de façon unique

$$\sum_\alpha x_\alpha Z^\alpha \tag{2.18}$$

avec $|x_\alpha| ||Z_\alpha||_r \to 0$ lorsque $|\alpha| \to +\infty$.

Proposition 2.5. — *Supposons que l'on ait une suite exacte*

$$\mathfrak{m}_{\mathfrak{p}}(\rho_1') \xrightarrow{\varphi_1} \mathfrak{m}_{\mathfrak{p}}(\rho_2') \xrightarrow{\varphi_2} \mathfrak{m}_{\mathfrak{p}}(\rho_3') \tag{2.19}$$

entre modules de Verma généralisés, où les ρ_i sont des représentations algébriques de dimension finie de P. Alors pour $w \in W_P \backslash W / W_P$ et $r < 1$ suffisamment proche de 1, la suite

$$D(I)_r \otimes_{D(P_w)_r} (\rho_1')^w \xrightarrow{M(\varphi_1^w)} D(I)_r \otimes_{D(P_w)_r} (\rho_2')^w \xrightarrow{M(\varphi_2^w)} D(I)_r \otimes_{D(P_w)_r} (\rho_3')^w, \tag{2.20}$$

est exacte.

Démonstration. — Soit $w \in W_P \backslash W / W_P$. Rappelons que l'on note N^+ le radical unipotent du parabolique opposé à P. Posons $U_w^+ = wN^+w^{-1} \cap I$. On a une décomposition $I = U_w^+ P_w$ qui induit un isomorphisme de $D(U_w^+)$-modules $D(I) \simeq D(U_w^+) \hat{\otimes}_K D(P_w)$ et un isomorphisme isométrique de $D(U_w^+)_r$-modules $D(I)_r \simeq D(U_w^+)_r \hat{\otimes}_K D(P_w)_r$ ([**37**, proposition 3.3.4]). Soit $(v_i^k)_{i=1..n_k}$ une base de $(\rho_k')^w$. On a alors ([**37**, proposition 3.4.2]), pour r suffisamment proche de 1, un isomorphisme topologique $D(U_w^+)_r$-équivariant

$$D(U_w^+)_r^{n_k} \xrightarrow{\sim} D(I)_r \otimes_{D(P_w)_r} (\rho_k')^w. \tag{2.21}$$

Dans ces bases, posons

$$\varphi_k^w(v_i^k) = \sum_j a_{i,j}^k v_j^{k+1}, \tag{2.22}$$

on a, par définition, $a_{i,j}^k \in U(\mathfrak{u}_w^+)$. Alors l'application $M(\varphi_k^w)$ s'écrit

$$M(\varphi_1^w)((x_i)_{1\leq i\leq n_k}) = (\sum_l x_l a_{l,j}^k)_{1\leq j\leq n_{k+1}}. \tag{2.23}$$

Or comme chaque $D(U_w^+)_r$ est un $U(\mathfrak{u}_w^+)_r$-module libre de type fini, donc plat, il suffit de prouver que la suite

$$U(\mathfrak{u}_w^+)_r^{n_1} \xrightarrow{M(\varphi_1^w)} U(\mathfrak{u}_w^+)_r^{n_2} \xrightarrow{M(\varphi_2^w)} U(\mathfrak{u}_w^+)_r^{n_3} \tag{2.24}$$

est exacte. L'algèbre de Banach $U(\mathfrak{u}_w^+)_r$ étant noethérienne, ces applications sont continues d'images fermées. De plus ces applications sont $U(\mathfrak{t})$-équivariantes. Il résulte du lemme 3.4.4 de [**37**] et de sa preuve que pour tout poids μ de $\mathfrak{t}$, le sous-espace μ-isotypique de $U(\mathfrak{u}_w^+)_r \otimes_K (\rho'_k)^w$ est de dimension finie et inclus dans $U(\mathfrak{u}_w^+) \otimes_K (\rho'_k)^w$. On applique alors un théorème de Christian Féaux-de-Lacroix ([**35**] et [**22**, proposition 9]). Les sous-espaces $\ker(M(\varphi_2^w))$ et $\mathrm{Im}(M(\varphi_1^w))$ sont $U(\mathfrak{t})$-stables et fermés, donc égaux à l'adhérence de la somme de leurs sous-espaces isotypiques. D'après ce qui précède ces sommes sont respectivement $\ker(\varphi_2^w)$ et $\mathrm{Im}(\varphi_1^w)$. On a donc bien égalité entre $\ker(M(\varphi_2^w))$ et $\mathrm{Im}(M(\varphi_1^w))$. □

Corollaire 2.6. — *Si π est une représentation lisse irréductible de dimension finie de P_0 et ρ_∞ une représentation lisse fortement admissible de P, on a des suites exactes*

$$\mathrm{Ind}_{P_0}^{G_0}(\rho_3\otimes\pi) \xrightarrow{I(\varphi_3)} \mathrm{Ind}_{P_0}^{G_0}(\rho_2\otimes\pi) \xrightarrow{I(\varphi_2)} \mathrm{Ind}_{P_0}^{G_0}(\rho_1\otimes\pi) \tag{2.25}$$

et

$$\mathrm{Ind}_{P}^{G}(\rho_3\otimes\rho_\infty) \xrightarrow{I(\varphi_3)} \mathrm{Ind}_{P}^{G}(\rho_2\otimes\rho_\infty) \xrightarrow{I(\varphi_2)} \mathrm{Ind}_{P}^{G}(\rho_1\otimes\rho_\infty). \tag{2.26}$$

Démonstration. — La proposition 2.5 et le théorème B de [**47**, §3] montrent qu'on a une suite exacte

$$D(I)\otimes_{D(P_w)}(\rho'_1)^w \xrightarrow{M(\varphi_1^w)} D(I)\otimes_{D(P_w)}(\rho'_2)^w \xrightarrow{M(\varphi_2^w)} D(I)\otimes_{D(P_w)}(\rho'_3)^w \tag{2.27}$$

pour tout $w\in W_P\backslash W/W_P$. On déduit alors la première suite exacte de (2.15). Pour la seconde, on écrit $\rho_\infty|_{P_0} = \bigoplus_\pi \pi$ où les π sont des représentations lisses irréductibles de P_0. On a alors

$$\mathrm{Ind}_P^G(\rho_i\otimes\rho_\infty)|_{G_0} \simeq \bigoplus_\pi \mathrm{Ind}_{P_0}^{G_0}(\rho_i\otimes\pi). \tag{2.28}$$

En effet, comme G est dénombrable à l'infini, ρ_∞ est de dimension dénombrable et la somme directe est dénombrable. On utilise alors le lemme suivant. □

Lemme 2.7. — *Soit X une variété localement $\mathbb{Q}_p$-analytique strictement paracompacte et (M_i) une famille dénombrable d'espaces de Fréchet. On a alors un isomorphisme topologique*

$$\bigoplus_i C^{an}(X,M_i) \xrightarrow{\sim} C^{an}(X,\bigoplus_i M_i). \tag{2.29}$$

Démonstration. — D'après le corollaire 8.9 de [**42**], l'image par une application continue d'un espace de Banach V dans $\bigoplus_i M_i$ est incluse dans une somme finie de M_i. Le lemme est alors une conséquence de la définition de $C^{an}(X,\bigoplus_i M_i)$ ([**45**, §2]). □

2.3. Irréductibilité. — Lorsque le module de Verma $\mathfrak{m}_\mathfrak{p}(\rho'_{alg}) = U(\mathfrak{g})\otimes_{U(\mathfrak{p})}\rho'_{alg}$ est simple, le critère d'irréductibilité de Frommer-Orlik-Strauch ([**37**]) montre que la représentation $\mathrm{Ind}_P^G(\rho_{alg})$ est topologiquement irréductible. On montre ici que c'est aussi le cas de $\mathrm{Ind}_P^G(\rho_{alg}\otimes\rho_\infty)$ si ρ_∞ est une représentation lisse irréductible de L.

Proposition 2.8. — *Si le $U(\mathfrak{g})$-module $\mathfrak{m}_\mathfrak{p}(\rho'_{alg})$ est simple, alors la représentation $\mathrm{Ind}_P^G(\rho)$ est topologiquement irréductible.*

Remarque 2.9. — Après l'écriture de cette partie, Sascha Orlik m'a informé qu'il a obtenu avec Matthias Strauch un critère d'irréductibilité englobant cette proposition ainsi que la proposition 2.20.

La preuve de cette proposition est en fait un prolongement de la preuve de Sascha Orlik et Matthias Strauch dans [**37**]. Plaçons-nous sous les hypothèses de la proposition 2.8.

Reprenons les notations de la remarque 2.4. Soit I un sous-groupe parahorique de G_0 adapté à P_0. Soit $\mathcal{W}$ un ensemble de représentants des doubles classes de $W_P\backslash W/W_P$. Pour $w \in \mathcal{W}$, posons $P_w = I \cap wP_0w^{-1}$.

Démontrons d'abord le lemme suivant.

Lemme 2.10. — *Si π est une représentation lisse irréductible de P_w, le $D(I)$-module $D(I) \otimes_{D(P_w)} (\rho^w_{alg} \otimes \pi)'$ est simple.*

Démonstration. — La proposition 3.4.2 de [**37**] montre que pour $r < 1$ assez près de 1, l'action de $D(P_w)$ sur $(\rho_{alg} \otimes \pi)'$ se prolonge en une action de $D(P_w)_r$. Soit N un sous-$D(I)_r$-module non nul de $D(I)_r \otimes_{D(P_w)_r} (\rho^w_{alg} \otimes \pi)'$. Le même raisonnement que dans [**37**, Proposition 3.4.7] montre qu'il a une intersection non nulle avec

$$U(\mathfrak{g}) \otimes_{U(\mathfrak{p}_w)} (\rho^w_{alg} \otimes \pi)' \subset D(I)_r \otimes_{D(P_w)_r} (\rho^w_{alg} \otimes \pi)'. \tag{2.30}$$

En effet, jusqu'ici le raisonnement de [**37**] n'a pas utilisé l'irréductibilité de $U(\mathfrak{g}) \otimes_{U(\mathfrak{p}_w)} (\rho^w_{alg} \otimes \pi)'$. L'action de P_w sur $U(\mathfrak{g})$ par adjonction est localement finie, elle se prolonge donc en une action de $D(P_w)$. Notons, pour $\lambda \in D(P_w)$, $Ad(\lambda)$ l'endomorphisme induit sur $U(\mathfrak{g})$. On munit alors le produit direct $U(\mathfrak{g}) \times D(P_w)$ d'une structure de K-algèbre en posant $(x_1, \lambda_1)(x_2, \lambda_2) = (x_1 Ad(\lambda_1)x_2, \lambda_1\lambda_2)$ et on note $U(\mathfrak{g}) \rtimes D(P_w)$ la K-algèbre ainsi obtenue. L'application $(x, \lambda) \mapsto x\lambda$ de $U(\mathfrak{g}) \rtimes D(P_w)$ dans $D(I)$ est alors un morphisme de K-algèbres. Or $U(\mathfrak{g}) \otimes_{U(\mathfrak{p}_w)} (\rho^w_{alg} \otimes \pi)'$ est un $U(\mathfrak{g}) \rtimes D(P_w)$-module simple, donc un $D(I)_r$-module simple, il est donc contenu dans N. Le sous-module N contient ainsi le $D(I)_r$-module engendré par $(\rho^w_{alg} \otimes \pi)'$, c'est-à-dire $D(I)_r \otimes_{D(P_w)_r} (\rho_{alg} \otimes \pi)'$. Ainsi $D(I)_r \otimes_{D(P_w)_r} (\rho_{alg} \otimes \pi)'$ est un $D(I)_r$-module simple. On conclut en utilisant le même argument que dans la preuve de [**37**, théorème 3.4.9]. □

Lemme 2.11. — *Soit π une représentation lisse irréductible de P_0. Alors la représentation $\mathrm{Ind}_{P_0}^{G_0}(\rho_{alg} \otimes \pi)$ est topologiquement irréductible.*

Démonstration. — La décomposition d'Iwasawa donne un isomorphisme I-équivariant

$$D(G_0) \otimes_{D(P_0)} (\rho_{alg} \otimes \pi)' = \bigoplus_{w \in \mathcal{W}} D(I) \otimes_{D(P_w)} (\rho^w_{alg} \otimes \pi^w)'. \tag{2.31}$$

Fixons $w \in \mathcal{W}$ et $\pi^w \simeq \bigoplus_i \pi_i$ une décomposition de π^w en somme finie de représentations irréductibles de P_w.

D'après le lemme 2.10, chaque $D(I) \otimes_{D(P_w)} (\rho^w_{alg} \otimes \pi_i)'$ est un $D(I)$-module simple, donc $D(G_0) \otimes_{D(P_0)} (\rho_{alg} \otimes \pi)'$ est un $D(I)$-module semi-simple. Soit N un sous-$D(G_0)$-module de

$$D(G_0) \otimes_{D(P_0)} (\rho_{alg} \otimes \pi)'. \tag{2.32}$$

D'après [**37**, proposition 3.5.1], pour $w \neq w'$, il n'y a pas d'application $D(I)$-équivariante non nulle

$$D(I) \otimes_{D(P_w)} (\rho^w_{alg} \otimes \pi^w)' \to D(I) \otimes_{D(P_{w'})} (\rho^{w'}_{alg} \otimes \pi^{w'})'. \tag{2.33}$$

Par semi-simplicité du $D(I)$-module $D(G_0) \otimes_{D(P_0)} (\rho_{alg} \otimes \pi)'$, on a donc

$$N = \bigoplus_w N_w \tag{2.34}$$

avec $N_w = (N \cap D(I) \otimes_{D(P_w)} (\rho^w_{alg} \otimes \pi^w)')$. Comme W permute toutes ces composantes, si $N \neq 0$, chaque N_w est non nul. Montrons finalement que pour tout $w \in \mathcal{W}$, on a

$$N_w = D(I) \otimes_{D(P_w)} (\rho^w_{alg} \otimes \pi^w)'. \tag{2.35}$$

Si ce n'était pas le cas, il existerait, par semi-simplicité de $D(I) \otimes_{D(P_w)} (\rho^w_{alg} \otimes \pi^w)'$, une sous-$P_w$-représentation $\theta \subsetneq \pi^w$ telle que

$$N'_w = \mathrm{Ind}_{P_w}^I(\theta). \tag{2.36}$$

Cela signifie que pour tout $f \in N'$, tout $b \in I$, on a $f(bw) \in \theta$. Fixons alors f non nul dans N'_w et $b \in I$ tel que $f(bw) \neq 0$. Comme π est une représentation irréductible de P_0, il existe $p \in P_0$ tel que $\rho(p)^{-1}f(bw) \notin \theta$. Ainsi, en posant $g = (bwpw^{-1})^{-1}$, on a

$$(g \cdot f)(w) = f(bwp) = \rho(p)^{-1}f(bw) \notin \theta, \tag{2.37}$$

ce qui est absurde. □

Démonstration de la proposition 2.8. — Soit $\rho_\infty|_{P_0} = \bigoplus_\pi \pi$ une décomposition de ρ_∞ en somme directe de représentations irréductibles. En appliquant encore une fois le lemme 2.7, on a un isomorphisme de G_0-représentations

$$\mathrm{Ind}_P^G(\rho)|_{G_0} \simeq \bigoplus_\pi \mathrm{Ind}_{P_0}^{G_0}(\rho_{alg} \otimes \pi). \tag{2.38}$$

D'après [**40**], chaque représentation $\rho_{alg} \otimes \pi$ est irréductible de dimension finie. D'après le lemme 2.11, chaque $\mathrm{Ind}_{P_0}^{G_0}(\rho_{alg} \otimes \pi)$ est topologiquement irréductible. Supposons maintenant que Σ soit un sous-espace fermé de $\mathrm{Ind}_P^G(\rho)$, stable par G. Comme $\mathrm{Ind}_P^G(\rho)|_{G_0}$ est une somme directe de représentations topologiquement irréductibles de G_0, il existe un ensemble J de π tel que

$$\Sigma = \bigoplus_{\pi \in J} \mathrm{Ind}_{P_0}^{G_0}(\rho_{alg} \otimes \pi). \tag{2.39}$$

Mais alors, comme Σ est stable par G, $\bigoplus_{\pi\in J} \pi$ est stable par P, donc $\bigoplus_{\pi\in J} \pi = \rho_\infty$ et $\Sigma = \mathrm{Ind}_P^G(\rho)$. □

2.4. Représentations de Steinberg généralisées et pondérées. — On appelle représentation de Steinberg le quotient de l'induite lisse de la représentation triviale d'un sous-groupe de Borel par la somme des sous-espaces correspondant aux induites relativement à des sous-groupes paraboliques stricts contenant B. De même, si P est un sous-groupe parabolique, on appelle représentation de Steinberg généralisée, que l'on note v_P, la représentation obtenue en remplaçant le sous-groupe de Borel B par P. Si on considère l'ensemble des sous-groupes paraboliques contenant un sous-groupe de Borel fixé, la famille des v_P est une famille de représentations lisses irréductibles de G, deux à deux non isomorphes et comprenant tous les sous-quotients de l'induite lisse de B à G de l'identité ([**4**]).

Nous allons définir des analogues localement analytiques de ces représentations. De même que dans [**7**], le cadre localement analytique permet de plus de pondérer ces représentations au moyen de caractères algébriques du sous-groupe B.

Soit $\lambda \in X(T)^+$ un poids dominant de T. Soit P un sous-groupe parabolique de G contenant B. On note $F_{\lambda,P}$ la représentation algébrique irréductible du quotient de Lévi L_P de P de dimension finie de plus haut poids λ. Par abus de notations, on écrit

$$\mathrm{Ind}_P^G(\lambda) = \mathrm{Ind}_P^G(F_{\lambda,P}). \tag{2.40}$$

La transitivité de l'induction localement analytique nous permet d'écrire, pour toute inclusion $P \subset Q \subset G$ de sous-groupes paraboliques

$$\mathrm{Ind}_P^G(\lambda) = \mathrm{Ind}_Q^G(\mathrm{Ind}_P^Q(F_{\lambda,P})). \tag{2.41}$$

En remarquant que $F_{\lambda,Q}$ est un sous-espace de $\mathrm{Ind}_P^Q(F_{\lambda,P})$, on obtient une inclusion $\mathrm{Ind}_Q^G(F_{\lambda,Q}) \subset \mathrm{Ind}_P^G(F_{\lambda,P})$.

Définition 2.12. — On définit alors la représentation $v_P^{an}(\lambda)$ comme étant le quotient de $\mathrm{Ind}_P^G(\lambda)$ par la somme des $\mathrm{Ind}_Q^G(\lambda)$ pour Q sous-groupe parabolique contenant strictement P. Lorsque $P = B$ est un sous-groupe de Borel, on note $\Sigma(\lambda) = v_B^{an}(\lambda)$ et $\mathrm{St}_3^{an} = \Sigma(0)$.

On a une flèche

$$F_\lambda \otimes \mathrm{Ind}_P^G(1)^\infty \xrightarrow{i_{P,\lambda}} \mathrm{Ind}_P^G(F_{\lambda,P}) \tag{2.42}$$

définie par $i_{P,\lambda}(f \otimes g) = fg$. C'est un morphisme continu G-équivariant.

Lemme 2.13. — *L'application i_λ est injective d'image fermée.*

Démonstration. — La preuve est la même que pour GL_2 dans [**44**, $(\star)$]. On remarque que l'on peut remplacer G par le sous-groupe compact G_0, P par $P_0 = P \cap G_0$. On choisit I un sous-groupe parahorique de G_0 adapté à P_0 et pour $w \in W_P\backslash W/W_P$, on pose $U_w^+ = wU^+w^{-1} \cap I$. En utilisant la décomposition de Bruhat-Iwahori, $G_0 = \bigcup_{w\in W_P\backslash W/W_P} IwB_0$ ainsi que $I = U_w^+(I \cap wB_0w^{-1})$, on obtient un homéomorphisme

$$\mathrm{Ind}_P^G(\lambda) \simeq \bigoplus_{w\in W_P\backslash W/W_P} C^{an}(U_w^+, F_\lambda^w) \tag{2.43}$$

Or on a également

$$F_\lambda \otimes \mathrm{Ind}_P^G(1)^\infty \simeq \bigoplus_{w\in W_P\backslash W/W_P} F_\lambda \otimes C^\infty(U_w^+, K). \tag{2.44}$$

L'espace F_λ s'identifie à l'espace des sections globales d'un faisceau cohérent G-équivariant $\mathcal{F}_\lambda$ sur G/P. L'espace $C^{an}(U_w^+, F_\lambda^w)$ est l'ensemble des sections localement analytiques de $\mathcal{F}_\lambda$ sur l'ouvert image de U_w^+. La restriction de $i_{P,\lambda}$ à $F_\lambda \otimes C^\infty(U_w^+, K)$ est donc $f\otimes g \mapsto f|_{U_w^+} \otimes g|_{U_w^+}$. Soit $\sum f_i \otimes 1_{U_i}$ un élément du noyau, écrit de telle sorte que (U_i) soit un recouvrement ouvert disjoint de U_w^+. Alors f_i s'annule sur U_i pour tout i. Mais comme f_i est une fonction algébrique et U_i est dense dans G/P pour la topologie de Zariski, on en déduit $f_i = 0$. Au final on voit que $i_{P,\lambda}$ est injective. □

Corollaire 2.14. — *La représentation $v_P^{an}(\lambda)$ est une représentation localement analytique admissible. Ses vecteurs localement algébriques contiennent la représentation irréductible $F_\lambda \otimes v_P$.*

On voit donc que contrairement au cas lisse, les représentations $v_P^{an}(\lambda)$ ne sont pas topologiquement irréductibles. On a toujours $v_G^{an}(\lambda) = F_\lambda$. Dans le cas où $G = \mathrm{GL}_3(\mathbb{Q}_p)$ nous allons utiliser les résultats de la section 2.1 pour décomposer ces représentations.

2.5. Illustration. — Nous sommes maintenant de retour à $G = \mathrm{GL}_3(\mathbb{Q}_p)$. Soit λ un poids dominant. Nous allons appliquer la construction du paragraphe précédent à la décomposition de l'induite $\mathrm{Ind}_B^G(\lambda)$.

Rappelons tout d'abord la décomposition du module de Verma $\mathfrak{m}(-\lambda)$. On sait d'après, [**18**, théorème 7.6.23] que pour $w \in W$, il existe un unique morphisme injectif $\mathfrak{m}(-w\cdot\lambda) \hookrightarrow \mathfrak{m}(-\lambda)$. Posons alors

$$\mathrm{Fil}^i(\mathfrak{m}(-\lambda)) = \sum_{w\in W, l(w)=i} \mathfrak{m}(-w\cdot\lambda). \tag{2.45}$$

Si $\mu \in X(T)$, notons $L(\mu)$ le $U(\mathfrak{g})$-module simple de plus petit poids μ. La cause de cette terminologie inhabituelle est que l'on a choisi de considérer des modules de Verma de la forme $U(\mathfrak{g}) \otimes_{U(\mathfrak{b})} \cdot$ où $\mathfrak{b}$ est le parabolique engendré par les coracines négatives, c'est-à-dire l'ensemble des matrices de la forme $\left(\begin{smallmatrix} * & 0 & 0 \\ * & * & 0 \\ * & * & * \end{smallmatrix}\right)$. Les gradués de cette filtration sont les suivants.

$$\begin{aligned} \mathrm{gr}^0(\mathfrak{m}(-\lambda)) &= L(-\lambda) \\ \mathrm{gr}^1(\mathfrak{m}(-\lambda)) &= L(-s_1\cdot\lambda) \oplus L(-s_2\cdot\lambda) \\ \mathrm{gr}^2(\mathfrak{m}(-\lambda)) &= L(-s_1s_2\cdot\lambda) \oplus L(-s_2s_1\cdot\lambda) \\ \mathrm{gr}^3(\mathfrak{m}(-\lambda)) &= L(-s_1s_2s_1\cdot\lambda) = \mathfrak{m}(-s_1s_2s_1\cdot\lambda). \end{aligned} \tag{2.46}$$

Ce calcul est fait dans [**26**], §4.11 et §5.4. De plus, les $U(\mathfrak{g})$-modules simples $L(-s_1s_2\cdot\lambda)$ et $L(-s_2s_1\cdot\lambda)$ sont isomorphes aux modules de Verma généralisés $\mathfrak{m}_2(-s_1s_2\cdot\lambda)$ et $\mathfrak{m}_1(-s_2s_1\cdot\lambda)$, et on a des suites exactes, dits complexes BGG généralisés ([**26**, §9.16])

$$\begin{aligned} 0 \to \mathfrak{m}_1(-s_2s_1\cdot\lambda) \to \mathfrak{m}_1(-s_2\cdot\lambda) \to \mathfrak{m}_1(-\lambda) \to L(-\lambda) \to 0 \\ 0 \to \mathfrak{m}_2(-s_1s_2\cdot\lambda) \to \mathfrak{m}_2(-s_1\cdot\lambda) \to \mathfrak{m}_2(-\lambda) \to L(-\lambda) \to 0. \end{aligned} \tag{2.47}$$

Notons $\mathfrak{d}_1$ l'image de $\mathfrak{m}_1(-s_2s_1\cdot\lambda)$ dans $\mathfrak{m}_1(-s_2\cdot\lambda)$ et $\mathfrak{d}_2$ l'image de $\mathfrak{m}_2(-s_1s_2\cdot\lambda)$ dans $\mathfrak{m}_2(-s_1\cdot\lambda)$.

Soit $\mathrm{Fil}^i(D(G)\otimes_{D(B)}(-\lambda))$ le sous-$D(G)$-module de $D(G)\otimes_{D(B)}(-\lambda)$ engendré par $\mathrm{Fil}^i(\mathfrak{m}(-\lambda))$ et $\mathrm{Fil}_i(\mathrm{Ind}_B^G(\lambda))$ son dual. La proposition 2.2 et l'exemple 2.3 appliqués à (2.46) nous permettent de calculer les gradués de cette filtration.

Corollaire 2.15. — *Soit χ un caractère lisse de T. Il existe une filtration croissante sur $\mathrm{Ind}_B^G(\lambda\otimes\chi)$ telle que*

$$\begin{aligned} \mathrm{Fil}_0(\mathrm{Ind}_B^G(\lambda\otimes\chi)) &= F_\lambda \otimes \mathrm{Ind}_B^G(\chi)^\infty \\ \mathrm{gr}_1(\mathrm{Ind}_B^G(\lambda\otimes\chi)) &= \mathrm{Ind}_{P_1}^G(F_{s_2\cdot\lambda,1} \otimes \mathrm{Ind}_{B\cap L_1}^{L_1}(\chi)^\infty)^{\mathfrak{d}_1} \oplus \mathrm{Ind}_{P_2}^G(F_{s_1\cdot\lambda,2} \otimes \mathrm{Ind}_{B\cap L_2}^{L_2}(\chi))^{\mathfrak{d}_2} \\ \mathrm{gr}_2(\mathrm{Ind}_B^G(\lambda\otimes\chi)) &= \mathrm{Ind}_{P_1}^G(F_{s_2s_1\cdot\lambda,1} \otimes \mathrm{Ind}_{B\cap L_1}^{L_1}(\chi)^\infty) \oplus \mathrm{Ind}_{P_2}^G(F_{s_1s_2\cdot\lambda,2} \otimes \mathrm{Ind}_{B\cap L_2}^{L_2}(\chi)^\infty) \\ \mathrm{gr}_3(\mathrm{Ind}_B^G(\lambda\otimes\chi)) &= \mathrm{Ind}_B^G(s_1s_2s_1\cdot\lambda\otimes\chi). \end{aligned} \tag{2.48}$$

Soit ρ_∞ une représentation lisse irréductible de L_i. L'application du corollaire 2.6 et de l'exemple 2.3 aux suites exactes (2.47) donne deux suites exactes.

$$\begin{aligned} 0 \to F_\lambda \otimes \mathrm{Ind}_{P_1}^G(\rho_\infty)^\infty \to \mathrm{Ind}_{P_1}^G(F_{\lambda,1} \otimes_K \rho_\infty) \to \mathrm{Ind}_{P_1}^G(F_{s_2\cdot\lambda,1} \otimes_K \rho_\infty) \\ \to \mathrm{Ind}_{P_1}^G(F_{s_2s_1\cdot\lambda,1} \otimes_K \rho_\infty) \to 0 \\ 0 \to F_\lambda \otimes \mathrm{Ind}_{P_2}^G(\rho_\infty)^\infty \to \mathrm{Ind}_{P_2}^G(F_{\lambda,2} \otimes_K \rho_\infty) \to \mathrm{Ind}_{P_2}^G(F_{s_1\cdot\lambda,2} \otimes_K \rho_\infty) \\ \to \mathrm{Ind}_{P_2}^G(F_{s_1s_2\cdot\lambda,2} \otimes_K \rho_\infty) \to 0. \end{aligned} \tag{2.49}$$

Corollaire 2.16. — *On a des suites exactes*

$$\begin{aligned} 0 \to F_\lambda \otimes \mathrm{Ind}_{P_1}^G(\rho_\infty)^\infty \to \mathrm{Ind}_{P_1}^G(F_{\lambda,1} \otimes_K \rho_\infty) \to \mathrm{Ind}_{P_1}^G(F_{s_2\cdot\lambda,1} \otimes_K \rho_\infty)^{\mathfrak{d}_1} \to 0 \\ 0 \to F_\lambda \otimes \mathrm{Ind}_{P_2}^G(\rho_\infty)^\infty \to \mathrm{Ind}_{P_2}^G(F_{\lambda,2} \otimes_K \rho_\infty) \to \mathrm{Ind}_{P_2}^G(F_{s_1\cdot\lambda,2} \otimes_K \rho_\infty)^{\mathfrak{d}_2} \to 0. \end{aligned} \tag{2.50}$$

et

$$\begin{aligned} 0 \to \mathrm{Ind}_{P_1}^G(F_{s_2\cdot\lambda,1} \otimes_K \rho_\infty)^{\mathfrak{d}_1} \to \mathrm{Ind}_{P_1}^G(F_{s_2\cdot\lambda,1} \otimes_K \rho_\infty) \to \mathrm{Ind}_{P_1}^G(F_{s_2s_1\cdot\lambda,1} \otimes_K \rho_\infty) \to 0 \\ 0 \to \mathrm{Ind}_{P_2}^G(F_{s_1\cdot\lambda,1} \otimes_K \rho_\infty)^{\mathfrak{d}_2} \to \mathrm{Ind}_{P_2}^G(F_{s_1\cdot\lambda,1} \otimes_K \rho_\infty) \to \mathrm{Ind}_{P_2}^G(F_{s_1s_2\cdot\lambda,1} \otimes_K \rho_\infty) \to 0. \end{aligned} \tag{2.51}$$

On en déduit immédiatement une décomposition de la représentation $\Sigma(\lambda) = v_B^{an}(\lambda)$.

Corollaire 2.17. — *Il existe une filtration croissante sur $v_B^{an}(\lambda)$ telle que*

$$\begin{aligned} \mathrm{gr}_0 &= F_\lambda \otimes \mathrm{St}_3 \\ \mathrm{gr}_1 &= \mathrm{Ind}_{P_1}^G(F_{s_2\cdot\lambda,1} \otimes \mathrm{St}_2)^{\mathfrak{d}_1} \oplus \mathrm{Ind}_{P_2}^G(F_{s_1\cdot\lambda,2} \otimes \mathrm{St}_2)^{\mathfrak{d}_2} \\ \mathrm{gr}_2 &= \mathrm{Ind}_{P_1}^G(F_{s_2s_1\cdot\lambda,1}) \oplus \mathrm{Ind}_{P_2}^G(F_{s_1s_2\cdot\lambda,2}) \\ \mathrm{gr}_3 &= \mathrm{Ind}_{P_1}^G(F_{s_2s_1\cdot\lambda,1} \otimes \mathrm{St}_2) \oplus \mathrm{Ind}_{P_2}^G(F_{s_1s_2\cdot\lambda,2} \otimes \mathrm{St}_2) \\ \mathrm{gr}_4 &= \mathrm{Ind}_B^G(s_1s_2s_1 \cdot \lambda), \end{aligned} \tag{2.52}$$

où St_2 *est vue ici comme une représentation de caractère central trivial du groupe $L_i \simeq \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p) \times \mathbb{Q}_p^\times$. On a également des suites exactes*

$$\begin{aligned} 0 \to F_\lambda \otimes v_{P_1} \to v_{P_1}^{an}(\lambda) \to \mathrm{Ind}_{P_1}^G(F_{s_2\cdot\lambda,1})^{\mathfrak{d}_1} \to 0 \\ 0 \to F_\lambda \otimes v_{P_2} \to v_{P_2}^{an}(\lambda) \to \mathrm{Ind}_{P_2}^G(F_{s_1\cdot\lambda,2})^{\mathfrak{d}_2} \to 0. \end{aligned} \tag{2.53}$$

Démonstration. — On considère sur $v_B^{an}(\lambda)$ la filtration image de la filtration 2.48 sur $\mathrm{Ind}_B^G(\lambda)$. Comme $\mathrm{Ind}_{P_i}^G(F_{\lambda,i})$ est contenu dans $\mathrm{Fil}_1(\mathrm{Ind}_B^G(\lambda))$ et $\mathrm{Ind}_{P_1}^G(F_{\lambda,1}) \cap \mathrm{Ind}_{P_2}^G(F_{\lambda,2}) = F_\lambda$, il suffit de prouver que

$$\mathrm{Fil}_0(\mathrm{Ind}_B^G(\lambda)) \cap \mathrm{Ind}_{P_i}^G(F_{\lambda,i}) = F_\lambda \otimes_K \mathrm{Ind}_{P_i}^G(1)^\infty \tag{2.54}$$

Cette égalité est une conséquence de

$$\mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(F_\lambda, \mathrm{Ind}_{P_i}^G(F_{\lambda,i})) = (\mathrm{Ind}_{P_i}^G(F_{\lambda,i} \otimes_K F'_\lambda))^{\mathfrak{g}} = \mathrm{Ind}_{P_i}^G(1)^\infty \tag{2.55}$$

car la représentation triviale de L_i a multiplicité un dans $F_{\lambda,i} \otimes_K F'_\lambda$. □

Le sous-espace $\mathrm{St}_3 \otimes F_\lambda$ est alors exactement le sous-espace des vecteurs localement algébriques de $\Sigma(\lambda)$.

La proposition 2.8 permet de voir que toutes les composantes des décompositions de $\Sigma(\lambda)$ et $v_{P_i}^{an}(\lambda)$ ci-dessus sont irréductibles, exceptées peut-être $\mathrm{Ind}_{P_1}^G(F_{s_2\cdot\lambda,1} \otimes U)^{\mathfrak{d}_1}$ et $\mathrm{Ind}_{P_2}^G(F_{s_1\cdot\lambda,2} \otimes U)^{\mathfrak{d}_2}$ pour $U \in \{1, \mathrm{St}_2\}$. Nous allons maintenant prouver l'irréductibilité de ces représentations.

Traitons le cas de P_1, le cas de P_2 étant identique. D'après les suites exactes (2.50) et (2.51), le $D(G)$-module $(\mathrm{Ind}_{P_1}^G(F_{s_2\cdot\lambda,1})^{\mathfrak{d}_1})'$ peut être vu aussi bien comme quotient de $D(G) \otimes_{D(P_1)} F'_{s_2\cdot\lambda,1}$ que comme sous-module de $D(G) \otimes_{D(P_1)} F'_{\lambda,1}$. Cette remarque est essentielle dans la preuve du lemme suivant, généralisant la proposition 3.5.1 de [**37**].

Lemme 2.18. — *Posons $\rho = F_{s_2\cdot\lambda,1}$. Soient w et w' deux élément différents de $W_1\backslash W/W_1$. Il n'y a pas d'application $D(I)$-équivariante de $(\mathrm{Ind}_{P'_w}^I(\rho^{w'})^{\mathfrak{d}_1})'$ dans $(\mathrm{Ind}_{P_w}^I(\rho^w)^{\mathfrak{d}_1})'$.*

Démonstration. — Par dualité une telle application donne une application I-équivariante

$$\mathrm{Ind}_{P_w}^I(\rho^w)^{\mathfrak{d}_1} \to \mathrm{Ind}_{P'_w}^I(\rho^{w'})^{\mathfrak{d}_1}. \tag{2.56}$$

Comme on l'a déjà remarqué, $\mathrm{Ind}_{P_w}^I(\rho^w)^{\mathfrak{d}_1}$ est un quotient de $\mathrm{Ind}_{P_w}^I(\psi^w)$ où $\psi = F_{\lambda,1}$. On obtient donc par prolongement, une application I-équivariante non triviale

$$\mathrm{Ind}_{P_w}^I(\psi^w) \to \mathrm{Ind}_{P_{w'}}^I(\rho^{w'}). \tag{2.57}$$

Par la loi de réciprocité de Frobenius il existe une application $P_{w'}$-équivariante

$$\mathrm{Ind}_{P_w}^I(\psi^w) \to \rho^{w'}. \tag{2.58}$$

Posons alors $U = P_{w'} \cap wN^+w^{-1}$. Le groupe U agit trivialement sur $\rho^{w'}$. Notons V l'espace sous-jacent de la représentation ψ et Y celui de la représentation ρ, on obtient un morphisme U-équivariant

$$C^{an}(I \cap wN^+w^{-1}, V) \to Y \tag{2.59}$$

où U agit par translation à gauche sur le membre de gauche et trivialement sur le membre de droite. On conclut alors à la trivialité d'un tel morphisme exactement comme dans la preuve de la proposition 3.5.1 de [**37**]. Seul le cas $V = Y$ y est traité, mais cette hypothèse n'est pas nécessaire. □

Lemme 2.19. — *Soit π une représentation lisse irréductible de P_w. La représentation*

$$\mathrm{Ind}_{P_w}^I((F_{s_2\cdot\lambda,1})^w \otimes \pi)^{\mathfrak{d}_1} \tag{2.60}$$

est topologiquement irréductible.

Démonstration. — Soit $M = (\mathrm{Ind}_{P_w}^I((F_{s_2\cdot\lambda,1})^w \otimes \pi)^{\mathfrak{d}_1})'$. Nous allons prouver que le $D(I)$-module M est simple. Par dualité, cela entraîne que $\mathrm{Ind}_{P_w}^I((F_{s_2\cdot\lambda,1})^w \otimes \pi)^{\mathfrak{d}_1}$ est topologiquement irréductible. Rappelons que M est aussi un sous-module de $D(I) \otimes_{D(P_w)} F'_{\lambda,1}$. Étant l'image d'une application entre $D(I)$-modules coadmissibles, c'est un $D(I)$-module coadmissible ([**47**, corollaire 3.4]). La proposition 2.5 montre alors que $M_r = D(I)_r \otimes_{D(I)} M$ est aussi l'adhérence de M dans $D(I)_r \otimes_{D(P_w)_r} (F_\lambda^w \otimes \pi)'$. Comme on a une suite exacte non scindée de $U(\mathfrak{g})$-modules

$$0 \to L(-s_2 \cdot \lambda)^w \to \mathfrak{m}_1(F'_{\lambda,1})^w \to L(-\lambda)^w \to 0 \tag{2.61}$$

et que M_r est un sous-module propre de $D(I)_r \otimes_{D(P_w)_r} (F'_{\lambda,1} \otimes \pi)^w$, on a nécessairement

$$M_r \cap \mathfrak{m}_{\mathfrak{p}}(-\lambda)^w \subset L(-s_2 \cdot \lambda)^w \otimes \pi'. \tag{2.62}$$

Or d'après [**37**, propositions 3.4.5 et 3.4.6], pour r assez proche de 1, tout sous-$D(I)_r$-module non nul de M_r a une intersection non triviale avec $\mathfrak{m}_P(-\lambda)^w \otimes \pi'$. Comme $L(-s_2 \cdot \lambda)^w \otimes \pi'$ est un $U(\mathfrak{g}) \rtimes P_w$-module simple et engendre M_r en tant que $D(I)_r$-module, M_r est un $D(I)_r$-module simple. On peut finalement en conclure que M est un $D(I)$-module simple. □

Une fois que l'on a ces deux lemmes, on peut exactement copier la preuve de la proposition 2.8 pour obtenir la proposition suivante.

Proposition 2.20. — *Soit ρ_∞ une représentation irréductible de $L_1 \simeq L_2$. Alors les représentations $\mathrm{Ind}_{P_1}^G(F_{s_2\cdot\lambda,1} \otimes \rho_\infty)^{\mathfrak{d}_1}$ et $\mathrm{Ind}_{P_2}^G(F_{s_1\cdot\lambda,2} \otimes \rho_\infty)^{\mathfrak{d}_2}$ sont topologiquement irréductibles.*

On peut donc en conclure que (2.52) donne les composantes de Jordan-Hölder de $\Sigma(\lambda)$, qui est donc de longueur 8. De même, chaque $v_{P_i}^{an}(\lambda)$ est de longueur 2. Nous avons donc prouvé que les induites paraboliques localement analytiques de représentations localement algébriques irréductibles du groupe $\mathrm{GL}_3(\mathbb{Q}_p)$ sont de longueur finie, ce qui, à notre connaissance, n'était pas connu.

2.6. Caractères infinitésimaux. — Jan Kohlhaase a prouvé que le centre de l'algèbre $D(G)$ contient le centre $\mathfrak{z}(\mathfrak{g})\otimes K$ de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$. Comme dans le cas réel, nous allons prouver que l'algèbre $\mathfrak{z}(\mathfrak{g})$ agit par un caractère sur les induites localement analytiques. Rappelons la définition du caractère d'Harish-Chandra χ_λ. Soit π la projection de $U(\mathfrak{g})$ sur $U(\mathfrak{t})$ donnée par la décomposition

$$U(\mathfrak{g}) = U(\mathfrak{t}) \oplus (\mathfrak{n}^+ U(\mathfrak{g}) + U(\mathfrak{g})\mathfrak{n}). \tag{2.63}$$

Si $\lambda \in X(T)$, on note χ_λ la restriction de $(\lambda+\delta)\circ\pi$ à $\mathfrak{z}(\mathfrak{g})$, c'est le caractère d'Harish-Chandra associé à λ. Il se trouve que c'est aussi le caractère central de $\mathfrak{m}(\lambda+\delta)$. On a $\chi_\lambda = \chi_\mu$ si et seulement si il existe $w \in W$ tel que $\mu = w(\lambda)$. Ainsi $\mathfrak{m}(\lambda)$ et $\mathfrak{m}(\mu)$ ont même caractère infinitésimal si et seulement si il existe $w \in W$ tel que $\mu = w * \lambda$.

Proposition 2.21. — *Si ρ est la représentation irréductible de plus haut poids λ d'un sous-groupe parabolique P, l'algèbre $\mathfrak{z}(\mathfrak{g})$ agit sur $\mathrm{Ind}_P^G(\rho)$ par le caractère d'Harish-Chandra $\chi_{\lambda+\delta}$.*

Démonstration. — Si $\alpha \in D(G)$, $X \in U(\mathfrak{g})$ et $f \in C^{an}(G,K)$, on a $\alpha(X\cdot f) = (\alpha\dot{X})(f)$, où $X \mapsto \dot{X}$ est l'unique endomorphisme d'algèbre de $U(\mathfrak{g})$ prolongeant l'endomorphisme $x \mapsto -x$ de $\mathfrak{g}$. Pour tout $\mu \in \rho'$, $X \in \mathfrak{z}(\mathfrak{g})$, on a $X(\delta_1\otimes\mu) = \chi_{-\lambda-\delta}(X)(\delta_1\otimes\mu)$. Soit $f \in \mathrm{Ind}_P^G(\rho)$. On a alors

$$\begin{aligned}\mu[(X\cdot f)(1)] &= \mu[(\delta_1\dot{X})(f)] = (\delta_1\dot{X}\otimes\mu)(f)\\ &= [\dot{X}(\delta_1\otimes\mu)](f) = \chi_{-\lambda-\delta}(\dot{X})(\delta_1\otimes\mu)(f)\\ &= \chi_{\lambda+\delta}(X)\mu[f(1)].\end{aligned} \tag{2.64}$$

Ainsi $(X\cdot f)(1) = \chi_{\lambda+\delta}(X)f(1)$. Pour $g \in G$, on a

$$(X\cdot f)(g) = [(\delta_g X)\cdot f](1) = [(\delta_g X\delta_g^{-1})\cdot(\delta_g f)](1) = \chi_{\lambda+\delta}(\delta_g X\delta_g^{-1})f(g). \tag{2.65}$$

Or comme $X \mapsto \delta_g X\delta_g^{-1}$ est l'identité sur le centre $\mathfrak{z}(\mathfrak{g})$, on obtient finalement $X\cdot f = \chi_{\lambda+\delta}(X)f$. □

Corollaire 2.22. — *Pour tout sous-groupe parabolique P, la représentation $v_P^{an}(\lambda)$ a pour caractère infinitésimal $\chi_{\lambda+\delta}$.*

Nous aurons besoin dans la suite du lemme suivant.

Lemme 2.23. — *Il existe une application continue surjective et G-équivariante*

$$F_\lambda \otimes_K \mathrm{St}_3^{an} \twoheadrightarrow \Sigma(\lambda) \tag{2.66}$$

dont le noyau ne possède aucun sous-quotient sur lequel $\mathfrak{z}(\mathfrak{g})$ agit par $\chi_{\lambda+\delta}$.

Démonstration. — Soit P un sous-groupe parabolique de G contenant B. On a un isomorphisme topologique G-équivariant $F_\lambda \otimes_K \mathrm{Ind}_P^G(1) \simeq \mathrm{Ind}_P^G(F_\lambda|_P)$ donné par $v\otimes f \mapsto (g \mapsto g^{-1}v\otimes f(g))$. Comme F_λ est la représentation de plus haut poids λ, il existe une application P-équivariante $F_\lambda \twoheadrightarrow F_{\lambda,P}$, ce qui donne, par composition, une surjection G-équivariante

$$\mathrm{Ind}_P^G(F_\lambda) \twoheadrightarrow \mathrm{Ind}_P^G(F_{\lambda,P}). \tag{2.67}$$

Il existe sur F_λ une filtration P-équivariante dont les gradués sont des sommes finies de représentations irréductibles de L_P, $F_{\lambda,P}$ apparaissant avec multiplicité 1. Ainsi le noyau K_P de (2.67) est aussi muni d'une filtration dont les gradués sont des sommes finies d'induites $\mathrm{Ind}_P^G(F_{\mu,P})$, avec μ caractère de B apparaissant dans F_λ. D'après la proposition 2.21, le centre $\mathfrak{z}(\mathfrak{g})$ agit par $\chi_{\lambda+\delta}$ sur un sous-quotient de K_P si et seulement si il existe un caractère $\mu \neq \lambda$ apparaissant dans F_λ et $w \in W$ tels que $\mu = w\cdot\lambda$. Mais d'après la proposition 21.3 de [**25**], tous les conjugués sous W d'un tel μ doivent être inférieurs à λ. On doit donc avoir $w^{-1}(w\cdot\lambda) \leq \lambda$, c'est-à-dire $\delta - w^{-1}\delta \leq 0$, c'est-à-dire $\delta \leq w^{-1}\delta$. Ceci ne peut se produire que si $w = 1$ et $\mu = \lambda$. On obtient donc un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} K_1 \arrow[r, hook] \arrow[d] & F_\lambda \otimes_K (\mathrm{Ind}_{P_1}^G(1) \oplus \mathrm{Ind}_{P_2}^G(1)) \arrow[r, two heads] \arrow[d] & \mathrm{Ind}_{P_1}^G(F_{\lambda,1}) \oplus \mathrm{Ind}_{P_2}^G(F_{\lambda,2}) \arrow[d] \\ K_2 \arrow[r, hook] \arrow[d] & F_\lambda \otimes_K \mathrm{Ind}_B^G(1) \arrow[r, two heads] \arrow[d, two heads] & \mathrm{Ind}_B^G(\lambda) \arrow[d, two heads] \\ K_3 \arrow[r, hook] & F_\lambda \otimes_K \mathrm{St}_3^{an} \arrow[r, two heads] & \Sigma(\lambda) \end{tikzcd} \tag{2.68}$$

où les deux lignes verticales de droite sont exactes. On peut donc conclure. □

3. Catégories dérivées et cohomologie localement analytique

Les résultats et rappels de cette partie sont à nouveau valables pour G le groupe des $\mathbb{Q}_p$-points d'un groupe réductif quelconque sur $\mathbb{Q}_p$. Dans la suite, nous aurons besoin de calculer beaucoup de groupes d'extensions entre représentations localement analytiques, et pas uniquement des Ext^1. Plusieurs définitions de ces groupes d'extensions se présentent et le choix n'est pas facile. Jan Kohlhaase définit dans [**32**] des groupes d'extensions localement analytiques à partir d'une certaine catégorie de $D(G)$-modules munie d'une structure exacte. Cette approche permet de nombreux calculs explicites mais manque certaines extensions importantes. C'est pourquoi nous travaillons plutôt avec la catégorie abélienne de tous les $D(G)$-modules. Néanmoins certains résultats de [**32**] nous serons très utiles pour calculer des groupes d'extensions.

3.1. Généralités. — Nous définissons ici les groupes d'extensions que nous utiliserons par la suite et les comparons avec ceux de Jan Kohlhaase. Soit $\mathcal{M}(G)$ la catégorie des $D(G)$-modules.

Définition 3.1. — Si V et W sont deux représentations localement analytiques de G, on munit leurs duaux topologiques forts V' et W' de la structure de $D(G)$-module définie dans l'introduction et on pose

$$\mathrm{Ext}^n_G(V,W) = \mathrm{Ext}^n_{\mathcal{M}(G)}(W',V'). \tag{3.1}$$

Il s'agit du n-ième groupe d'extensions dans la catégorie abélienne des $D(G)$-modules.

Notons $D^b(\mathcal{M}(G))$ la catégorie dérivée bornée des $D(G)$-modules. Comme une catégorie de modules sur un anneau a suffisamment d'injectifs, on a, pour A et B dans $\mathcal{M}(G)$,

$$\mathrm{Ext}^n_{\mathcal{M}(G)}(A,B) = \mathrm{Hom}_{D^b(\mathcal{M}(G))}(A,B[n]). \tag{3.2}$$

La proposition suivante nous permet d'associer à tout élément de $\mathrm{Ext}^n_{\mathcal{M}(G)}(A,B)$ un objet de $D^b(\mathcal{M}(G))$.

Plus généralement, si $\mathcal{C}$ est une catégorie exacte, on peut définir ([**29**, §11]), une catégorie dérivée bornée $D^b(\mathcal{C})$. C'est une catégorie triangulée. Si A et B sont deux objets de $\mathcal{C}$, on pose, pour tout $q \geq 0$, $\mathrm{Ext}^q_{\mathcal{C}}(A,B) = \mathrm{Hom}_{D^b(\mathcal{C})}(A,B[q])$.

Proposition 3.2. — *Soit $\mathcal{C}$ une catégorie exacte. Si A et B sont des objets de $\mathcal{C}$ et c un élément de $\mathrm{Ext}^n_{\mathcal{C}}(A,B)$, il existe un objet E de $D^b(\mathcal{C})$ s'insérant dans un triangle distingué*

$$B \to E \to A[-n+1] \xrightarrow{c[-n+1]} B[1]. \tag{3.3}$$

Un tel E est alors unique à isomorphisme de $D^b(\mathcal{C})$ près.

Démonstration. — C'est presque immédiat à partir des axiomes des catégories triangulées ([**51**, 10.2.1]). L'axiome $(TR1)$ montre que le morphisme $A[-n] \xrightarrow{c[-n]} B$ s'insère dans un triangle exact $A[-n] \xrightarrow{c[-n]} B \xrightarrow{\alpha} E \xrightarrow{\beta}$. L'axiome de rotation $(TR2)$ implique alors que le triangle $B \xrightarrow{\alpha} E \xrightarrow{\beta} A[-n+1] \xrightarrow{-c[-n+1]}$ est exact. On obtient ainsi l'existence de E. Supposons que l'on ait deux triangles exacts $B \xrightarrow{\alpha} E \xrightarrow{\beta} A[-n+1] \xrightarrow{c[-n+1]}$ et $B \xrightarrow{\alpha'} E' \xrightarrow{\beta'} A[-n+1] \xrightarrow{c[-n+1]}$. L'axiome $(TR3)$ montre alors qu'il existe un morphisme $h :\ E \to E'$ tel que (id, id, h) soit un morphisme de complexes

$$\begin{tikzcd} A[-n] \arrow[r, "-c[-n]"'] \arrow[d, "id"] & B \arrow[r, "\alpha"'] \arrow[d, "id"] & E \arrow[r, "\beta"'] \arrow[d, "h"] & A[-n+1] \arrow[d, "id[1]"] \\ A[-n] \arrow[r, "-c[-n]"'] & B \arrow[r, "\alpha'"'] & E' \arrow[r, "\beta'"'] & A[-n+1] \end{tikzcd} \tag{3.4}$$

Le lemme des cinq ([**51**, exercice 10.2.2]) montre alors que h est un isomorphisme. □

Soit $\mathcal{M}_c(G)$ la sous-catégorie pleine de $\mathcal{M}(G)$ constituée des K-espaces vectoriels localement convexes séparés complets munis d'une action séparément continue de $D(G)$. Une flèche dans cette sous-catégorie est dite forte si son image est fermée et si son noyau et son image possèdent des supplémentaires topologiques. Dans [**32**], Jan Kohlhaase munit la catégorie $\mathcal{M}_c(G)$ d'une structure de catégorie exacte en demandant qu'un complexe soit fortement exact s'il est exact en tant que complexe d'espaces vectoriels et si toutes ses différentielles sont fortes. Il prouve que cette catégorie exacte a suffisamment de projectifs et peut donc définir les groupes d'extensions $\mathcal{E}xt^n_G(V, W)$ pour tous les couples d'objets de cette catégorie. Remarquons que si (ρ, V) est une représentation localement analytique avec V espace localement convexe séparé complet, alors ρ induit une action séparément continue de $D(G)$ sur V en utilisant l'application continue

$$C^{an}(G, V) \hookrightarrow \mathcal{L}_b(D(G), K), \tag{3.5}$$

définie dans [**45**, §2], et V peut-être vue comme un objet de $\mathcal{M}_c(G)$.

Le foncteur d'oubli $\mathcal{M}_c(G) \to \mathcal{M}(G)$ est exact, il induit donc un foncteur entre catégories triangulées $D^b(\mathcal{M}_c(G)) \to D^b(\mathcal{M}(G))$. Il induit donc des morphismes

$$\mathcal{E}xt^n_G(A, B) \to \mathrm{Ext}^n_{\mathcal{M}(G)}(A, B). \tag{3.6}$$

Alors, pour tout $V \in \mathcal{M}_c(G)$, les théorèmes 4.8 et 6.6 de [**32**] montrent que cette application est un isomorphisme lorsque A est la représentation triviale

$$\mathcal{E}xt^n_G(1, V) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ext}^n_{\mathcal{M}(G)}(1, V). \tag{3.7}$$

Nous notons donc sans ambiguïté ce groupe $H^n(G, V)$. En fait, on retrouve ainsi les groupes de cohomologie définis par Casselman et Wigner ([**11**] §1 remarque (3)).

Corollaire 3.3. — *Si V est de dimension finie, le groupe $\mathrm{Ext}^n_{\mathcal{M}(G)}(1, V)$ s'identifie au groupe de cohomologie localement analytique $H^n_{an}(G, V)$ défini par Casselman et Wigner.*

Démonstration. — C'est une conséquence de la remarque 2.17 et de la proposition 2.18 de [**32**]. □

La particularité essentielle de la représentation triviale, mise en évidence par Jan Kohlhaase, pour démontrer ce théorème est la propriété $(\mathbb{A})$ de G de [**32**, §4]. Disons qu'un objet F de $\mathcal{M}_c(G)$ satisfait à la condition $(\mathbb{A})$ s'il existe une résolution forte de F par des objets de la forme $D(G) \otimes_{K,\iota} V$ où V est un K-espace vectoriel muni de sa topologie localement convexe la plus fine. On montre alors exactement comme pour [**32**, théorème 4.8] la proposition suivante.

Proposition 3.4. — *Si un objet F de $\mathcal{M}_c(G)$ vérifie $(\mathbb{A})$, alors pour tout $V \in \mathcal{M}_c(G)$, on a un isomorphisme :*

$$\mathcal{E}xt^n_G(F, V) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ext}^n_{\mathcal{M}(G)}(F, V). \tag{3.8}$$

Il se trouve qu'au moins toutes les représentations localement analytiques de dimension finie vérifient la propriété $(\mathbb{A})$. Pour cela, nous devons expliquer comment passer d'une bonne résolution de la représentation triviale à une bonne résolution d'une représentation quelconque de dimension finie. Soient X un K-espace vectoriel localement convexe séparé muni d'une action séparément continue de $D(G)$ et Y un $D(G)$-module de dimension finie muni de la topologie localement convexe la plus fine, qui est aussi la topologie canonique. Il est prouvé dans l'appendice au §3 de [**48**] que l'on peut munir le produit tensoriel $X \otimes_K Y$ d'une action séparément continue diagonale de $D(G)$, c'est-à-dire d'une action prolongeant l'action de $K[G]$ donnée par $\delta_g \cdot (x \otimes y) = (\delta_g x) \otimes (\delta_g y)$. Si f est une application $D(G)$-équivariante continue de X_1 vers X_2, l'application $f \otimes id$ est un morphisme continu de $D(G)$-modules si l'on munit $X_1 \otimes_K Y$ et $X_2 \otimes_K Y$ de l'action diagonale de $D(G)$.

Lemme 3.5. — *Si Y est un $D(G)$-module de dimension finie muni de la topologie localement convexe la plus fine, le $D(G)$-module $D(G) \otimes_K Y$ muni de l'action diagonale est topologiquement isomorphe au $D(G)$-module libre de type fini $D(G) \otimes_K Y$ muni de l'action à gauche $\delta \cdot (\mu \otimes y) = (\delta\mu) \otimes y$.*

Démonstration. — Soient $c : D(G) \to D(G) \otimes_K D(G)/ann(Y)$ l'application définie page 313 de [**48**] et i l'antipode de $D(G)$. Par antipode, nous entendons l'unique endomorphisme continu de $D(G)$ induit par $g \mapsto g^{-1}$. Pour $\mu \in D(G)$ et $y \in Y$, on pose $f(\mu \otimes y) = c(\mu)(1 \otimes y)$ et $g(\mu \otimes y) = (id \otimes i)(c(\mu))(1 \otimes y)$. On vérifie que f est une application $D(G)$-équivariante du $D(G)$-module libre $D(G) \otimes_K Y$ vers $D(G) \otimes_K Y$ muni de l'action diagonale, et que g est $D(G)$-équivariante dans l'autre sens. Pour vérifier que f et g sont réciproque l'une de l'autre, il suffit, par densité de $K[G]$ dans $D(G)$, de le vérifier sur $K[G] \otimes_K Y$. Dans ce cas, on a $f(\delta_h \otimes v) = \delta_h \otimes (\delta_h y)$ et $g(\delta_h \otimes v) = \delta_h \otimes (\delta_{h^{-1}} y)$. □

Lemme 3.6. — *Toute représentation localement analytique de dimension finie du groupe G vérifie la propriété $(\mathbb{A})$.*

Démonstration. — Soit ρ un $D(G)$-module de dimension finie. Le théorème 4.8 de [**32**] montre qu'il existe $P.$ une résolution de 1 par des $D(G)$-modules de la forme $D(G)\otimes_{K,\iota}V$ avec V muni de la topologie localement convexe la plus fine. On munit le complexe $P.\otimes_K\rho$ de l'action diagonale de $D(G)$. Le complexe $P.\otimes_K\rho$ est alors une résolution de ρ par des $D(G)$-modules. Chaque terme est de la forme $(D(G)\otimes_K\rho)\otimes_{K,\iota}V$ avec V espace vectoriel muni de la topologie localement convexe la plus fine. Comme $D(G)\otimes_K\rho\simeq D(G)^{\dim_K\rho}$ en tant que $D(G)$-modules, on obtient le résultat. □

On obtient alors un analogue du théorème 8.18 de [**32**].

Corollaire 3.7. — *Soit P un sous-groupe parabolique de G. Si ρ est une représentation de dimension finie de P et M un objet de $\mathcal{M}_c(G)$, on a un isomorphisme :*

$$\mathcal{E}xt^n_G(D(G)\otimes_{D(P)}\rho',M)\xrightarrow{\sim}\mathrm{Ext}^n_{\mathcal{M}(G)}(D(G)\otimes_{D(P)}\rho',M). \tag{3.9}$$

En particulier, si ρ est une représentation de dimension finie de P et V une représentation localement analytique de G sur un espace de type compact, alors on déduit du théorème 3.2 de [**32**] que

$$\mathcal{E}xt^q_G(V,\mathrm{Ind}_P^G(\rho))\simeq\mathrm{Ext}^q_G(V,\mathrm{Ind}_P^G(\rho)). \tag{3.10}$$

Si χ est un caractère localement analytique du centre de G, on définit

$$\mathrm{Ext}^q_{G,\chi}(V,W)=\mathrm{Ext}^q_{\mathcal{M}(G)_\chi}(W',V'), \tag{3.11}$$

où $\mathcal{M}(G)_\chi$ désigne la sous-catégorie des $D(G)$-modules sur lesquels Z agit par χ^{-1}. On note également $\mathcal{E}xt_{G,\chi}$ le foncteur défini à partir de la sous-catégorie pleine de $\mathcal{M}_c(G)$ constituée des $D(G)$-modules sur lesquels Z agit à travers χ. L'isomorphisme (3.10) est alors vrai avec des caractères centraux

$$\mathcal{E}xt^q_{G,\chi}(V,\mathrm{Ind}_P^G(\rho))\simeq\mathrm{Ext}^q_{G,\chi}(V,\mathrm{Ind}_P^G(\rho)) \tag{3.12}$$

si le centre de G agit sur V et ρ à travers le caractère χ.

Remarque 3.8. — Dans le §4 de [**32**], Jan Kohlhaase montre que les $\mathcal{E}xt^1_G(V,W)$ ne coïncident pas toujours avec $\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{M}(G)}(W',V')$ même lorsque V et W sont des représentations admissibles. On peut considérer l'exemple de la suite exacte

$$0\to\mathrm{Ind}_{B_2}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}(1)^\infty\to\mathrm{Ind}_{B_2}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}(1)\to\mathrm{Ind}_{B_2}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}(\epsilon_0^{-1}\epsilon_1)\to 0 \tag{3.13}$$

qui est non scindée dans la catégorie des K-espaces vectoriels localement convexes. On a

$$\mathcal{E}xt^1_G(\mathrm{Ind}_{B_2}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}(\epsilon_0^{-1}\epsilon_1),\mathrm{Ind}_{B_2}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}(1)^\infty)=0, \tag{3.14}$$

alors que

$$\dim_K\mathrm{Ext}^1_G(\mathrm{Ind}_{B_2}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}(\epsilon_0^{-1}\epsilon_1),\mathrm{Ind}_{B_2}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}(1)^\infty)=1. \tag{3.15}$$

Ces derniers groupes d'extensions sont donc plus adaptés à nos besoins.

Remarque 3.9. — Soit U le foncteur d'oubli de la catégorie $\mathcal{M}_c(G)$ vers la catégorie LC_K des K-espaces vectoriels localement convexes. Il possède un adjoint à gauche F donné par $F(V)=D(G)\hat{\otimes}_{K,\iota}V$. La discussion de [**51**, 8.6.2] montre que le foncteur $\perp_G=F\circ U$ est un cotriple de $\mathcal{M}_c(G)$ et permet, d'après [**51**, 8.6.4] d'associer à tout $V\in\mathcal{M}_c(G)$, un complexe simplicial $\perp_{G,\cdot}V$ dans la catégorie $\mathcal{M}_c(G)$. Il se trouve que le complexe différentiel associé à ce complexe simplical est exactement le complexe noté $B.(G,V)$ par Jan Kohlhaase dans [**32**, §2]. Jan Kohlhaase définit alors les groupes d'homologie de V comme étant l'homologie du complexe $(B_q(G,V)\tilde{\otimes}_{D(G),\iota}K)_{q\geq 0}$. Ces espaces d'homologie sont alors munis de la topologie induite. L'intérêt de l'interprétation de $B.(G,V)$ comme complexe standard associé à un cotriple est d'obtenir une structure de complexe simplicial sur $B.(G,V)$. Les groupes $H^q(G,V)$ sont alors les groupes de cohomologie du complexe $\mathcal{L}_G(B.(G,K),V)$ et ils sont munis de la topologie induite par la topologie forte. De plus si la topologie de V est de type compact, on a, d'après la remarque 2.17 de [**32**], un isomorphisme topologique $\mathrm{Hom}_K(B_q(G,K),V)\simeq C^{an}(G^{q+1},V)$, et donc le complexe $C_u^\cdot=(C^{an}(G^{q+1},V))_{q\geq 0}$ est muni d'une structure de complexe cosimplical. Cette remarque nous sera très utile dans la section suivante pour établir l'existence d'un cup-produit sur la cohomologie localement analytique de la représentation triviale.

3.2. Cup-produits. — Dans cette partie, nous construisons un cup-produit sur l'espace de cohomologie $H^*(G, K)$, dont l'existence est une suggestion de Jan Kohlhaase ([**32**, remarque 8.11]). Pour cela nous utilisons le fait que le complexe dont la cohomologie est $H^*(G, K)$ est muni d'une structure cosimpliciale ([**51**, §8]).

Soit $[n]$ l'ensemble des entiers de 0 à n. Notons Δ la catégorie dont les objets sont les ensembles $[n]$ et les morphismes de $[n]$ dans $[m]$ sont les applications croissantes. Un complexe cosimplicial C est un foncteur covariant de la catégorie Δ dans la catégorie des $D(G)$-modules. On note C^n l'image de $[n]$. D'après le corollaire 8.1.4 de [**51**], un complexe cosimplicial est une suite de $D(G)$-modules $(C^n)_{n\geq 0}$ et la donnée, pour tout $n \in \mathbb{N}$, d'opérateurs $\partial^i : C^{n-1} \to C^n$ et $\sigma^i : C^{n+1} \to C^n$ pour i variant entre 0 et n et satisfaisant aux relations de ce même corollaire. Si C est un complexe cosimplicial, le complexe associé est le complexe $(C^n)_{n\geq 0}$ muni des différentielles

$$d^n = \sum_{i=0}^{n+1} (-1)^i \partial^i. \tag{3.16}$$

Soit G un groupe de Lie localement $\mathbb{Q}_p$-analytique. Posons $C_u^n(G) = C^{an}(G^{n+1}, K)$ le K-espace vectoriel des applications localement analytiques de G^{n+1} dans K. La remarque 3.9 montre qu'il existe des applications ∂^i et σ^i G-équivariantes qui font de $C_u^\cdot(G)$ une résolution cosimpliciale de la représentation triviale de 1. Posons $C^\cdot(G) = C_u^\cdot(G)^G$. Muni de la restriction des applications ∂^i et σ^i, c'est un complexe cosimplical de K-espaces vectoriels et sa cohomologie est la cohomologie localement analytique $H^q(G, 1)$.

Soient G et H deux groupes de Lie $\mathbb{Q}_p$-analytiques dont la représentation triviale vérifie ($\mathbb{A}$).

***Théorème 3.10* (Formule de Künneth).** — *On a un isomorphisme*

$$\sum_{p+q=n} i_{p,q} : H^p(G, K) \otimes_K H^q(H, K) \xrightarrow{\sim} H^{p+q}(G \times H, K). \tag{3.17}$$

De plus le diagramme suivant est commutatif

$$\begin{tikzcd} H^p(G,K) \otimes H^q(H,K) \arrow[r, "i_{p,q}"] \arrow[d, "(-1)^{pq}"'] & H^{p+q}(G \times H, K) \\ H^q(H,K) \otimes H^q(G,K) \arrow[ur, "i_{q,p}"'] & \end{tikzcd} \tag{3.18}$$

Démonstration. — La somme

$$\bigoplus_{p+q=n} H^p(C^\cdot(G)) \otimes_K H^q(C^\cdot(H))$$

est la cohomologie du complexe total $Tot^\cdot(C^\cdot(G) \otimes_K C^\cdot(H))$ associé au bicomplexe cosimplicial $B^{\cdot\cdot} = C^\cdot(G) \otimes_K C^\cdot(H)$. Nous allons montrer que la cohomologie de ce bicomplexe est la même que celle du bicomplexe $\hat{B}^{\cdot\cdot} = C^\cdot(G)\hat{\otimes}_{K,\pi} C^\cdot(H)$. Notons $E_2^{\cdot\cdot}(B)$ les termes de la première suite spectrale associée à $B^{\cdot\cdot}$ et $E_2^{\cdot\cdot}(\hat{B})$ ceux de la première suite spectrale associée à $\hat{B}^{\cdot\cdot}$. Choisissons une résolution forte $Y_\bullet$ de 1 par des $D(G)$-modules de la forme $D(G) \otimes_K V$ où V est un espace vectoriel muni de sa topologie localement convexe la plus fine. Choisissons de même une telle résolution $Z_\bullet$ pour 1 par des $D(H)$-modules. On a donc des morphismes de complexes de résolutions $B_\bullet(G, 1) \to Y_\bullet$ et $B_\bullet(H, 1) \to 1$ donnant lieu à un quasi-isomorphisme de bicomplexes $\mathcal{L}_{G\times H}(Y_\bullet \hat{\otimes}_{K,\iota} Z_\bullet, K) \to \hat{B}^{\cdot\cdot}$. La première suite spectrale assocoiée au bicomplexe $\mathcal{L}_{G\times H}(Y_\bullet \hat{\otimes}_{K,\iota} Z_\bullet, K)$ est celle de [**32**, (67)], ainsi l'inclusion de $B^{\cdot\cdot}$ dans $\hat{B}^{\cdot\cdot}$ induit un isomorphisme au niveau des E_2, donc en cohomologie. Soit $diag(\hat{B}^{\cdot\cdot})$ le complexe cosimplicial diagonal de $\hat{B}^{\cdot\cdot}$ défini dans [**51**, §8.5]. Il s'agit de $diag(\hat{B}^{\cdot\cdot})^p = \hat{B}^{p,p} = C^{an}(G^p, K)\hat{\otimes}_{K,\pi} C^{an}(H^p, K)$ muni de la structure simpliciale évidente. D'après le théorème d'Eilenberg-Zilber ([**51**, théorème 8.5.1]), les complexes $diag(\hat{B}^{\cdot\cdot})$ et $Tot(\hat{B}^{\cdot\cdot})$ sont homotopes. De plus, comme $C^{an}(G^p, K)\hat{\otimes}_{K,\pi} C^{an}(H^q, K) \simeq C^{an}(G^p \times H^q, K)$, le complexe cosimplical $diag(\hat{B}^{\cdot\cdot})$ est isomorphe à $C^\cdot(G \times H)$. Au final, on a un isomorphisme naturel

$$H^p(G, K) \otimes_K H^q(H, K) \xrightarrow{i_{p,q}} H^{p+q}(G \times H, K). \tag{3.19}$$

La deuxième assertion est un calcul simple sur le bicomplexe $C^\cdot(G) \otimes C^\cdot(H)$. □

Si on note D_G l'application diagonale de G dans $G \times G$. On définit l'opération de cup-produit sur $H^*(G, K)$ comme étant

$$\alpha \cup \beta = D_G^*(i_{p,q}(\alpha \otimes \beta)) \tag{3.20}$$

pour $\alpha \in H^p(G, K)$ et $\beta \in H^q(H, K)$. Le théorème 3.10 montre alors que le cup-produit fait de $H^*(G, K)$ une K-algèbre graduée anti-commutative. De plus l'isomorphisme de Künneth

$$H^*(G, K) \otimes_K H^*(H, K) \xrightarrow{\sim} H^*(G \times H, K) \tag{3.21}$$

est un isomorphisme d'algèbres.

Corollaire 3.11. — *Soit G le groupe des $\mathbb{Q}_p$-points d'un groupe réductif défini sur $\mathbb{Q}_p$. Soit Z le centre de G et D son groupe dérivé. On a un isomorphisme d'algèbres graduées*

$$H^*(G, K) \xrightarrow{\sim} H^*(Z, K) \otimes_K H^*(D, K) \tag{3.22}$$

provenant de l'application $Z \times D \to G$. De plus l'algèbre de cohomologie $H^*(Z, K)$ est isomorphe à l'algèbre extérieure graduée $\bigwedge^* \mathrm{Hom}(Z, K)$.

Démonstration. — Montrons d'abord que $H^*(Z, K) \simeq \bigwedge^* \mathrm{Hom}(Z, K)$. On utilise $H^1(Z, K) = \mathrm{Hom}(Z, K)$, ainsi que l'isomorphisme $Z \simeq (\mathbb{Q}_p^\times)^r \simeq (\mathbb{Z}_p^\times)^r \times \mathbb{Z}^r$. D'après l'isomorphisme (3.21), il suffit de prouver que $H^q(\mathbb{Z}, K) = H^q(\mathbb{Z}_p^\times, K) = 0$ pour $q \geq 2$. Dans le premier cas, c'est une conséquence de [**51**, exemple 6.1.4], et dans le deuxième cas, de la décomposition $H^*(\mathbb{Z}_p^\times, K) = H^*(\mathbb{Z}/(p-1)\mathbb{Z}, K) \otimes H^*(\mathbb{Z}_p, K)$, du corollaire 4.5 de [**32**], ainsi que du fait que si H est un groupe fini, $H^q(H, K) = 0$ si $q \geq 1$ ([**51**, proposition 6.1.10]). Comme le noyau et le conoyau de $Z \times D \to G$ sont des groupes finis, la deuxième assertion du corollaire résulte de la nullité de la cohomologie d'un groupe fini et de la suite spectrale (67) de [**32**]. □

3.3. Comparaison avec l'homologie d'algèbres de Lie. — Nous faisons quelques rappels sur la cohomologie d'algèbres de Lie et montrons qu'elle permet, dans certains cas, de déterminer une partie de la cohomologie localement analytique d'un groupe de Lie localement $\mathbb{Q}_p$-analytique.

Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie définie sur $\mathbb{Q}_p$. On note $\mathfrak{g} - \mathrm{mod}$ la catégorie des K-espaces vectoriels munis d'une action de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$. Soit $U(\mathfrak{g})$ l'algèbre enveloppante de $\mathfrak{g}$. La catégorie $\mathfrak{g} - \mathrm{mod}$ est équivalente à la catégorie des $U(\mathfrak{g})$-modules. C'est une catégorie abélienne. Le foncteur $M \mapsto 1 \otimes_{U(\mathfrak{g})} M$ de $\mathfrak{g} - \mathrm{mod}$ vers la catégorie des K-espaces vectoriels est exact à droite, on note $H_q(\mathfrak{g}, M)$ son q-ième foncteur dérivé à gauche. De même le foncteur $M \mapsto M^{\mathfrak{g}}$ est exact à gauche et on note $H^q(\mathfrak{g}, M)$ son q-ième foncteur dérivé à droite.

Considérons U le foncteur d'oubli de la catégorie $\mathfrak{g} - \mathrm{mod}$ vers la catégorie Vec_K des K-espaces vectoriels. Il possède un adjoint à gauche donné par $F(V) = U(\mathfrak{g}) \otimes_K V$. Ainsi on obtient un cotriple $\perp_{\mathfrak{g}} = FU$ sur la catégorie $\mathfrak{g}-\mathrm{mod}$. Notons $S_\cdot(\mathfrak{g})$ le complexe simplicial standard associé à la représentation triviale de $\mathfrak{g}$ au moyen de ce cotriple. Comme l'image essentielle de F est la catégorie des $U(\mathfrak{g})$-modules libres, la proposition 8.6.13 de [**51**] nous montre que le complexe différentiel $S_\cdot(\mathfrak{g})$ est une résolution libre du $\mathfrak{g}$-module trivial. Ainsi on peut calculer l'homologie $H_q(\mathfrak{g}, V)$ comme étant l'homologie du complexe $S_\cdot(\mathfrak{g}) \otimes_{U(\mathfrak{g})} K$ et la cohomologie $H^q(\mathfrak{g}, V)$ comme la cohomologie du complexe $\mathrm{Hom}_{U(\mathfrak{g})}(S_\cdot(\mathfrak{g}), V)$.

Posons $S^\cdot(\mathfrak{g}) = \mathrm{Hom}_K(S_\cdot(\mathfrak{g}), K)$, $\partial^i(f) = f \circ \partial_i$ et $\sigma^i(f) = f \circ \sigma_i$. On munit ainsi $S^\cdot(\mathfrak{g})$ d'une structure de complexe cosimplicial, résolution libre du $\mathfrak{g}$-module trivial.

Soient $\mathfrak{g}$ et $\mathfrak{h}$ deux algèbres de Lie. D'après le théorème d'Eilenberg-Zilber, le complexe total associé au complexe bi-cosimplicial $S^\cdot(\mathfrak{g}) \otimes_K S^\cdot(\mathfrak{h})$ est naturellement homotope au complexe diagonal associé, c'est-à-dire le complexe

$$(\mathrm{Hom}_K(S_q(\mathfrak{g}, K), K) \otimes \mathrm{Hom}_K(S_q(\mathfrak{h}), K) \simeq \mathrm{Hom}_K(S_q(\mathfrak{g}) \otimes_K S_q(\mathfrak{h}), K))_{q \geq 0}. \tag{3.23}$$

Comme on a, pour V un $\mathfrak{g}$-module et W un $\mathfrak{h}$-module, $\perp_{\mathfrak{g}}(V) \otimes_K \perp_{\mathfrak{h}}(W) \simeq \perp_{\mathfrak{g} \times \mathfrak{h}}(V \otimes_K W)$ en tant que $\mathfrak{g} \times \mathfrak{h}$-modules, les complexes de $\mathfrak{g} \times \mathfrak{h}$-modules $diag(S^\cdot(\mathfrak{g}) \otimes S^\cdot(\mathfrak{h}))$ et $S^\cdot(\mathfrak{g} \times \mathfrak{h})$ sont isomorphes. Au final, on obtient un isomorphisme naturel d'espaces vectoriels gradués

$$H^*(\mathfrak{g}, K) \otimes H^*(\mathfrak{h}, K) \xrightarrow{\sim} H^*(\mathfrak{g} \otimes \mathfrak{h}, K). \tag{3.24}$$

On peut donc définir une application

$$\cup : \ H^*(\mathfrak{g}, K) \otimes_K H^*(\mathfrak{g}, K) \to H^*(\mathfrak{g}, K) \tag{3.25}$$

en composant l'isomorphisme (3.24) avec le morphisme $H^*(\mathfrak{g}\times\mathfrak{g},K) \to H^*(\mathfrak{g},K)$ provenant de l'inclusion diagonale $\mathfrak{g} \hookrightarrow \mathfrak{g}\times\mathfrak{g}$. On appelle cette composée le cup-produit, elle munit le K-espace vectoriel gradué $H^*(\mathfrak{g},K)$ d'une structure de K-algèbre graduée.

Supposons maintenant que $\mathfrak{g}$ soit une algèbre de Lie réductive. D'après le théorème 9.3 de [**34**], on a un isomorphisme $H_p(\mathfrak{g},K) \simeq (\bigwedge^p \mathfrak{g})^{\mathfrak{g}}$, ce qui munit le K-espace vectoriel gradué $H_*(\mathfrak{g},K) \simeq (\bigwedge^* \mathfrak{g})^{\mathfrak{g}}$ d'une structure de K-algèbre graduée. On note $D(\mathfrak{g})$ le K-sous-espace de $H_*(\mathfrak{g},K)$ engendré par les éléments $u \wedge v$, où u et v parcourent les éléments de $H_*(\mathfrak{g},K)$ de degré supérieur ou égal à 1. On note $P(\mathfrak{g})'$ le sous-espace gradué orthogonal de $H^*(\mathfrak{g},K)$, c'est l'espace des éléments primitifs associés à $\mathfrak{g}$. Si on pose $P^n(\mathfrak{g}) = P(\mathfrak{g})' \cap H^n(\mathfrak{g},K)$, on a $P(\mathfrak{g})' = \bigoplus_n P^n(\mathfrak{g})$.

Théorème 3.12 **(Koszul)**. — *On a un isomorphisme de K-algèbres graduées*

$$\bigwedge\nolimits^* P(\mathfrak{g})' \xrightarrow{\sim} H^*(\mathfrak{g},K). \tag{3.26}$$

De plus, si φ est un morphisme d'algèbres de Lie réductives $\mathfrak{h} \to \mathfrak{g}$, le morphisme φ^* de $H^*(\mathfrak{g},K)$ vers $H^*(\mathfrak{h},K)$ envoie $P(\mathfrak{g})'$ dans $P(\mathfrak{h})'$ et est donc entièrement déterminé par sa restriction à $P(\mathfrak{g})'$.

Koszul montre aussi ([**34**, théorème 10.1]) que si $P^n(\mathfrak{g})$ est non nul, n est nécessairement impair. De plus le théorème 11.1 de [**34**] montre que si $\mathfrak{g}$ est semi-simple, $P^1(\mathfrak{g}) = 0$. On en déduit que pour $\mathfrak{g}$ semi-simple

$$H^1(\mathfrak{g},K) = H^2(\mathfrak{g},K) = 0. \tag{3.27}$$

Exemple 3.13. — Posons $\mathfrak{h} = \mathfrak{sl}_2$ et $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_3$. L'espace $P^3(\mathfrak{g})$ s'identifie à l'espace des applications trilinéaires alternées invariantes de $\mathfrak{g}$ dans K. C'est un espace de dimension 1 engendré par $(X,Y,Z) \mapsto \mathrm{Tr}(X[Y,Z])$. Soient φ_1 et φ_2 les deux injections de $\mathfrak{h}$ dans $\mathfrak{g}$ définie par $M \mapsto \left(\begin{smallmatrix} M & 0 \\ 0 & 0\end{smallmatrix}\right)$ et $M \mapsto \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & M\end{smallmatrix}\right)$. L'image de cette forme trilinéaire invariante par φ_1^* et φ_2^* est la même, ainsi on a $\varphi_1^* = \varphi_2^*$, et ces applications induisent un isomorphisme de restriction $H^3(\mathfrak{g},K) \xrightarrow{\sim} H^3(\mathfrak{h},K)$.

Dans certains cas, il nous sera utile de disposer d'une topologie sur les espaces de cohomologie d'algèbres de Lie. En effet, soit V un K-espace vectoriel localement convexe muni d'une action continue d'algèbre de Lie, c'est-à-dire une action d'algèbre de Lie telle que l'application $\mathfrak{g} \times V \to V$ soit continue, $\mathfrak{g}$ étant muni de sa topologie canonique d'espace vectoriel de dimension finie. On munit alors les espaces $S_p(\mathfrak{g})$ de la topologie localement convexe la plus fine. Comme cette topologie est la topologie limite inductive obtenue en écrivant V comme la limite inductive de ses sous-espaces de dimension finie, et que l'action de $\mathfrak{g}$ est localement finie, l'action de $\mathfrak{g}$ sur $S_p(\mathfrak{g})$ est continue. On munit $S_p(\mathfrak{g}) \otimes_K V$ de la topologie produit tensoriel inductive ([**42**, §17]) et $S_p(\mathfrak{g},V) = S_p(\mathfrak{g}) \otimes_{U(\mathfrak{g})} V$ de la topologie quotient. Les différentielles du complexe $S.(\mathfrak{g},V)$ sont continues pour ces topologies. On munit les espaces $H_p(\mathfrak{g},V)$ de la topologie quotient. En général il n'y a pas de raison pour que ces espaces soient séparés. De même, l'espace $\mathrm{Hom}_K(S_p(\mathfrak{g}),V)$ est également l'espace des applications linéaires continues de $S_p(\mathfrak{g})$ vers V, on peut le munir de la topologie forte, ce qui munit les espaces $H^q(\mathfrak{g},V)$ d'une topologie.

Supposons maintenant que $\mathfrak{g}$ est l'algèbre de Lie d'un groupe de Lie $\mathbb{Q}_p$-analytique G. L'inclusion $U(\mathfrak{g}) \hookrightarrow D(G)$ est continue si on munit $U(\mathfrak{g})$ de la topologie localement convexe la plus fine. On en déduit, pour tout $V \in \mathcal{M}_c(G)$, une application $\perp_{\mathfrak{g}}(V) \to \perp_G(V)$ qui, par fonctorialité, induit des morphismes de complexes simpliciaux $S.(\mathfrak{g},V) \to B.(G,V)$ et donc des applications $H_q(\mathfrak{g},V) \to H_q(G,V)$. De même on obtient des applications $H^q(G,V) \to H^q(\mathfrak{g},V)$. Il est facile de voir qu'avec les topologies que nous avons définies, ces applications sont continues. De plus, si V est la représentation triviale, ces morphismes sont des morphismes d'algèbres graduées puisqu'ils respectent la structure simpliciale des complexes. Enfin, si V est de dimension finie et G est le groupe des $\mathbb{Q}_p$-points d'un groupe semi-simple défini sur $\mathbb{Q}_p$, les preuves des théorèmes 1 et 3 de [**11**] montrent que le morphisme

$$H^q(G,V) \to H^q(\mathfrak{g},V) \tag{3.28}$$

est un isomorphisme.

Corollaire 3.14. — *Soit G le groupe des $\mathbb{Q}_p$-points d'un groupe réductif défini sur $\mathbb{Q}_p$. Soit Z le centre de G et D son groupe dérivé. L'algèbre de cohomologie $H^*(G,K)$ est isomorphe à l'algèbre extérieure graduée de l'espace vectoriel gradué*

$$\mathrm{Hom}(Z,K) \oplus P(\mathfrak{d})', \tag{3.29}$$

où les éléments de $\mathrm{Hom}(Z,K)$ *ont degré* 1.

Enfin, pour calculer explicitement la cohomologie d'algèbres de Lie, il est utile d'avoir une résolution libre du $\mathfrak{g}$-module trivial plus petite que la résolution standard. Il s'agit de la résolution de Chevalley-Eilenberg.

Pour $p \geq$, posons $V_p(\mathfrak{g}) = U(\mathfrak{g}) \otimes_K \bigwedge^p \mathfrak{g}$ muni de l'action diagonale de $\mathfrak{g}$. On définit une application $d_p : V_p(\mathfrak{g}) \to V_{p-1}(\mathfrak{g})$ pour $p \geq 1$ en posant

$$d(u \otimes x_1 \wedge \cdots \wedge x_p) = \sum_{i=1}^{p} (-1)^{i+1} u x_i \otimes x_1 \wedge \cdots \wedge \hat{x}_i \wedge \cdots \wedge x_p + \sum_{1 \leq i < j \leq p} (-1)^{i+j} u \otimes [x_i, x_j] \wedge x_1 \wedge \cdots \wedge \hat{x}_i \wedge \cdots \wedge \hat{x}_j \wedge x_p. \quad (3.30)$$

Les applications d_p sont $\mathfrak{g}$-équivariantes. De plus, si ϵ est l'application augmentation $V_0(\mathfrak{g}) = U(\mathfrak{g}) \to K$, le théorème 7.7.2 de [**51**] montre que $V_\cdot(\mathfrak{g}) \xrightarrow{\epsilon} K$ est une résolution projective du K-module trivial. On l'appelle la résolution de Chevalley-Eilenberg.

Si M est un $\mathfrak{g}$-module, on pose $(V_\cdot(\mathfrak{g}, M), d_\cdot) = M \otimes_{U(\mathfrak{g})} V_\cdot(\mathfrak{g})$ le complexe obtenu par application du foncteur $M \otimes_{U(\mathfrak{g})} \cdot$ et $(V^\cdot(\mathfrak{g}, M), \delta^\cdot)$ le complexe obtenu par application du foncteur $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(\cdot, M)$. L'homologie de M est alors l'homologie du complexe $V_\cdot(\mathfrak{g}, M)$ et la cohomologie de M, la cohomologie de $V^\cdot(\mathfrak{g}, M)$. Nous avons des isomorphismes de K-espaces vectoriels

$$V_p(\mathfrak{g}, M) \simeq M \otimes_K \bigwedge^p \mathfrak{g}, \quad V^p(\mathfrak{g}, M) \simeq \mathrm{Hom}_K(\bigwedge^p \mathfrak{g}, M), \quad (3.31)$$

sous lesquels les différentielles se réécrivent

$$d_p(v \otimes x_1 \wedge \cdots \wedge x_p) = \sum_{i=1}^{p} (-1)^{i+1} x_i v \otimes x_1 \wedge \cdots \wedge \hat{x}_i \wedge \cdots \wedge x_p + \sum_{1 \leq i < j \leq p} (-1)^{i+j} v \otimes [x_i, x_j] \wedge x_1 \wedge \cdots \wedge \hat{x}_i \wedge \cdots \wedge \hat{x}_j \wedge x_p \quad (3.32)$$

$$\delta^p(f)(x_1, \ldots, x_p) = \sum_{i=1}^{p} (-1)^{i+1} x_i f(x_1, \ldots, \hat{x}_i, \ldots, x_p) + \sum_{1 \leq i < j \leq p} (-1)^{i+j} f([x_i, x_j], x_1, \ldots, \hat{x}_i, \ldots, \hat{x}_j, \ldots, x_p). \quad (3.33)$$

Une conséquence immédiate de l'existence de cette résolution est que si V est un $\mathfrak{g}$-module, on a

$$H_q(\mathfrak{g}, V) = H^q(\mathfrak{g}, V) = 0 \quad (3.34)$$

dès que $q > \dim \mathfrak{g}$. De plus si $\mathfrak{g}$ est l'unique algèbre de Lie de dimension 1, $H_0(\mathfrak{g}, V)$ est l'espace des coinvariants d'un élément non nul de $\mathfrak{g}$ et $H_1(\mathfrak{g}, V)$ est l'espace des invariants d'un élément non nul de $\mathfrak{g}$.

Si $f \in V^p(\mathfrak{g}, M')$ et $v \otimes x \in V_p(\mathfrak{g}, M)$, on pose $\langle f, v \otimes x \rangle = f(x)(v)$. On a alors

$$\langle \delta^p(f), v \otimes x \rangle + \langle f, d_p(v \otimes x) \rangle = 0. \quad (3.35)$$

On obtient donc un accouplement

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : H^p(\mathfrak{g}, M') \times H_p(\mathfrak{g}, M) \to K, \quad (3.36)$$

qui induit un isomorphisme

$$H^n(\mathfrak{g}, M') \simeq H_n(\mathfrak{g}, M)' \quad (3.37)$$

d'après [**30**, (6.29)]. En particulier, si M est de dimension finie sur K, on a également $H^n(\mathfrak{g}, M) \simeq H_n(\mathfrak{g}, M')'$.

3.4. Un résultat de dualité. — Lorsque N est le groupe des $\mathbb{Q}_p$-points d'un groupe algébrique unipotent défini sur $\mathbb{Q}_p$, Jan Kohlhaase prouve ([**32**, théorème 7.1])

$$H_q(\mathfrak{n}, M)_N \simeq H_q(N, M), \quad (3.38)$$

où $(\cdot)_N$ désigne le foncteur des N-coinvariants. Cet isomorphisme est très utile pour calculer cette homologie et n'a pas d'analogue pour la cohomologie (sauf dans le cas d'un groupe compact, [**32**, théorème 4.10]). C'est pourquoi il est nécessaire de lier par dualité homologie et cohomologie. Les résultats de cette partie s'inspirent d'un résultat de Jan Kohlhaase présent dans une première version de [**32**].

Théorème 3.15. — *Soit H un groupe de Lie localement $\mathbb{Q}_p$-analytique résoluble tel que pour tout sous-groupe compact ouvert H_0, H/H_0 soit dénombrable. Soit Σ une représentation localement analytique de H sur un espace de type compact. Si tous les $H_q(H,\Sigma)$ ou tous les $H^q(H,\Sigma')$ sont des espaces topologiques séparés, pour la topologie définie dans la remarque 3.9, alors $H_q(H,\Sigma)$ est de type compact, $H^q(H,\Sigma')$ est un espace de Fréchet nucléaire et on a un isomorphisme topologique*

$$H^q(H,\Sigma') \simeq H_q(H,\Sigma)'. \tag{3.39}$$

Pour prouver ce théorème, nous avons besoin de préciser le théorème 6.5 de [**32**]. Soit $(\mathbb{A}_d)$ la propriété suivante : la représentation triviale de H a une résolution fortement exacte par des $D(H)$-modules de la forme $D(H)\hat{\otimes}_{K,\iota}V$, où V est un K-espace vectoriel de dimension dénombrable muni de la topologie la plus fine.

Lemme 3.16. — *Sous les hypothèses du théorème 3.15, le groupe H vérifie la condition $(\mathbb{A}_d)$.*

Démonstration. — On se ramène, comme dans la preuve de [**32**, 6.5], au cas où H est commutatif. Soit alors H_0 un sous-groupe compact ouvert distingué dans H. L'espace $D(H/H_0)$ est l'algèbre du groupe discret H/H_0, donc est de dimension dénombrable, il en est donc de même des espaces

$$B_q(H/H_0,1) \simeq K[H/H_0] \otimes_K \cdots \otimes_K K[H/H_0]. \tag{3.40}$$

La résolution $B_\cdot(H/H_0,1)$ est alors une résolution fortement exacte de 1. Comme chaque $B_q(H/H_0,1)$ est de dimension dénombrable, on voit que H/H_0 vérifie $(\mathbb{A}_d)$. De plus d'après le théorème 4.4 de [**32**], le groupe H_0 vérifie aussi $(\mathbb{A}_d)$. La preuve de [**32**, 6.2] montre que H vérifie également $(\mathbb{A}_d)$. □

Démonstration du théorème 3.15. — Soit $P_\cdot$ une résolution fortement exacte de 1 par des $D(H)$-modules du type $D(H)\hat{\otimes}_{D(H),\iota}V$, avec V un espace vectoriel localement convexe de dimension dénombrable muni de la topologie localement convexe la plus fine. D'après [**32**, Proposition 1.4] et la continuité de l'action de $D(H)$ sur P_q et Σ, on a un isomorphisme topologique

$$\mathcal{L}_H(P_q,\Sigma') \simeq \mathcal{L}(P_q\tilde{\otimes}_{D(H),\iota}\Sigma, K) \tag{3.41}$$

$$\simeq (P_q\tilde{\otimes}_{D(H),\iota}\Sigma)'. \tag{3.42}$$

Posons $P_q = D(H)\hat{\otimes}_{K,\iota}V$ avec V de dimension dénombrable muni de la topologie localement convexe la plus fine. D'après le lemme 2.6 de [**32**], $P_q\tilde{\otimes}_{D(H),\iota}\Sigma \simeq V\hat{\otimes}_{K,\iota}\Sigma$. Le corollaire 1.2.14 de [**33**] montre que cet espace localement convexe est une somme directe dénombrable d'espaces de type compact. D'après [**45**, proposition 1.2(ii)], c'est lui-même un espace de type compact. Notons $(C_\cdot, d_\cdot)$ le complexe $P_\cdot\tilde{\otimes}_{D(H),\iota}\Sigma$. C'est un complexe d'espaces localement convexes de type compact à différentielles continues. De plus, ses espaces de cohomologie sont les $H_q(H,\Sigma)$. Par hypothèse, leur topologie est séparée, ce qui implique que pour tout q, $\mathrm{Im}(d_{q+1})$ est un sous-espace fermé de $\ker(d_q)$, donc de C_q. D'après la proposition 8.8 de [**42**], toute surjection continue entre deux espaces de type compact est stricte, donc les flèches du complexe $C_\cdot$ sont strictes. Posons $D^q = (C_q)'$ et δ^q la flèche duale de d_{q+1}. Le complexe $(D^\cdot, \delta^\cdot)$ est donc un complexe d'espaces de Fréchet nucléaires dont les flèches sont strictes. On conclut alors en appliquant le corollaire 1.4 de [**45**]. Si on part de l'hypothèse que ce sont les espaces $H^q(H,\Sigma')$ qui sont séparés, on sait que ce sont les flèches δ^q qui ont une image fermées. Encore une fois, une surjection continue entre espaces de Fréchet est stricte, donc les flèches δ^q sont strictes et le même raisonnement montre que les flèches d_q le sont aussi. On utilise alors l'exactitude du passage au dual fort pour les suites exactes strictes d'espaces localement convexes de type compact ([**45**, Proposition 1.2(i)]). □

Revenons au cas où N est le groupe des $\mathbb{Q}_p$-points d'un groupe algébrique unipotent sur $\mathbb{Q}_p$. Pour pouvoir utiliser le théorème 7.1 de [**32**] afin de déterminer la topologie de $H_q(N,\Sigma)$, il faut pouvoir comparer cette topologie avec celle de $H_q(\mathfrak{n},\Sigma)$. Tout d'abord les groupes de cohomologie $H_q(\mathfrak{n},\Sigma)$ sont les groupes de cohomologie du complexe de Chevalley-Eilenberg $\bigwedge^\cdot \mathfrak{n}\otimes\Sigma$. On les munit de la topologie produit tensoriel et les espaces $H_q(\mathfrak{n},\Sigma)$ sont alors munis de la topologie de sous-quotient. Soit $P_\cdot$ une résolution du N-module trivial comme en $(\mathbb{A}_d)$. Rappelons que le complexe de Chevalley-Eilenberg $V_\cdot(\mathfrak{n})$ est une résolution projective du $\mathfrak{n}$-module trivial par des $U(\mathfrak{n})$-modules libres. On obtient donc un morphisme de complexes $V_\cdot(\mathfrak{n}) \to P_\cdot$, continu car $V_p(\mathfrak{n})$ est muni de la topologie localement convexe la plus fine. On obtient donc un morphisme continu $\bigwedge^\cdot \mathfrak{n}\otimes\Sigma \to P_\cdot\tilde{\otimes}_{D(N),\iota}\Sigma$, induisant l'application $H_q(\mathfrak{n},\Sigma) \to H_q(N,\Sigma)$ définie au paragraphe précédent.

Lemme 3.17. — *Soient $(A., d.)$ et $(B., \delta.)$ deux complexes de K-espaces localement convexes de type compact, et $f : A. \to B.$ un morphisme continu induisant une surjection en homologie. Le morphisme induit $H.(A) \to H.(B)$ est alors strict.*

Démonstration. — Comme f_q induit une surjection en homologie, l'application $F_q = f_q + \delta_{q+1}$ induit une surjection continue $\ker d_q \oplus B_{q+1} \to \ker \delta_q$ pour tout q. Or les espaces $\ker d_q$ et $\ker \delta_q$ étant des sous-espaces fermés de A_q et B_q, ils sont de type compact. On en conclut que l'application F_q est une application stricte de $\ker d_q \oplus B_{q+1}$ sur $\ker \delta_q$ car toute application entre espaces de type compact est stricte. Les espaces $H_q(A) = (\ker d_q \oplus B_{q+1})/(\mathrm{Im} d_{q+1} \oplus B_{q+1})$ et $H_q(B) = \ker \delta_q / \mathrm{Im}\delta_{q+1}$ étant alors munis de la topologie quotient, on en conclut que $H_q(f)$, qui est aussi le quotient de F_q, est stricte. □

Le théorème 7.1 de [**32**] nous permet d'obtenir le corollaire suivant.

Corollaire 3.18. — *Si l'espace topologique de Σ est de type compact et si $H_q(\mathfrak{n}, \Sigma)_N$ est séparé, c'est aussi le cas de $H_q(N, \Sigma)$ et ces espaces sont alors topologiquement isomorphes. De plus, on a un isomorphisme topologique*

$$H^q(N, \Sigma') \simeq H_q(N, \Sigma)'. \tag{3.43}$$

Le même raisonnement que dans la preuve du théorème 3.15 nous permet de conclure que si Σ est une représentation de N sur un espace de type compact, alors si les $H_q(\mathfrak{n}, \Sigma)$ ou les $H^q(\mathfrak{n}, \Sigma')$ sont tous séparés, on a des isomorphismes topologiques

$$H^q(\mathfrak{n}, \Sigma') \simeq H_q(\mathfrak{n}, \Sigma)' \tag{3.44}$$

et ces espaces sont des espaces de Fréchet nucléaires, donc réflexifs.

4. Calculs d'extensions localement analytiques

4.1. Une conséquence de la dualité de Schneider et Teitelbaum. — Dans [**48**], Peter Schneider et Jeremy Teitelbaum ont défini un foncteur de dualité sur la catégorie dérivée des $D(G)$-modules. Dans cette partie nous utilisons ce foncteur pour prouver la nullité de certains espaces d'extensions.

Supposons que G soit le groupe des $\mathbb{Q}_p$-points d'un groupe algébrique linéaire connexe sur $\mathbb{Q}_p$. Soient Δ_G la représentation de dimension 1 de G par adjonction sur $\bigwedge^{\dim_{\mathbb{Q}_p} \mathfrak{g}} \mathfrak{g}$, $\delta_G = |\Delta_G|$ et $\mathfrak{d}_G = \Delta_G \otimes \delta_G$. Notons encore $\mathfrak{d}_G$ le $D(G)$-bimodule de dimension 1 sur lequel $D(G)$ agit à gauche par le caractère $\mathfrak{d}_G$ et trivialement à droite. De même $\mathcal{D}_c(G)$, le dual topologique de l'espace $C_c(G, K)$ des fonctions localement analytiques à support compact, est un $D(G)$-bimodule. Notons $\mathcal{C}_G$ la sous-catégorie pleine de $\mathcal{M}(G)$ dont les objets sont les $D(G)$-modules coadmissibles, et $D^b_{\mathcal{C}_G}(\mathcal{M}(G))$ la sous-catégorie pleine de $D^b(\mathcal{M}(G))$ des objets dont la cohomologie est à valeurs dans $\mathcal{C}_G$. Dans [**48**], Peter Schneider et Jeremy Teitelbaum définissent le foncteur $R\mathrm{Hom}_{D^b(\mathcal{M}(G))}(\cdot, \mathcal{D}_c(G) \otimes_K \mathfrak{d}_G)$ de $D^b_{\mathcal{C}_G}(\mathcal{M}(G))$ vers $D^b_{\mathcal{C}_G}(\mathcal{M}(G))$, les morphismes étant pris pour l'action à gauche de $D(G)$ sur $\mathcal{D}_c(G) \otimes_K \mathfrak{d}_G$, c'est un complexe de $D(G)$-modules pour l'action à droite de $D(G)$ sur $\mathcal{D}_c(G) \otimes_K \mathfrak{d}_G$. Ils prouvent ([**48**, Corollary 4.4]) que la transformation naturelle

$$X \mapsto R\mathrm{Hom}_{D^b(\mathcal{M}(G))}(R\mathrm{Hom}_{D^b(\mathcal{M}(G))}(X, \mathcal{D}_c(G) \otimes_K \mathfrak{d}_G), \mathcal{D}_c(G) \otimes_K \mathfrak{d}_G) \tag{4.1}$$

est un isomorphisme. On en conclut donc que pour deux objets X et Y de $D^b_{\mathcal{C}_G}(\mathcal{M}(G))$,

$$\begin{aligned} &\mathrm{Hom}_{D^b(\mathcal{M}(G))}(X, Y) \simeq \\ &\qquad \mathrm{Hom}_{D^b(\mathcal{M}(G))}(R\mathrm{Hom}_{D^b(\mathcal{M}(G))}(Y, \mathcal{D}_c(G) \otimes_K \mathfrak{d}_G), R\mathrm{Hom}_{D^b(\mathcal{M}(G))}(X, \mathcal{D}_c(G) \otimes_K \mathfrak{d}_G)). \end{aligned} \tag{4.2}$$

Supposons désormais G réductif connexe. Ils prouvent ensuite ([**48**, Proposition 6.5]) que si P est un sous-groupe parabolique de G et χ un caractère localement analytique de P,

$$R\mathrm{Hom}_{D^b(\mathcal{M}(G))}(\mathrm{Ind}_P^G(\chi)', \mathcal{D}_c(G) \otimes_K \mathfrak{d}_G) \simeq \mathrm{Ind}_P^G(\chi^{-1}\mathfrak{d}_P)'[-\dim P]. \tag{4.3}$$

Dans cette partie, nous généralisons ce calcul à l'induite parabolique d'une représentation algébrique de dimension finie ρ. Une telle représentation étant en particulier continue admissible, elle vérifie la condition (FIN) de [**48**, §6]. La proposition 6.4 de [**48**] implique alors

$$\mathrm{Ext}^*_{D(G)}(D(G) \otimes_{D(P)} \rho', \mathcal{D}_c(G)) \simeq D(G) \otimes_{D(P)} \mathrm{Ext}^*_{D(P)}(\rho', \mathcal{D}_c(P)), \tag{4.4}$$

l'espace $\mathrm{Ext}^*_{D(P)}(\rho', \mathcal{D}_c(P))$ étant vu comme un $D(P)$-module en faisant agir $D(P)$ à droite sur $\mathcal{D}_c(P)$.

Ainsi il suffit de calculer $\mathrm{Ext}^*_{D(P)}(\rho', \mathcal{D}_c(P))$.

Lemme 4.1. — *Soit X un $D(P)$-module. Considérons $\mathcal{D}_c(P)\otimes_K \rho$ comme un $D(P)$-bimodule, $D(P)$ agissant trivialement à droite sur ρ. On a alors un isomorphisme de $D(P)$-modules*

$$\mathrm{Hom}_{D(P)}(X,\mathcal{D}_c(P))\otimes_K \rho \simeq \mathrm{Hom}_{D(P)}(X,\mathcal{D}_c(P)\otimes_K \rho). \tag{4.5}$$

Si X est un $D(P)$-module libre, le $D(P)$-module $X\otimes_K \rho'$ muni de l'action diagonale est encore libre d'après le lemme 3.5. Comme dans la preuve du corollaire 4.4 de [**48**] on montre, en utilisant le lemme 4.1, que

$$\mathrm{Ext}^*_{D(P)}(\rho',\mathcal{D}_c(P)) \simeq \mathrm{Ext}^*_{D(P)}(K,\mathcal{D}_c(P))\otimes_K \rho \tag{4.6}$$

en tant que $D(P)$-modules. On obtient donc, en utilisant la proposition 3.5 et le lemme 1.4 de [**48**] le corollaire suivant.

Corollaire 4.2. — *On a un isomorphisme dans la catégorie $D^b(\mathcal{M}(G))$*

$$R\mathrm{Hom}_{D^b(\mathcal{M}(G))}(\mathrm{Ind}_P^G(\rho)',\mathcal{D}_c(G)\otimes_K \mathfrak{d}_G) \simeq \mathrm{Ind}_P^G(\rho'\otimes_K \mathfrak{d}_P)'[-\dim P]. \tag{4.7}$$

Démonstration du lemme 4.1. — Soit (e_i) une base de ρ et $E_{i,j}$ l'endomorphisme de ρ envoyant e_j sur e_i et e_k sur 0 lorsque $k\neq j$. Notons encore ρ l'application de $D(G)$ dans $\mathrm{End}_K(\rho)$ donnant l'action de $D(G)$ sur ρ. Rappelons que nous avons un morphisme de K-algèbres $c_\rho : D(G)\to D(G)\otimes_K \mathrm{End}_K(\rho)$ ([**48**, §3] Appendice).On écrit

$$c_\rho(\lambda)=\sum_{i,j}\lambda_{i,j}\otimes_K E_{i,j}. \tag{4.8}$$

Notons aussi, pour tout $p\in P$, $\rho(p)=\sum_{i,j}\rho_{i,j}(p)E_{i,j}$. Les $\rho_{i,j}$ sont alors des applications localement analytiques sur P. On définit une application

$$\mathrm{Hom}_{D(P)}(X,\mathcal{D}_c(P))\otimes\rho \to \mathrm{Hom}_{D(P)}(X,\mathcal{D}_c(P)\otimes\rho) \tag{4.9}$$

$$F\otimes u\mapsto \sum_{i,j}(\rho_{i,j}*F(x))\otimes E_{i,j}u, \tag{4.10}$$

où $\rho_{i,j}*\mu$ désigne la distribution $f\mapsto \mu(\rho_{i,j}f)$. On vérifie que la fonction de droite est bien dans $\mathrm{Hom}_{D(P)}(X,\mathcal{D}_c(P)\otimes\rho)$, c'est-à-dire

$$\sum_{i,j}\rho_{i,j}*(\lambda F(x))\otimes E_{i,j}u=\sum_{i,j}(\sum_k \lambda_{i,k}(\rho_{k,j}*F(x))\otimes E_{i,j}), \tag{4.11}$$

pour tout $x\in X$, $\lambda\in D(P)$. Il suffit donc de prouver l'égalité

$$\rho_{i,j}*(\lambda\mu)=\sum_k \lambda_{i,k}(\rho_{k,j}*\mu) \tag{4.12}$$

pour tous les couples $(\lambda,\mu)\in D(P)\times\mathcal{D}_c(P)$. Comme la multiplication sur $D(P)$ est séparément continue et que $K[P]$ est dense dans $D(P)$, il suffit de le prouver pour $\lambda=\delta_p$, avec $p\in P$. On a alors

$$c_\rho(\delta_p)=\sum_{i,j}\rho_{i,j}(p)\delta_p\otimes E_{i,j} \tag{4.13}$$

et pour tout $f\in C_c^{an}(P,K)$,

$$\begin{aligned}(\delta_p\mu)(\rho_{i,j}f) &= \mu(\rho_{i,j}(p\cdot)f(p\cdot)) &(4.14)\\ &= \mu(\sum_k \rho_{i,k}(p)\rho_{k,j}(\cdot)f(p\cdot)) &(4.15)\\ &= \sum_k \rho_{i,k}(p)\delta_p(\rho_{k,j}*\mu)(f). &(4.16)\end{aligned}$$

□

Soit ψ une représentation algébrique irréductible de P et ρ une représentation algébrique irréductible, de dimension finie, de G.

Corollaire 4.3. — *Pour tout q, on a*

$$\mathrm{Ext}^q_G(\mathrm{Ind}_P^G(\psi), \rho) = \mathrm{Ext}_G^{q+\dim P - \dim G}(\rho', \mathrm{Ind}_P^G(\psi' \otimes \mathfrak{d}_P)). \tag{4.17}$$

En particulier si $\dim G - \dim P > q$, *on a*

$$\mathrm{Ext}^q_G(\mathrm{Ind}_P^G(\psi), \rho) = 0. \tag{4.18}$$

De plus, si ρ et $\mathrm{Ind}_P^G(\psi)$ ont même caractère central χ, alors

$$\mathrm{Ext}^q_{G,\chi}(\mathrm{Ind}_P^G(\psi), \rho) = \mathrm{Ext}_{G,\chi^{-1}}^{q+\dim P - \dim G}(\rho', \mathrm{Ind}_P^G(\psi' \otimes \mathfrak{d}_P)). \tag{4.19}$$

Démonstration. — Par définition

$$\begin{aligned}
\mathrm{Ext}^q_G(\mathrm{Ind}_P^G(\psi), \rho) &= \mathrm{Ext}^q_{\mathcal{M}(G)}(\rho', \mathrm{Ind}_P^G(\psi)') && (4.20)\\
&= \mathrm{Hom}_{D^b(\mathcal{M}(G))}(\rho', \mathrm{Ind}_P^G(\psi)'[q]) && (4.21)\\
&= \mathrm{Hom}_{D^b(\mathcal{M}(G))}(\mathrm{Ind}_P^G(\psi' \otimes \mathfrak{d}_P)'[-\dim P][-q], \rho[-\dim G]) && (4.22)\\
&= \mathrm{Hom}_{D^b(\mathcal{M}(G))}(\mathrm{Ind}_P^G(\psi' \otimes \mathfrak{d}_P)', \rho[\dim P - \dim G + q]). && (4.23)
\end{aligned}$$

□

Remarque 4.4. — Si ρ est une représentation localement algébrique de G, c'est une conséquence de [**47**, théorème 8.12] que $R\mathrm{Hom}_{D^b(\mathcal{M}(G))}(\rho, \mathcal{D}_c(G))$ est concentré en degré $\dim G$. Ainsi la deuxième assertion du corollaire 4.3 reste vraie en supposant ρ localement algébrique.

4.2. Cohomologie des représentations algébriques. — Étudions maintenant le cas des extensions entre deux représentations algébriques de dimension finie de G, le groupe des $\mathbb{Q}_p$-points d'un groupe réductif sur $\mathbb{Q}_p$. Si λ est un poids de G, on notera encore λ la restriction de λ au centre de G et $\mathrm{Ext}^q_{G,\lambda}$ les groupes d'extensions $\mathrm{Ext}^q_{G,\lambda|_{Z(G)}}$.

Soient V et W deux représentations algébriques de dimension finie de G. Comme on a $\mathrm{Hom}_{\mathcal{M}(G)}(W', V') = (W \otimes_K V')^G$ et que le foncteur $V \mapsto W' \otimes_K V$ est exact et envoie tout $D(G)$-module libre sur un $D(G)$-module libre (lemme 3.5), on a, pour tout $q \geq 0$, un isomorphisme

$$\mathrm{Ext}^q_G(V, W) \simeq H^q(G, V' \otimes W). \tag{4.24}$$

De même, si V et W ont un même caractère central χ, on a un isomorphisme

$$\mathrm{Ext}^q_{G,\chi}(V, W) \simeq H^q(\overline{G}, V' \otimes_K W), \tag{4.25}$$

$\overline{G}$ désignant le quotient de G par son centre. D'après (3.28), ce groupe est isomorphe à $H^q(\overline{\mathfrak{g}}, V' \otimes W)$, où $\overline{\mathfrak{g}} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ est l'algèbre de Lie de $\overline{G}$. Cette algèbre de Lie est alors semi-simple.

Proposition 4.5. — *Si λ et μ sont deux poids dominants, on a $\mathrm{Ext}^q_G(F_\lambda, F_\mu) = 0$ pour tout q, sauf si $\lambda = \mu$. Auquel cas, l'algèbre de cohomologie*

$$H^*(\overline{\mathfrak{g}}, \mathrm{End}_K(F_\lambda)) \simeq H^*(\overline{\mathfrak{g}}, K) \tag{4.26}$$

munie du cup-produit est isomorphe à l'algèbre extérieure

$$(\textstyle\bigwedge \mathfrak{g}')^{\mathfrak{g}} = \textstyle\bigwedge P(\overline{\mathfrak{g}})' \tag{4.27}$$

sur l'espace vectoriel gradué $P(\overline{\mathfrak{g}})'$ des éléments primitifs de $\overline{\mathfrak{g}}$.

Démonstration. — Si λ et μ sont deux poids dominants différents, on sait d'après le théorème d'Harish-Chandra (voir par exemple [**25**, 23.3]) que les caractères infinitésimaux $\chi_{\lambda+\delta}$ et $\chi_{\mu+\delta}$ de F_λ et F_μ sont différents. La première assertion résulte alors du I.4.1 de [**4**]. L'égalité (4.26) est conséquence du lemme de Schur : dans la décomposition de $\mathrm{End}_K(F_\lambda)$ en somme de $\overline{\mathfrak{g}}$-modules simples, la représentation triviale apparaît avec multiplicité un. La dernière assertion est due à Koszul et provient du corollaire 3.14. □

Les éléments primitifs de $\mathfrak{sl}_n$ ont une structure particulièrement simple : on a $\dim \mathit{Prim}(\mathfrak{sl}_n)_i = 1$ si i est impair, compris entre 3 et $2n-1$, et 0 sinon ([**3**, 5.3]).

Corollaire 4.6. — *Si $G = \mathrm{GL}_3(\mathbb{Q}_p)$ et si λ est un poids dominant de G, alors $\mathrm{Ext}^q_{G,\lambda}(F_\lambda, F_\lambda) = 0$ pour $q = 1$, $q = 2$ et $q = 4$. C'est un espace de dimension 1 lorsque $q = 0$ ou $q = 3$.*

4.3. Extensions entre représentations localement algébriques. — Une représentation localement algébrique du groupe G à coefficients dans K est en particulier une représentation localement analytique. Le but de cette partie est de comparer les extensions entre représentations localement algébriques dans la catégorie des représentations localement algébriques et dans la catégorie des représentations localement analytiques. Dans le cas particulier où les représentations sont lisses, on note Ext^q_∞ les groupes d'extensions dans la catégorie $Rep_K(G)^\infty$ des représentations lisses et $\mathrm{Ext}^q_{\infty,1}$ les groupes d'extensions dans la catégorie des représentations lisses à caractère central trivial. Les groupes d'extensions lisses entre représentations de Steinberg généralisées sont alors déterminés dans [**17**, théorème 1.3] et [**38**, théorème 1]. On note $D(G)^\infty$ le quotient de $D(G)$ par l'idéal bilatère engendré par $\mathfrak{g}$. Toute représentation lisse est un $D(G)^\infty$-module.

Proposition 4.7. — *Soient F_λ et F_μ deux représentations algébriques irréductibles de dimension finie de G, W_1 et W_2 deux représentations lisses de G.*

1. *L'espace $\mathrm{Ext}^n_G(F_\lambda \otimes W_1, F_\mu \otimes W_2)$ est nul si $\lambda \neq \mu$.*
2. *Supposons W_1 et W_2 de caractère central trivial et posons i_0 le plus petit i tel que $\mathrm{Ext}^i_{\infty,1}(W_1, W_2) \neq 0$. Le groupe $\mathrm{Ext}^n_{G,\lambda}(F_\lambda \otimes W_1, F_\lambda \otimes W_2)$ est isomorphe à $\mathrm{Ext}^{i_0}_{\infty,1}(W_1, W_2)$ lorsque $n = i_0$ et nul pour $n \neq i_0$ et $n \leq i_0 + 2$.*

Démonstration. — Si $\lambda \neq \mu$, le centre de l'algèbre $U(\mathfrak{g})$ agit sur $F_\lambda \otimes W_1$ et $F_\mu \otimes W_2$ par des caractères différents, les groupes d'extensions entre ces représentations sont donc nuls.

L'égalité $\mathrm{Hom}(F'_\mu \otimes X, Y) \simeq \mathrm{Hom}(X, F_\mu \otimes Y)$ pour tous $D(G)$-modules X et Y et le fait que pour un $D(G)$-module projectif P, $P \otimes F'_\lambda$ l'est aussi impliquent l'égalité

$$\mathrm{Ext}^p_{\mathcal{M}(G)_\lambda}(F'_\lambda \otimes W'_2, F'_\lambda \otimes W'_1) = \mathrm{Ext}^p_{\mathcal{M}(G)_1}(W'_2, F_\lambda \otimes F'_\lambda \otimes W'_1). \tag{4.28}$$

Alors les égalités (+) de [**48**, p. 306 – 307] et (46) de [**32**] montrent qu'il existe une suite spectrale

$$\mathrm{Ext}^p_{D(G)^\infty,1}(W'_2, H^q(\overline{\mathfrak{g}}, \mathrm{End}_K(F_\lambda)) \otimes W'_1) \Rightarrow \mathrm{Ext}^{p+q}_{G,\lambda}(F_\lambda \otimes W_1, F_\lambda \otimes W_2). \tag{4.29}$$

Lorsque $q = 1$ ou $q = 2$, $H^q(\overline{\mathfrak{g}}, V) = 0$ pour tout $\overline{\mathfrak{g}}$-module V de dimension finie d'après (3.27) et la proposition 4.5. □

Corollaire 4.8. — *Si I et J sont des parties de Δ, on a $\mathrm{Ext}^q_{G,\lambda}(F_\lambda \otimes_K v_{P_I}, F_\lambda \otimes_K v_{P_J}) = 0$ pour tout $q \leq |(I \cup J) \backslash (I \cap J)| + 2$, excepté pour $q = |(I \cup J) \backslash (I \cap J)|$, auquel cas l'espace $\mathrm{Ext}^q_{G,\lambda}(F_\lambda \otimes_K v_{P_I}, F_\lambda \otimes_K v_{P_J}) = 0$ est de dimension 1.*

Démonstration. — C'est une conséquence immédiate de la proposition 4.7 et du théorème 1 de [**38**], ou du théorème 1.3 de [**17**]. □

4.4. Une suite spectrale. — Dans cette partie, nous établissons l'existence d'une suite spectrale pour calculer les groupes d'extensions entre représentations localement analytiques, qui est l'analogue des suites spectrales du théorème 6.8 de [**32**].

Soit P un sous-groupe parabolique de G, N son radical unipotent et $L = P/N$. Rappelons ([**44**, §2]) qu'une représentation lisse ρ de $P_0 = P \cap G_0$ est dite fortement admissible, s'il existe un entier r et une injection P_0-équivariante $\rho \hookrightarrow C^\infty(P_0, K)^r$. Comme P_0 est compact, la catégorie des représentations lisses de P_0 est semi-simple, et donc tout quotient de $C^\infty(P_0, K)^r$ est fortement admissible. On en déduit que toute représentation lisse fortement admissible ρ de P_0 possède une résolution à droite par des représentations isomorphes à une somme directe finie de $C^\infty(P_0, K)$. En passant au dual fort, ceci implique que ρ' possède une résolution par des $D^\infty(P_0)$-modules libres de type fini. La résolution $(*)$ de [**48**], page 307, montre que le $D(P_0)$-module $D^\infty(P_0)$ possède une résolution finie par des $D(P_0)$-modules de type fini. Ainsi, si $Y_\cdot$ est une résolution de ρ' par des $D^\infty(P_0)$-modules libres de type fini, et $(X_{i,j})_i$ une résolution de Y_j par des $D(P_0)$-modules de type fini, le complexe total associé au double complexe $(X_{i,j})_{i,j}$ est une résolution de ρ' par des $D(P_0)$-modules de type fini. Cette construction, ainsi que la proposition 2.2 de [**44**], nous permettent de conclure que si ρ_∞ est une représentation lisse irréductible de P, alors le $D(P)$-module ρ'_∞ satisfait la condition (FIN) de [**48**], page 321, c'est-à-dire que le $D(P_0)$-module ρ'_∞ a une résolution par des $D(P_0)$-modules projectifs de type fini. Si ρ est une représentation localement algébrique irréductible de L, on peut l'écrire $\rho_{alg} \otimes_K \rho_\infty$ avec ρ_{alg} algébrique irréductible de dimension finie et ρ_∞ lisse irréductible, le lemme 3.5 montre alors que le $D(P)$-module ρ' vérifie la condition (FIN). Le lemme 6.3 de [**48**] implique alors que

$$\mathrm{Tor}_q^{D(P)}(D(G), \rho') = 0 \tag{4.30}$$

pour tout $q \geq 1$ et ρ représentation localement algébrique irréductible de P. On peut donc en conclure que pour tout $D(G)$-module M, on a, pour tout $q \geq 0$, un isomorphisme

$$\mathrm{Ext}^q_{\mathcal{M}(G)}(D(G) \otimes_{D(P)} \rho', M) \simeq \mathrm{Ext}^q_{\mathcal{M}(P)}(\rho', M). \tag{4.31}$$

Soit χ un caractère localement analytique du centre Z de G. Quitte à considérer une extension finie K' de K, on peut trouver un caractère localement analytique ψ de G dans $(K')^\times$ tel que $\chi(z) = \psi(z)$ pour tout $z \in Z$. Le foncteur $M \mapsto M \otimes_{K'} \psi^{-1}$ induit une équivalence de catégories entre la catégorie $\mathcal{M}(\overline{G})_{K'}$ des $D(\overline{G}) \otimes_K K'$-modules et la catégorie $\mathcal{M}(G)_{\chi,K'}$ des $D(G) \otimes_K K'$-modules sur lesquels $D(Z) \otimes_K K'$ agit par χ^{-1}. Comme $\mathrm{Ext}^q_{\mathcal{M}(\overline{G})}(\cdot,\cdot) \otimes_K K' \simeq \mathrm{Ext}^q_{\mathcal{M}(\overline{G})_{K'}}(\cdot,\cdot)$ et $\mathrm{Ext}^q_{\mathcal{M}(G)_\chi}(\cdot,\cdot) \otimes_K K' \simeq \mathrm{Ext}^q_{\mathcal{M}(G)_{\chi,K'}}(\cdot,\cdot)$, on obtient un isomorphisme

$$\mathrm{Ext}^q_{\mathcal{M}(\overline{G})}(A \otimes_K \psi, B \otimes_K \psi) \simeq \mathrm{Ext}^q_{\mathcal{M}(G)_\chi}(A, B) \otimes_K K' \tag{4.32}$$

pour tout couple (A, B) d'objets de $\mathcal{M}(\overline{G})_\chi$. En appliquant l'isomorphisme (4.31) au groupe $\overline{G}$, on en déduit que l'isomorphisme (4.31) reste valable à caractère central imposé. Si Z agit sur ρ à travers le caractère χ et M est un $D(G)$-module sur lequel $D(Z)$ agit par χ^{-1}, on a un isomorphisme

$$\mathrm{Ext}^q_{\mathcal{M}(G)_\chi}(D(G) \otimes_{D(P)} \rho', M) \simeq \mathrm{Ext}^q_{\mathcal{M}(P)_\chi}(\rho', M). \tag{4.33}$$

Considérons Σ une représentation localement analytique de G sur un espace localement convexe de type compact et ρ une représentation localement algébrique irréductible de P ayant même caractère central χ. En appliquant la proposition 2.1, on obtient un isomorphisme

$$\mathrm{Ext}^q_{G,\chi}(\Sigma, \mathrm{Ind}_P^G(\rho)) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ext}^q_{P,\chi}(\Sigma|_P, \rho). \tag{4.34}$$

De plus, cet isomorphisme est la composée de la restriction $\mathrm{Ext}^q_{G,\chi}(\Sigma, \mathrm{Ind}_P^G(\rho)) \to \mathrm{Ext}^q_{P,\chi}(\Sigma|_P, \mathrm{Ind}_P^G(\rho)|_P)$ et de l'application $\mathrm{Ext}^q_{P,\chi}(\Sigma|_P, \mathrm{Ind}_P^G(\rho)|_P) \to \mathrm{Ext}^q_{P,\chi}(\Sigma|_P, \rho)$ induite par l'application P-équivariante $\mathrm{Ind}_P^G(\rho) \to \rho$ définie par $f \mapsto f(1)$.

Comme ρ est une représentation de L, le radical unipotent N de P agit trivialement sur ρ. Ainsi on a, pour tout $D(G)$-module M,

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{M}(P)}(\rho', M) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{M}(L)}(\rho', H^0(D(N), M)). \tag{4.35}$$

Comme le foncteur $H^0(D(N), \cdot)$ de $\mathcal{M}(P)$ vers $\mathcal{M}(L)$ est adjoint à droite du foncteur exact d'inflation de $\mathcal{M}(L)$ vers $\mathcal{M}(P)$, il transforme injectif en injectif, on a d'après [**51**, 5.8.2], une suite spectrale

$$\mathrm{Ext}^p_{\mathcal{M}(L)}(\rho', H^q(N, M)) \Rightarrow \mathrm{Ext}^{p+q}_{\mathcal{M}(P)}(\rho', M). \tag{4.36}$$

Le même raisonnement que pour passer de (4.31) à (4.33) nous donne une suite spectrale à caractère central imposé

$$\mathrm{Ext}^p_{\mathcal{M}(L)_\chi}(\rho', H^q(N, M)) \Rightarrow \mathrm{Ext}^{p+q}_{\mathcal{M}(P)_\chi}(\rho', M). \tag{4.37}$$

Reprenons Σ une représentation localement analytique de G sur un espace de type compact. Remarquons que le groupe N vérifie les hypothèses du théorème 3.15. On peut donc en conclure, puisque Σ est une représentation localement analytique de P sur un espace de type compact, que si les espaces topologiques $H_q(N, \Sigma)$ sont tous séparés, alors ceux-ci sont de types compact et leur structure de $D(L)$-module provient d'une action localement analytique de L, étant donné que l'injection

$$C^{an}(L, H_q(N, \Sigma)) \hookrightarrow \mathcal{L}_b(D(L), H_q(N, \Sigma)) \tag{4.38}$$

est, dans ce cas, un isomorphisme ([**45**, théorème 2.2]).

En combinant les isomorphismes (4.31) et (4.33) avec les suites spectrales (4.36) et (4.37), et en utilisant le théorème 3.15, on obtient le corollaire suivant.

Corollaire 4.9. — *Si pour tout $q \geq 0$, l'espace localement convexe $H_q(N, \Sigma)$ est séparé, on a une suite spectrale*

$$E_2^{p,q} = \mathrm{Ext}^p_L(H_q(N, \Sigma), \rho) \Rightarrow \mathrm{Ext}^{p+q}_G(\Sigma, \mathrm{Ind}_P^G(\rho)). \tag{4.39}$$

Si de plus le centre Z de G agit sur Σ et ρ par un caractère χ, alors il agit sur $\mathrm{Ind}_P^G(\rho)$, ainsi que sur tous les $H_q(N,\Sigma)$ à travers χ et on a une suite spectrale

$$E_2^{p,q} = \mathrm{Ext}^p_{L,\chi}(H_q(N,\Sigma),\rho) \Rightarrow \mathrm{Ext}^{p+q}_{G,\chi}(\Sigma, \mathrm{Ind}_P^G(\rho)). \tag{4.40}$$

La flèche d'arête $E_2^{p,0} \to \mathrm{Ext}^p_{G,\chi}(\Sigma, \mathrm{Ind}_P^G(\rho))$ est en fait la composée

$$\mathrm{Ext}^p_{L,\chi}(H_0(N,\Sigma),\rho) \to \mathrm{Ext}^p_{P,\chi}(\Sigma,\rho) \xleftarrow{\sim} \mathrm{Ext}^p_{G,\chi}(\Sigma, \mathrm{Ind}_P^G(\rho)), \tag{4.41}$$

la flèche de droite étant donné par (4.34) et celle de gauche la composition de la flèche de restriction $\mathrm{Ext}^p_{L,\chi}(H_0(N,\Sigma),\rho) \to \mathrm{Ext}^p_{P,\chi}(H_0(N,\Sigma),\rho)$ avec la flèche $\mathrm{Ext}^p_{P,\chi}(H_0(N,\Sigma),\rho) \to \mathrm{Ext}^p_{P,\chi}(\Sigma,\rho)$ induite par l'application P-équivariante $\Sigma \twoheadrightarrow H_0(N,\Sigma)$.

Par exemple, lorsque Σ est une représentation localement algébrique de la forme $\psi_{alg} \otimes \psi_\infty$, les espaces

$$H_q(\mathfrak{n}, \psi_{alg} \otimes \psi_\infty) = H_q(\mathfrak{n}, \psi_{alg}) \otimes \psi_\infty \tag{4.42}$$

sont munis de la topologie localement convexe la plus fine et sont donc séparés. On en conclut ainsi, en utilisant le théorème 7.1 de [**32**] et le théorème 3.15,

$$H_q(N,\Sigma) = H_q(\mathfrak{n}, \psi_{alg}) \otimes J_N(\psi_\infty), \quad H^q(N,\Sigma') = H^q(\mathfrak{n}, \psi'_{alg}) \otimes J_N(\psi_\infty)', \tag{4.43}$$

J_N désignant le module de Jacquet. Les modules de Jacquet $J_N(\psi_\infty)$ se calculent alors en utilisant les résultats de Bernstein et Zelevinsky [**1**, 2.12 et 5.2].

Les $H_q(\mathfrak{n}, \psi_{alg})$ se déduisent alors du théorème ci-dessous et de l'isomorphisme de dualité (3.37).

Théorème 4.10 **(Kostant)**. — *Soit λ un poids dominant. Pour $S \subset \Delta$, posons $P = P_S$. Pour tout $q \geq 0$, on a un isomorphisme $\mathfrak{l}$-équivariant*

$$H_q(\mathfrak{n}, F_\lambda) \simeq \bigoplus_{w, l(w)=q, w\cdot\lambda \in X_S^+} F_{w\cdot\lambda,S}, \quad H^q(\mathfrak{n}, F_\lambda) \simeq \bigoplus_{w, l(w)=q, w\cdot\lambda \in X_S^+} F'_{w\cdot\lambda,S} \tag{4.44}$$

Exemple 4.11. — Dans le cas où $G = \mathrm{GL}_3(\mathbb{Q}_p)$, si P désigne un sous-groupe parabolique maximal, le groupe L est isomorphe à $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p) \times \mathbb{Q}_p^\times$. Si ρ_∞ est une représentation lisse de L_1, l'application du « lemme géométrique » de Bernstein et Zelevinsky donne

$$\begin{gathered} 0 \to \mathrm{Ind}_{B\cap L_1}^{L_1}(|\epsilon_1^{-1}\epsilon_2| \otimes J_{N\cap L_1}(\rho_\infty)^{s_2})^\infty \to J_{N_1}(\mathrm{Ind}_{P_1}^G(\rho_\infty)^\infty) \to \rho_\infty \to 0 \\ 0 \to |\epsilon_0^{-2}\epsilon_1\epsilon_2| \otimes \rho_\infty^{s_1s_2} \to J_{N_2}(\mathrm{Ind}_{P_1}^G(\rho_\infty)^\infty) \to \mathrm{Ind}_{B\cap P_2}^{L_2}(J_{N\cap L_1}(\rho_\infty))^\infty \to 0. \end{gathered} \tag{4.45}$$

Comme le foncteur J_{N_i} est un foncteur exact sur la catégorie des représentations lisses, on obtient les résultats suivants.

$$\begin{aligned} J_{N_1}(v_{P_1}) &= \mathrm{Ind}_{B\cap L_1}^{L_1}(|\epsilon_1^{-1}\epsilon_2|)^\infty, & J_{N_1}(v_{P_2}) &= |\epsilon_0^{-1}\epsilon_1^{-1}\epsilon_2^2| \oplus \mathrm{St}_2, \\ J_{N_1}(1) &= 1, & J_{N_1}(\mathrm{St}_3) &= |\epsilon_0^{-1}\epsilon_1^{-1}\epsilon_2^2| \otimes \mathrm{St}_2. \end{aligned} \tag{4.46}$$

On peut alors utiliser le corollaire 4.8 pour calculer les termes de la suite spectrale (4.39). Voici quelques exemples de calculs issus de cette suite spectrale pour $\mathrm{GL}_3(\mathbb{Q}_p)$.

$$\begin{aligned} \dim_K \mathrm{Ext}^1_{G,\lambda}(F_\lambda, \mathrm{Ind}_{P_2}^G(F_{s_1\cdot\lambda,2} \otimes \mathrm{St}_2)) &= 0 \\ \dim_K \mathrm{Ext}^1_{G,\lambda}(F_\lambda, \mathrm{Ind}_{P_2}^G(F_{s_1s_2\cdot\lambda,2} \otimes \mathrm{St}_2)) &= 0 \\ \dim_K \mathrm{Ext}^1_{G,\lambda}(F_\lambda, \mathrm{Ind}_{P_2}^G(F_{s_1\cdot\lambda,2} \otimes \mathrm{St}_2)^{\mathfrak{d}_2}) &= 0 \\ \dim_K \mathrm{Ext}^1_{G,\lambda}(F_\lambda \otimes v_{P_1}, \mathrm{Ind}_{P_1}^G(F_{s_2\cdot\lambda,1})^{\mathfrak{d}_1}) &= 0 \\ \dim_K \mathrm{Ext}^1_{G,\lambda}(F_\lambda \otimes v_{P_1}, \mathrm{Ind}_{P_2}^G(F_{s_1\cdot\lambda,2})^{\mathfrak{d}_2}) &= 0 \\ \dim_K \mathrm{Ext}^1_{G,\lambda}(F_\lambda \otimes v_{P_1}, \mathrm{Ind}_{P_1}^G(F_{s_2\cdot\lambda,1} \otimes \mathrm{St}_2)^{\mathfrak{d}_1}) &= 0 \\ \dim_K \mathrm{Ext}^1_{G,\lambda}(F_\lambda \otimes v_{P_1}, \mathrm{Ind}_{P_2}^G(F_{s_1\cdot\lambda,2} \otimes \mathrm{St}_2)^{\mathfrak{d}_2}) &= 1 \\ \dim_K \mathrm{Ext}^1_{G,\lambda}(F_\lambda \otimes v_{P_1}, \mathrm{Ind}_{P_1}^G(F_{s_2s_1\cdot\lambda,1})) &= 0 \\ \dim_K \mathrm{Ext}^1_{G,\lambda}(F_\lambda \otimes v_{P_1}, \mathrm{Ind}_{P_2}^G(F_{s_1s_2\cdot\lambda,2})) &= 0 \end{aligned} \tag{4.47}$$

On en déduit par symétrie les mêmes égalités en remplaçant v_{P_1} par v_{P_2} et en échangeant les rôles de P_1 et P_2, s_1 et s_2, $\mathfrak{d}_1$ et $\mathfrak{d}_2$.

Démonstration. — Donnons l'exemple de $\mathrm{Ext}^1_{G,\lambda}(F_\lambda \otimes v_{P_1}, \mathrm{Ind}_{P_2}^G(F_{s_1\cdot\lambda,2} \otimes \mathrm{St}_2)^{\mathfrak{d}_2})$. Le théorème 4.10 nous donne $H_0(\mathfrak{n}_2, F_\lambda) = F_{\lambda,2}$ et $H_1(\mathfrak{n}_2, F_\lambda) = F_{s_1\cdot\lambda,2}$. De plus, par (4.46), on a $J_{N_2}(v_{P_1}) \simeq |\epsilon_0^{-2}\epsilon_1\epsilon_2| \oplus \mathrm{St}_2$. Calculons à présent les termes de la suites spectrale (4.40)

$$E_2^{p,q} = \mathrm{Ext}^p_{L_2,\lambda}(H_q(N_2, F_\lambda \otimes v_{P_1}), F_{s_1\cdot\lambda,2} \otimes \mathrm{St}_2) \Rightarrow \mathrm{Ext}^{p+q}_{G,\lambda}(F_\lambda \otimes v_{P_1}, \mathrm{Ind}_{P_2}^G(F_{s_1\cdot\lambda,2} \otimes \mathrm{St}_2)). \quad (4.48)$$

Comme $\lambda \neq s_1 \cdot \lambda$, on a $E_2^{p,0} = 0$ pour tout $p \geq 0$ d'après la proposition 4.7. Ainsi $E_2^{0,1} \simeq \mathrm{Ext}^1_{G,\lambda}(F_\lambda \otimes v_{P_1}, \mathrm{Ind}_{P_2}^G(F_{s_1\cdot\lambda,2} \otimes \mathrm{St}_2))$. Comme $E_2^{0,1}$ est l'espace des endomorphismes L_2-équivariants de la représentation irréductible $F_{s_1\cdot\lambda,2} \otimes \mathrm{St}_2$, on a $\dim \mathrm{Ext}^1_{G,\lambda}(F_\lambda \otimes v_{P_1}, \mathrm{Ind}_{P_2}^G(F_{s_1\cdot\lambda,2} \otimes \mathrm{St}_2)) = 1$. De même on arrive à $\mathrm{Ext}^1_{G,\lambda}(F_\lambda \otimes v_{P_1}, \mathrm{Ind}_{P_2}^G(F_{s_1s_2\cdot\lambda,2} \otimes \mathrm{St}_2)) = 0$ et $\mathrm{Ext}^0_{G,\lambda}(F_\lambda \otimes v_{P_1}, \mathrm{Ind}_{P_2}^G(F_{s_1s_2\cdot\lambda,2} \otimes \mathrm{St}_2)) = 0$. On conclut alors en utilisant la suite exacte longue obtenue en appliquant le foncteur $\mathrm{Hom}_G(F_\lambda \otimes v_{P_1}, \cdot)$ à la suite exacte

$$0 \to \mathrm{Ind}_{P_2}^G(F_{s_1\cdot\lambda,2} \otimes \mathrm{St}_2)^{\mathfrak{d}_2} \to \mathrm{Ind}_{P_2}^G(F_{s_1\cdot\lambda,2} \otimes \mathrm{St}_2) \to \mathrm{Ind}_{P_2}^G(F_{s_1s_2\cdot\lambda,2} \otimes \mathrm{St}_2) \to 0, \quad (4.49)$$

qui n'est autre que (2.50). □

Corollaire 4.12. — *Pour $i \in \{1,2\}$, on a $\mathrm{Ext}^1_{G,\lambda}(F_\lambda \otimes v_{P_1}, v_{P_i}^{an}(\lambda)) = 0$.*

Démonstration. — C'est une conséquence de la décomposition (2.53), du corollaire 4.8 et de (4.47). □

4.5. Homologie unipotente des induites. — Plaçons nous à présent dans le cas $G = \mathrm{GL}_3(\mathbb{Q}_p)$ et $P = P_1$. Soit (ρ, M) une représentation localement algébrique irréductible de L_1. On peut donc écrire $\rho = \rho_{alg} \otimes \rho_\infty$ avec ρ_{alg} algébrique irréductible de dimension finie et ρ_∞ lisse irréductible. Par abus de notation, on note encore ρ l'inflation de ρ au moyen du morphisme $P_1 \to L_1$. Soit $\mathrm{Ind}_{P_1}^G(\rho)$ l'induite localement analytique de ρ de P_1 à G. Nous allons déterminer les espaces $H_q(N_i, \mathrm{Ind}_{P_1}^G(\rho))$ en tant que représentations de L_i. La stratégie que nous suivons est celle décrite dans le §8 de [**32**]. Il s'agit de filtrer de façon P_i-équivariante l'espace $\mathrm{Ind}_{P_1}^G(\rho)$ selon le support. Si C est une partie de G stable par multiplication à droite par P_1, on note $\mathrm{Ind}_{P_1}^G(\rho)_C$ le sous-espace des fonctions à support inclus dans C.

Les ensembles $W_1\backslash W/W_1$ et $W_2\backslash W/W_1$ sont de cardinal 2. Fixons $i \in \{1,2\}$ et w un élément tel que $W_iW_1 \neq W_iwW_1$. Alors P_iwP_1 est un ouvert de G. Nous avons alors une suite exacte de P_i-représentations localement analytiques

$$0 \to \mathrm{Ind}_{P_1}^G(\rho)_{P_iwP_1} \to \mathrm{Ind}_{P_1}^G(\rho) \to \mathrm{Ind}_{P_1}^G(\rho)/\mathrm{Ind}_{P_1}^G(\rho)_{P_iwP_1} \to 0. \quad (4.50)$$

Par la même preuve que dans [**32**, lemme 8.1], on voit que le terme de gauche est un sous-espace fermé de $\mathrm{Ind}_{P_1}^G(\rho)$. Ainsi il s'agit d'une suite exacte stricte d'espaces de type compact. Le terme de gauche est la composante à support dans l'orbite ouverte et le terme de droite les résidus à support dans l'orbite fermée.

Pour déterminer $H^q(N_i, \mathrm{Ind}_{P_1}^G(\rho)')$, nous calculons en fait, comme dans [**32**], les $D(L_i)$-modules $H^q(N_i, (\mathrm{Ind}_{P_1}^G(\rho)_{P_iwP_1})')$ et $H^q(N_i, (\mathrm{Ind}_{P_1}^G(\rho)/\mathrm{Ind}_{P_1}^G(\rho)_{P_iwP_1})')$ et utilisons la suite exacte longue de cohomologie. Nous commençons par $H^q(N_i, (\mathrm{Ind}_{P_1}^G(\rho)_{P_iwP_1})')$. Il s'avère plus commode de commencer par calculer $H_q(N_i, \mathrm{Ind}_{P_1}^G(\rho)_{P_iwP_1})$ et d'utiliser le théorème 3.15.

4.5.1. Un résultat technique. — Nous prouvons ici que si H est un groupe de Lie localement $\mathbb{Q}_p$-analytique, et H_1 un sous-groupe cocompact de H, le foncteur $\mathrm{Ind}_{H_1}^H$ envoie une suite exacte stricte de représentations localement analytiques de H_1 sur des espaces de type compact, sur une suite exacte stricte de représentations localement analytiques de H sur des espaces de type compact.

Lemme 4.13. — *Soit W un espace de Fréchet, le foncteur $W \hat{\otimes}_K \cdot$ envoie une suite exacte d'espaces de Fréchet sur une suite exacte d'espaces de Fréchet.*

Remarquons tout de suite que d'après le théorème de l'image ouverte ([**42**, proposition 8.6]) une telle suite exacte est stricte.

Démonstration. — Soit $0 \to V_1 \xrightarrow{f} V_2 \xrightarrow{g} V_3 \to 0$ une suite exacte d'espaces de Fréchet, avec f et g continues. C'est une suite exacte stricte. Montrons tout d'abord que la suite exacte

$$0 \to W \otimes_K V_1 \xrightarrow{id\otimes f} W \otimes_K V_2 \xrightarrow{id\otimes g} W \otimes_K V_3 \to 0 \quad (4.51)$$

est stricte. L'essentiel est de montrer que les applications $id \otimes f$ et $id \otimes g$ sont strictes. Comme V_i et W sont des espaces de Fréchet, les topologies inductives et projectives sur $W \otimes_K V_i$ coïncident d'après la proposition 17.6 de [**42**], on peut donc au besoin considérer l'une ou l'autre. D'après le corollaire 17.5(*ii*), la topologie sur induite sur $W \otimes_K \ker f$ par la topologie de $W \otimes_K V_3$ est la topologie produit tensoriel. Pour conclure, il faut donc montrer que si $U \twoheadrightarrow V$ est une application surjective ouverte entre espaces de Fréchet, l'application $W \otimes_{K,\iota} U \twoheadrightarrow W \otimes_{K,\iota} V$ est stricte. Soit en effet b une application linéaire de $W \otimes_{K,\iota} V$ dans un K-espace vectoriel localement convexe Y, telle que la composée $\tilde{b}$ de $W \otimes_{K,\iota} U$ vers Y soit continue. Ainsi la forme bilinéaire $B(x,y) = \tilde{b}(x \otimes y)$ est séparément continue de $W \times U$ vers Y. En particulier, pour tout $w \in W$, $B(w, \cdot)$ est une application linéaire continue de U vers Y se factorisant par V. Comme V est muni de la topologie quotient, l'application $b(w \otimes \cdot)$ est continue. On montre de même que pour tout $v \in V$, $b(\cdot \otimes v)$ est continue, ainsi b est continue. Au final, la suite exacte (4.51) est stricte. Il se trouve alors que le foncteur de complétion est exact sur toute suite exacte stricte de groupes topologiques métrisables ([**5**, 3.1 proposition 5]). □

Corollaire 4.14. — *Si $0 \to \rho_1 \to \rho_2 \to \rho_3 \to 0$ est une suite exacte de représentations localement analytiques de H_1 sur des espaces de type compact, la suite*

$$0 \to \mathrm{Ind}_{H_1}^H(\rho_1) \to \mathrm{Ind}_{H_1}^H(\rho_2) \to \mathrm{Ind}_{H_1}^H(\rho_3) \to 0 \tag{4.52}$$

est stricte exacte.

Démonstration. — D'après la proposition 5.3, la remarque 5.4 et la formule (53) de [**32**], on a un isomorphisme topologique $(\mathrm{Ind}_{H_1}^H(\rho_i))' \simeq D(H/H_1)\hat{\otimes}_K \rho_i'$, les espaces $D(H/H_1)$ et ρ_i' étant des espaces de Fréchet nucléaires. On conclut en utilisant le lemme 4.13. □

4.5.2. Un calcul intermédiaire. — Nous prouvons ici un résultat technique qui servira au calcul de l'homologie de la composante à support dans l'orbite ouverte.

Soit H le groupe des $\mathbb{Q}_p$-points d'un groupe algébrique linéaire connexe défini sur $\mathbb{Q}_p$. Si N désigne son radical unipotent, on suppose que H/N est un groupe réductif déployé. Soit L un sous-groupe de Lévi de H, c'est-à-dire un sous-groupe induisant un isomorphisme $L \simeq H/N$. Soit P un sous-groupe de H tel que $B = P \cap L$ soit un sous-groupe parabolique de L. Posons $N' = N \cap P$. On peut alors choisir $L_0 \subset L$ un sous-groupe ouvert compact tel que $L = L_0 \cdot B$.

Soit $\rho = \rho_{alg} \otimes \rho_\infty$ une représentation localement algébrique irréductible de P. On note $\mathcal{C}(\rho) = c\text{–}\mathrm{Ind}_P^H(\rho)$ le K-espace vectoriel des fonctions localement analytiques à support compact modulo P de H dans K telles que $f(gp) = \rho(p^{-1})f(g)$ pour tout $g \in H$ et $p \in P$. Il s'agit d'un espace vectoriel localement convexe de type compact muni d'une action localement analytique de H. Le but de cette partie est de décrire les H/N-représentations $H_i(N, \mathcal{C}(\rho))$.

Soit $\mathcal{N}(\rho) = c\text{–}\mathrm{Ind}_{N'}^N(\rho|_{N'})$ l'espace des fonctions localement analytiques à support compact modulo N' sur N à valeurs dans l'espace de ρ telles que $f(nn_0) = \rho(n_0^{-1})f(n)$. C'est encore un espace vectoriel localement convexe de type compact muni d'une action localement analytique de N par translation à gauche. On le munit également de l'action de B déduite de l'action de B sur N par conjugaison, autrement dit

$$(b \cdot f)(n) = \rho(b)f(b^{-1}nb). \tag{4.53}$$

Posons $\widetilde{\mathcal{C}(\rho)} = \mathrm{Ind}_{L\cap B}^L \mathcal{N}(\rho)$. Si f est un élément de $\mathcal{C}(\rho)$, pour tout $m \in L$, on note $\varphi(f)(m)$ la fonction de N dans ρ définie par $n \mapsto f(mn)$.

L'application φ induit un isomorphisme de H-modules de $\mathcal{C}(\rho)$ sur un sous-H-module de $\mathrm{Ind}_{L\cap P}^L \mathcal{N}(\rho)$. Il est clair que pour tout $m \in L$, $\varphi(f)(m)$ est à support compact et localement analytique. De plus si $m_0 \in P \cap L$,

$$\varphi(f)(mm_0) = (n \mapsto f(mm_0n) = \rho(m_0^{-1})f(mm_0nm_0^{-1})) \tag{4.54}$$

$$= m_0^{-1} \cdot (n \mapsto f(mn)), \tag{4.55}$$

et donc $\varphi(f) \in \widetilde{\mathcal{C}}(\rho)$.

Lemme 4.15. — *L'application φ est un homéomorphisme L-équivariant.*

Démonstration. — L'injectivité est claire, étant donné que $LN = H$. Pour vérifier la continuité, il suffit de vérifier que la restriction de φ au sous-espace des fonctions à support dans un compact C modulo P est continue. Quitte à grossir un peu C, on peut supposer qu'il est L_0-invariant. Dans ce cas, pour tout m, $\varphi(f)(m)$ est à support dans l'image de $C \cap N$. Comme N est unipotent, on peut trouver un sous-groupe compact ouvert N_0 de N contenant $C \cap N$ et stable pour l'action de L_0 par conjugaison. On a alors un homéomorphisme

$$c\text{--}\mathrm{Ind}_P^H(\rho)_{L_0N_0} = \mathrm{Ind}_{(L_0N_0)\cap P}^{L_0N_0}(\rho) \simeq \mathrm{Ind}_{L_0\cap P}^{L_0}\mathrm{Ind}_{N'\cap N_0}^{N_0}(\rho), \tag{4.56}$$

ce qui permet de conclure en passant à la limite inductive. □

Cet isomorphisme nous permet de construire une application N-équivariante et B-équivariante

$$\mathcal{C}(\rho) \to \mathcal{N}(\rho) \tag{4.57}$$

définie par $f \mapsto \varphi(f)(1)$. On en déduit une application B-équivariante

$$H_q(N, \mathcal{C}(\rho)) \to H_q(N, \mathcal{N}(\rho)) \tag{4.58}$$

Si l'espace topologique $H_q(N, \mathcal{N}(\rho))$ est séparé, il est de type compact, et c'est alors une représentation localement analytique de B. On obtient alors une application L-équivariante

$$\psi : H_q(N, \mathcal{C}(\rho)) \to \mathrm{Ind}_B^L(H_q(N, \mathcal{N}(\rho))). \tag{4.59}$$

Proposition 4.16. — *Si tous les espaces $H_q(N, \mathcal{N}(\rho))$ sont séparés, l'application ψ est un isomorphisme topologique pour tout q.*

Démonstration. — Soit $P.$ une résolution fortement exacte de la représentation triviale par des $D(N)$-modules topologiques de la forme $D(N)\hat{\otimes}_{K,\iota}V$ où V est un K-espace localement convexe dénombrable muni de la topologie localement convexe la plus fine. La cohomologie $H_q(N, \mathcal{N}(\rho))$ est alors la cohomologie du complexe $P.\tilde{\otimes}_{D(N),\iota}\mathcal{N}(\rho)$. Notons d_q ses différentielles. En reprenant la preuve du théorème 3.15, les espaces $P_q\tilde{\otimes}_{D(N),\iota}\mathcal{N}(\rho)$ sont de type compact. Comme $H_q(N, \mathcal{N}(\rho)) = \ker d_q/\mathrm{Im} d_q$ est séparé, les espaces $\mathrm{Im} d_q$ sont fermés dans $P_q\tilde{\otimes}_{D(N),\iota}\mathcal{N}(\rho)$ et sont donc de type compact. Comme une application continue surjective entre deux espaces de type compact est continue, on conclut que les différentielles d_q sont strictes. D'après le corollaire 4.14, le foncteur Ind_B^L transforme suites exactes strictes d'espaces de type compact en suites exactes strictes d'espaces de type compact. Ainsi $\mathrm{Ind}_B^L(H_q(N, \mathcal{N}(\rho))$ s'identifie à la cohomologie du complexe $\mathrm{Ind}_B^L(P.\tilde{\otimes}_{D(N),\iota}\mathcal{N}(\rho))$. Il reste donc à prouver que l'application $P_q\tilde{\otimes}_{D(N),\iota}\mathrm{Ind}_B^L(\mathcal{N}(\rho)) \simeq \mathrm{Ind}_B^L(P_q\tilde{\otimes}_{D(N),\iota}\mathcal{N}(\rho))$ est un isomorphisme topologique. En écrivant $P_q = D(N)\hat{\otimes}_{K,\iota}V$ et en utilisant la remarque 5.4, l'isomorphisme (54) et le lemme 2.6 de [**32**], il suffit de prouver que l'application

$$V\hat{\otimes}_{K,\iota}\mathcal{L}_b(D(L/B), \mathcal{N}(\rho)) \to \mathcal{L}_b(D(L/B), V\hat{\otimes}_{K,\iota}\mathcal{N}(\rho)) \tag{4.60}$$

est un isomorphisme topologique. En écrivant $V = \bigoplus_I K$ avec I dénombrable, cette application devient

$$\bigoplus_I \mathcal{L}_b(D(L/B), \mathcal{N}(\rho)) \to \mathcal{L}_b(D(L/B), \bigoplus_I \mathcal{N}(\rho)). \tag{4.61}$$

Comme $\mathcal{N}(\rho)$ est de type compact et I dénombrable, le corollaire 8.9 de [**42**] implique que cette application est un isomorphisme. C'est un isomorphisme topologique car bijection continue entre espaces de type compact. □

Faisons désormais l'hypothèse suivante : N' est inclus dans le centre de N. Elle sera toujours vérifiée dans nos applications ultérieures.

La suite spectrale de Hochschild-Serre ([**32**] théorème 6.8) donne

$$H_p(N/N', H_q(N', \mathcal{N}(\rho))) \Rightarrow H_{p+q}(N, \mathcal{N}(\rho)). \tag{4.62}$$

D'après notre hypothèse sur N', on des isomorphismes N-équivariants

$$\bigwedge^q(\mathfrak{n}') \otimes_K \mathcal{N}(\rho) \simeq \mathcal{N}(\bigwedge^q(\mathfrak{n}')|_{N'} \otimes \rho). \tag{4.63}$$

Ainsi $H_q(\mathfrak{n}', \mathcal{N}(\rho)) \simeq \mathcal{N}(H_q(\mathfrak{n}', \rho))$ en tant que N-modules. Comme $\rho = \rho_{alg}\otimes\rho_\infty$, $H_q(\mathfrak{n}', \rho) \simeq H_q(N', \rho_{alg})\otimes \rho_\infty$ en tant que N'-modules. Ainsi, d'après le théorème 7.1 de [**32**], on a $H_q(N', \mathcal{N}(\rho)) = \mathcal{N}(H_q(N', \rho_{alg})\otimes \rho_\infty)_{N'}$.

Lemme 4.17. — *Si ψ est une représentation lisse de N', on a $\mathcal{N}(\psi)_{N'} \simeq \mathcal{N}(\psi_{N'})$.*

Démonstration. — Fixons $s : N/N' \hookrightarrow N$ une section localement analytique de la projection $N \twoheadrightarrow N/N'$. L'application $\mathcal{N}(\psi) \to C_c^{an}(N/N', \psi)$ donnée par $f \mapsto f \circ s$ est alors un isomorphisme toplogique N'-équivariant, en munissant le membre de droite de l'action $(n' \cdot f)(x) = \psi(n')(f(x))$. Si V est une représentation de N', notons $N'(V)$ le sous-espace de V engendré par les vecteurs de la forme $n \cdot v - v$ avec $n \in N'$, $v \in V$. Il est clair que $N'(\mathcal{N}(\psi)) \subset \mathcal{N}(N'(\psi))$. Montrons l'inclusion réciproque. Soit $f \in C_c^{an}(N/N')(N'(\psi))$. Comme f est à support compact, et que $N'(\psi)$ est muni de la topologie localement convexe la plus fine, il existe $V \subset N'(\psi)$ de dimension finie tel que, pour tout $x \in N/N'$, $f(x) \in V$. Comme $V \subset N'(\psi)$ et que V est de dimension finie, il existe, d'après le lemme 8.1 de [**10**], un sous-groupe compact ouvert $N_1 \subset N'$ tel que $\int_{N_1} \psi(n)vdn = 0$ pour tout $v \in V$. Ainsi on obtient

$$\int_{N_1} (n \cdot f)dn = 0. \tag{4.64}$$

Toujours d'après le lemme 8.1 de [**10**], ceci implique $f \in N'(C_c^{an}(N/N', \psi))$, ce que l'on voulait. □

Au final on obtient un isomorphisme N-équivariant

$$H_q(N', \mathcal{N}(\rho)) \simeq \mathcal{N}(H_q(N', \rho)) \simeq C_c^{an}(N/N', K)\hat{\otimes}_{K,\pi} H_q(N', \rho), \tag{4.65}$$

le deuxième isomorphisme provenant du fait que N' agit trivialement sur $H_q(N', \rho)$ et que $H_q(N', \rho)$ est muni de la topologie localement convexe la plus fine. Ainsi

$$H_p(N/N', H_q(N', \mathcal{N}(\rho))) = H_p(N/N', C_c^{an}(N/N', K))\hat{\otimes}_{K,\pi} H_q(N', \rho|_{N'}). \tag{4.66}$$

Le théorème 6.9 de [**32**] implique alors $H_q(N/N', C_c^{an}(N/N', K)) \simeq \mathfrak{d}_{N/N'}$. On obtient donc la proposition suivante.

Proposition 4.18. — *On a un isomorphisme topologique L-équivariant*

$$H_i(N, \mathcal{N}(\rho)) \simeq H_{i-\dim N/N'}(\mathfrak{n}', \rho_{alg}|_{N'}) \otimes_K J_{N'}(\rho_\infty) \otimes_K \mathfrak{d}_{N/N'}. \tag{4.67}$$

Corollaire 4.19. — *Pour tout i,*

$$H_i(N, \mathcal{C}(\rho)) \simeq \mathrm{Ind}_B^L(H_{i-\dim N/N'}(\mathfrak{n}', \rho_{alg}|_{N'}) \otimes_K J_{N'}(\rho_\infty) \otimes_K \mathfrak{d}_{N/N'}). \tag{4.68}$$

De plus, $H_i(N, \mathcal{C}(\rho)) = 0$ pour $i < \dim N/N'$ et $i > \dim N$. Si ρ est de dimension finie, alors les $H_i(N, \mathcal{N}(\rho))$ sont de dimension finie.

Démonstration. — C'est une conséquence de la proposition 4.18 et de la proposition 4.16. L'annulation provient de (3.34). □

4.5.3. La composante à support dans l'orbite ouverte. — Si $f \in \mathrm{Ind}_{P_1}^G(\rho)_{P_i w P_1}$, on note $\varphi_w(f)$ l'application de P_i dans M définie par $\varphi_w(f)(p) = f(pw)$.

Lemme 4.20. — *L'application φ_w est un isomorphisme topologique*

$$\mathrm{Ind}_{P_1}^G(\rho)_{P_i w P_1} \simeq c\text{--}\mathrm{Ind}_{P_i \cap w P_1 w^{-1}}^{P_i} \rho^w. \tag{4.69}$$

Démonstration. — L'application est bien définie car

$$\begin{aligned} \varphi_w(f)(pq) &= f(pqw) && (4.70)\\ &= f(pw(w^{-1}qw)) && (4.71)\\ &= \rho^w(q^{-1})f(pw). && (4.72) \end{aligned}$$

L'injectivité et la surjectivité proviennent de l'isomorphisme de variétés localement analytiques $P_i w P_1 \simeq P_i/(P_i \cap w P_1 w^{-1})$. Soit C une partie fermée de $P_i w P_1$ compacte modulo P_1. L'ensemble C' des $p \in P_i$ tels que $pw \in C$ est compact modulo $P_1 \cap w P_i w^{-1}$ et φ induit une application de l'ensemble des fonctions de $\mathrm{Ind}_{P_1}^G(\rho)_{P_i w P_1}$ à support dans C dans l'ensemble des fonctions de $c\text{--}\mathrm{Ind}_{P_i \cap w P_1 w^{-1}}^{P_1} \rho^w$ à support dans C' et cette application est continue. Comme les topologies sur $\mathrm{Ind}_{P_1}^G(\rho)_{P_i w P_1}$ et $c\text{--}\mathrm{Ind}_{P_i \cap w P_1 w^{-1}}^{P_1} \rho^w$ sont les topologies limite inductive, φ est continue. Enfin, φ est bicontinue car bijection entre deux espaces de type compact. □

Soit $\lambda \in X_1^+$, un poids dominant relativement à α_1, ρ_∞ une représentation lisse irréductible de L_1 et $\rho = F_{\lambda,1} \otimes \rho_\infty$. Comme conséquence de la section précédente et du lemme 4.20, on peut calculer l'homologie unipotente de $\mathrm{Ind}_{P_1}^G(\rho)_{P_i w P_1} \simeq c\text{–}\mathrm{Ind}_{P_i \cap w P_1 w^{-1}}^{P_i}(\rho^w)$.

On choisit en effet $H = P_i$, $P = P_i \cap w P_1 w^{-1}$, $N = N_i$ et la représentation ρ^w de P.

Si $i = 1$, choisissons $w = s_2$. On a alors

$$P = \{\begin{pmatrix} * & 0 & 0 \\ * & * & 0 \\ * & 0 & * \end{pmatrix}\},\ N' = \{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ * & 0 & 1 \end{pmatrix}\}. \tag{4.73}$$

On a donc d'après le corollaire 4.19 et le fait que $L_1 \cap P = B$,

$$H_i(N_1, \mathrm{Ind}_{P_1}^G(F_{\lambda,1} \otimes_K \rho_\infty)_{P_1 s_2 P_1}) = \mathrm{Ind}_B^{L_1}(H_{i-1}(\mathfrak{n}', F_{\lambda,1}^{s_2}) \otimes J_{N'}(\rho_\infty^{s_2}) \otimes \mathfrak{d}_{N/N'}). \tag{4.74}$$

On a alors $\mathfrak{d}_{N/N'} = \epsilon_1^{-1}\epsilon_2|\epsilon_1^{-1}\epsilon_2|$ et comme $\mathfrak{n}'$ est de dimension 1, les seuls groupes non nuls sont

$$H_0(\mathfrak{n}', F_{\lambda,1}^{s_2}) = s_2\lambda,\ H_1(\mathfrak{n}', F_{\lambda,1}^{s_2}) = (s_2 s_1 \lambda)\epsilon_0^{-1}\epsilon_2 \tag{4.75}$$

et ce sont des représentations de dimension 1 de B.

Si $i = 2$, choisissons $w = s_1 s_2$. On a alors

$$P = \{\begin{pmatrix} * & 0 & 0 \\ 0 & * & * \\ 0 & * & * \end{pmatrix}\},\ N' = \{1\}. \tag{4.76}$$

On a $\mathfrak{d}_N = \epsilon_0^{-2}\epsilon_1\epsilon_2|\epsilon_0^{-2}\epsilon_1\epsilon_2|$ et comme $\mathfrak{n}'$ est de dimension 0, le seul groupe non nul est le H_2.

$$H_2(N_2, \mathrm{Ind}_{P_1}^G(F_{\lambda,1} \otimes_K \rho_\infty)_{P_2 s_1 s_2 P_1}) = F_{\lambda,1}^{s_1 s_2} \otimes \rho_\infty^{s_1 s_2} \otimes \epsilon_0^{-2}\epsilon_1\epsilon_2|\epsilon_0^{-2}\epsilon_1\epsilon_2|. \tag{4.77}$$

4.5.4. Les composantes à support fermé. — Nous allons à présent déterminer $H_q(N_i, \mathrm{Ind}_{P_1}^G(\rho)_{P_i P_1}^\omega)$, où $\mathrm{Ind}_{P_1}^G(\rho)_{P_i P_1}^\omega$ désigne le quotient $\mathrm{Ind}_{P_1}^G(\rho)/\mathrm{Ind}_{P_1}^G(\rho)_{P_i w P_1}$. Cette fois-ci, il est plus simple, comme dans [**32**, §8], de calculer la cohomologie $H^q(N_i, (\mathrm{Ind}_{P_1}^G(\rho)_{P_i P_1}^\omega)')$.

Commençons avec le cas où $i = 1$. On montre la proposition suivante par le même raisonnement que pour le théorème 8.5 de [**32**].

Proposition 4.21. — *On a un isomorphisme L_1-équivariant*

$$H^q(N_1, (\mathrm{Ind}_{P_1}^G(\rho)_{P_1}^\omega)') \simeq H^q(\mathfrak{n}_1, \mathfrak{m}_1(\rho'))\hat{\otimes}_{K,\iota}\rho'_\infty, \tag{4.78}$$

$\mathfrak{m}_1(\rho')$ désignant le module de Verma généralisé $U(\mathfrak{g}) \otimes_{U(\mathfrak{p}_1)} \rho'$. De plus on a $H^q(N_1, (\mathrm{Ind}_{P_1}^G(\rho)_{P_1}^\omega)') = H^q(\mathfrak{n}_1, (\mathrm{Ind}_{P_1}^G(\rho)_{P_1}^\omega)')$.

On peut ainsi utiliser les calculs de l'appendice 2 qui donnent la proposition suivante.

Proposition 4.22. — *Soit λ un poids dominant relativement à la base de racines simples Δ. On a des isomorphismes $\mathfrak{l}_1$-équivariants*

$$\begin{aligned}
H^0(\mathfrak{n}_1, \mathfrak{m}_1(F'_{\lambda,1})) &= F'_{\lambda,1} \oplus F'_{s_2\cdot\lambda,1} & H^0(\mathfrak{n}_1, \mathfrak{m}_1(F'_{s_2\cdot\lambda})) &= F'_{s_2\cdot\lambda,1} \oplus F'_{s_2 s_1\cdot\lambda,1} \\
H^1(\mathfrak{n}_1, \mathfrak{m}_1(F'_{\lambda,1})) &= F'_{s_2\cdot\lambda,1} \oplus F'_{s_2 s_1\cdot\lambda,1} & H^1(\mathfrak{n}_1, \mathfrak{m}_1(F'_{s_2\cdot\lambda,1})) &= F'_{s_2 s_1\cdot\lambda,1} \\
H^2(\mathfrak{n}_1, \mathfrak{m}_1(F'_{\lambda,1})) &= F'_{s_2 s_1\cdot\lambda,1} & H^2(\mathfrak{n}_1, \mathfrak{m}_1(F'_{s_2\cdot\lambda,1})) &= 0 \\
H^0(\mathfrak{n}_1, \mathfrak{m}_1(F'_{s_2 s_1\cdot\lambda,1})) &= F'_{s_2 s_1\cdot\lambda,1} \\
H^1(\mathfrak{n}_1, \mathfrak{m}_1(F'_{s_2 s_1\cdot\lambda,1})) &= 0 \\
H^2(\mathfrak{n}_1, \mathfrak{m}_1(F'_{s_2 s_1\cdot\lambda,1})) &= 0
\end{aligned} \tag{4.79}$$

Corollaire 4.23. — *Pour tout $q \geq 0$, nous avons un isomorphisme topologique L_1-équivariant*

$$H_q(N_1, \mathrm{Ind}_{P_1}^G(\rho)_{P_1}^\omega) \simeq H^q(N_1, (\mathrm{Ind}_{P_1}^G(\rho)_{P_1}^\omega)')' \simeq H^q(\mathfrak{n}_1, \mathfrak{m}_1(\rho'))' \otimes \rho_\infty. \tag{4.80}$$

Démonstration. — L'application $H^q(N_1, (\mathrm{Ind}_{P_1}^G(\rho)_{P_1}^\omega)') \to H^q(\mathfrak{n}_1, (\mathrm{Ind}_{P_1}^G(\rho)_{P_1}^\omega)')$ est continue et le membre de droite est, en utilisant la résolution de Chevalley-Eilenberg pour calculer la cohomologie d'algèbres de Lie, le quotient topologique d'un espace de Fréchet. Comme d'après les propositions 4.21 et 4.22 le membre de droite est également de dimension finie, c'est un espace séparé. Le théorème 3.15 nous donne alors le premier isomorphisme, le deuxième est une conséquence de la proposition 4.21. □

Nous aurons besoin, pour $H_q(N_2, \mathrm{Ind}_{P_1}^G(\rho)^{\omega}_{P_2P_1})$, de quelques calculs sur les distributions à support. Soient H et M deux sous-groupes fermés de G. Comme dans [**33**], corollaire 1.3.6, on peut montrer qu'il existe un sous-groupe compact ouvert G_0 de G, uniforme, tel que les sous-groupes $H_0 = H \cap G_0$ et $M_0 = M \cap G_0$ soient uniformes et compatibles à G_0. Plus précisément, il existe une base topologique $(a_1, \dots, a_d)$ de G telle que $(a_1, \dots, a_r)$ soit une base topologique de H_0, $(a_s, \dots, a_t)$ une base topologique de M_0 et $(a_s, \dots, a_r)$ une base topologique de $H_0 \cap M_0$. Posons $b_i = a_i - 1$ et pour un multi-indice $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d)$, $b^{\alpha} = b_1^{\alpha_1} \cdots b_d^{\alpha_d}$. Si $\alpha = (\alpha_i)$ est multi-indice, son support $Supp(\alpha)$ est l'ensemble des i tels que $\alpha_i \neq 0$. Alors $D(G_0)$ est l'ensemble des séries $\sum_{\alpha} d_{\alpha} b^{\alpha}$, où $\sup_{\alpha} |d_{\alpha}| r^{|\alpha|} < \infty$ pour tout $0 < r < 1$. On munit $D(G_0)$ de la norme

$$|| \sum_{\alpha} d_{\alpha} b^{\alpha} ||_r = \sup_{\alpha} |d_{\alpha}| r^{|\alpha|}. \tag{4.81}$$

Le complété de $D(G_0)$ pour cette norme, noté $D(G_0)_r$, s'identifie donc à l'espace des séries

$$\sum_{\alpha} d_{\alpha} b^{\alpha}, \tag{4.82}$$

où $|d_{\alpha}| r^{|\alpha|} \to 0$. Si $\mu = \sum d_{\alpha} b^{\alpha}$, on a $\mu \in D(H_0)_r$ (resp. $\mu \in D(M_0)_r$, resp. $\mu \in D(H_0 \cap M_0)_r$) si et seulement si $d_{\alpha} = 0$ lorsque $Supp(\alpha) \not\subset \{1, \dots, r\}$ (resp. $Supp(\alpha) \not\subset \{s, \dots, t\}$, resp. $Supp(\alpha) \not\subset \{s, \dots, r\}$). Notons aussi $U(\mathfrak{g}, K)_r$ le complété de $U(\mathfrak{g}) \otimes_{\mathbb{Q}_p} K$ pour la norme $|| \cdot ||_r$, c'est l'adhérence dans $D(G_0)_r$ de $D(G_0)_1$. Fixons $\frac{1}{p} < r < 1$. On sait, d'après Schneider et Teitelbaum, que la norme $|| \cdot ||_r$ est alors multiplicative. De plus, d'après Frommer ([**22**, §1.4]), il existe des entiers l_i pour $1 \leq i \leq d$ tels que si $A = \{b^{\alpha}, \alpha_i < l_i\}$, A est une base de $D(G_0)_r$ en tant que $U(\mathfrak{g}, K)_r$-module à gauche. Si Y est H_0, M_0 ou $H_0 \cap M_0$, posons A_Y l'ensemble des éléments de A appartenant à Y. De même, A_Y est une base de $D(Y)_r$ en tant que $U(\mathfrak{h}, K)_r$-module à gauche. Définissons également A_{HM} la partie de A constituée des b^{α} pour lesquels $\alpha_i = 0$ si $i > t$.

Proposition 4.24. — *Chaque $D(G_0)_{Y,r}$ est un $U(\mathfrak{g}, K)_r$-module libre dont une base est donnée par A_Y. L'adhérence $D(G_0)_{H_0M_0,r}$ de $D(G_0)_{H_0K_0}$ dans $D(G_0)_r$ est un $U(\mathfrak{g}, K)_r$ module libre à gauche dont une base est donnée par les éléments de A_{HM}.*

Démonstration. — La première assertion est le corollaire 1.4.1 de [**33**]. Jan Kohlhaase ne traite que le cas où le support est un sous-groupe, c'est pourquoi nous devons reprendre sa démonstration dans le dernier cas. Soit D le sous-$U(\mathfrak{g}, K)_r$-module à gauche engendré par A_{HM}. C'est un $U(\mathfrak{g}, K)_r$-module de type fini, il est donc fermé dans $D(G_0)_r$. Il est clairement contenu dans l'adhérence de $D(G_0)_{H_0M_0}$. Réciproquement D contient $U(\mathfrak{g}) \otimes_{\mathbb{Q}_p} K[H_0M_0]$ qui est dense dans $D(G_0)_{H_0M_0}$, donc dans $D(G_0)_{H_0M_0,r}$. Ainsi D contient également $D(G_0)_{H_0M_0,r}$. □

Notons encore $|| \cdot ||_r$ la norme quotient de la norme $|| \cdot ||_r \otimes || \cdot ||_r$ sur $D(H_0) \hat{\otimes}_{D(H_0)_{H_0 \cap M_0}} D(G_0)_{M_0}$. Le produit dans $D(G_0)_r$ permet de définir une application continue

$$\mu_r : D(H_0)_r \otimes_K D(G_0)_{M_0,r} \to D(G_0)_{H_0M_0,r}. \tag{4.83}$$

Lemme 4.25. — *L'application*

$$D(H_0)_r \otimes_{D(H_0)_{H_0M_0,r}} D(G_0)_{M_0,r} \to D(G_0)_{H_0M_0,r} \tag{4.84}$$

induite par μ_r est un isomorphisme.

Démonstration. — C'est une conséquence de la proposition 4.24. On a en effet

$$D(H_0)_r \otimes_{D(H_0)_{H_0M_0,r}} D(G_0)_{M_0,r} = \Big(\bigoplus_{\alpha \in A_H} U(\mathfrak{h}, K)_r \alpha\Big) \otimes_{\bigoplus_{\alpha \in A_{H \cap M}} U(\mathfrak{h}, K)_r \alpha} \Big(\bigoplus_{\alpha \in A_M} U(\mathfrak{g}, K)_r \alpha\Big) \tag{4.85}$$

De plus, le lemme 1.2.4 de [**33**] montre que si $\delta \in D(G_0)$ a pour support $\{1\}$ et $g \in G_0$, $\delta_g \delta \delta_g^{-1}$ a pour support $\{1\}$. Comme $U(\mathfrak{g}, K)_r$ est l'adhérence des distributions à support dans $\{1\}$ pour la norme $|| \cdot ||_r$, on en conclut que $U(\mathfrak{g}, K)_r$ est stable par l'action adjointe de $K[G_0]$. Ainsi

$$\bigoplus_{\alpha \in A_{H \cap M}} U(\mathfrak{h}, K)_r \alpha = \bigoplus_{\alpha \in A_{H \cap M}} \alpha U(\mathfrak{h}, K)_r. \tag{4.86}$$

On obtient donc un isomorphisme

$$D(H_0)_r \otimes_{D(H_0)_{H_0M_0,r}} D(G_0)_{M_0,r} = \bigoplus_{\alpha\in A_s} K\alpha \otimes_K D(G_0)_{M_0,r}, \tag{4.87}$$

où A_s désigne l'ensemble des $b^\alpha \in A$ tels que $\alpha_i = 0$ pour $i \geq s$. Il est alors clair par la proposition 4.24 que le terme de droite s'envoie isomorphiquement sur $D(G_0)_{H_0M_0,r}$. □

De même que dans [**33**, page 30], on voit que $D(H_0)_r \otimes_{D(H_0)_{H_0\cap M_0,r}} D(G_0)_{M_0,r}$ est un espace de Banach pour la norme quotient de la norme produit tensoriel, et donc que l'on a un isomorphisme topologique

$$D(H_0)_r \otimes_{D(H_0)_{H_0\cap M_0,r}} D(G_0)_{M_0,r} \simeq (D(H_0)_r \hat{\otimes}_K D(G_0)_{M_0,r})/\overline{\ker \mu_r}. \tag{4.88}$$

Le même raisonnement que dans [**33**, pages 30-31] montre alors que l'on obtient un isomorphisme topologique

$$D(H_0)\hat{\otimes}_{D(H_0)_{H_0\cap M_0}} D(G_0)_{M_0} \to D(G_0)_{H_0M_0} \tag{4.89}$$

Corollaire 4.26. — *On a un isomorphisme topologique*

$$D(H)\hat{\otimes}_{D(H)_{H\cap M},\iota} D(G)_M \simeq D(G)_{HM}. \tag{4.90}$$

Démonstration. — C'est une conséquence de l'isomorphisme (4.89), du corollaire 1.2.14 de [**33**] et de la formule (1.6) de [**33**]. □

Notons $\mathrm{Ind}_{P_1}^G(\rho)^\omega_{P_2P_1}$ le quotient de $\mathrm{Ind}_{P_1}^G(\rho)$ par $\mathrm{Ind}_{P_1}^G(\rho)_{P_2wP_1}$ où P_2wP_1 est l'orbite ouverte. Le groupe P_1 agit par translation à droite sur $C^\omega_{P_2P_1}(G,\rho)$ et $\mathrm{Ind}_{P_1}^G(\rho)^\omega_{P_2P_1}$ s'identifie au sous-espace de $C^\omega_{P_2P_1}(G,\rho)$ ([**33**, §1.2]) sur lequel P_1 agit à travers ρ. On voit donc que

$$(\mathrm{Ind}_{P_1}(\rho)^\omega_{P_2P_1})' \simeq D(G)_{P_2P_1} \tilde{\hat{\otimes}}_{D(P_1),\iota} \rho' = D(G)_{P_2P_1} \hat{\otimes}_{D(P_1),\iota} \rho'. \tag{4.91}$$

Ainsi d'après le corollaire 4.26, on a

$$(\mathrm{Ind}_{P_1}^G(\rho)^\omega_{P_2P_1})' \simeq [D(P_2)\hat{\otimes}_{D(P_2)_{P_1\cap P_2},\iota} D(G)_{P_1}]\hat{\otimes}_{D(P_1),\iota}\rho'. \tag{4.92}$$

D'où

$$(\mathrm{Ind}_{P_1}^G(\rho)^\omega_{P_2P_1})' \simeq D(P_2)\hat{\otimes}_{D(P_2)_{P_1\cap P_2},\iota}[D(G)_{P_1}\hat{\otimes}_{D(P_1)}\rho']. \tag{4.93}$$

D'après la proposition 1.2.12 de [**33**], $D(G)_{P_1} \simeq D(G)_1 \hat{\otimes}_{D(P_1)_1} D(P_1)$, donc

$$D(G)_{P_1}\hat{\otimes}_{D(P_1)}\rho' \simeq D(G)_1\hat{\otimes}_{D(P_1)_1}\rho' \simeq D(G)_1 \otimes_{D(P_1)_1} \rho', \tag{4.94}$$

et c'est un espace de Fréchet nucléaire.

Précisons l'action de

$$D(P_2)_{P_1\cap P_2} \simeq D(P_2)_1 \hat{\otimes}_{D(P_1\cap P_2)_1,\iota} D(P_1\cap P_2) \tag{4.95}$$

sur $D(G)_1 \otimes_{D(P_1)_1} \rho'$. Pour $\lambda \in D(P_2)_1$, $g \in P_1 \cap P_2$ et $x \otimes v \in D(G)_1 \otimes_{D(P_1)_1} \rho'$, on a

$$(\lambda \otimes \delta_g)\cdot(x\otimes v) = (\lambda \mathrm{Ad}(g)x)\otimes(gv). \tag{4.96}$$

Calculons $H^q(\mathfrak{n}_2, \mathrm{Ind}_{P_1}^G(\rho)'_{P_2P_1})$ en utilisant le complexe de Chevalley-Eilenberg. Il s'agit de la cohomologie du complexe

$$D(P_2)\hat{\otimes}_{D(P_2)_{P_1\cap P_2},\iota}(\bigwedge^{\cdot} \mathfrak{n}_2^* \otimes_K D(G)_1 \otimes_{D(P_1)_1} \rho'). \tag{4.97}$$

Lemme 4.27. — *Soient $Q \subset P$ deux sous-groupes paraboliques de G. Le foncteur $D(P)\hat{\otimes}_{D(P)_Q,\iota}\cdot$ transforme toute suite exacte stricte d'espaces de Fréchet munis d'une action séparément continue de $D(P)_Q$ en une suite exacte stricte de K-espaces de Fréchet.*

Démonstration. — Soit V un espace de Fréchet muni d'une action séparément continue de $D(P)_Q$, et G_0 un sous-groupe compact ouvert de G tel que $G = PG_0 = QG_0$. Comme $D(P) = \bigoplus_{g\in P/P_0} \delta_g D(P_0)$, $D(P)_Q = \bigoplus_{h\in Q/Q_0} \delta_h D(P)_{Q_0}$, et $P = QP_00$, le foncteur $D(P)\hat{\otimes}_{D(P)_Q,\iota}\cdot$ vérifie les conditions du lemme si et seulement si c'est le cas de $D(P_0)\hat{\otimes}_{D(P)_{Q_0},\iota}\cdot$. Or on a

$$D(P_0)\hat{\otimes}_{D(P_0)_{Q_0},\iota} V = \varprojlim_r D(P_0)_r \hat{\otimes}_{D(P_0)_{Q_0},r} V \tag{4.98}$$

Or, d'après la proposition 4.24, chaque $D(P_0)_r$ est un $D(P_0)_{Q_0,r}$-module libre de type fini. Si $0 \to V_1 \to V_2 \to V_3 \to 0$ est une suite exacte stricte d'espaces de Fréchet munis d'action séparément continue de $D(P)_Q$, on obtient des suites exactes strictes

$$0 \to D(P_0)_r \hat{\otimes}_{D(P_0)_{Q_0,r}} V_1 \to D(P_0)_r \hat{\otimes}_{D(P_0)_{Q_0,r}} V_2 \to D(P_0)_r \hat{\otimes}_{D(P_0)_{Q_0,r}} V_3 \to 0. \tag{4.99}$$

En passant à la limite projective, et notant que le système $(D(P_0)_r \hat{\otimes}_{D(P_0)_{Q_0,r}} V_1)_r$ vérifie la condition de Mittag-Leiffer, on obtient une suite exacte

$$0 \to D(P_0) \hat{\otimes}_{D(P_0)_{Q_0}} V_1 \to D(P_0) \hat{\otimes}_{D(P_0)_{Q_0}} V_2 \to D(P_0) \hat{\otimes}_{D(P_0)_{Q_0}} V_3 \to 0. \tag{4.100}$$

Comme les flèches de cette suites sont des applications continues entre espaces de Fréchet, elles sont strictes. □

L'espace $D(G)_1 \hat{\otimes}_{D(P_1)_1} \rho'$ est un espace de Fréchet. Comme $D(P_1)_1$ agit trivialement sur ρ'_∞, on a un isomorphisme topologique

$$D(G)_1 \hat{\otimes}_{D(P_1)_1} \rho' \simeq (D(G)_1 \otimes_{D(P_1)_1} \rho'_{alg}) \hat{\otimes}_K \rho'_\infty. \tag{4.101}$$

L'espace $D(G)_1 \otimes_{D(P_1)_1} \rho'_{alg}$ est alors un espace de Fréchet et $U(\mathfrak{g}) \otimes_{U(\mathfrak{p}_1)} \rho'_{alg}$ en est un sous-espace dense. De plus le même raisonnement que dans la preuve du théorème 8.5 de [**32**] montre que le complexe calculant la cohomologie $H^q(\mathfrak{n}_2, U(\mathfrak{g}) \otimes_{U(\mathfrak{p}_1)} \rho'_{alg})$ est à différentielles strictes d'images fermées, pour la topologie induite par la topologie de $D(G)_1 \otimes_{D(P_1)_1} \rho'_{alg}$. Ainsi par [**32**, théorème 7.4] le groupe topologique $H^q(\mathfrak{n}_2, D(G)_1 \otimes_{D(P_1)_1} \rho'_{alg})$ s'identifie au complété de $H^q(\mathfrak{n}_2, U(\mathfrak{g}) \otimes_{U(\mathfrak{p}_1)} \rho'_{alg})$ muni de la topologie métrisable induite par celle de $\bigwedge^q \mathfrak{n}'_2 \otimes_K (D(G)_1 \otimes_{D(P)_1} \rho'_{alg})$. Le complexe $(\bigwedge^\cdot \mathfrak{n}'_2 \otimes_K (D(G)_1 \otimes_{D(P_1)_1} \rho'_{alg}))$ calculant $H^q(\mathfrak{n}_2, D(G)_1 \otimes_{D(P_1)_1} \rho'_{alg})$ est alors un complexe d'espaces de Fréchet nucléaires dont les différentielles sont strictes. Ainsi d'après le lemme 4.13, on a

$$H^q(\mathfrak{n}_2, D(G)_1 \hat{\otimes}_{D(P_1)_1} \rho') \simeq H^q(\mathfrak{n}_2, D(G)_1 \otimes_{D(P_1)_1} \rho'_{alg}) \hat{\otimes}_K \rho'_\infty. \tag{4.102}$$

En particulier cet espace est séparé, donc les différentielles du complexe $\bigwedge^\cdot \mathfrak{n}'_2 \otimes (D(G)_1 \hat{\otimes}_{D(P_1)_1} \rho')$ sont d'images fermées. Comme ce sont des applications entre espaces de Fréchet, elles sont strictes. En appliquant le lemme 4.27 à ce complexe, on obtient un isomorphisme

$$H^q(\mathfrak{n}_2, (\mathrm{Ind}_{P_1}^G(\rho)^\omega_{P_2 P_1})') = D(P_2) \hat{\otimes}_{D(P_2)_{P_1 \cap P_2}, \iota} H^q(\mathfrak{n}_2, D(G)_1 \hat{\otimes}_{D(P_1), \iota} \rho'). \tag{4.103}$$

Ainsi on a

$$H^q(\mathfrak{n}_2, (\mathrm{Ind}_{P_1}^G(\rho)^\omega_{P_2 P_1})') = (D(P_2) \hat{\otimes}_{D(P_2)_{P_1 \cap P_2}, \iota} H^q(\mathfrak{n}_2, D(G)_1 \hat{\otimes}_{D(P_1)_1} \rho'_{alg})) \hat{\otimes}_K \rho'_\infty. \tag{4.104}$$

L'espace $H^q(\mathfrak{n}_2, (\mathrm{Ind}_{P_1}^G(\rho)^\omega_{P_2 P_1})')$ est donc séparé. D'après la remarque précédent (3.44), c'est aussi le cas de

$$H_q(\mathfrak{n}_2, \mathrm{Ind}_{P_1}^G(\rho)^\omega_{P_2 P_1}) \simeq H^q(\mathfrak{n}_2, (\mathrm{Ind}_{P_1}^G(\rho)^\omega_{P_2 P_1})')'. \tag{4.105}$$

Ainsi l'espace

$$H_q(\mathfrak{n}_2, \mathrm{Ind}_{P_1}^G(\rho)^\omega_{P_2 P_1})_{N_2} = H_q(\mathfrak{n}_2, \mathrm{Ind}_{P_1}^G(\rho)^\omega_{P_2 P_1}) \otimes_K J_{N_2 \cap L_1}(\rho_\infty) \tag{4.106}$$

est séparé. D'après le corollaire 3.18, c'est un espace de type compact et on a

$$H_q(N_2, \mathrm{Ind}_{P_1}^G(\rho)^\omega_{P_2 P_1})' \simeq H^q(N_2, (\mathrm{Ind}_{P_1}^G(\rho)^\omega_{P_2 P_1})'), \tag{4.107}$$

et donc

$$H^q(N_2, (\mathrm{Ind}_{P_1}^G(\rho)^\omega_{P_2 P_1})') \simeq D(P_2) \hat{\otimes}_{D(P_2)_{P_1 \cap P_2}, \iota} H^q(N_2, D(G)_1 \otimes_{D(P_1)_1} \rho'_{alg}) \otimes_K J_{N_2 \cap L_1}(\rho_\infty)'. \tag{4.108}$$

Il y a ensuite plusieurs cas à distinguer selon la nature des composantes W de $H^i(\mathfrak{n}_2, D(G)_1 \otimes_{D(P_1)_1} \rho'_{alg})$.

Lemme 4.28. — *Si W est une représentation algébrique de dimension finie de $D(P_2)$, et χ un carcatère lisse de $P_1 \cap P_2$, alors*

$$D(P_2) \hat{\otimes}_{D(P_2)_{P_1 \cap P_2}, \iota} (W \otimes \chi^{-1}) \simeq (D(P_2)^\infty \hat{\otimes}_{D(P_1 \cap P_2)^\infty} \chi^{-1}) \otimes W. \tag{4.109}$$

Démonstration. — Dans ce cas, W est un $D(P_2)$-module. L'application

$$\lambda \otimes v \mapsto c_W(\lambda)(1 \otimes v), \tag{4.110}$$

où c_W est la comultiplication de $D(P_2)$ induit un isomorphisme de $D(P_2)\hat{\otimes}_{D(P_2)_{P_1\cap P_2}}(W \otimes \chi^{-1})$ sur

$$(D(P_2)\hat{\otimes}_{D(P_2)_{P_1\cap P_2}}\chi^{-1}) \otimes_K W \tag{4.111}$$

muni de la structure de $D(P_2)$-module diagonale. Il est alors clair qu'on a un isomorphisme

$$D(P_2)\hat{\otimes}_{D(P_2)_{P_1\cap P_2}}\chi^{-1} \simeq D(P_2)^{\infty}\hat{\otimes}_{D(P_1\cap P_2)^{\infty}}\chi^{-1}. \tag{4.112}$$

$\square$

Lemme 4.29. — *Supposons que W soit un complété de $U(\mathfrak{p}_2) \otimes_{U(\mathfrak{p}_1\cap\mathfrak{p}_2)} \chi^{-1}$ où χ est un caractère de $P_1 \cap P_2$. Alors*

$$D(P_2)\hat{\otimes}_{D(P_2)_{P_1\cap P_2}}W \simeq D(P_2) \otimes_{D(P_1\cap P_2)} \chi^{-1}. \tag{4.113}$$

Démonstration. — L'espace W contient une droite $U(\mathfrak{p}_1\cap\mathfrak{p}_2)$-stable. Par continuité et densité de $U(\mathfrak{p}_1\cap \mathfrak{p}_2)$ dans $D(P_1\cap P_2)_1$, elle est $D(P_1\cap P_2)_1$-stable, autrement dit on a un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} U(\mathfrak{p}_2) \otimes_{U(\mathfrak{p}_1\cap\mathfrak{p}_2)} \chi^{-1} \arrow[r, hook] \arrow[d, hook] & W \\ D(P_2)_1 \otimes_{D(P_1\cap P_2)_1} \chi^{-1} \arrow[ur, "i"'] & \end{tikzcd} \tag{4.114}$$

La flèche verticale est continue car la topologie métrisable sur $U(\mathfrak{p}_2)\otimes_{U(\mathfrak{p}_1\cap\mathfrak{p}_2)}\chi^{-1}$ induite par la topologie de $\bigwedge^q \mathfrak{n}_2' \otimes_K (D(G)_1\hat{\otimes}_{D(P)_1}\rho'_{alg})$ est donnée par la distance somme directe selon les sous-espaces $\mathfrak{t}$-isotypiques. Vu que W est aussi le complété de $U(\mathfrak{p}_2)\otimes_{U(\mathfrak{p}_1\cap\mathfrak{p}_2)}\chi^{-1}$, on obtient une autre flèche continue $j : W \to D(P_2)_1 \otimes_{D(P_1\cap P_2)_1} \chi^{-1}$. Les applications continues $i \circ j$ et $j \circ i$ coïncident avec l'identité sur des sous-espaces denses, donc sont égales à l'identité. On utilise alors l'isomorphisme $D(P_2)_{P_1\cap P_2} \simeq D(P_2\cap P_1)\hat{\otimes}_{D(P_2\cap P_1)_1}D(P_2)_1$. $\square$

On peut alors conclure en utilisant la proposition suivante, issue des calculs de l'appendice 2.

Proposition 4.30. — *Soit λ un poids dominant. On a des isomorphismes $\mathfrak{l}_2$-équivariants*

$$\begin{aligned}
H^0(\mathfrak{n}_2,\mathfrak{m}_1(F'_{\lambda,1})) &= U(\mathfrak{l}_2)\otimes_{\mathfrak{b}}(-\lambda) & H^0(\mathfrak{n}_2,F'_{s_2\cdot\lambda,1}) &= U(\mathfrak{l}_2)\otimes_{\mathfrak{b}}(-s_2\cdot\lambda)\\
& & &\oplus U(\mathfrak{l}_2)\otimes_{U(\mathfrak{b})}(-s_2s_1\cdot\lambda)\\
H^1(\mathfrak{n}_2,\mathfrak{m}_1(F'_{\lambda,1})) &= U(\mathfrak{l}_2)\otimes_{\mathfrak{b}}(-s_1\cdot\lambda) & H^1(\mathfrak{n}_2,\mathfrak{m}_1(F'_{s_2\cdot\lambda,1})) &= U(\mathfrak{l}_2)\otimes_{\mathfrak{b}}(-s_1s_2\cdot\lambda)\\
&\oplus F'_{s_1s_2\cdot\lambda,2} & &\oplus U(\mathfrak{l}_2)\otimes_{U(\mathfrak{b})}(-s_2s_1\cdot\lambda)\\
H^2(\mathfrak{n}_2,\mathfrak{m}_1(F'_{\lambda,1})) &= F'_{s_1s_2\cdot\lambda,2} & H^2(\mathfrak{n}_2,\mathfrak{m}_1(F'_{s_2\cdot\lambda,1})) &= 0\\
H^0(\mathfrak{n}_2,\mathfrak{m}_1(F'_{s_2s_1\cdot\lambda,1})) &= U(\mathfrak{l}_2)\otimes_{\mathfrak{b}}(-s_2s_1\cdot\lambda) & &\\
H^1(\mathfrak{n}_2,\mathfrak{m}_1(F'_{s_2s_1\cdot\lambda,1})) &= U(\mathfrak{l}_2)\otimes_{\mathfrak{b}}(-s_1s_2s_1\cdot\lambda) & &\\
H^2(\mathfrak{n}_2,\mathfrak{m}_1(F'_{s_2s_1\cdot\lambda,1})) &= 0 & &
\end{aligned} \tag{4.115}$$

Exemple 4.31. — Calculons par exemple $H^1(N_2,(\mathrm{Ind}_{P_1}^G(\lambda)^{\omega}_{P_2P_1})')$. L'espace $H^1(N_2,D(G)_1\otimes_{D(P_1)_1} F'_{\lambda,1})$ est un complété de $H^1(\mathfrak{n}_2,\mathfrak{m}_1(F'_\lambda))$, ainsi d'après la formule (4.108), les lemmes 4.28, 4.29 et la proposition 4.30,

$$H^1(N_2,(\mathrm{Ind}_{P_1}^G(F_{\lambda,1})^{\omega}_{P_2P_1})') \simeq (F_{s_1s_2\cdot\lambda,2}\otimes \mathrm{Ind}_{L_2\cap B}^{L_2}(1)^{\infty})' \oplus \mathrm{Ind}_{B\cap L_2}^{L_2}(s_1\cdot\lambda)'. \tag{4.116}$$

Corollaire 4.32. — *Si ρ est une représentation localement algébrique irréductible de L_1, l'espace topologique $H^q(N_2,(\mathrm{Ind}_{P_1}^G(\rho)^{\omega}_{P_2P_1})')$ est un espace de Fréchet nucléaire et on a un isomorphisme $D(L_2)$-équivariant, pour tout $q \geq 0$,*

$$H_q(N_2,\mathrm{Ind}_{P_1}^G(\rho)^{\omega}_{P_2P_1}) \simeq H^q(N_2,(\mathrm{Ind}_{P_1}^G(\rho)^{\omega}_{P_2P_1})')'. \tag{4.117}$$

En particulier l'espace $H_q(N_2,\mathrm{Ind}_{P_1}^G(\rho)^{\omega}_{P_2P_1})$ est de type compact.

4.5.5. Conclusion et formulaire. — Nous pouvons à présent revenir à la représentation $\mathrm{Ind}_{P_1}^G(\rho)$.

Corollaire 4.33. — *Si ρ est une localement algébrique irréductible de L_1, pour tout $q \geq 0$, l'espace $H_q(N_i, \mathrm{Ind}_{P_1}^G(\rho))$ est un espace de type compact muni d'une représentation localement analytique de L_i. De plus, on a un isomorphisme topologique L_i -équivariant*

$$H_q(N_i, \mathrm{Ind}_{P_1}^G(\rho))' \simeq H^q(N_i, (\mathrm{Ind}_{P_1}^G(\rho)'). \tag{4.118}$$

Enfin, si $q > \dim N_i = 2$, ces espaces sont nuls.

Démonstration. — On applique la suite exacte longue d'homologie ou cohomologie à la suite (4.50). On applique alors le corollaire 4.19, le lemme 4.20, le corollaire 4.23, ainsi que la proposition 4.30 et le corollaire 4.32. □

Dans le cas où ρ_{alg} est la représentation de L_1 de plus haut poids dans X_1^+, la représentation de L_i peut se calculer explicitement. On fixe donc λ un poids dominant, et nous donnons ci-dessous la forme des représentations $H_q(N_i, \mathrm{Ind}_{P_1}^G(F_{w\cdot\lambda,1}))$ pour $w \in \{1, s_2, s_2s_1\}$.

$$\begin{aligned}
&H_0(N_1, \mathrm{Ind}_{P_1}^G(F_{\lambda,1} \otimes \rho_\infty)) = (F_{\lambda,1} \oplus F_{s_2\cdot\lambda,1}) \otimes_K \rho_\infty \\
&H_1(N_1, \mathrm{Ind}_{P_1}^G(F_{\lambda,1} \otimes \rho_\infty)) = \mathrm{Ind}_{B\cap L_1}^{L_1}(s_2 \cdot \lambda \otimes |\epsilon_1^{-1}\epsilon_2| \otimes J_{N\cap L_1}(\rho_\infty^{s_2})) \oplus (F_{s_2\cdot\lambda,1} \oplus F_{s_2s_1\cdot\lambda,1}) \otimes_K \rho_\infty \\
&H_2(N_1, \mathrm{Ind}_{P_1}^G(F_{\lambda,1} \otimes \rho_\infty)) = \mathrm{Ind}_{B\cap L_1}^{L_1}(s_2s_1 \cdot \lambda \otimes |\epsilon_1^{-1}\epsilon_2| \otimes J_{N\cap L_1}(\rho_\infty^{s_2})) \oplus F_{s_2s_1\cdot\lambda,1} \otimes \rho_\infty
\end{aligned} \tag{4.119}$$

$$\begin{aligned}
&H_0(N_1, \mathrm{Ind}_{P_1}^G(F_{s_2\cdot\lambda,1} \otimes \rho_\infty)) = (F_{s_2\cdot\lambda,1} \oplus F_{s_2s_1\cdot\lambda,1}) \otimes \rho_\infty \\
&H_1(N_1, \mathrm{Ind}_{P_1}^G(F_{s_2\cdot\lambda,1} \otimes \rho_\infty)) = \mathrm{Ind}_{B\cap L_1}^{L_1}(\lambda \otimes |\epsilon_1^{-1}\epsilon_2| \otimes J_{N\cap L_1}(\rho_\infty^{s_2})) \oplus F_{s_2s_1\cdot\lambda} \otimes_K \rho_\infty \\
&H_2(N_1, \mathrm{Ind}_{P_1}^G(F_{s_2\cdot\lambda,1} \otimes \rho_\infty)) = \mathrm{Ind}_{B\cap L_1}^{L_1}(s_1s_2s_1 \cdot \lambda \otimes |\epsilon_1^{-1}\epsilon_2| \otimes J_{N\cap L_1}(\rho_\infty^{s_2}))
\end{aligned} \tag{4.120}$$

$$\begin{aligned}
&H_0(N_1, \mathrm{Ind}_{P_1}^G(F_{s_2s_1\cdot\lambda,1} \otimes \rho_\infty)) = F_{s_2s_1\cdot\lambda,1} \otimes_K \rho_\infty \\
&H_1(N_1, \mathrm{Ind}_{P_1}^G(F_{s_2s_1\cdot\lambda,1} \otimes \rho_\infty)) = \mathrm{Ind}_{B\cap L_1}^{L_1}(s_1 \cdot \lambda \otimes |\epsilon_1^{-1}\epsilon_2| \otimes J_{N\cap L_1}(\rho_\infty^{s_2})) \\
&H_2(N_1, \mathrm{Ind}_{P_1}^G(F_{s_2s_1\cdot\lambda,1} \otimes \rho_\infty)) = \mathrm{Ind}_{B\cap L_1}^{L_1}(s_1s_2 \cdot \lambda \otimes |\epsilon_1^{-1}\epsilon_2| \otimes J_{N\cap L_1}(\rho_\infty^{s_2}))
\end{aligned} \tag{4.121}$$

$$\begin{aligned}
&H_0(N_2, \mathrm{Ind}_{P_1}^G(F_{\lambda,1} \otimes \rho_\infty)) = \mathrm{Ind}_{B\cap L_2}^{L_2}(\lambda \otimes_K J_{N\cap L_1}(\rho_\infty)) \\
&H_1(N_2, \mathrm{Ind}_{P_1}^G(F_{\lambda,1} \otimes \rho_\infty)) = \mathrm{Ind}_{L_2\cap B}^{L_2}(J_{N\cap L_1}(\rho_\infty))^\infty \otimes F_{s_1s_2\cdot\lambda,2} \oplus \mathrm{Ind}_{B\cap L_2}^{L_2}(s_1 \cdot \lambda \otimes_K J_{N\cap L_1}(\rho_\infty)) \\
&H_2(N_2, \mathrm{Ind}_{P_1}^G(F_{\lambda,1} \otimes \rho_\infty)) = F_{s_1s_2\cdot\lambda,2} \otimes |\epsilon_0^{-2}\epsilon_1\epsilon_2| \otimes_K \rho_\infty^{s_1s_2} \oplus F_{s_1s_2\cdot\lambda,2} \otimes \mathrm{Ind}_{L_2\cap B}^{L_2}(J_{N\cap L_1}(\rho_\infty))^\infty
\end{aligned} \tag{4.122}$$

$$\begin{aligned}
&H_0(N_2, \mathrm{Ind}_{P_1}^G(F_{s_2\cdot\lambda,1} \otimes \rho_\infty)) = \mathrm{Ind}_{B\cap L_2}^{L_2}(s_2 \cdot \lambda \otimes_K J_{N\cap L_1}(\rho_\infty)) \oplus \mathrm{Ind}_{B\cap L_2}^{L_2}(s_2s_1 \cdot \lambda \otimes_K J_{N\cap L_1}(\rho_\infty)) \\
&H_1(N_2, \mathrm{Ind}_{P_1}^G(F_{s_2\cdot\lambda,1} \otimes \rho_\infty)) = \mathrm{Ind}_{B\cap L_2}^{L_2}(s_1s_2 \cdot \lambda \otimes_K J_{N\cap L_1}(\rho_\infty)) \oplus \mathrm{Ind}_{B\cap L_2}^{L_2}(s_2s_1 \cdot \lambda \otimes_K J_{N\cap L_1}(\rho_\infty)) \\
&H_2(N_2, \mathrm{Ind}_{P_1}^G(F_{s_2\cdot\lambda,1} \otimes \rho_\infty)) = F_{s_1\cdot\lambda,2} \otimes |\epsilon_0^{-2}\epsilon_1\epsilon_2| \otimes_K \rho_\infty^{s_1s_2}
\end{aligned} \tag{4.123}$$

$$\begin{aligned}
&H_0(N_2, \mathrm{Ind}_{P_1}^G(F_{s_2s_1\cdot\lambda,1} \otimes \rho_\infty)) = \mathrm{Ind}_{B\cap L_2}^{L_2}(s_2s_1 \cdot \lambda \otimes_K J_{N\cap L_1}(\rho_\infty)) \\
&H_1(N_2, \mathrm{Ind}_{P_1}^G(F_{s_2s_1\cdot\lambda,1} \otimes \rho_\infty)) = \mathrm{Ind}_{B\cap L_2}^{L_2}(s_1s_2s_1 \cdot \lambda \otimes_K J_{N\cap L_1}(\rho_\infty)) \\
&H_2(N_2, \mathrm{Ind}_{P_1}^G(F_{s_2s_1\cdot\lambda,1} \otimes \rho_\infty)) = F_{\lambda,2} \otimes |\epsilon_0^{-2}\epsilon_1\epsilon_2| \otimes_K \rho_\infty^{s_1s_2}
\end{aligned} \tag{4.124}$$

De la suite exacte

$$0 \to F_\lambda \to \mathrm{Ind}_{P_1}^G(F_{\lambda,1}) \to v_{P_1}^{an}(\lambda) \to 0, \tag{4.125}$$

on déduit

$$
\begin{aligned}
H_0(N_1, v_{P_1}^{an}(\lambda)) &= F_{s_2\cdot\lambda,1} && (4.126)\\
H_1(N_1, v_{P_1}^{an}(\lambda)) &= \mathrm{Ind}_B^{P_1}(s_2\cdot\lambda\otimes|\epsilon_1^{-1}\epsilon_2|)\oplus F_{s_2s_1\cdot\lambda,1} && (4.127)\\
H_2(N_1, v_{P_1}^{an}(\lambda)) &= \mathrm{Ind}_B^{P_1}(s_2s_1\cdot\lambda\otimes|\epsilon_1^{-1}\epsilon_2|) && (4.128)\\
H_0(N_2, v_{P_1}^{an}(\lambda)) &= \mathrm{Ind}_{B\cap L_2}^{L_2}(\lambda)/F_{\lambda,2} && (4.129)\\
H_1(N_2, v_{P_1}^{an}(\lambda)) &= F_{s_1\cdot\lambda,2}\otimes\mathrm{Ind}_B^{P_2}(1)^\infty\oplus\mathrm{Ind}_{B\cap L_2}^{L_2}(s_1\cdot\lambda)/F_{s_1\cdot\lambda,2} && (4.130)\\
H_2(N_2, v_{P_1}^{an}(\lambda)) &= F_{s_1s_2\cdot\lambda,2}\otimes|\epsilon_0^{-2}\epsilon_1\epsilon_2|\oplus F_{s_1s_2\cdot\lambda,2}\otimes\mathrm{St}_2. && (4.131)
\end{aligned}
$$

En utilisant ces calculs, la suite spectrale (4.40) et le théorème 8.14 de [**32**], on obtient les dimensions suivantes

$$
\begin{aligned}
\dim_K \mathrm{Ext}^1_{G,\lambda}(v_{P_1}^{an}(\lambda),\mathrm{Ind}_{P_1}^G(F_{s_2\cdot\lambda,1})) = 2, \quad \dim_K \mathrm{Ext}^1_{G,\lambda}(v_{P_1}^{an}(\lambda),\mathrm{Ind}_{P_2}^G(F_{s_1\cdot\lambda,2})) = 0,\\
\dim_K \mathrm{Ext}^1_{G,\lambda}(v_{P_1}^{an}(\lambda),\mathrm{Ind}_{P_1}^G(F_{s_2s_1\cdot\lambda,1})) = 1, \quad \dim_K \mathrm{Ext}^1_{G,\lambda}(v_{P_1}^{an}(\lambda),\mathrm{Ind}_{P_2}^G(F_{s_1s_2\cdot\lambda,2})) = 0.
\end{aligned} \tag{4.132}
$$

En utilisant les suites exactes (2.50), on peut également en déduire les groupes d'homologie de la forme $H_q(N_i, \mathrm{Ind}_{P_1}^G(F_{s_2\cdot\lambda,1})^{\mathfrak{d}_1})$. Nous aurons par exemple besoin plus tard de

$$
H_1(N_1,\mathrm{Ind}_{P_1}^G(F_{s_2\cdot\lambda,1})^{\mathfrak{d}_1}) = F_{s_2s_1\cdot\lambda,1}\oplus F_\lambda\otimes\mathrm{Ind}_{B\cap L_1}^{L_1}(|\epsilon_1^{-1}\epsilon_2|)^\infty\oplus\mathrm{Ind}_{B\cap L_1}^{L_1}(s_1s_2\cdot\lambda|\epsilon_1^{-1}\epsilon_2|). \tag{4.133}
$$

Enfin, rappelons que N désigne le radical unipotent de B. En associant le calcul précédent de $H_q(N_1,\mathrm{Ind}_{P_1}^G(F_{w\cdot\lambda,1}))$ avec le théorème 8.13 de [**32**], on peut calculer les termes $H_q(N,\mathrm{Ind}_{P_1}^G(F_{w\cdot\lambda,1}))$.

$$
\begin{aligned}
&H_0(N,\mathrm{Ind}_{P_1}^G(F_{\lambda,1})) = \lambda\oplus s_2\cdot\lambda\\
&H_1(N,\mathrm{Ind}_{P_1}^G(F_{\lambda,1})) = (s_2\cdot\lambda|\epsilon_1^{-1}\epsilon_2|)\oplus(s_1s_2\cdot\lambda|\epsilon_1^{-1}\epsilon_2|)\oplus s_2\cdot\lambda\oplus s_2s_1\cdot\lambda\oplus s_1\cdot\lambda\oplus s_1s_2\cdot\lambda\\
&H_2(N,\mathrm{Ind}_{P_1}^G(F_{\lambda,1})) = (s_2s_1\cdot\lambda|\epsilon_1^{-1}\epsilon_2|)\oplus(s_1s_2s_1\cdot\lambda|\epsilon_1^{-1}\epsilon_2|)\oplus s_2s_1\cdot\lambda\oplus(s_1s_2\cdot\lambda|\epsilon_1^{-1}\epsilon_2|)\\
&\qquad\qquad\oplus s_1s_2\cdot\lambda|\epsilon_0^{-2}\epsilon_1\epsilon_2|\oplus s_1s_2\cdot\lambda\oplus s_1s_2s_2\cdot\lambda\\
&H_3(N,\mathrm{Ind}_{P_1}^G(F_{\lambda,1})) = (s_1s_2s_1\cdot\lambda|\epsilon_1^{-1}\epsilon_2|)\oplus s_1s_2s_1\cdot\lambda|\epsilon_0^{-2}\epsilon_1\epsilon_2|\oplus s_1s_2s_1\cdot\lambda
\end{aligned} \tag{4.134}
$$

$$
\begin{aligned}
&H_0(N,\mathrm{Ind}_{P_1}^G(F_{s_2\cdot\lambda,1})) = s_2\cdot\lambda\oplus s_2s_1\cdot\lambda\\
&H_1(N,\mathrm{Ind}_{P_1}^G(F_{s_2\cdot\lambda,1})) = (\lambda|\epsilon_1^{-1}\epsilon_2|)\oplus(s_2\cdot\lambda|\epsilon_1^{-1}\epsilon_2|)\oplus s_2s_1\cdot\lambda\oplus s_1s_2\cdot\lambda\oplus s_1s_2s_1\cdot\lambda\\
&H_2(N,\mathrm{Ind}_{P_1}^G(F_{s_2\cdot\lambda,1})) = (s_1s_2s_1\cdot\lambda|\epsilon_1^{-1}\epsilon_2|)\oplus(s_1\cdot\lambda|\epsilon_1^{-1}\epsilon_2|)\oplus(s_1\cdot\lambda|\epsilon_0^{-2}\epsilon_1\epsilon_2|)\oplus s_1s_2s_2\cdot\lambda\\
&H_3(N,\mathrm{Ind}_{P_1}^G(F_{s_2\cdot\lambda,1})) = (s_2s_1\cdot\lambda|\epsilon_0^{-2}\epsilon_1\epsilon_2|)
\end{aligned} \tag{4.135}
$$

$$
\begin{aligned}
&H_0(N,\mathrm{Ind}_{P_1}^G(F_{s_2s_1\cdot\lambda,1})) = s_2s_1\cdot\lambda\\
&H_1(N,\mathrm{Ind}_{P_1}^G(F_{s_2s_1\cdot\lambda,1})) = (s_1\cdot\lambda|\epsilon_1^{-1}\epsilon_2|)\oplus s_1s_2s_1\cdot\lambda\\
&H_2(N,\mathrm{Ind}_{P_1}^G(F_{s_2s_1\cdot\lambda,1})) = (s_1s_2s_1\cdot\lambda\otimes|\epsilon_1^{-1}\epsilon_2|)\oplus(\lambda|\epsilon_0^{-2}\epsilon_1\epsilon_2|)\\
&H_3(N,\mathrm{Ind}_{P_1}^G(F_{s_2s_1\cdot\lambda,1})) = (s_2\cdot\lambda|\epsilon_0^{-2}\epsilon_1\epsilon_2|)
\end{aligned} \tag{4.136}
$$

5. Construction de représentations localement analytiques

Dans cette partie, nous utilisons les résultats précédents pour construire des extensions entre les représentations localement analytiques de Steinberg généralisées de $\mathrm{GL}_3(\mathbb{Q}_p)$. On fixe λ un poids dominant de G.

5.1. Cohomologie de $v_{P_i}^{an}(\lambda)$. — Dans cette partie, P_i désigne un des deux sous-groupes paraboliques P_1 ou P_2.

Proposition 5.1. — *L'application quotient $\mathrm{Ind}_{P_i}^G(\lambda)\to v_{P_i}^{an}(\lambda)$ induit un isomorphisme*

$$
\mathrm{Ext}^1_{G,\lambda}(F_\lambda,\mathrm{Ind}_{P_i}^G(\lambda))\xrightarrow{\sim}\mathrm{Ext}^1_{G,\lambda}(F_\lambda,v_{P_i}^{an}(\lambda)). \tag{5.1}
$$

Démonstration. — En effet, on a d'après le corollaire 4.6

$$\mathrm{Ext}^1_{G,\lambda}(F_\lambda, F_\lambda) = \mathrm{Ext}^2_{G,\lambda}(F_\lambda, F_\lambda) = 0 \tag{5.2}$$

et on écrit la suite exacte longue associée à

$$0 \to F_\lambda \to \mathrm{Ind}^G_{P_i}(\lambda) \to v^{an}_{P_i}(\lambda) \to 0. \tag{5.3}$$

□

D'après le théorème 4.10, pour tout $p \geq 1$, les L_i-modules $H_p(N_i, F_{\lambda,i})$ et $F_{\lambda,i}$ sont non isomorphes. Donc la suite spectrale (4.40) ainsi que la proposition 4.5 montrent que

$$\mathrm{Ext}^q_{G,\lambda}(F_\lambda, \mathrm{Ind}^G_{P_i}(\lambda)) \simeq \mathrm{Ext}^q_{L_i,\lambda}(F_{\lambda,i}, F_{\lambda,i}). \tag{5.4}$$

Par ailleurs la proposition 4.5 donne un isomorphisme

$$\mathrm{Ext}^q_{L_i,\lambda}(F_{\lambda,i}, F_{\lambda,i}) \simeq H^q(\overline{L}_i, 1). \tag{5.5}$$

On obtient donc un isomorphisme

$$\mathrm{Ext}^q_{G,\lambda}(F_\lambda, \mathrm{Ind}^G_{P_i}(\lambda)) \simeq H^q(\overline{L}_i, 1). \tag{5.6}$$

Les espaces $H^q(\overline{L}_i, 1)$ se calculent alors en utilisant le corollaire 3.14. En particulier, $H^q(\overline{L}_i, 1) \simeq \bigwedge^q \mathrm{Hom}(\overline{L}_i, K)$, pour $0 \leq q \leq 2$. L'espace $\mathrm{Ext}^1_{G,\lambda}(F_\lambda, v^{an}_{P_i}(\lambda))$ est donc un K-espace vectoriel de dimension 2 dont une base est formée par les morphismes de $\overline{L}_i \simeq \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ dans K, c_{P_i} et $c_{P_i,\mathrm{val}}$ définis par

$$c_{P_i}(p) = \log(\det{}_i(p)), \quad c_{P_i,\mathrm{val}}(p) = \mathrm{val}(\det{}_i(p)), \tag{5.7}$$

avec $\det_1 = \epsilon_0^{-1}\epsilon_1^{-1}\epsilon_2^2$, $\det_2 = \epsilon_0^{-2}\epsilon_1\epsilon_2$ et $p \in \overline{L}_i$. L'inclusion $\overline{T} \subset \overline{L}_i$ induit une flèche de restriction $res : H^1(\overline{L}_i, 1) \to H^1(\overline{T}, 1)$. On note sh_i la composée de cette flèche de restriction avec l'isomorphisme (5.6). La flèche sh_i permet ainsi de voir $\mathrm{Ext}^1_{G,\lambda}(F_\lambda, v^{an}_{P_i}(\lambda))$ comme un sous-espace de $H^1(\overline{T}, 1)$.

Proposition 5.2. — *L'application* $\mathrm{Ext}^2_{G,\lambda}(F_\lambda, \mathrm{Ind}^G_{P_i}(\lambda)) \to \mathrm{Ext}^2_{G,\lambda}(F_\lambda, v^{an}_{P_i}(\lambda))$ *provenant de l'application quotient* $\mathrm{Ind}^G_{P_i}(\lambda) \to v^{an}_{P_i}(\lambda)$ *est un isomorphisme.*

Démonstration. — On sait déjà, par la proposition 4.5, que $\mathrm{Ext}^2_{G,\lambda}(F_\lambda, F_\lambda) = 0$. Il suffit donc de prouver que la flèche

$$\mathrm{Ext}^3_{G,\lambda}(F_\lambda, F_\lambda) \to \mathrm{Ext}^3_{G,\lambda}(F_\lambda, \mathrm{Ind}^G_{P_i}(\lambda)) \tag{5.8}$$

est injective. Or elle s'insère dans un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc}
\mathrm{Ext}^3_{G,\lambda}(F_\lambda, F_\lambda) & \longrightarrow & \mathrm{Ext}^3_{G,\lambda}(F_\lambda, \mathrm{Ind}^G_{P_i}(\lambda)) \\
\downarrow\wr & & {\scriptstyle (5.4)}\downarrow\wr \\
H^3(\overline{G}, 1) & \xrightarrow{res} & H^3(\overline{L}_i, 1) \\
\downarrow\wr & & \downarrow\wr \\
H^3(\mathfrak{sl}_3, K) & \xrightarrow{res} & H^3(\mathfrak{sl}_2, K).
\end{array} \tag{5.9}$$

La flèche verticale en bas à gauche provient du théorème de Casselman et Wigner (3.28) puisque le groupe $\overline{G}$ est le groupe des $\mathbb{Q}_p$-points d'un groupe semi-simple. La flèche verticale de droite dans le carré du bas provient du corollaire 3.14 appliqué au groupe $\overline{L}_i \simeq \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$. Le carré du bas est commutatif par fonctorialité des flèches de restriction. La flèche horizontale du bas est alors un isomorphisme d'après l'exemple 3.13. □

Corollaire 5.3. — *L'espace* $\mathrm{Ext}^2_{G,\lambda}(F_\lambda, v^{an}_{P_i}(\lambda))$ *est de dimension* 1*, isomorphe à* $H^2(\overline{L}_i, 1)$*, dont une base est* $c_{P_i} \wedge c_{P_i,\mathrm{val}}$.

Remarquons au passage que d'après le corollaire 3.14 et la structure des éléments primitifs de $\mathfrak{sl}_n$, on a $H^4(\overline{L}_i, 1) = 0$, et donc

$$\mathrm{Ext}^3_{G,\lambda}(F_\lambda, v^{an}_{P_i}(\lambda)) = 0. \tag{5.10}$$

5.2. Cohomologie de $\Sigma(\lambda)$. — Pour calculer la cohomologie de la représentation $\Sigma(\lambda) = v_B^{an}(\lambda)$, nous allons utiliser une résolution par des induites paraboliques. Soit α l'injection diagonale de F_λ dans $\mathrm{Ind}_{P_1}^G(\lambda) \oplus \mathrm{Ind}_{P_2}^G(\lambda)$ et β l'application de $\mathrm{Ind}_{P_1}^G(\lambda) \oplus \mathrm{Ind}_{P_2}^G(\lambda)$ dans $\mathrm{Ind}_B^G(\lambda)$ définie par $\beta(f, g) = f - g$.

Proposition 5.4. — *Le complexe*

$$0 \to F_\lambda \xrightarrow{\alpha} \mathrm{Ind}_{P_1}^G(\lambda) \oplus \mathrm{Ind}_{P_2}^G(\lambda) \xrightarrow{\beta} \mathrm{Ind}_B^G(\lambda) \to \Sigma(\lambda) \to 0 \tag{5.11}$$

est exact.

Démonstration. — La surjectivité de β vient de la définition de $\Sigma(\lambda)$, l'injectivité de α a déjà été vue au lemme 2.13. Il reste juste à prouver que le noyau de β est exactement l'image de α. Ceci est une conséquence immédiate de la description des composantes irréductibles des $\mathrm{Ind}_{P_i}^G(\lambda)$ donnée en (2.50). $\square$

Ainsi la cohomologie de $\Sigma(\lambda)$ s'identifie à l'hypercohomologie du complexe,

$$C_\bullet(\lambda) = [F_\lambda \xrightarrow{\alpha} \mathrm{Ind}_{P_1}^G(\lambda) \oplus \mathrm{Ind}_{P_2}^G(\lambda) \xrightarrow{\beta} \mathrm{Ind}_B^G(\lambda)] \tag{5.12}$$

$\mathrm{Ind}_B^G(\lambda)$ étant placé en degré 0. Pour calculer cette hypercohomologie, nous considérons, pour tout $p \geq 0$, la résolution (25) de [**32**] qui est $(C^{an}(G^{q+1}, C_p(\lambda)))_{q\geq 0}$. Comme cette résolution est fonctorielle, nous obtenons des applications G-équivariantes continues

$$C^{an}(G^{q+1}, C_p(\lambda)) \to C^{an}(G^{q+1}, C_{p-1}(\lambda)), \tag{5.13}$$

de sorte que l'on obtient un double complexe $(C^{p,q}(\lambda))$ où $C^{p,q}(\lambda) = C^{an}(G^{q+1}, C_{-p}(\lambda))$. L'espace $\mathrm{Ext}^n_{G,\lambda}(F_\lambda, \Sigma(\lambda))$ est alors le n-ième espace de cohomologie du complexe total associé à $(\mathrm{Hom}_G(F_\lambda, C^{p,q}(\lambda))$.

On obtient une suite spectrale incluse dans le deuxième cadran

$$E_1^{p,q}(\lambda) = \mathrm{Ext}^q_{G,\lambda}(F_\lambda, C_{-p}(\lambda)) \Rightarrow \mathrm{Ext}^{p+q}_{G,\lambda}(F_\lambda, \Sigma(\lambda)). \tag{5.14}$$

Les composantes de cette suite spectrale se calculent facilement en utilisant (4.40). Pour tout sous-groupe parabolique P de radical unipotent N_P, les représentations $H_q(N_P, F_\lambda)$ sont données par le théorème 4.10. En particulier $H_q(N_P, F_\lambda)$ n'a pas de facteur de Jordan-Hölder isomorphe à $F_{\lambda,P}$ pour $q \geq 1$ et $H_0(N_P, F_\lambda) \simeq F_{\lambda,P}$. Ainsi la flèche d'arête $E_2^{0,q} \to \mathrm{Ext}^q_{G,\lambda}(F_\lambda, \mathrm{Ind}_P^G(\lambda))$ est un isomorphisme et donne

$$\mathrm{Ext}^q_{G,\lambda}(F_\lambda, \mathrm{Ind}_P^G(\lambda)) \simeq \mathrm{Ext}^q_{L_P,\lambda}(H_0(N_0, F_\lambda), F_{\lambda,P}) = \mathrm{Ext}^q_{L_P,\lambda}(F_{\lambda,P}, F_{\lambda,P}) \simeq H^q(\overline{L_P}, 1). \tag{5.15}$$

Si P est un sous-groupe parabolique de G contenant B, on a un isomorphisme G-équivariant

$$C^{an}(G^{q+1}, \mathrm{Ind}_P^G(1)) \otimes_K F_\lambda \simeq C^{an}(G^{q+1}, \mathrm{Ind}_P^G(1) \otimes F_\lambda) \tag{5.16}$$

qui permet de définir un morphisme

$$\mathrm{Hom}_G(1, C^{p,q}(1)) \to \mathrm{Hom}_G(F_\lambda, C^{an}(G^{q+1}, \mathrm{Ind}_P^G(F_\lambda))) \tag{5.17}$$

commutant aux différentielles. La composition de cette application avec l'application (2.67) produit un morphisme de complexes doubles

$$(C^{p,q}(1)^G) \to (\mathrm{Hom}_G(F_\lambda, C^{p,q}(\lambda))) \tag{5.18}$$

induisant un morphisme $H^n(\overline{G}, \mathrm{St}_3^{an}) \to \mathrm{Ext}^n_{G,\lambda}(F_\lambda, \Sigma(\lambda))$. Or, pour tout $q \geq 0$, l'explicitation (4.41) du morphisme d'arête de la suite spectrale (4.40) montre que le diagramme suivant est commutatif

$$\begin{tikzcd} E_1^{p,q}(0) \arrow[r] \arrow[d, "\wr"] & E_1^{p,q}(\lambda) \arrow[d, "\wr"] \\ \bigoplus_{S\subset\Delta, |S|=-p} H^q(\overline{L}_S, K) \arrow[r, equal] & \bigoplus_{S\subset\Delta, |S|=-p} H^q(\overline{L}_S, K) \end{tikzcd} \tag{5.19}$$

Ceci prouve que toutes ces suites spectrales, pour λ variant parmi les poids dominants, sont isomorphes à la suite spectrale obtenue à partir de $C_\bullet(0)$ que nous noterons désormais $C_\bullet$. Nous obtenons ainsi des isomorphismes

$$\varphi_\lambda : H^q(\overline{G}, \mathrm{St}_3^{an}) \simeq \mathrm{Ext}^q_{G,\lambda}(F_\lambda, \Sigma(\lambda)). \tag{5.20}$$

Déterminons maintenant les différentielles d_2 dans la suite spectrale (5.14). Pour chaque inclusion $P \subset Q$ de paraboliques, la décomposition (4.41) montre que le diagramme suivant est commutatif

$$\begin{array}{ccc} H^q(\overline{G}, \mathrm{Ind}_Q^G(1)) & \longrightarrow & H^q(\overline{G}, \mathrm{Ind}_P^G(1)) \\ \downarrow \wr & & \downarrow \wr \\ H^q(\overline{L_Q}, 1) & \xrightarrow{res} & H^q(\overline{L_P}, 1) \end{array} . \tag{5.21}$$

Lemme 5.5. — *Les lignes $E_1^{\cdot,0}$ et $E_1^{\cdot,1}$ sont exactes.*

Démonstration. — Notons res_i l'application de $\mathrm{Hom}(\overline{L}_i, K)$ dans $\mathrm{Hom}(\overline{T}, K)$ obtenue par composition avec l'inclusion $\overline{T} \subset \overline{L}_i$. La ligne $E_1^{\cdot,0}$ est

$$1 \to 1 \oplus 1 \to 1. \tag{5.22}$$

De même la ligne $E_1^{\cdot,1}$ est isomorphe à

$$0 \to \mathrm{Hom}(\overline{L_1}, K) \oplus \mathrm{Hom}(\overline{L_2}, K) \xrightarrow{res_1 \oplus res_2} \mathrm{Hom}(\overline{T}, K) \tag{5.23}$$

qui est exacte car $\overline{T}$ est le produit des centres de $\overline{L_1}$ et $\overline{L_2}$. □

Les espaces $E_1^{0,q}$ sont particulièrement simples. D'après le corollaire 3.11, on a des isomorphismes

$$E_1^{0,q} = H^q(\overline{T}, 1) \simeq \bigwedge^q \mathrm{Hom}(\overline{T}, 1). \tag{5.24}$$

Posons $c_{1,\log} = \log_0 \circ(\epsilon_0^{-1}\epsilon_1^{-1}\epsilon_2^2)$, $c_{1,\mathrm{val}} = \mathrm{val} \circ(\epsilon_0^{-1}\epsilon_1^{-1}\epsilon_2^2)$, $c_{2,\log} = \log_0 \circ(\epsilon_0^{-2}\epsilon_1\epsilon_2)$ et $c_{2,\mathrm{val}} = \mathrm{val} \circ(\epsilon_0^{-2}\epsilon_1\epsilon_2)$. Ces quatre éléments forment une base de $\mathrm{Hom}(\overline{T}, K)$. Remarquons que $c_{i,\log}$ et $c_{i,\mathrm{val}}$ se prolongent au groupe $\overline{L}_i$ et engendrent donc l'image de la flèche de restriction

$$H^1(\overline{L}_i, 1) \to H^1(\overline{T}, 1). \tag{5.25}$$

De plus $c_{i,\log}$ et $c_{i,\mathrm{val}}$ sont les images par cette flèche de c_{P_i} et $c_{P_i,\mathrm{val}}$, définis dans la section précédente. On en conclut immédiatement que la flèche $d_1^{-1,2}$ est injective d'image engendrée par $c_{1,\log} \wedge c_{1,\mathrm{val}}$ et $c_{2,\log} \wedge c_{2,\mathrm{val}}$. Ainsi $E_2^{0,2}$ est de dimension 4 et s'identifie au quotient de $\bigwedge^2 \mathrm{Hom}(\overline{T}, K)$ par l'espace engendré par ces deux éléments. On en conclut au passage que $E_2^{-1,2} = 0$. Le corollaire 4.6 nous montre que $E_1^{-2,2} = E_1^{-2,4} = 0$. Enfin, d'après le corollaire 3.14, les espaces $H^3(\overline{G}, 1)$ et $H^3(\overline{L}_i, 1)$ sont de dimension 1. Comme la restriction de $\overline{G}$ à $\overline{L}_i$ est injective, on obtient $E_2^{-2,3} = 0$ et $\dim_K E_2^{-1,3} = 1$. En comparant tous ces résultats on obtient la proposition suivante.

Proposition 5.6. — *Les espaces* $\mathrm{Hom}(F_\lambda, \Sigma(\lambda))$ *et* $\mathrm{Ext}^1_{G,\lambda}(F_\lambda, \Sigma(\lambda))$ *sont nuls et* $\mathrm{Ext}^2_{G,\lambda}(F_\lambda, \Sigma(\lambda))$ *est de dimension* 5.

Il s'agit maintenant de décrire les éléments de $\mathrm{Ext}^2_{G,\lambda}(F_\lambda, \Sigma(\lambda))$. Le sous-espace correspondant à $E_2^{0,2}$ est de dimension 4 et peut être décrit de façon élémentaire en termes de cup-produits par (5.24). On obtient ainsi une application

$$\kappa : \ H^2(\overline{T}, 1) \simeq E_1^{0,2} \twoheadrightarrow E_2^{0,2} \hookrightarrow \mathrm{Ext}^2_{G,\lambda}(F_\lambda, \Sigma(\lambda)). \tag{5.26}$$

Le noyau de κ a pour base les cocycles $c_{1,\log} \wedge c_{1,\mathrm{val}}$ et $c_{2,\log} \wedge c_{2,\mathrm{val}}$ et les éléments

$$\kappa(c_{1,\mathrm{val}} \wedge c_{2,\mathrm{val}}), \kappa(c_{1,\log} \wedge c_{2,\log}), \kappa(c_{1,\log} \wedge c_{2,\mathrm{val}}), \kappa(c_{1,\mathrm{val}} \wedge c_{2,\log}) \tag{5.27}$$

forment une base de $E_2^{0,2}$. Par exemple, l'élément $c_{1,\mathrm{val}} \wedge c_{2,\mathrm{val}}$ provient d'une extension dans la catégorie des représentations localement algébriques.

Proposition 5.7. — *La classe $c_{1,\mathrm{val}} \wedge c_{2,\mathrm{val}}$ engendre l'image de l'application*

$$\mathrm{Ext}^2_{G,\lambda}(F_\lambda, F_\lambda \otimes \mathrm{St}_3) \hookrightarrow \mathrm{Ext}^2_{G,\lambda}(F_\lambda, \Sigma(\lambda)). \tag{5.28}$$

Démonstration. — D'après le théorème 1 de [**38**] (voir aussi le théorème 1.3 de [**17**]) l'application quotient $\mathrm{Ind}_B^G(1)^\infty \to \mathrm{St}_3$ induit un isomorphisme $\mathrm{Ext}^2_{G,\infty}(1, \mathrm{Ind}_B^G(1)^\infty) \simeq \mathrm{Ext}^2_{G,\infty}(1, \mathrm{St}_3)$. Ainsi, d'après la proposition 4.7, on a un isomorphisme

$$\mathrm{Ext}^2_{G,\lambda}(F_\lambda, F_\lambda \otimes_K \mathrm{Ind}_B^G(1)^\infty) \simeq \mathrm{Ext}^2_{G,\lambda}(F_\lambda, F_\lambda \otimes \mathrm{St}_3). \tag{5.29}$$

Par ailleurs le corollaire 10 de [**38**] et la proposition 4.7 nous donnent un isomorphisme

$$\mathrm{Ext}^2_{G,\lambda}(F_\lambda, F_\lambda \otimes \mathrm{Ind}_B^G(1)^\infty) \simeq \bigwedge^2 \mathrm{Hom}_\infty(\overline{T}, K). \tag{5.30}$$

On obtient alors un diagrammes commutatif

$$\begin{array}{ccccc} \mathrm{Ext}^2_{G,\lambda}(F_\lambda, F_\lambda \otimes \mathrm{St}_3) & \underset{\sim}{\longleftarrow} & \mathrm{Ext}^2_{G,\lambda}(F_\lambda, F_\lambda \otimes \mathrm{Ind}_B^G(1)^\infty) & \underset{\sim}{\longrightarrow} & \bigwedge^2 \mathrm{Hom}_\infty(\overline{T}, K) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{Ext}^2_{G,\lambda}(F_\lambda, \Sigma(\lambda)) & \longleftarrow & \mathrm{Ext}^2_{G,\lambda}(F_\lambda, \mathrm{Ind}_B^G(\lambda)) & \longrightarrow & \bigwedge^2 \mathrm{Hom}(\overline{T}, K). \end{array} \tag{5.31}$$

□

Notons $W(\lambda)$ le sous-espace $\mathrm{Ind}_{P_1}^G(\lambda)+\mathrm{Ind}_{P_2}^G(\lambda)$ de $\mathrm{Ind}_B^G(\lambda)$. Le morceau $E_2^{-1,3}$ s'identifie à $\mathrm{Ext}^3_{G,\lambda}(F_\lambda, W(\lambda))$ et l'application $\mathrm{Ext}^2_{G,\lambda}(F_\lambda, \Sigma(\lambda)) \to E_2^{-1,3}$ est alors l'application bord obtenue à partir de la suite exacte

$$0 \to W(\lambda) \to \mathrm{Ind}_B^G(\lambda) \to \Sigma(\lambda) \to 0. \tag{5.32}$$

Son noyau est l'image de κ.

5.3. Cohomologie et dilogarithme. — Soit $W = W(0)$, $\mathrm{St}_3^{an} = \Sigma(0)$. Nous allons montrer comment le dilogarithme p-adique permet de décrire des éléments de $H^3(\overline{G}, W)$ et de les relever en des éléments de $H^2(\overline{G}, \mathrm{St}_3^{an})$.

Notons $\mathcal{B}$ l'espace vectoriel des applications mesurables D de $\mathbb{P}^1(\mathbb{Q}_p)$ dans K vérifiant l'équation fonctionnelle

$$D(xy) - D(x) - D(y) + D(y\frac{1-x}{1-y}) - D(x\frac{1-y}{1-x}) = 0. \tag{5.33}$$

Soit li_2 la fonction dilogarithme $\mathbb{Q}_p\backslash\{0,1\} \to \mathbb{Q}_p$ construite par Robert Coleman dans [**13**]. Cette fonction dépend du choix d'une détermination du logarithme p-adique, c'est-à-dire de la valeur de $\log(p)$. En choisissant la détermination $\log(p) = a$, on pose

$$D_a(z) = li_2(z) + \frac{1}{2}\log_a(z)\log_a(1-z). \tag{5.34}$$

La détermination que nous utiliserons le plus souvent est $a = 0$, on note donc, pour alléger les indices, $D = D_0$. On vérifie alors que

$$D_a - D = \frac{a}{2}d \tag{5.35}$$

où d est définie sur $\mathbb{Q}_p\backslash\{0\}$ par

$$d(z) = \log(1-z)\mathrm{val}(z) - \log(z)\mathrm{val}(1-z), \tag{5.36}$$

et cette fois-ci, d ne dépend pas du choix d'une branche du logarithme. Les fonctions D et d sont deux éléments de $\mathcal{B}$. Nous montrons en appendice que $\mathcal{B}$ est un K-espace vectoriel de dimension 2 ayant pour base (D, d). Nous y construisons également un isomorphisme

$$\theta : \mathcal{B} \xrightarrow{\sim} H^2(\mathrm{PGL}_2(\mathbb{Q}_p), \mathrm{St}_2^{an}), \tag{5.37}$$

que nous allons à présent utiliser. Le centre de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ agit trivialement sur St_2^{an}, on a donc une injection

$$H^2(\mathrm{PGL}_2(\mathbb{Q}_p), \mathrm{St}_2^{an}) \hookrightarrow H^2(\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p), \mathrm{St}_2^{an}). \tag{5.38}$$

Notons $\tilde{\theta}$ la composée de θ avec cette injection.

En quotientant la suite exacte

$$0 \to W \to \mathrm{Ind}_B^G(1) \to \mathrm{St}_3^{an} \to 0 \tag{5.39}$$

par $\mathrm{Ind}_{P_1}^G(1)$, on obtient une suite exacte

$$0 \to v_{P_2}^{an} \to \mathrm{Ind}_{P_1}^G(\mathrm{St}_2^{an}) \to \mathrm{St}_3^{an} \to 0. \tag{5.40}$$

D'après (5.10), $H^3(\overline{G}, v_{P_2}^{an}) = 0$. On obtient donc une surjection

$$H^2(\overline{G}, \mathrm{Ind}_{P_1}^G(\mathrm{St}_2^{an})) \twoheadrightarrow H^2(\overline{G}, \mathrm{St}_3^{an}). \tag{5.41}$$

Comme $H_1(N_1,1)$ et $H_2(N_1,1)$ sont, d'après le théorème 4.10, des représentations sur lesquelles le centre de $\overline{L}_1$ agit non trivialement, la suite spectrale (4.40) prend ici la forme d'un isomorphisme de Shapiro

$$H^2(\overline{G}, \mathrm{Ind}_{P_1}^{G}(\mathrm{St}_2^{an})) \xrightarrow{\sim} H^2(\overline{L_1}, \mathrm{St}_2^{an}) = H^2(\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p), \mathrm{St}_2^{an}). \tag{5.42}$$

En composant l'inverse de cet isomorphisme avec l'isomorphisme $\tilde{\theta}$ de l'appendice, et avec (5.41), on obtient une flèche

$$\iota_1 : \mathcal{B} \to H^2(\overline{G}, \mathrm{St}_3^{an}). \tag{5.43}$$

De même en changeant P_1 par P_2 dans (5.41), on obtient une flèche $\iota_2 : \mathcal{B} \to H^2(\overline{G}, \mathrm{St}_3^{an})$.

Lemme 5.8. — *Il existe $\alpha \in K$ non nul tel que*

$$\iota_1(d) = \iota_2(d) = \alpha(c_{1,\log} \wedge c_{2,\mathrm{val}} + c_{2,\log} \wedge c_{1,\mathrm{val}}). \tag{5.44}$$

Démonstration. — On sait d'après l'appendice 1 que $\theta(d)$ appartient au noyau de

$$H^2(\mathrm{PGL}_2(\mathbb{Q}_p), \mathrm{St}_2^{an}) \to H^3(\mathrm{PGL}_2(\mathbb{Q}_p), 1). \tag{5.45}$$

Notons B_2 le sous-groupe des matrices triangulaires inférieures de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ et T_2 le sous-groupe des matrices diagonales. L'élément $\theta(d)$ est alors l'image d'un élément de $H^2(\mathrm{PGL}_2(\mathbb{Q}_p), \mathrm{Ind}_{B_2}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}(1))$. En utilisant le théorème 8.13 de [**32**], on obtient un isomorphisme

$$H^2(\mathrm{PGL}_2(\mathbb{Q}_p), \mathrm{Ind}_{B_2}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}(1)) \simeq H^2(\overline{T}_2, 1) \simeq \bigwedge^2 \mathrm{Hom}(\overline{T}_2, K). \tag{5.46}$$

Il s'agit d'un espace de dimension 1 engendré par $(\log_0 \circ \epsilon) \wedge (\mathrm{val} \circ \epsilon)$ où ϵ est le morphisme de T_2 dans $K^\times$ défini par $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \mapsto a^{-1}d$. Ainsi il existe $\alpha' \in K^\times$ tel que $\theta(d) = \alpha'(\log_0 \circ \epsilon) \wedge (\mathrm{val} \circ \epsilon)$. On remarque alors, que via l'isomorphisme $\overline{L}_1 \simeq \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$, ϵ correspond à $\epsilon_0^{-1}\epsilon_1$. Ainsi l'image de d par ι_1 est $\alpha'(\log_0 \circ \epsilon_0^{-1}\epsilon_1) \wedge (\mathrm{val} \circ \epsilon_0^{-1}\epsilon_1)$ pour un certains $\alpha' \in K^\times$. Comme pour f morphisme de $\mathbb{Q}_p^\times$ dans le groupe additif de K, on a

$$f \circ (\epsilon_0^{-1}\epsilon_1) = -\frac{1}{3} f(\epsilon_0^{-1}\epsilon_1^{-1}\epsilon_2^2) + \frac{2}{3} f(\epsilon_0^{-2}\epsilon_1\epsilon_2), \tag{5.47}$$

on en déduit

$$\iota_1(d) = \alpha'[\frac{4}{9} c_{2,\log} \wedge c_{2,\mathrm{val}} + \frac{1}{9} c_{1,\log} \wedge c_{1,\mathrm{val}} - \frac{2}{9}(c_{1,\log} \wedge c_{2,\mathrm{val}} + c_{2,\log} \wedge c_{1,\mathrm{val}})]. \tag{5.48}$$

Comme les deux premiers termes du membre de droite sont annulés par κ, on a le résultat avec $\alpha = -\frac{2}{9}\alpha'$. On raisonne de la même façon pour ι_2 en remarquant que $\iota_2(d) = \alpha'(\log_0 \circ \epsilon_1^{-1}\epsilon_2) \wedge (\mathrm{val} \circ \epsilon_1^{-1}\epsilon_2)$. □

Lemme 5.9. — *L'image de $\iota_i(D)$ par $H^2(\overline{G}, \mathrm{St}_3^{an}) \to H^3(\overline{G}, W)$ est non nulle. De plus $\iota_1(D)$ et $\iota_2(D)$ ont même image dans $H^3(\overline{G}, W)$.*

Démonstration. — Cela résulte du diagramme commutatif suivant

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \mathrm{Ind}_{P_i}^{G}(1) \arrow[r] \arrow[d, hook] & \mathrm{Ind}_{B}^{G}(1) \arrow[r] \arrow[d, equal] & \mathrm{Ind}_{P_i}^{G}(\mathrm{St}_2^{an}) \arrow[r] \arrow[d, two heads] & 0 \\ 0 \arrow[r] & W \arrow[r] & \mathrm{Ind}_{B}^{G}(1) \arrow[r] & \mathrm{St}_3^{an} \arrow[r] & 0 \end{tikzcd} \tag{5.49}$$

qui donne

$$\begin{tikzcd} H^2(\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p), \mathrm{St}_2^{an}) \arrow[r] & H^3(\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p), 1) \\ H^2(\overline{G}, \mathrm{Ind}_{P_i}^{G}(\mathrm{St}_2^{an})) \arrow[r] \arrow[u, "(5.42)", "\wr"'] \arrow[d] & H^3(\overline{G}, \mathrm{Ind}_{P_i}^{G}(1)) \arrow[u, "\wr"'] \arrow[d, "\wr"] \\ H^2(\overline{G}, \mathrm{St}_3^{an}) \arrow[r] & H^3(\overline{G}, W). \end{tikzcd} \tag{5.50}$$

Le carré du haut est commutatif car les flèches verticales sont constituées de restrictions, qui commutent aux opérateurs de bord. L'image de D par la flèche horizontale du haut est non nulle d'après (7.15) et la proposition 7.5. De plus, la composée

$$H^3(\overline{G}, 1) \to H^3(\overline{G}, \mathrm{Ind}_{P_i}^{G}(1)) \to H^3(\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p), 1) \tag{5.51}$$

est l'application de restriction de $\overline{G}$ à $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ via le plongement

$$\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p) \xrightarrow{\sim} \overline{L_i} \hookrightarrow \overline{G}. \tag{5.52}$$

Comme le centre de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ est isomorphe à $\mathbb{Q}_p^\times$ et que $\dim \mathrm{Hom}(\mathbb{Q}_p^\times, K) \leq 2$, on a, d'après le corollaire 3.14, $H^3(\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p), 1) \simeq H^3(\mathfrak{sl}_2, 1)$. De même, on a $H^3(\overline{G}, 1) \simeq H^3(\mathfrak{sl}_3, 1)$. En utilisant ces isomorphismes, la flèche (5.51) devient la flèche φ_1^* de l'exemple 3.13. Cet exemple montre alors que la composée (5.51) est indépendante de $i \in \{1, 2\}$. Autrement dit, dans le diagramme commutatif suivant

$$\begin{tikzcd}
 & H^3(\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p), 1) \\
H^3(\overline{G}, 1) \arrow[ur, "\sim"] \arrow[r, "\sim"] \arrow[dr, "\sim"'] & H^3(\overline{G}, \mathrm{Ind}_{P_i}^G(1)) \arrow[u, "\wr"'] \arrow[d, "\wr"] \\
 & H^3(\overline{G}, W)
\end{tikzcd} \tag{5.53}$$

l'isomorphisme entre $H^3(\overline{G}, K)$ et $H^3(\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p), K)$ est indépendant de i. Notons $\widetilde{\iota_i(D)}$ l'image inverse de $\tilde{\theta}(D)$ par (5.42). En comparant au diagramme commutatif (5.50), on voit que l'image de $(\widetilde{\iota_1(D)}, \widetilde{\iota_2(D)})$ dans $H^3(\overline{G}, \mathrm{Ind}_{P_1}^G(1) \oplus \mathrm{Ind}_{P_2}^G(1))$ appartient à l'image de

$$H^3(\overline{G}, K) \to H^3(\overline{G}, \mathrm{Ind}_{P_1}^G(1) \oplus \mathrm{Ind}_{P_2}^G(1)), \tag{5.54}$$

obtenue par inclusion diagonale, donc $\iota_1(D) - \iota_2(D)$ est nul dans $H^3(\overline{G}, W)$. □

Corollaire 5.10. — *Les application ι_i sont injectives.*

On pose alors

$$c_0 = \alpha^{-1}\iota_1(D) - \frac{1}{2} c_{1,\log} \wedge c_{2,\log} \tag{5.55}$$

où α est choisi comme dans le lemme 5.8. D'après le lemme 5.9, c_0 n'appartient pas à l'image de κ. On obtient donc

$$\begin{aligned} H^2(\overline{G}, \mathrm{St}_3^{an}) &= \mathrm{Im}(\kappa) \oplus Kc_0 \\ &= Kc_{1,\mathrm{val}} \wedge c_{2,\mathrm{val}} \oplus Kc_{1,\log} \wedge c_{2,\mathrm{val}} \oplus Kc_{2,\log} \wedge c_{1,\mathrm{val}} \oplus Kc_{1,\log} \wedge c_{2,\log} \oplus Kc_0. \end{aligned} \tag{5.56}$$

Comme le morphisme φ_λ entre $H^2(\overline{G}, \mathrm{St}_3^{an})$ et $\mathrm{Ext}^2_{G,\lambda}(F_\lambda, \Sigma(\lambda))$ provient d'un morphisme de suites spectrales et κ de morphismes d'arêtes dans ces suites spectrales, on a $\kappa = \varphi_\lambda \circ \kappa$. On note également c_0 l'élément de $\mathrm{Ext}^2_{G,\lambda}(F_\lambda, \Sigma(\lambda))$, image de c_0 par φ_λ. On a également une décomposition

$$\begin{aligned} \mathrm{Ext}^2_{G,\lambda}(F_\lambda, \Sigma(\lambda)) &= \mathrm{Im}(\kappa) \oplus Kc_0 \\ &= Kc_{1,\mathrm{val}} \wedge c_{2,\mathrm{val}} \oplus Kc_{1,\log} \wedge c_{2,\mathrm{val}} \oplus Kc_{2,\log} \wedge c_{1,\mathrm{val}} \oplus Kc_{1,\log} \wedge c_{2,\log} \oplus Kc_0. \end{aligned} \tag{5.57}$$

5.4. Extensions entre $\Sigma(\lambda)$ et les $v_{P_i}^{an}(\lambda)$. — La nullité des espaces $\mathrm{Ext}^1_{G,\lambda}(F_\lambda, \Sigma(\lambda))$ et $\mathrm{Hom}_G(F_\lambda, \Sigma(\lambda)))$ (proposition 5.6) montre que l'on a des isomorphismes

$$\mathrm{Ext}^1_{G,\lambda}(v_{P_i}^{an}(\lambda), \Sigma(\lambda)) \simeq \mathrm{Ext}^1_{G,\lambda}(\mathrm{Ind}_{P_i}^G(\lambda), \Sigma(\lambda)). \tag{5.58}$$

On peut alors utiliser la résolution (5.11) de $\Sigma(\lambda)$ pour calculer ces groupes. On applique le foncteur $\mathrm{Hom}_G(v_{P_1}^{an}(\lambda), \cdot)$ pour obtenir une suite spectrale

$$E_1^{p,q} = \mathrm{Ext}^q_{G,\lambda}(\mathrm{Ind}_{P_1}^G(\lambda), C_{-p}(\lambda)) \Rightarrow \mathrm{Ext}^{p+q}_{G,\lambda}(\mathrm{Ind}_{P_1}^G(\lambda), \Sigma(\lambda)). \tag{5.59}$$

Par dualité de Schneider et Teitelbaum, on peut éliminer immédiatement les termes

$$\mathrm{Ext}^q_{G,\lambda}(\mathrm{Ind}_{P_i}^G(\lambda), F_\lambda). \tag{5.60}$$

En effet d'après le corollaire 4.3, on a un isomorphisme

$$\mathrm{Ext}^q_{G,\lambda}(\mathrm{Ind}_{P_i}^G(\lambda), F_\lambda) = \mathrm{Ext}^{q-2}_{G,-\lambda}(F'_\lambda, \mathrm{Ind}_{P_i}^G(F'_{\lambda,i} \otimes \mathfrak{d}_{P_i})). \tag{5.61}$$

Or, pour tout q, les $\overline{L}_i$-représentations $H_q(N_i, F'_\lambda)$ et $F'_{\lambda,i} \otimes \mathfrak{d}_{P_i}$ ont des caractères centraux différents : le premier est algébrique et le second a une composante lisse non triviale. Ainsi l'application de la suite spectrale (4.40) donne le résultat.

De plus, les formules (4.134) montrent que le seul $H_q(N, \mathrm{Ind}_{P_i}^G(\lambda))$ ayant une composante λ-isotypique non triviale est le H_0, et cette composante est de dimension 1. Ainsi la suite spectrale (4.40) nous donne

$$\mathrm{Ext}^q_{G,\lambda}(\mathrm{Ind}_{P_i}^G(\lambda), \mathrm{Ind}_B^G(\lambda)) \simeq H^q(\overline{T}, 1) \tag{5.62}$$

$$\mathrm{Ext}^q_{G,\lambda}(\mathrm{Ind}_{P_i}^G(\lambda), \mathrm{Ind}_{P_i}^G(\lambda)) \simeq H^q(\overline{L}_i, 1). \tag{5.63}$$

Les formules (4.122) et la suite spectrale (4.40) donnent de même, pour tout q,

$$\mathrm{Ext}^q_{G,\lambda}(\mathrm{Ind}_{P_1}^G(\lambda), \mathrm{Ind}_{P_2}^G(\lambda)) \simeq \mathrm{Ext}^q_{L_2,\lambda}(\mathrm{Ind}_B^{L_2}(\lambda), F_{\lambda,2}) = 0. \tag{5.64}$$

Ainsi

$$\mathrm{Ext}^1_{G,\lambda}(\mathrm{Ind}_{P_1}^G(\lambda), \mathrm{Ind}_{P_2}^G(\lambda)) = \mathrm{Ext}^2_{G,\lambda}(\mathrm{Ind}_{P_1}^G(\lambda), \mathrm{Ind}_{P_2}^G(\lambda)) = 0. \tag{5.65}$$

De même

$$\mathrm{Ext}^1_{G,\lambda}(\mathrm{Ind}_{P_2}^G(\lambda), \mathrm{Ind}_{P_1}^G(\lambda)) = \mathrm{Ext}^2_{G,\lambda}(\mathrm{Ind}_{P_2}^G(\lambda), \mathrm{Ind}_{P_1}^G(\lambda)) = 0. \tag{5.66}$$

Au final, on obtient

Proposition 5.11. — *L'espace* $\mathrm{Ext}^1_{G,\lambda}(v_{P_i}^{an}(\lambda), \Sigma(\lambda))$ *est de dimension* 2 *pour* $i \in \{1,2\}$. *De plus, l'inclusion* $F_\lambda \otimes_K v_{P_i} \hookrightarrow v_{P_i}^{an}(\lambda)$ *induit un isomorphisme*

$$\mathrm{Ext}^1_{G,\lambda}(v_{P_i}^{an}(\lambda), \Sigma(\lambda)) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ext}^1_{G,\lambda}(F_\lambda \otimes_K v_{P_i}, \Sigma(\lambda)) \tag{5.67}$$

Démonstration. — Dans la suite spectrale (5.59), la ligne d'ordonnée q est de la forme

$$H^q(\overline{L}_i, K) \xrightarrow{d_1^{-1,q}} H^q(\overline{T}, K) \tag{5.68}$$

et cette flèche est une flèche de restriction. Ainsi, d'après le corollaire 3.14, $H^q(H,K) \simeq \bigwedge^q \mathrm{Hom}(H,K)$ pour $q \in \{0,1,2\}$ et $H \in \{\overline{L}_i, \overline{T}\}$. Le morphisme $d_1^{-1,q}$ est donc injectif pour $q \leq 2$ et on obtient $\mathrm{Ext}^1_{G,\lambda}(\mathrm{Ind}_{P_1}^G(\lambda), \Sigma(\lambda)) \simeq E_2^{0,1}$. Comme $\mathrm{Hom}(\overline{L}_i, K)$ est de dimension 2, engendré par $c_{i,\log}$ et $c_{i,\mathrm{val}}$ et que $\mathrm{Hom}(\overline{T}, K)$ est de dimension 4 engendré par $c_{1,\log}$, $c_{1,\mathrm{val}}$, $c_{2,\log}$ et $c_{2,\mathrm{val}}$, l'espace $\mathrm{Ext}^1_{G,\lambda}(\mathrm{Ind}_{P_1}^G(\lambda), \Sigma(\lambda))$ est de dimension 2. On conclut alors avec l'isomorphisme (5.58). Le même raisonnement en remplaçant $v_{P_i}^{an}(\lambda)$ par $F_\lambda \otimes v_{P_i}$ donne l'isomorphisme (5.67). □

En fait, nous obtenons plus que cela, il y a une suite d'isomorphismes

$$\begin{aligned}\mathrm{Ext}^1_{G,\lambda}(v_{P_1}^{an}(\lambda), \Sigma(\lambda)) &\xrightarrow{\sim} \mathrm{Ext}^1_{G,\lambda}(\mathrm{Ind}_{P_1}^G(\lambda), \Sigma(\lambda)) \\ &\twoheadleftarrow \mathrm{Ext}^1_{G,\lambda}(\mathrm{Ind}_{P_1}^G(\lambda), \mathrm{Ind}_B^G(\lambda)) \xrightarrow{\sim} H^1(\overline{T}, 1),\end{aligned} \tag{5.69}$$

ce qui donne une présentation

$$\tilde{sh}_1 : H^1(\overline{T}, 1) \twoheadrightarrow \mathrm{Ext}^1_{G,\lambda}(v_{P_1}^{an}(\lambda), \Sigma(\lambda)) \tag{5.70}$$

dont l'image est engendrée par les cocycles $c_{2,\log}$ et $c_{2,\mathrm{val}}$.

Les mêmes résultats sont valables en remplaçant P_1 par P_2. On obtient une application

$$\tilde{sh}_2 : H^1(\overline{T}, 1) \twoheadrightarrow \mathrm{Ext}^1_{G,\lambda}(v_{P_2}^{an}(\lambda), \Sigma(\lambda)) \tag{5.71}$$

dont l'image est engendrée par $c_{1,\log}$ et $c_{1,\mathrm{val}}$.

Définition 5.12. — Si $\mathcal{L}$ et $\mathcal{L}'$ sont deux éléments de K, on note $\Sigma(\lambda, \mathcal{L}, \mathcal{L}')$ l'unique représentation localement analytique de G s'insérant dans une suite exacte

$$0 \to \Sigma(\lambda) \to \Sigma(\lambda, \mathcal{L}, \mathcal{L}') \to v_{P_1}^{an}(\lambda) \oplus v_{P_2}^{an}(\lambda) \to 0, \tag{5.72}$$

dont la classe dans $\mathrm{Ext}^1_{G,\lambda}(v_{P_1}^{an}(\lambda) \oplus v_{P_2}^{an}(\lambda), \Sigma(\lambda))$ correspond au couple $(c_{2,\log} + \mathcal{L}' c_{2,\mathrm{val}}, c_{1,\log} + \mathcal{L} c_{1,\mathrm{val}})$ par la proposition 3.2.

Remarquons que comme les représentations $\Sigma(\lambda)$ et $v_{P_i}^{an}(\lambda)$ sont fortement admissibles. Toute extension comme ci-dessus est également fortement admissible.

Remarque 5.13. — L'inclusion $F_\lambda \otimes \mathrm{St}_3 \hookrightarrow \Sigma(\lambda)$ induit une injection

$$\mathrm{Ext}^1_{G,\lambda}(F_\lambda \otimes v_{P_i}, F_\lambda \otimes \mathrm{St}_3) \hookrightarrow \mathrm{Ext}^1_{G,\lambda}(F_\lambda \otimes v_{P_i}, \Sigma(\lambda)), \tag{5.73}$$

car d'après (2.52), on a $\mathrm{Hom}_G(F_\lambda \otimes v_{P_i}, \Sigma(\lambda)/(F_\lambda \otimes \mathrm{St}_3)) = 0$. Le membre de gauche est de dimension 1 d'après le corollaire 4.8. L'image de cette injection est engendrée par $\tilde{sh}_i(c_{3-i,\mathrm{val}})$.

Remarque 5.14. — Comme dans [**7**, §2], on peut construire explicitement $\Sigma(\lambda, \mathcal{L}, \mathcal{L}')$ de la façon suivante. On note $\sigma(\mathcal{L}, \mathcal{L}')$ la K-représentation de dimension 3 de B

$$\begin{pmatrix} a & * & * \\ 0 & b & * \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & \log_{\mathcal{L}'}(a^{-2}bc) & \log_{\mathcal{L}}(a^{-1}b^{-1}c^2) \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{5.74}$$

On forme l'induite $\mathrm{Ind}_B^G(\lambda \otimes \sigma(\mathcal{L}, \mathcal{L}'))$. L'unique injection de la représentation triviale dans $\sigma(\mathcal{L}, \mathcal{L}')$ induit une injection $\mathrm{Ind}_B^G(\lambda) \hookrightarrow \mathrm{Ind}_B^G(\lambda \otimes \sigma(\mathcal{L}, \mathcal{L}'))$ et donc une injection de $\mathrm{Ind}_{P_1}^G(\lambda) + \mathrm{Ind}_{P_2}^G(\lambda)$. Si Q désigne le quotient par ce sous-espace, on a alors une surjection

$$Q \twoheadrightarrow \mathrm{Ind}_B^G(\lambda)^2. \tag{5.75}$$

On note $\widetilde{\Sigma}(\lambda, \mathcal{L}, \mathcal{L}')$ l'image réciproque de $\mathrm{Ind}_{P_1}^G(\lambda) \oplus \mathrm{Ind}_{P_2}^G(\lambda)$ dans Q, on obtient donc une extension

$$0 \to \Sigma(\lambda) \to \widetilde{\Sigma}(\lambda, \mathcal{L}, \mathcal{L}') \to \mathrm{Ind}_{P_1}^G(\lambda) \oplus \mathrm{Ind}_{P_2}^G(\lambda) \to 0. \tag{5.76}$$

Comme $\mathrm{Ext}^1_{G,\lambda}(F_\lambda, \Sigma(\lambda)) = 0$, l'injection de F_λ^2 dans $\mathrm{Ind}_{P_1}^G(\lambda) \oplus \mathrm{Ind}_{P_2}^G(\lambda)$ se relève en une injection de F_λ^2 dans $\widetilde{\Sigma}(\lambda, \mathcal{L}, \mathcal{L}')$ et on a un isomorphisme

$$\widetilde{\Sigma}(\lambda, \mathcal{L}, \mathcal{L}')/F_\lambda^2 \simeq \Sigma(\lambda, \mathcal{L}, \mathcal{L}'). \tag{5.77}$$

5.5. Construction du complexe. — On peut désormais déterminer les groupes d'extensions $\mathrm{Ext}^1_{G,\lambda}(F_\lambda, \Sigma(\lambda, \mathcal{L}, \mathcal{L}'))$ et $\mathrm{Ext}^2_{G,\lambda}(F_\lambda, \Sigma(\lambda, \mathcal{L}, \mathcal{L}'))$.

Notons $\delta_{\mathcal{L},\mathcal{L}'}$ l'application

$$\mathrm{Ext}^1_{G,\lambda}(F_\lambda, v_{P_1}^{an}(\lambda) \oplus v_{P_2}^{an}(\lambda)) \xrightarrow{\delta_{\mathcal{L},\mathcal{L}'}} \mathrm{Ext}^2_{G,\lambda}(F_\lambda, \Sigma(\lambda)) \tag{5.78}$$

obtenue à partir de la suite exacte

$$0 \to \Sigma(\lambda) \to \Sigma(\lambda, \mathcal{L}, \mathcal{L}') \to v_{P_1}^{an}(\lambda) \oplus v_{P_2}^{an}(\lambda) \to 0. \tag{5.79}$$

D'après (3.2), les espaces $\mathrm{Ext}^q_{\mathcal{M}(G)_\lambda}(\cdot,\cdot)$ peuvent se réinterpréter en termes de groupes de morphismes dans la catégorie dérivée $D^b(\mathcal{M}(G)_\lambda)$. On a en particulier

$$\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{M}(G)_\lambda}(\Sigma(\lambda)', v_{P_i}^{an}(\lambda)') \simeq \mathrm{Hom}_{D^b(\mathcal{M}(G)_\lambda)}(\Sigma(\lambda)', v_{P_1}^{an}(\lambda)'[1]) \tag{5.80}$$

$$\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{M}(G)_\lambda}(v_{P_i}^{an}(\lambda)', F_\lambda') \simeq \mathrm{Hom}_{D^b(\mathcal{M}(G)_\lambda)}(v_{P_1}^{an}(\lambda)'[1], F_\lambda'[2]). \tag{5.81}$$

La composition dans la catégorie $D^b(\mathcal{M}(G)_\lambda)$ permet de définir une application bilinéaire

$$\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{M}(G)_\lambda}(\Sigma(\lambda)', v_{P_i}^{an}(\lambda)') \times \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{M}(G)_\lambda}(v_{P_i}^{an}(\lambda)', F_\lambda') \to \mathrm{Ext}^2_{\mathcal{M}(G)_\lambda}(\Sigma(\lambda)', F_\lambda'). \tag{5.82}$$

La proposition ci-dessous est un moyen commode de calculer cette composition.

Proposition 5.15. — *Le diagramme suivant est commutatif.*

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{M}(G)_\lambda}(\Sigma(\lambda), v_{P_i}^{an}(\lambda)') \arrow[r, phantom, "\times"] & \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{M}(G)_\lambda}(v_{P_i}^{an}(\lambda)', F_\lambda') \arrow[r] \arrow[d, hook, "sh_i"] & \mathrm{Ext}^2_{\mathcal{M}(G)_\lambda}(\Sigma(\lambda)', F_\lambda') \\ H^1(\overline{T}, 1) \arrow[u, "\tilde{sh}_i"] \arrow[r, phantom, "\times"] & H^1(\overline{T}, 1) \arrow[r] & H^2(\overline{T}, 1), \arrow[u, "\kappa"'] \end{tikzcd} \tag{5.83}$$

l'application du bas étant le cup-produit.

Démonstration. — Nous avons en réalité un gros diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{M}(G)_\lambda}(\Sigma(\lambda)', v^{an}_{P_1}(\lambda)') \arrow[d, "\wr"] & \times & \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{M}(G)_\lambda}(v^{an}_{P_1}(\lambda)', F'_\lambda) \arrow[r] & \mathrm{Ext}^2_{\mathcal{M}(G)_\lambda}(\Sigma(\lambda)', F'_\lambda) \arrow[d, equal] \\
\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{M}(G)_\lambda}(\Sigma(\lambda)', \mathrm{Ind}^G_{P_1}(\lambda)') & \times & \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{M}(G)_\lambda}(\mathrm{Ind}^G_{P_1}(\lambda)', F'_\lambda) \arrow[r] \arrow[u, "\wr"'] \arrow[d, equal] & \mathrm{Ext}^2_{\mathcal{M}(G)_\lambda}(\Sigma(\lambda)', F'_\lambda) \\
\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{M}(G)_\lambda}(\mathrm{Ind}^G_B(\lambda)', \mathrm{Ind}^G_{P_1}(\lambda)') \arrow[u, twoheadrightarrow] & \times & \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{M}(G)_\lambda}(\mathrm{Ind}^G_{P_1}(\lambda)', F'_\lambda) \arrow[r] \arrow[d, hook] & \mathrm{Ext}^2_{\mathcal{M}(G)_\lambda}(\mathrm{Ind}^G_B(\lambda)', F'_\lambda) \arrow[u] \arrow[d, equal] \\
\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{M}(G)_\lambda}(\mathrm{Ind}^G_B(\lambda)', \mathrm{Ind}^G_B(\lambda)') \arrow[u, twoheadrightarrow] \arrow[d, "(a)"] & \times & \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{M}(G)_\lambda}(\mathrm{Ind}^G_B(\lambda)', F'_\lambda) \arrow[r] \arrow[d, "(e)"] & \mathrm{Ext}^2_{\mathcal{M}(G)_\lambda}(\mathrm{Ind}^G_B(\lambda)', F'_\lambda) \arrow[d, "(g)"] \\
\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{M}(B)_\lambda}(\mathrm{Ind}^G_B(\lambda)', \mathrm{Ind}^G_B(\lambda)') \arrow[d, "(b)"] & \times & \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{M}(B)_\lambda}(\mathrm{Ind}^G_B(\lambda)', F'_\lambda) \arrow[r] \arrow[d, equal] & \mathrm{Ext}^2_{\mathcal{M}(B)_\lambda}(\mathrm{Ind}^G_B(\lambda)', F'_\lambda) \arrow[d, "(h)"] \\
\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{M}(B)_\lambda}(-\lambda, \mathrm{Ind}^G_B(\lambda)') & \times & \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{M}(B)_\lambda}(\mathrm{Ind}^G_B(\lambda)', F'_\lambda) \arrow[r] \arrow[d, "(f)"] & \mathrm{Ext}^2_{\mathcal{M}(B)_\lambda}(-\lambda, F'_\lambda) \arrow[d, equal] \\
\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{M}(B)_\lambda}(-\lambda, -\lambda) \arrow[u, "(c)"] & \times & \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{M}(B)_\lambda}(-\lambda, F'_\lambda) \arrow[r] & \mathrm{Ext}^2_{\mathcal{M}(B)_\lambda}(-\lambda, F'_\lambda) \\
\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{M}(T)_\lambda}(-\lambda, -\lambda) \arrow[u, "(d)"] & \times & \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{M}(T)_\lambda}(-\lambda, -\lambda) \arrow[r] \arrow[u, "\wr"'] & \mathrm{Ext}^2_{\mathcal{M}(T)_\lambda}(-\lambda, -\lambda) \arrow[u, "\wr"']
\end{tikzcd} \tag{5.84}$$

Le diagramme commute car toutes les applications sont fonctorielles. De plus les composées des flèches (a) et (b), ainsi que (e) et (f) et (g) et (h) sont des isomorphismes d'après (4.33). La composée des flèches (d) et (c) est un isomorphisme d'après (5.15). En composant toutes les flèches colonne par colonne dans le bon sens, on obtient exactement$\tilde{sh}_i$, sh_i et κ.

Soit donc $(\alpha, \beta) \in \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{M}(T)_\lambda}(-\lambda, -\lambda) \times \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{M}(T)_\lambda}(-\lambda, -\lambda)$. D'après (4.25) et le corollaire 3.11, on a des isomorphismes

$$\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{M}(G),\lambda}(-\lambda, -\lambda) \simeq H^1(\overline{T}, 1) \simeq \mathrm{Hom}(\overline{T}, K), \tag{5.85}$$

un calcul direct montre que la composition de α et β dans $\mathrm{Ext}^2_{\mathcal{M}(T)_\lambda}(-\lambda, -\lambda)$ est exactement $\alpha \wedge \beta$ dans

$$\mathrm{Ext}^2_{\mathcal{M}(T)_\lambda}(-\lambda, -\lambda) \simeq H^2(\overline{T}, 1) \simeq \bigwedge^2 \mathrm{Hom}(\overline{T}, K). \tag{5.86}$$

En effet, si α est un morphisme localement analytique de $\overline{T}$ dans K, la classe d'extension associée est une représentation V de $\overline{T}$ qui, dans une certaine base, est donnée par la matrice $\left(\begin{smallmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$. La suite exacte

$$0 \to 1 \to V \to 1 \to 0 \tag{5.87}$$

donne lieu à une application de bord $\delta : H^1(\overline{T}, 1) \to H^2(\overline{T}, 1)$. Si β est un morphisme de $\overline{T}$ dans K, $\delta(\beta)$ est la classe de $H^2(\overline{T}, 1)$ dont un représentant est $(g, h) \mapsto \alpha(g)\beta(h)$, c'est-à-dire le cup-produit $\alpha \cup \beta$. Par ailleurs l'application bord δ est exactement la composition avec $\alpha : 1 \to 1[1]$ dans $D^b(\mathcal{M}(\overline{T}))$. $\square$

Corollaire 5.16. — *L'application $\delta_{\mathcal{L},\mathcal{L}'}$ envoie (c, c') sur*

$$(c_{2,\log} + \mathcal{L}' c_{2,\mathrm{val}}) \wedge c + (c_{1,\log} + \mathcal{L} c_{1,\mathrm{val}}) \wedge c'. \tag{5.88}$$

En particulier, son image est incluse dans l'image de κ.

Démonstration. — L'application $\delta_{\mathcal{L},\mathcal{L}'}$ est

$$\mathrm{Hom}_{D^b(\mathcal{M}(G)_\lambda)}((v^{an}_{P_1}(\lambda)' \oplus v^{an}_{P_2}(\lambda)')[1], F'_\lambda) \to \mathrm{Hom}_{D^b(\mathcal{M}(G)_\lambda)}(\Sigma(\lambda)', F'_\lambda[2]) \tag{5.89}$$

obtenue par composition avec $(c_{2,\log} + \mathcal{L}c_{2,\mathrm{val}}, c_{1,\log} + \mathcal{L}'c_{1,\mathrm{val}})$, il suffit alors d'appliquer la proposition 5.15. □

Corollaire 5.17. — *On a*

$$\dim_K \mathrm{Ext}^1_{G,\lambda}(F_\lambda, \Sigma(\lambda, \mathcal{L}, \mathcal{L}')) = 1 \text{ et } \dim_K \mathrm{Ext}^2_{G,\lambda}(F_\lambda, \Sigma(\lambda, \mathcal{L}, \mathcal{L}')) = 2. \tag{5.90}$$

L'espace $\mathrm{Ext}^1_{G,\lambda}(F_\lambda, \Sigma(\lambda, \mathcal{L}, \mathcal{L}'))$ *est le sous-espace de dimension 1 de* $\mathrm{Ext}^1_{G,\lambda}(F_\lambda, v^{an}_{P_1}(\lambda) \oplus v^{an}_{P_2}(\lambda))$ *engendré par la classe* $(c_{1,\log} + \mathcal{L}c_{1,\mathrm{val}}, c_{2,\log} + \mathcal{L}'c_{2,\mathrm{val}})$ *et* $\mathrm{Ext}^2_{G,\lambda}(F_\lambda, \Sigma(\lambda, \mathcal{L}, \mathcal{L}'))$ *a pour base les images des classes* $c_{1,\mathrm{val}} \wedge c_{2,\mathrm{val}}$ *et* c_0*,* c_0 *étant défini en* (5.55).

Démonstration. — La suite exacte (5.72) donne lieu à une suite exacte longue

$$\begin{aligned} 0 \to \mathrm{Ext}^1_{G,\lambda}(F_\lambda, v^{an}_{P_1}(\lambda) \oplus v^{an}_{P_2}(\lambda)) \xrightarrow{\delta_{\mathcal{L},\mathcal{L}'}} \mathrm{Ext}^2_{G,\lambda}(F_\lambda, \Sigma(\lambda)) \to \mathrm{Ext}^2_{G,\lambda}(F_\lambda, \Sigma(\lambda, \mathcal{L}, \mathcal{L}')) \\ \to \mathrm{Ext}^2_{G,\lambda}(F_\lambda, v^{an}_{P_1}(\lambda) \oplus v^{an}_{P_2}(\lambda)) \xrightarrow{\delta'} \mathrm{Ext}^3_{G,\lambda}(F_\lambda, \Sigma(\lambda)) \end{aligned} \tag{5.91}$$

Le 0 de gauche provient de la proposition 5.6. Rappelons que l'espace $\mathrm{Ext}^2_{G,\lambda}(F_\lambda, \Sigma(\lambda))$ a une base constituée des éléments $c_{1,\log} \wedge c_{2,\log}$, $c_{1,\log} \wedge c_{2,\mathrm{val}}$, $c_{1,\mathrm{val}} \wedge c_{2,\log}$, $c_{1,\mathrm{val}} \wedge c_{2,\mathrm{val}}$ et c_0. D'après le corollaire 5.16, le noyau de $\delta_{\mathcal{L},\mathcal{L}'}$ est constitué des multiples du couple $(c_{1,\log} + \mathcal{L}c_{1,\mathrm{val}}, c_{2,\log} + \mathcal{L}'c_{2,\mathrm{val}})$. Ainsi $\mathrm{Ext}^1_{G,\lambda}(F_\lambda, \Sigma(\lambda, \mathcal{L}, \mathcal{L}'))$ est de dimension 1. L'image de $\delta_{\mathcal{L},\mathcal{L}'}$ est donc de dimension 3. Il suffit donc de prouver que la flèche δ' est injective. Pour ce faire notons κ' l'application $H^3(\overline{T}, K) \to \mathrm{Ext}^3_{G,\lambda}(F_\lambda, \Sigma(\lambda))$ provenant de (5.24). On prouve comme précédemment que l'on a un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc} \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{M}(G)_\lambda}(\Sigma(\lambda)', v^{an}_{P_i}(\lambda)') & \times & \mathrm{Ext}^2_{\mathcal{M}(G)_\lambda}(v^{an}_{P_i}(\lambda)', F'_\lambda) & \longrightarrow & \mathrm{Ext}^3_{\mathcal{M}(G)_\lambda}(\Sigma(\lambda)', F'_\lambda) \\ \uparrow & & \downarrow & & \uparrow \kappa' \\ H^1(\overline{T}, 1) & \times & H^2(\overline{T}, 1) & \longrightarrow & H^3(\overline{T}, 1), \end{array} \tag{5.92}$$

l'application du bas étant le cup-produit. Ainsi l'application δ' est donnée par

$$(c, c') \mapsto (c_{2,\log} + \mathcal{L}'c_{2,\mathrm{val}}) \wedge c + (c_{1,\log} + \mathcal{L}c_{1,\mathrm{val}}) \wedge c'. \tag{5.93}$$

Or d'après le corollaire 5.3, une base de $\mathrm{Ext}^2_{G,\lambda}(F_\lambda, v^{an}_{P_1}(\lambda) \oplus v^{an}_{P_2}(\lambda))$ est donnée par $c_{P_1} \wedge c_{P_1,\mathrm{val}}$ et $c_{P_2} \wedge c_{P_2,\mathrm{val}}$. Leurs images par δ' sont

$$c_{1,\log} \wedge c_{1,\mathrm{val}} \wedge c_{2,\log} + \mathcal{L}'c_{1,\log} \wedge c_{1,\mathrm{val}} \wedge c_{2,\mathrm{val}}, \quad c_{2,\log} \wedge c_{2,\mathrm{val}} \wedge c_{1,\log} + \mathcal{L}'c_{2,\log} \wedge c_{2,\mathrm{val}} \wedge c_{1,\mathrm{val}} \tag{5.94}$$

et sont linéairement indépendantes dans $H^3(\overline{T}, K)$. Mais cette fois-ci, on sait que dans la suite spectrale (5.14), $E_1^{-2,4} = 0$ et $d_1^{-1,3} = 0$, l'application κ' est injective, donc δ' également. □

Remarque 5.18. — Ce corollaire peut se reformuler de la façon suivante : l'espace $\mathrm{Ext}^2_{G,\lambda}(F_\lambda, \Sigma(\lambda, \mathcal{L}, \mathcal{L}'))$ est le quotient de $\mathrm{Ext}^2_{G,\lambda}(F_\lambda, \Sigma(\lambda))$ par les relations

$$c_{1,\log} \wedge c_{2,\log} - \mathcal{L}\mathcal{L}'c_{1,\mathrm{val}} \wedge c_{2,\mathrm{val}}, \quad c_{1,\log} \wedge c_{2,\mathrm{val}} + \mathcal{L}c_{1,\mathrm{val}} \wedge c_{2,\mathrm{val}}, \quad c_{1,\mathrm{val}} \wedge c_{2,\log} + \mathcal{L}'c_{1,\mathrm{val}} \wedge c_{2,\mathrm{val}} \tag{5.95}$$

Par (3.12), pour tout sous-groupe parabolique P, on a des isomorphismes

$$\mathcal{E}xt^q_{G,\lambda}(F_\lambda, \mathrm{Ind}^G_P(\lambda)) \simeq \mathrm{Ext}^q_{G,\lambda}(F_\lambda, \mathrm{Ind}^G_P(\lambda)). \tag{5.96}$$

Ainsi on obtient un isomorphisme

$$\mathcal{E}xt^2_{G,\lambda}(F_\lambda, \Sigma(\lambda, \mathcal{L}, \mathcal{L}')) \simeq \mathrm{Ext}^2_{G,\lambda}(F_\lambda, \Sigma(\lambda, \mathcal{L}, \mathcal{L}')), \tag{5.97}$$

et on peut appliquer la proposition 3.2 pour construire un objet de la catégorie $D^b(\mathcal{M}_c(G)_\lambda)$.

Soit Q un polynôme de deux variables de degré inférieur ou égal à 2 à coefficients dans K.

Définition 5.19. — Soit $\underline{\mathcal{L}} \in K^3$, on note $\Sigma(\lambda, \underline{\mathcal{L}})_Q$ l'unique objet de la catégorie $D^b(\mathcal{M}_c(G)_\lambda)$ obtenu à partir du cocycle $c_0 + (\mathcal{L}'' - Q(\mathcal{L}, \mathcal{L}'))c_{1,\mathrm{val}} \wedge c_{2,\mathrm{val}} \in \mathrm{Ext}^2_{G,\lambda}(F_\lambda, \Sigma(\lambda, \mathcal{L}, \mathcal{L}'))$ au moyen de la proposition 3.2.

A priori, $\Sigma(\lambda, \underline{\mathcal{L}})$ est un complexe de $D(G)$-modules, mais d'après la remarque 2.17 de [**32**], la représentation $\Sigma(\lambda, \mathcal{L}, \mathcal{L}')$ a une résolution injective $I^\cdot$ par des représentations localement analytiques et on peut utiliser cette résolution et représenter $\Sigma(\lambda, \underline{\mathcal{L}})$ par un complexe de représentations localement analytiques. Comme de plus,

$$\mathcal{E}xt^2_{G,\lambda}(F_\lambda, \Sigma(\lambda, \mathcal{L}, \mathcal{L}')) \simeq \mathrm{Ext}^2_{\mathcal{M}(G)_\lambda}(\Sigma(\lambda, \mathcal{L}, \mathcal{L}')', F'_\lambda), \tag{5.98}$$

le complexe de $D(G)$-module $\Sigma(\lambda, \underline{\mathcal{L}})'_Q$ s'insère dans un triangle distingué de $D^b(\mathcal{M}(G)_\lambda)$

$$F'_\lambda \to \Sigma(\lambda, \underline{\mathcal{L}})'_Q \to \Sigma(\lambda, \mathcal{L}, \mathcal{L}')'[-1] \to \tag{5.99}$$

tel que l'application du foncteur $\mathrm{Hom}(\cdot, F'_\lambda)$ induise un morphisme

$$\mathrm{End}_G(F'_\lambda) \to \mathrm{Hom}_{D^b(\mathcal{M}(G)_\lambda)}(\Sigma(\lambda, \mathcal{L}, \mathcal{L}')'[-2], F'_\lambda) \tag{5.100}$$

envoyant l'identité sur le cocycle

$$c_0 + (\mathcal{L}'' - Q(\mathcal{L}, \mathcal{L}'))c_{1,\mathrm{val}} \wedge c_{2,\mathrm{val}}. \tag{5.101}$$

Remarque 5.20. — Le polynôme Q est là pour faire le lien avec les constructions géométriques du chapitre suivant. Il existe cependant un choix de Q pour lequel le complexe $\Sigma(\lambda, \underline{\mathcal{L}})$ a un comportement parallèle à celui de la représentation $V(\underline{h}, \underline{\mathcal{L}})$ de l'introduction (ici $(\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2) = (h_2 - 2, h_1 - 1, h_0)$). Il s'agit, ce n'est pas un hasard, du choix $Q = 0$. Supposons en effet que $Q = 0$.

(i) Le foncteur D^*_{st} dépend du choix d'une branche du logarithme p-adique pour construire un plongement $B_{st} \hookrightarrow B_{dR}$. Si $D(\underline{h}, \underline{\mathcal{L}})$ est le module filtré associé à $V(\underline{h}, \underline{\mathcal{L}})$ en choisissant $\log(p) = 0$, le module filtré associé à $V(\underline{h}, \underline{\mathcal{L}})$ en choisissant $\log(p) = a$ est $D(\underline{h}, \widetilde{\underline{\mathcal{L}}})$ avec $\widetilde{\underline{\mathcal{L}}} = (\mathcal{L} + a, \mathcal{L}' + a, \mathcal{L}'' + a\mathcal{L}' + \frac{1}{2}a^2)$. En remplaçant alors $\log_0$ par $\log_a$ dans la construction de $\Sigma(\lambda, \underline{\mathcal{L}})$, c'est-à-dire en faisant $c_{i,\log} \mapsto c_{i,\log} + a c_{i,\mathrm{val}}$ et $D \mapsto D + \frac{a}{2}d$, on obtient un complexe isomorphe à $\Sigma(\lambda, \widetilde{\underline{\mathcal{L}}})$. En effet, on voit par exemple que c_0 doit être remplacé par

$$\begin{aligned} c_0 + a\frac{\alpha^{-1}}{2}\iota_1(d) - \frac{a}{2}(c_{1,\log} \wedge c_{2,\mathrm{val}} + c_{1,\mathrm{val}} \wedge c_{2,\log}) - \frac{1}{2}a^2 c_{1,\mathrm{val}} \wedge c_{2,\mathrm{val}} \\ = c_0 - a(c_{1,\mathrm{val}} \wedge c_{2,\log}) - \frac{a^2}{2}c_{1,\mathrm{val}} \wedge c_{2,\mathrm{val}} \end{aligned} \tag{5.102}$$

Or comme $c_{2,\log} = -(a + \mathcal{L}')c_{2,\mathrm{val}}$ dans $\mathrm{Ext}^2_{G,\lambda}(F_\lambda, \Sigma(\lambda, \mathcal{L} + a, \mathcal{L}' + a))$, l'extension correspond au paramètre $c_0 + (\mathcal{L}'' + a\mathcal{L}' + \frac{1}{2}a^2)c_{1,\mathrm{val}} \wedge c_{2,\mathrm{val}}$.

(ii) Considérons les représentations galoisiennes,

$$D^*_{st}(V(\underline{h}, \underline{\mathcal{L}})^*(2)) \simeq D^*_{st}(V(\widetilde{\underline{h}}, \widetilde{\underline{\mathcal{L}}})), \tag{5.103}$$

avec $\widetilde{\underline{h}} = (2 - h_0, 2 - h_1, 2 - h_2)$ et $\widetilde{\underline{\mathcal{L}}} = (\mathcal{L}', \mathcal{L}, \mathcal{L}\mathcal{L}' - \mathcal{L}'')$. Du côté localement analytique, soit ι l'isomorphisme extérieur de G défini par $\iota(g) = (g^{-1})^t$. Il induit une involution ι de $D(G)$ et le foncteur $M \mapsto D(G) \otimes_{\iota(D(G))} M$ est un isomorphisme de la catégorie $\mathcal{M}(G)_\lambda$ sur $\mathcal{M}(G)_{\tilde{\lambda}}$, où $\tilde{\lambda} = (-\lambda_2, -\lambda_1, -\lambda_0)$. Il induit un isomorphisme de la catégorie $D^b(\mathcal{M}(G)_\lambda)$ sur la catégorie $D^b(\mathcal{M}(G)_{\tilde{\lambda}})$ et l'image de $\Sigma(\lambda, \underline{\mathcal{L}})'$ par ce foncteur est justement $\Sigma(\tilde{\lambda}, \widetilde{\underline{\mathcal{L}}})'$. La raison est que ce foncteur envoie $\Sigma(\lambda)$ sur $\Sigma(\tilde{\lambda})$, $v^{an}_{P_1}(\lambda)$ sur $v^{an}_{P_2}(\tilde{\lambda})$, échange $c_{1,\log}$ et $c_{2,\log}$, $c_{1,\mathrm{val}}$ et $c_{2,\mathrm{val}}$ et envoie $\iota_1(D)$ sur $\iota_2(D)$, donc c_0 sur $c_0 + c_{1,\log} \wedge c_{2,\log}$ et $c_{1,\log} \wedge c_{2,\log} = \mathcal{L}\mathcal{L}' c_{1,\mathrm{val}} \wedge c_{2,\mathrm{val}}$ dans $\mathrm{Ext}^2_{G,\lambda}(F_\lambda, \Sigma(\lambda, \mathcal{L}, \mathcal{L}))$.

Ainsi il serait fort tentant de choisir $Q = 0$, mais nous ne savons pas montrer que ce choix convient pour les résultats du chapitre suivant, où nous devrons faire un choix de Q qui dépend de l'espace de Drinfel'd. Il est cependant possible que ces deux choix coïncident.

6. Le complexe de de Rham de l'espace de Drinfel'd

Ce dernier chapitre est consacré au lien entre le (φ, N)-module filtré $D(\underline{h}, \underline{\mathcal{L}})$ et le complexe de $D(G)$-modules $\Sigma(\lambda, \underline{\mathcal{L}})'$ à travers l'espace de Drinfel'd $\mathcal{X}$.

Soit $\mathcal{H}$ l'ensemble des hyperplans de $\mathbb{P}^2_{\mathbb{Q}_p}$ définis sur $\mathbb{Q}_p$ et $\mathcal{X}(\mathbb{C}_p) = \mathbb{P}^2(\mathbb{C}_p) \backslash \bigcup_{H \in \mathcal{H}} H(\mathbb{C}_p)$. Il s'agit des $\mathbb{C}_p$-points d'un espace rigide $\mathbb{Q}_p$-analytique $\mathcal{X}$, de Stein ([**43**, §1]). L'espace $\mathbb{P}^2_{\mathbb{Q}_p}$ est un espace homogène pour le groupe algébrique GL_3, fixons un isomorphisme $\mathbb{P}^2 \simeq \mathrm{GL}_3/P_2$, ce qui munit $\mathbb{P}^2(\mathbb{C}_p)$ d'une action de $G = \mathrm{GL}_3(\mathbb{Q}_p)$ stabilisant $\mathcal{X}$. Soit ρ une K-représentation de dimension finie de G. Pour tout faisceau

G-équivariant $\mathcal{F}$ en K-espaces vectoriels sur $\mathcal{X}$, on définit le faisceau G-équivariant $\mathcal{F} \otimes_K \rho$, produit tensoriel de $\mathcal{F}$ et du faisceau constant ρ. Pour tout ouvert admissible U de $\mathbb{P}^2$, on a

$$(\mathcal{F} \otimes_K \rho)(g^{-1}U) \xrightarrow{g} (\mathcal{F} \otimes_K \rho)(U) \tag{6.1}$$

$$v \otimes w \mapsto gv \otimes gw. \tag{6.2}$$

On appelle alors complexe de de Rham à coefficients dans ρ le complexe d'hypercohomologie de $\Omega^{\cdot} \otimes_K \rho$. Comme l'espace $\mathcal{X}$ est de Stein, ce complexe est en réalité le complexe des sections globales. Nous fixons désormais un poids dominant λ et définissons $R\Gamma_{dR}(\lambda)$ comme étant le complexe de de Rham de $\mathcal{X}$ à coefficients dans F'_λ. Autrement dit

$$R\Gamma_{dR}(\lambda) = [\mathcal{O}(\mathcal{X}) \to \Omega^1(\mathcal{X}) \to \Omega^2(\mathcal{X})] \otimes_K F'_\lambda. \tag{6.3}$$

On note $H^i_{dR}(\lambda)$ son i-ième groupe de cohomologie. D'après les résultats de Peter Schneider et Ulrich Stuhler ([**43**] §3 théorème et §4 lemme 1), on a des isomorphismes de $D(G)$-modules

$$H^0_{dR}(\lambda) \simeq F'_\lambda \qquad H^1_{dR}(\lambda) \simeq F'_\lambda \otimes_K v'_{P_1} \qquad H^2_{dR}(\lambda) \simeq F'_\lambda \otimes_K v'_B. \tag{6.4}$$

Le complexe $R\Gamma_{dR}(\mathcal{X})$ est donc un objet de la catégorie $D^b(\mathcal{M}(G)_\lambda)$, où $\mathcal{M}(G)_\lambda$ est la catégorie des $D(G)$-modules sur lesquels $D(Z)$ agit par multiplication par le même caractère que sur F'_λ, Z étant le centre de G.

6.1. Scindage du complexe $R\Gamma_{dR}(\lambda)$. — Le but de cette partie est de prouver que le complexe $R\Gamma_{dR}(\lambda)$ est scindé dans la catégorie $D^b(\mathcal{M}(G)_\lambda)$. L'idée est d'utiliser le corollaire A.1.3 de [**17**] et de calculer les groupes $\mathrm{Ext}^k_{\mathcal{M}(G)_\lambda}(H^i_{dR}(\lambda), H^j_{dR}(\lambda))$ pour $j = i - k + 1$. Ce calcul a été fait dans la catégorie des représentations lisses de G par Jean-François Dat et Sascha Orlik. Il s'étend à la catégorie des représentations localement analytiques grâce à la proposition 4.7.

Théorème 6.1. — *Le complexe $R\Gamma_{dR}(\lambda)$ est scindé dans la catégorie $D^b(\mathcal{M}_K(G)_\lambda)$, c'est-à-dire qu'il existe un isomorphisme*

$$R\Gamma_{dR}(\lambda) \xrightarrow{\sim} \bigoplus_{i=0}^{2} (H^i_{dR}(\mathcal{X}) \otimes F'_\lambda)[-i] \tag{6.5}$$

induisant l'identité sur la cohomologie.

Démonstration. — La catégorie $D^b(\mathcal{M}(G)_\lambda)$ est la catégorie dérivée d'une catégorie abélienne, c'est une catégorie triangulée munie d'une t-structure. De plus, les calculs de Jean-François Dat et Sascha Orlik ([**17**, Théorème 1.3] ou [**38**, Théorème 1]) montrent que, dans la catégorie abélienne des représentations lisses de G,

$$\mathrm{Ext}^k_{\mathcal{M}(\overline{G})^\infty}(H^i_{dR}(\mathcal{X}), H^j_{dR}(\mathcal{X})) = 0 \tag{6.6}$$

sauf si $k = i - j$. La proposition 4.7 montre alors que $\mathrm{Ext}^k_{\mathcal{M}(G)_\lambda}(H^i_{dR}(\lambda), H^j_{dR}(\lambda)) = 0$ pour $k = i - j + 1$. Au vu du corollaire A.1.3 de [**17**], le complexe $R\Gamma_{dR}(\lambda)$ est scindé dans la catégorie $D^b(\mathcal{M}(G)_\lambda)$. □

Bien entendu un tel isomorphisme n'est pas unique, mais une fois que l'on connaît ce théorème, il est facile d'en déduire la structure de l'algèbre $\mathrm{End}_{D^b(\mathcal{M}(G)_\lambda)}(R\Gamma_{dR}(\lambda))$ et donc tous les scindages.

Corollaire 6.2. — *L'algèbre* $\mathrm{End}_{D^b(\mathcal{M}(G)_\lambda)}(R\Gamma_{dR}(\lambda))$ *est isomorphe à l'algèbre des matrices triangulaires supérieures dans $M_3(K)$. En particulier, l'espace des scindages est un espace homogène principal sous le groupe $N^+ \subset \mathrm{GL}_3(\mathbb{Q}_p)$ des matrices unipotentes supérieures.*

Démonstration. — On a un isomorphisme d'algèbres

$$\mathrm{End}_{D^b(\mathcal{M}(G)_\lambda)}(R\Gamma_{dR}(\lambda)) \simeq \mathrm{End}(\bigoplus_i H^i_{dR}(\lambda)[-i]). \tag{6.7}$$

C'est-à-dire

$$\mathrm{End}_{D^b(\mathcal{M}(G)_\lambda)}(R\Gamma_{dR}(\lambda)) \simeq \bigoplus_{i \leq j} \mathrm{Ext}^{j-i}_{\mathcal{M}(G)_\lambda}(H^j_{dR}(\lambda), H^i_{dR}(\lambda)). \tag{6.8}$$

D'après la proposition 4.7, on a des isomorphismes

$$\mathrm{Ext}^{j-i}_{\mathcal{M}(G)_\lambda}(H^j_{dR}(\lambda), H^i_{dR}(\lambda)) \simeq \mathrm{Ext}^{j-i}_{\mathcal{M}(\overline{G})^\infty}(H^j_{dR}(\mathcal{X}), H^i_{dR}(\mathcal{X})). \tag{6.9}$$

Ces isomorphismes sont compatibles aux compositions dans les catégories $D^b(\mathcal{M}(G)_\lambda)$ et $D^b(\mathcal{M}(\overline{G})^\infty)$ car ils proviennent du foncteur de $\mathcal{M}(\overline{G})^\infty$ dans $\mathcal{M}(G)_\lambda$ obtenu par composition de l'inclusion de $\mathcal{M}(\overline{G})^\infty$ dans $\mathcal{M}(G)_\lambda$ et de $M \mapsto F'_\lambda \otimes_K M$. Finalement le théorème 1.3 de [**17**] nous donne le résultat. □

6.2. Séries discrètes holomorphes. — Dans [**41**], Peter Schneider définit des représentations de G, appelées séries discrètes holomorphes, permettant de simplifier le complexe $R\Gamma_{dR}(\mathcal{X})$. Nous rappelons ici leur définition et calculons leur cohomologie sous certains sous-groupes unipotents de G.

Soit ρ une représentation $\mathbb{Q}_p$-algébrique irréductible de P_2. Elle donne lieu à un faisceau G-équivariant $\mathcal{F}_\rho$ sur $\mathbb{P}^2_{\mathbb{Q}_p} = G/P_2$, en posant, pour tout ouvert admissible U de $\mathbb{P}^2$, $\tilde{U}$ son image réciproque dans G et

$$\mathcal{F}_\rho(U) = \{f \in C^{rig}(\tilde{U}, \rho), \quad \forall p \in P_2,\ f(\cdot p) = \rho(p^{-1})f\}, \tag{6.10}$$

où $C^{rig}(\tilde{U}, \rho)$ désigne l'espace des fonctions rigides analytiques de $\tilde{U}$ dans ρ. L'action de G est donnée par la translation à gauche. La série discrète holomorphe associée à ρ est l'espace des sections de $\mathcal{F}_\rho$ au-dessus de $\mathcal{X}$ que l'on note $D_\rho = \mathcal{F}_\rho(\mathcal{X})$. Muni de l'action de G, c'est une séparément continue de $D(G)$ sur un espace de Fréchet nucléaire (voir [**39**, §1] et [**46**, §1 et 2]). Si μ désigne le plus haut poids de ρ, ce qui implique $\mu \in X_2^+$, on note D_μ la représentation D_ρ, on l'appelle série discrète holomorphe. On a une injection $N_1 \hookrightarrow \mathbb{P}^2$ donnée par $u \mapsto uw_0P_2$. L'image U de cette injection étant le complémentaire d'une droite rationnelle, elle contient l'espace $\mathcal{X}$. Or, sur U, le faisceau $\mathcal{F}_\rho$ est constant, ainsi ses sections s'identifient aux fonctions de U dans l'espace de ρ. L'espace D_ρ s'identifie donc à l'espace des fonctions rigides analytiques de $\mathcal{X}$ dans ρ. Pour $z \in \mathcal{X}$, posons $u(z) \in N_1(\mathbb{C}_p)$ tel que $z = u(z)w_0P_2$. L'action de G est alors donnée par la formule suivante.

$$(g \cdot f)(z) = j(g, z)(f(g^{-1}z)), \tag{6.11}$$

avec $j(g, z) = \rho(w_0^{-1}u(z)^{-1}gu(g^{-1}z)w_0)$.

Supposons que λ soit un poids dominant. Dans [**41**, §3], Peter Schneider définit trois poids $(\lambda(0), \lambda(1), \lambda(2))$ à partir de λ, des différentielles $d_i : D_{\lambda(i)} \to D_{\lambda(i+1)}$, ainsi qu'un quasi-isomorphisme de complexes de G-représentations

$$R\Gamma_{dR}(\lambda) \simeq [D_{\lambda(0)} \xrightarrow{d_0} D_{\lambda(1)} \xrightarrow{d_1} D_{\lambda(2)}]. \tag{6.12}$$

Les poids $\lambda(i)$ sont donnés par les formules

$$\lambda(0) = -w_0\lambda,\ \lambda(1) = s_1 \cdot (\lambda(0)),\ \lambda(2) = s_1s_2 \cdot (\lambda(0)). \tag{6.13}$$

En particulier la cohomologie du complexe de droite dans (6.12) est $H^*_{dR}(\lambda) = H^*_{dR}(\mathcal{X}) \otimes F'_\lambda$.

La N_1-cohomologie de D_μ est particulièrement agréable à calculer et nous sera très utile par la suite.

Proposition 6.3. — *On a un isomorphisme $\overline{L_1}$-équivariant*

$$H^i(N_1, D_\mu) \simeq H^0(N_1, H^i_{dR}(\mathcal{X})) \otimes F_{s_2s_1\mu,1}. \tag{6.14}$$

Remarquons que les représentations $H^0(N_1, H^i_{dR}(\mathcal{X}))$ sont faciles à calculer car ce sont les duales des modules de Jacquet des représentations $(H^i_{dR}(\mathcal{X}))'$, on peut alors utiliser (4.46).

Démonstration. — La formule (6.11) montre que, pour $g \in N_1$, $(g \cdot f)(x) = f(g^{-1}x)$, et pour $g \in L_1$, $(g \cdot f) = \rho^{w_0}(g)(f(g^{-1}\cdot))$. Ainsi $D_\mu|_{P_1} \simeq \mathcal{O}(\mathcal{X}) \otimes_K (F_{\mu,2})^{w_0}$ (rappelons que $w_0L_1w_0^{-1} = L_2$). Or la cohomologie d'algèbres de Lie de $\mathfrak{n}_1$ à valeurs dans $\mathcal{O}(\mathcal{X})$ se calcule à partir du complexe de Chevalley-Eilenberg

$$\mathcal{O}(\mathcal{X}) \to (\mathfrak{n}_1)' \otimes_K \mathcal{O}(\mathcal{X}) \to \bigwedge^2 (\mathfrak{n}_1)' \otimes_K \mathcal{O}(\mathcal{X}). \tag{6.15}$$

D'après [**41**, §3, page 19], on a des isomorphismes P_1-équivariants $\Omega^i(\mathcal{X}) \simeq \bigwedge^i(\mathfrak{n}_1)' \otimes_K \mathcal{O}(X)$. Il est immédiat de voir que ces isomorphismes sont continus entre espaces de Fréchet, donc ce sont des isomorphismes topologiques. Ainsi le complexe (6.15) est quasi-isomorphe topologiquement et de façon P_1-équivariante au complexe de de Rham

$$\mathcal{O}(\mathcal{X}) \to \Omega^1(\mathcal{X}) \to \Omega^2(\mathcal{X}). \tag{6.16}$$

On a donc un isomorphisme topologique P_1-équivariant $H^i(\mathfrak{n}_1, \mathcal{O}(\mathcal{X})) \simeq H^i_{dR}(\mathcal{X})$ qui donne un isomorphisme topologique L_1-équivariant

$$H^i(\mathfrak{n}_1, D_\mu) \simeq H^i_{dR}(\mathcal{X}) \otimes_K (F_{\mu,2})^{w_0}. \tag{6.17}$$

En particulier, cette cohomologie est séparée. Ainsi d'après (3.44), on en conclut que $H_i(\mathfrak{n}_1, D'_\mu)$ est isomorphe à la représentation localement algébrique $((F_{\mu,2})^{w_0} \otimes_K H^i_{dR}(\mathcal{X}))'$. On conclut alors par le théorème 7.1 de [**32**] et notre théorème 3.15. De plus, comme représentation de L_1, le plus haut poids de $F^{w_0}_{\mu,2}$ est $s_2 s_1 \mu$, donc $F^{w_0}_{\mu,2} = F_{s_2 s_1 \mu}$. □

6.3. Caractères infinitésimaux des séries discrètes. — Pour la suite il est utile de voir que les $D(G)$-modules D_μ ont un caractère infinitésimal.

Lemme 6.4. — *Le centre $\mathfrak{z}(\mathfrak{g})$ de $U(\mathfrak{g})$ agit sur D_μ par le caractère $\chi_{\mu+\delta}$, défini en 2.6.*

Démonstration. — Soit ρ la représentation algébrique de L_2 de plus haut poids μ. En fait, $U(\mathfrak{g})$ agit directement sur le faisceau $\mathcal{F}_\rho$. Comme $\mathfrak{z}(\mathfrak{g})$ commute à l'action de $\mathrm{GL}_3(\mathbb{C}_p)$, il suffit de vérifier que $\mathfrak{z}(\mathfrak{g})$ agit par multiplication par $\chi_{\mu+\delta}$ sur la fibre de $\mathcal{F}_\rho$ en 1. On raisonne alors exactement comme pour la preuve de [**31**, proposition 8.22]. □

Corollaire 6.5. — *Si ψ est un caractère localement algébrique de T, alors si $\mathrm{Ind}_B^G(\psi)$ et $(D_{\lambda(i)})'$ ont un sous-quotient en commun, ψ est de la forme $(w \cdot \lambda)\psi_\infty$ pour un $w \in W$ et ψ_∞ lisse.*

Démonstration. — Posons $\psi = \mu\psi_\infty$. Les représentations $D_{\lambda(i)}$ et $(\mathrm{Ind}_B^G(\psi))'$ doivent avoir même caractère infinitésimal. Ces caractères sont $\chi_{\lambda(i)+\delta}$ et $\chi_{-(\mu+\delta)}$. Ils sont égaux si et seulement si il existe $w \in W$ tel que $\lambda(i) + \delta = w(-\mu - \delta)$. Comme $\lambda(i)$ est de la forme $w'(-w_0\lambda + \delta) - \delta = -w'w_0(\lambda + \delta) - \delta$ pour un $w' \in W$, on doit avoir $\mu = w^{-1}w'w_0 \cdot \lambda$. □

Dans le même esprit que le lemme 2.23, nous aurons besoin du lemme suivant.

Lemme 6.6. — *Soit λ un poids dominant, il existe une application G-équivariante continue surjective $F'_\lambda \otimes_K \Omega^2(\mathcal{X}) \twoheadrightarrow D_{\lambda(2)}$, telle que sur tout sous-quotient du noyau, le centre $\mathfrak{z}(\mathfrak{g})$ n'agisse pas selon $\chi_{-\lambda-\delta}$.*

Démonstration. — Nous reprenons la construction de [**41**, §3]. La proposition 1 de [**41**, §3] montre que $\Omega^2(\mathcal{X})$ est isomorphe à $D_{0(2)}$ avec $0(2) = s_1 s_2 \cdot 0$. Le lemme 5 de [**41**, §3] montre alors que $F'_\lambda \otimes_K \Omega^2(\mathcal{X}) \simeq D_{F'_\lambda|_{P_2} \otimes 0(2)}$. Le lemme 7 de [**41**, §3] montre qu'il existe une filtration P_2-équivariante sur F'_λ dont le sommet est isomorphe à $F_{-s_1 s_2 w_0(\lambda)}$, et que cette représentation a multiplicité 1. On obtient ainsi un morphisme surjectif $F'_\lambda \otimes_K \Omega^2(\mathcal{X}) \twoheadrightarrow D_{\lambda(2)}$. Pour l'assertion sur le noyau, on remarque que le noyau possède une filtration G-équivariante dont les gradués sont isomorphes à des sommes directes d'espaces de la forme $D_{\mu+0(2)}$ où μ est un poids dominant relativement à α_2 et apparaissant dans $F_{-w_0\lambda}$. Si un tel $D_{\mu+0(2)}$ a $\chi_{-\lambda-\delta}$ pour caractère infinitésimal, on a d'après le lemme 6.4 l'existence de $w \in W$ tel que $\mu + 0(2) + \delta = w(-\lambda - \delta)$, c'est-à-dire $\mu + s_1 s_2 \delta = ww_0(-w_0\lambda + \delta)$, et donc $-w_0\lambda = (w_0 w^{-1} s_1 s_2) \cdot (s_2 s_1 \mu)$. Mais comme d'après la proposition 21.3 de [**25**], on a $(w_0 w^{-1})\mu \leq -w_0\lambda$, on doit avoir $(w_0 w^{-1} s_1 s_2) \cdot 0 \geq 0$, ce qui implique $w_0 w^{-1} s_1 s_2 = 1$ et $w = s_2$ et au final $\mu = -s_1 s_2 w_0 \lambda$. □

6.4. La structure des séries discrètes holomorphes, d'après Orlik. — Dans [**39**], Sascha Orlik construit une filtration décroissante G-équivariante sur les représentations D_μ et décrit les duaux des gradués de cette filtration en termes de sous-représentations de séries principales localement analytiques. Rappelons brièvement ses résultats dans le cas de $\mathrm{GL}_3(\mathbb{Q}_p)$. Soit $\mu \in X_2^+$.

***Théorème 6.7* (Orlik)**. — *Il existe sur D_μ une filtration décroissante $D(G)$-équivariante*

$$D_\mu = \mathrm{Fil}^0 D_\mu \supset \mathrm{Fil}^1 D_\mu \supset \mathrm{Fil}^2 D_\mu = H^0(\mathbb{P}^2, \mathcal{F}_\mu), \tag{6.18}$$

et des suite exactes pour $j \in \{0, 1\}$,

$$0 \to H^{2-j}(\mathbb{P}^2_{\mathbb{Q}_p}, \mathcal{F}_\mu)' \otimes v_{Q_j} \to \mathrm{gr}^j(D_\mu)' \to \mathrm{Ind}_{P_{2-j}}^G (U_j)^{\mathfrak{a}_j} \to 0, \tag{6.19}$$

où U_j est une représentation localement algébrique $M_j \otimes \mathrm{St}_{2-j}$ de P_{2-j}, $\mathfrak{a}_j$ un sous $U(\mathfrak{g})$-module de $\mathfrak{m}_{2-j}(M'_j)$ et $Q_0 = B$, $Q_1 = P_1$.

Remarque 6.8. — Il existe au plus un $j \in \{0, 1, 2\}$ tel que $H^j(\mathbb{P}^2_{\mathbb{Q}_p}, \mathcal{F}_\mu) \neq 0$. Cet espace est non nul pour l'unique j pour lequel il existe $w \in W$ de longueur j tel que $w \cdot \mu$ soit dominant. Dans ce cas $H^j(\mathbb{P}^2_{\mathbb{Q}_p}, \mathcal{F}_\mu)$ est une représentation algébrique de dimension finie isomorphe à $F_{w \cdot \mu}$.

Sascha Orlik précise la nature de M_j. Il définit un ensemble $\psi_{j,\mu}$ de poids dominants pour L_j et montre que la restriction de M_j à L_{2-j} est quotient de

$$\bigoplus_{\nu\in\psi_{2-j,\mu}} F_{\nu,2-j}. \tag{6.20}$$

Dans la formulation du théorème 2 de [**39**], il n'est pas clair que ce soit la restriction à L_{2-j} que l'on considère. Cependant, c'est indispensable, car il n'est pas toujours possible de choisir pour M_j une représentation semi-simple de P_{2-j}.

Nous pouvons à présent formuler une légère amélioration du théorème 2 de [**39**].

Proposition 6.9. — *Dans le cas où $\mu \in \{\lambda(0), \lambda(1), \lambda(2)\}$. La restriction à L_{2-j} de la représentation M'_j est un quotient de*

$$\bigoplus_{\nu\in\psi^*_{2-j,\mu}} F_{\nu,2-j}, \tag{6.21}$$

où $\psi^*_{2-j,\mu} = \psi_{2-j,\mu} \cap \{w\cdot\lambda,\ w\in W\}$.

Démonstration. — C'est une conséquence immédiate du corollaire 6.5 puisque dans ce cas, toutes les induites $\mathrm{Ind}_{P_{2-j}}^G(U_j)$ doivent avoir le même caractère central. □

Explicitons tout ceci dans le cas où μ est un des $\lambda(i)$ associé à λ, poids dominant. Reprenons les notations de l'introduction de [**39**]. On a alors

$$\begin{gathered}\mu_{1,\lambda(0)} = \lambda(1), \mu_{2,\lambda(0)} = s_2s_1\cdot\lambda(0) = s_2\cdot\lambda(1)\\ \mu_{1,\lambda(1)} = \lambda(1),\ \mu_{2,\lambda(1)} = \lambda(2)\\ \mu_{1,\lambda(2)} = \lambda(2),\ \mu_{2,\lambda(2)} = s_2\cdot\lambda(0).\end{gathered} \tag{6.22}$$

Posons, $\lambda = (\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2)$, on en déduit

$$\begin{aligned}\psi_{1,\lambda(0)} &= \{(\lambda_0 - k, \lambda_2 - 1, \lambda_1 + 1 + k) |\, 0 \le k \le \lambda_0 + 1 - \lambda_2\}\\ \psi_{2,\lambda(0)} &= \{(\lambda_2 - 2, \lambda_0 + 1, \lambda_1 + 1)\}\\ \psi_{1,\lambda(1)} &= \psi_{1,\lambda(0)}\\ \psi_{2,\lambda(1)} &= \psi_{2,\lambda(2)}\\ \psi_{1,\lambda(2)} &= \{(\lambda_1 - 1, \lambda_2 - 1 - k, \lambda_0 + k) |\, 0 \le k \le \lambda_0 - \lambda_2\}\\ \psi_{2,\lambda(2)} &= \{(\lambda_1 - 1, \lambda_0 + 1, \lambda_2)\}\end{aligned} \tag{6.23}$$

On a

$$\begin{multlined}\{w\cdot\lambda,\ w\in W\} = \{\lambda, (\lambda_1 - 1, \lambda_0 + 1, \lambda_2),\\ (\lambda_0, \lambda_2 - 1, \lambda_1 + 1), (\lambda_1 - 1, \lambda_2 - 1, \lambda_0 + 2), (\lambda_2 - 2, \lambda_0 + 1, \lambda_1 + 1),\\ (\lambda_2 - 2, \lambda_1, \lambda_0 + 2)\},\end{multlined} \tag{6.24}$$

et donc

$$\begin{aligned}\psi^*_{1,\lambda(0)} &= \{(\lambda_0, \lambda_2 - 1, \lambda_1 + 1), (\lambda_1 - 1, \lambda_2 - 1, \lambda_0 + 1)\}\\ \psi^*_{2,\lambda(0)} &= \{(\lambda_2 - 2, \lambda_0 + 1, \lambda_1 + 1)\}\\ \psi^*_{1,\lambda(2)} &= \{(\lambda_1 - 1, \lambda_2 - 1, \lambda_0 + 2)\}\\ \psi^*_{2,\lambda(2)} &= \{(\lambda_1 - 1, \lambda_0 + 1, \lambda_2)\}\end{aligned} \tag{6.25}$$

Proposition 6.10. — *Pour $D_{\lambda(2)}$, $\mathfrak{a}_1 = 0$ et $\mathfrak{a}_0$ est le sous $U(\mathfrak{g})$-module $\mathfrak{d}_2$ de $\mathfrak{m}_2(-s_1\cdot\lambda)$ défini dans la section 2.5. De plus $(\mathrm{St}_3 \otimes F_\lambda)'$ est l'unique quotient simple de $D_{\lambda(2)}$ et $(\mathrm{Ind}_{P_1}^G(F_{s_2s_1\cdot\lambda,1}))'$ est son socle. Ainsi, $D_{\lambda(2)}$ est un $D(G)$-module de longueur 3, dont les composantes de Jordan-Hölder sont, du socle au quotient simple*

$$(\mathrm{Ind}_{P_1}^G(F_{s_2s_1\cdot\lambda,1}))', \quad (\mathrm{Ind}_{P_2}^G(F_{s_1\cdot\lambda,2}\otimes\mathrm{St}_2)^{\mathfrak{d}_2})', \quad (F_\lambda\otimes\mathrm{St}_3)'. \tag{6.26}$$

Démonstration. — Remarquons tout d'abord que l'unique j tel que $H^j(\mathbb{P}^2_{\mathbb{Q}_p}, \mathcal{F}_{\lambda(2)}) \neq 0$ est $j = 2$. Le fait que $\mathfrak{a}_1 = 0$ vient de ce que $\mathfrak{m}_1(F'_{s_2s_1\cdot\lambda,1})$ est irréductible. Remarquons que comme $\mathfrak{a}_0$ est contenu dans $\mathfrak{m}_2(F'_{s_1\cdot\lambda,2})$ qui est de longueur 2, on a soit $\mathfrak{a}_0 = 0$ soit $\mathfrak{a}_0 = \mathfrak{d}_2$. Supposons $\mathfrak{a}_0 = 0$, alors d'après la décomposition du théorème 6.7, la représentation $\mathrm{Ind}_{P_2}^G(F_{s_1\cdot\lambda,2} \otimes \mathrm{St}_2)'$ est un sous-objet de $\mathrm{gr}^0(D_{\lambda(2)})$. Alors la suite exacte (4.49) montre que $\mathrm{Ind}_{P_2}^G(F_{s_1s_2\cdot\lambda,2} \otimes \mathrm{St}_2)'$ est un sous-objet de $\mathrm{gr}^0(D_{\lambda(2)})$. La représentation $\mathrm{Ind}_{P_2}^G(F_{s_1s_2\cdot\lambda,2} \otimes \mathrm{St}_2)'$ est en fait un sous-objet de $D_{\lambda(2)}$. En effet, $\mathrm{Fil}^1(D_{\lambda(2)}) = (\mathrm{Ind}_{P_1}^G(F_{s_2s_1\cdot\lambda,1}))'$ et d'après les formules (4.124) et la suite spectrale (4.40), on a

$$\mathrm{Ext}^1_{G,\lambda}(\mathrm{Ind}_{P_1}^G(F_{s_2s_1\cdot\lambda,1}), \mathrm{Ind}_{P_2}^G(F_{s_1s_2\cdot\lambda,2} \otimes \mathrm{St}_2)) = 0. \tag{6.27}$$

D'après (4.124), il existe une application surjective P_1-équivariante

$$\mathrm{Ind}_{P_2}^G(F_{s_1s_2\cdot\lambda} \otimes \mathrm{St}_2) \twoheadrightarrow \mathrm{Ind}_{B\cap L_1}^{L_1}(s_1s_2\cdot\lambda|\epsilon_1^{-1}\epsilon_2|). \tag{6.28}$$

Comme d'après la proposition 6.3 on a $H^0(N_1, D_{\lambda(2)}) = F_{s_2s_1\lambda(2),1} = F'_{s_2s_1\cdot\lambda,1}$, on aboutit à une contradiction, et donc $\mathfrak{a}_0 = \mathfrak{d}_2$.

Montrons à présent les assertions sur le socle et les quotients simples. D'après (4.43), on a $H^0(N_1, (F_\lambda \otimes \mathrm{St}_3)') = F'_{\lambda,1} \otimes J_{N_1}(\mathrm{St}_3)'$ qui ne s'injecte pas dans $H^0(N_1, D_{\lambda(2)})$. Ainsi $(F_\lambda \otimes \mathrm{St}_3)'$ ne peut être un sous-objet de $D_{\lambda(2)}$. De même, par (4.122), on obtient $H^0(N_1, (\mathrm{Ind}_{P_2}^G(\mathrm{St}_2 \otimes F_{s_1\cdot\lambda,2})^{\mathfrak{d}_2})') = (\mathrm{Ind}_{B\cap L_1}(s_1\cdot\lambda \otimes |\epsilon_0^{-1}\epsilon_1|))'$, qui ne s'injecte pas dans $H^0(N_1, D_{\lambda(2)})$. De plus, si $(\mathrm{St}_3 \otimes F_\lambda)'$ n'était pas le seul quotient simple de $D_{\lambda(2)}$, ce dernier contiendrait un sous-espace, extension non triviale de $(F_\lambda \otimes_K \mathrm{St}_3)'$ par $(\mathrm{Ind}_{P_2}^G(F_{s_2s_1\cdot\lambda,1}))'$, mais le corollaire 4.3 montre que

$$\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{M}(G)_\lambda}((F_\lambda \otimes_K \mathrm{St}_3)', (\mathrm{Ind}_{P_1}^G(F_{s_2s_1\cdot\lambda,1}))') = 0. \tag{6.29}$$

L'assertion sur la longueur provient alors des résultats d'irréductibilité du chapitre 2. □

Corollaire 6.11. — *Il existe une injection G-équivariante de $D'_{\lambda(2)}$ dans $\Sigma(\lambda)$. De plus,*

$$\mathrm{End}_G(D_{\lambda(2)}) = K. \tag{6.30}$$

Démonstration. — La seconde assertion est une conséquence immédiate de la proposition 6.10. Démontrons la première. Nous allons tout d'abord prouver ce résultat dans le cas où $\lambda = 0$. On a alors $\Sigma(0) \simeq \mathrm{St}_3^{an}$ et $D_{0(2)} \simeq \Omega^2(\mathcal{X})$. Comme me l'a signalé Christophe Breuil, c'est alors une conséquence de résultats d'Adrian Iovita et Michael Spieß. Ils construisent dans [**27**], un sous-espace $\Omega^2_{\log,b}$ de $\Omega^2(\mathcal{X})$, G-stable, et constitué de formes différentielles logarithmiques ([**27**, Définition 4.6]), et ils montrent que l'image de cet espace par l'application $\Omega^2(\mathcal{X}) \twoheadrightarrow H^2_{dR}(\mathcal{X})$ est dense. Comme d'après la proposition 6.10, $H^2_{dR}(\mathcal{X})$ est l'unique quotient simple de $\Omega^2(\mathcal{X})$, l'espace $\Omega^2_{\log,b}$ est dense dans $\Omega^2(\mathcal{X})$. Notons St_3^c la représentation de Steinberg continue, c'est-à-dire le quotient de l'espace de Banach des fonctions continues sur G/B par l'espace engendré par les fonctions provenant de G/P_1 ou de G/P_2, muni de l'action par translation à gauche. On observe alors que d'après le lemme 1 du §4 de [**43**] et la remarque sous la définition 4.6 de [**27**], $\Omega^2_{\log,b}$ est le dual topologique de la représentation de Steinberg continue, c'est donc un $K[[G_0]]$-module de type fini. On obtient donc une injection continue d'image dense

$$(\mathrm{St}_3^c)' \hookrightarrow \Omega^2(\mathcal{X}). \tag{6.31}$$

D'après le théorème 7.1 de [**47**], on a $(\mathrm{St}_3^{an})' \simeq D(G_0) \otimes_{K[[G_0]]} (\mathrm{St}_3^c)'$. On obtient donc une flèche $D(G)$-équivariante $(\mathrm{St}_3^{an})' \to \Omega^2(\mathcal{X})$. Comme il s'agit d'une application entre deux $D(G)$-modules coadmissibles, le corollaire 4(*ii*) et le lemme 3.6 de [**47**] montrent que son image est fermée. Puisque cette image contient déjà un sous-espace dense, l'application est surjective.

Passons maintenant au cas où λ est un poids dominant quelconque. Le cas précédent nous donne une surjection

$$F'_\lambda \otimes (\mathrm{St}_3^{an})' \twoheadrightarrow F'_\lambda \otimes \Omega^2(\mathcal{X}). \tag{6.32}$$

On utilise alors les lemmes 2.23 et 6.6 et le fait que $\mathfrak{z}(\mathfrak{g})$ agit par $\chi_{-\lambda-\delta}$ sur $\Sigma(\lambda)'$ et $D_{\lambda(2)}$ pour conclure. □

Remarque 6.12. — (i) Il faut voir ce résultat $\Sigma(\lambda)' \twoheadrightarrow D_{\lambda(2)}$ comme un analogue pour $\mathrm{GL}_3(\mathbb{Q}_p)$ de la dualité de Morita $O(k) \simeq \Sigma(k)'$ ([**7**, §3.1]). On fixe désormais i_λ une injection de $D'_{\lambda(2)}$ dans $\Sigma(\lambda)$.

(ii) Remarquons que dans (6.32), le noyau de la composée

$$F_\lambda \otimes_K \Omega^2(\mathcal{X})' \hookrightarrow F_\lambda \otimes_K \mathrm{St}_3^{an} \twoheadrightarrow \Sigma(\lambda) \tag{6.33}$$

est un supplémentaire de $D'_{\lambda(2)}$. Ainsi $D_{\lambda(2)}$ est facteur direct de $F'_\lambda \otimes_K \Omega^2(\mathcal{X})$.

Les mêmes raisonnements que pour la proposition 6.10 donnent le résultat suivant pour $D_{\lambda(0)}$.

Proposition 6.13. — *Les composantes de Jordan-Hölder de $D_{\lambda(0)}$ sont*

$$F'_\lambda, \quad (\mathrm{Ind}_{P_1}^G(F_{s_2\cdot\lambda,1})^{\mathfrak{d}_1})', \quad (\mathrm{Ind}_{P_2}^G(F_{s_1s_2\cdot\lambda,2} \otimes \mathrm{St}_2))'. \tag{6.34}$$

De plus $(\mathrm{Ind}_{P_2}^G(F_{s_1s_2\cdot\lambda,2} \otimes \mathrm{St}_2))'$ *est le seul quotient simple de $D_{\lambda(0)}$ et F'_λ est son socle.*

Proposition 6.14. — *Il n'y a pas de morphismes $D(G)$-équivariant de $D_{\lambda(1)}$ dans $H^1_{dR}(\lambda)$.*

Démonstration. — Par irréductibilité de $H^1_{dR}(\lambda)$, un tel morphisme non nul est surjectif. Ainsi il induirait une surjection $D(L_1)$-équivariante

$$H^2(N_1, D_{\lambda(1)}) \to H^2(N_1, H^1_{dR}(\lambda)). \tag{6.35}$$

Or on peut calculer le premier $D(L_1)$-module en utilisant la proposition 6.3 et le second par (4.43). On obtient alors une flèche

$$J_{N_1}(v_B)' \otimes F_{s_2s_1\lambda(1),2} \to J_{N_1}(v_{P_1})' \otimes H^1(\mathfrak{n}_1, F'_\lambda) \tag{6.36}$$

qui ne peut qu'être nulle par (4.46). □

Comme la cohomologie du complexe $[D_{\lambda(0)} \to D_{\lambda(1)} \to D_{\lambda(2)}]$ est $H^*_{dR}(\lambda)$, on déduit des décompositions de $D_{\lambda(0)}$ et $D_{\lambda(2)}$ en composantes de Jordan-Hölder, les composantes de Jordan-Hölder de $D_{\lambda(1)}$. Pour résumer, les espaces $D'_{\lambda(i)}$ sont munis d'une filtration croissante dont les gradués sont isomorphes aux représentations localement analytiques suivantes, où l'on désigne par $A \text{ —— } B$ une extension non scindée de B par A.

$$\begin{aligned} D'_{\lambda(0)} &= \mathrm{Ind}_{P_2}^G(F_{s_1s_2\cdot\lambda,2} \otimes \mathrm{St}_2) \text{ —— } \mathrm{Ind}_{P_1}^G(F_{s_2\cdot\lambda,1})^{\mathfrak{d}_1} \text{ —— } F_\lambda \\ D'_{\lambda(1)} &= \mathrm{Ind}_{P_2}^G(F_{s_1\cdot\lambda,2} \otimes \mathrm{St}_2)^{\mathfrak{d}_2} \text{ —— } \mathrm{Ind}_{P_1}(F_{s_2s_1\cdot\lambda,1}) \oplus F_\lambda \otimes v_{P_1} \\ &\quad \text{ —— } \mathrm{Ind}_{P_2}^G(F_{s_1s_2\cdot\lambda,2} \otimes \mathrm{St}_2) \text{ —— } \mathrm{Ind}_{P_1}^G(F_{s_2\cdot\lambda,1})^{\mathfrak{d}_1} \\ D'_{\lambda(2)} &= F_\lambda \otimes \mathrm{St}_3 \text{ —— } \mathrm{Ind}_{P_2}^G(F_{s_1\cdot\lambda,2} \otimes \mathrm{St}_2)^{\mathfrak{d}_2} \text{ —— } \mathrm{Ind}_{P_1}^G(F_{s_2s_1\cdot\lambda,1}) \end{aligned} \tag{6.37}$$

En fait, la filtration dans le théorème d'Orlik est de telle sorte que l'on peut encore écrire $D'_{\lambda(1)}$ de la façon suivante

$$\mathrm{Ind}_{P_2}^G(F_{s_1\cdot\lambda,2} \otimes \mathrm{St}_2) \text{ —— } \mathrm{Ind}_{P_1}(F_{s_2s_1\cdot\lambda}) \oplus F_\lambda \otimes v_{P_1} \text{ —— } \mathrm{Ind}_{P_1}^G(F_{s_2\cdot\lambda,1})^{\mathfrak{d}_1}\ , \tag{6.38}$$

le terme de gauche s'insère dans une suite exacte

$$0 \to \mathrm{Ind}_{P_2}^G(F_{s_1\cdot\lambda,2} \otimes \mathrm{St}_2)^{\mathfrak{d}_2} \to \mathrm{Ind}_{P_2}^G(F_{s_1\cdot\lambda,2} \otimes \mathrm{St}_2) \to \mathrm{Ind}_{P_2}^G(F_{s_1s_2\cdot\lambda,2} \otimes \mathrm{St}_2) \to 0. \tag{6.39}$$

6.5. Filtration et extensions. — Cette partie plutôt technique a pour but de transformer les informations sur les extensions dans la série discrète holomorphe en résultats portant sur les morphismes entre complexes dans la catégorie dérivée $D^b(\mathcal{M}(G)_\lambda)$.

Le théorème 6.1 nous permet de choisir s un isomorphisme entre $R\Gamma_{dR}(\lambda)$ et le complexe scindé de cohomologie associé. Notons s_i la composition de s et de la projection

$$\bigoplus_i H^i_{dR}(\lambda)[-i] \xrightarrow{p_i} H^i_{dR}(\lambda)[-i]. \tag{6.40}$$

L'isomorphisme (6.12) composé avec la flèche naturelle $D_{\lambda(2)}[-2] \to [D_{\lambda(0)} \to D_{\lambda(1)} \to D_{\lambda(2)}]$ nous donne une flèche

$$i_2 : D_{\lambda(2)}[-2] \to R\Gamma_{dR}(\lambda). \tag{6.41}$$

L'application $s_0 \circ i_2$ est donc un élément de

$$\mathrm{Hom}_{D^b(\mathcal{M}(G)_\lambda)}(D_{\lambda(2)}[-2], H^0_{dR}(\lambda)) \simeq \mathrm{Ext}^2_{\mathcal{M}(G)_\lambda}(D_{\lambda(2)}, F'_\lambda). \tag{6.42}$$

Nous avons besoin de savoir quelle est son image dans $\mathrm{Ext}^2_{\mathcal{M}(G)_\lambda}(\Sigma(\lambda)', F'_\lambda)$ après composition avec la surjection $\Sigma(\lambda)' \twoheadrightarrow D_{\lambda(2)}$.

Avant cela, nous avons besoin d'un résultat technique.

Lemme 6.15. — *L'application $D(G)$-équivariante $D_{\lambda(2)}[-2] \to R\Gamma_{dR}(\lambda)$ induit un isomorphisme*

$$\mathrm{End}_{D^b(\mathcal{M}(G)_\lambda)}(R\Gamma_{dR}(\lambda)) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{D^b(\mathcal{M}(G)_\lambda)}(D_{\lambda(2)}[-2], R\Gamma_{dR}(\lambda)). \tag{6.43}$$

De même l'application $D(G)$-équivariante

$$[0 \to D_{\lambda(1)} \to D_{\lambda(2)}] \to R\Gamma_{dR}(\lambda) \tag{6.44}$$

induit un isomorphisme

$$\mathrm{End}_{D^b(\mathcal{M}(G)_\lambda)}(R\Gamma_{dR}(\lambda)) \simeq \mathrm{Hom}_{D^b(\mathcal{M}(G))_\lambda}([0 \to D_{\lambda(1)} \to D_{\lambda(2)}], R\Gamma_{dR}(\lambda)). \tag{6.45}$$

Démonstration. — D'après le corollaire 6.2, le membre de gauche est de dimension 6. De la proposition 6.10, on tire

$$\dim_K \mathrm{Hom}_{D(G)}(D_{\lambda(2)}, H^2_{dR}(\lambda)) = 1. \tag{6.46}$$

De plus d'après l'exemple 4.11 et la proposition 6.10,

$$\begin{aligned} \mathrm{Ext}^1_{G,\lambda}(D_{\lambda(2)}, H^1_{dR}(\lambda)) &\leq 2 \\ \mathrm{Ext}^2_{G,\lambda}(D_{\lambda(2)}, H^0_{dR}(\lambda)) &\leq 3 \end{aligned} \tag{6.47}$$

Ainsi il suffit de prouver que la flèche de l'énoncé est injective. Pour cela, remarquons que $R\Gamma_{dR}(\lambda)$ s'insère dans un triangle exact

$$D_{\lambda(2)}[-2] \to R\Gamma_{dR}(\lambda) \to [D_{\lambda(0)} \to D_{\lambda(1)}] \to \tag{6.48}$$

et il suffit donc de prouver que

$$\mathrm{Hom}_G([D_{\lambda(0)} \to D_{\lambda(1)}], R\Gamma_{dR}(\lambda)) = 0, \tag{6.49}$$

ce qui est encore équivalent aux trois égalités

$$\mathrm{Hom}_G(D_{\lambda(1)}, H^1_{dR}(\lambda)) = 0 \tag{6.50}$$

$$\mathrm{Hom}_G(D_{\lambda(0)}, F'_\lambda) = 0 \tag{6.51}$$

$$\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{M}(G)_\lambda}(D_{\lambda(1)}, F'_\lambda) = 0. \tag{6.52}$$

Les deux premières égalités découlent de la proposition 6.13 et de la proposition 6.14. Prouvons la troisième.

Supposons qu'il existe une extension non triviale

$$0 \to H^0_{dR}(\lambda) \to E \to D_{\lambda(1)} \to 0. \tag{6.53}$$

Nous allons commencer par prouver que l'injection P_1-équivariante $H^0(N_1, D_{\lambda(1)}) \hookrightarrow D_{\lambda(1)}$ se relève en une injection P_1-équivariante $H^0(N_1, D_{\lambda(1)}) \hookrightarrow E$.

Soit ρ la représentation algébrique irréductible de L_1 de plus haut poids $\lambda(1)$. Nous avons identifié $D_{\lambda(1)}$ avec l'espace des fonctions rigides analytiques $f : \mathcal{X} \to \rho$ muni de l'action donnée par (6.11). L'espace $\mathcal{X}$ est inclus dans l'ouvert affine U de $\mathbb{P}^2_{\mathbb{Q}_p}$ défini en 6.2, $U(\mathbb{C}_p)$ est l'image de $N_1(\mathbb{C}_p)w_0P_2$ dans $\mathbb{P}^2(\mathbb{C}_p)$. Soit $M \subset D_{\lambda(1)}$ le sous-espace constitué des fonctions $f : \mathcal{X} \to \rho$ qui sont des polynômes sur $U \simeq \mathbb{A}^2_{\mathbb{Q}_p}$. Il s'agit de l'espace des sections algébriques du faisceau $\mathcal{F}_\rho$ au-dessus de U. Ce sous-espace est donc stable pour l'action de $U(\mathfrak{g})$ et, puisque U est stable par P_1, de P_1. Remarquons que le sous-espace des fonctions constantes est stable par P_1 et isomorphe à $F_{\lambda(1),1}$. Ainsi $H^0(\mathfrak{n}_1, D_{\lambda(1)}) = H^0(\mathfrak{n}_1, M)$. Soit $\tilde{M}$ l'image réciproque de M dans E. Nous montrons dans l'appendice 3 que $\tilde{M} \simeq M \oplus H^0_{dR}(\lambda)$, ce qui donne une injection $U(\mathfrak{g})$-équivariante de M dans E, donc une injection $\mathfrak{p}_1$-équivariante de $H^0(\mathfrak{n}_1, D_{\lambda(1)})$ dans E. Comme $F_{\lambda(1),1} \simeq F'_{s_2\cdot\lambda,1}$, on obtient une application non triviale $D(G) \otimes_{D(P_1)} F'_{s_2\cdot\lambda} \to E$. Comme $H^0(N_1, (\mathrm{Ind}^G_{P_1}(F_{s_2s_1\cdot\lambda}))')$, donné par (4.121), n'est pas inclus dans $H^0(N_1, E)$, la restriction de cette injection à $(\mathrm{Ind}^G_{P_1}(F_{s_2s_1\cdot\lambda}))'$ est nulle, on obtient donc une injection

$$j : (\mathrm{Ind}^G_{P_1}(F_{s_2\cdot\lambda,1})^{\mathfrak{d}_1})' \hookrightarrow E. \tag{6.54}$$

Notons E_1 le quotient de E par ce sous-espace, qui est donc une extension non triviale entre $D_{\lambda(1)}/(\mathrm{Ind}_{P_1}^G(F_{s_2\cdot\lambda,1})^{\mathfrak{d}_1})'$ et $H^0_{dR}(\lambda)$. Utilisons la suite exacte

$$0 \to (\mathrm{Ind}_{P_1}^G(F_{s_2\cdot\lambda,1})^{\mathfrak{d}_1})' \to D_{\lambda(1)} \to D_{\lambda(1)}/(\mathrm{Ind}_{P_1}^G(F_{s_2\cdot\lambda,1})^{\mathfrak{d}_1})' \to 0 \tag{6.55}$$

pour déterminer $H^0(N_1, D_{\lambda(1)}/(\mathrm{Ind}_{P_1}^G(F_{s_2\cdot\lambda,1})^{\mathfrak{d}_1})')$. On a déjà

$$H^0(N_1, (\mathrm{Ind}_{P_1}^G(F_{s_2\cdot\lambda,1})^{\mathfrak{d}_1})') \simeq H^0(N_1, D_{\lambda(1)}). \tag{6.56}$$

Rappelons de plus que par (4.133)),

$$H^1(N_1, (\mathrm{Ind}_{P_1}^G(F_{s_2\cdot\lambda,1})^{\mathfrak{d}_1})') = F'_{s_2s_1\cdot\lambda,1} \oplus \cdots \tag{6.57}$$

Comme $H^1(N_1, D_{\lambda(1)})$ est le dual d'une représentation localement algébrique irréductible non isomorphe à $F_{s_2s_1\cdot\lambda,1}$, on a une injection

$$F'_{s_2s_1\cdot\lambda,1} \hookrightarrow H^0(N_1, D_{\lambda(1)}/(\mathrm{Ind}_{P_1}^G(F_{s_2\cdot\lambda,1})^{\mathfrak{d}_1})'). \tag{6.58}$$

Comme de plus $H^1(N_1, F'_\lambda) \simeq F'_{s_2\cdot\lambda}$, on a nécessairement une injection P_1-équivariante $F'_{s_2s_1\cdot\lambda} \hookrightarrow E_1$, et donc une injection $D(G)$-équivariante

$$(\mathrm{Ind}_{P_1}^G(F_{s_2s_1\cdot\lambda,1}))' \hookrightarrow E_1, \tag{6.59}$$

par irréductibilité de $(\mathrm{Ind}_{P_1}^G(F_{s_2s_1\cdot\lambda,1}))'$. Notons alors E_2 le quotient de E_1 par $(\mathrm{Ind}_{P_1}^G(F_{s_2s_1\cdot\lambda,1}))'$. C'est une extension non triviale de la forme

$$F'_\lambda \text{ ——— } F'_\lambda \otimes v'_{P_1} \text{ ——— } \mathrm{Ind}_{P_2}^G(F_{s_1\cdot\lambda,2} \otimes \mathrm{St}_2)' \tag{6.60}$$

Nous allons aboutir à une contradiction. Tout d'abord, $F'_\lambda \otimes v'_{P_1}$, ne peut être un sous-objet de E_2 car d'après (4.47), $\mathrm{Ext}^1_{G,\lambda}(F_\lambda, \mathrm{Ind}_{P_2}^G(F_{s_1\cdot\lambda,2} \otimes \mathrm{St}_2)) = 0$. Le $D(G)$-module E_2 contient donc un sous-module M', extension non scindée de la forme

$$0 \to F'_\lambda \to M' \to F'_\lambda \otimes v'_{P_1} \to 0. \tag{6.61}$$

D'après le corollaire 4.8, $\mathrm{Ext}^1_{G,\lambda}(F_\lambda, F_\lambda \otimes_K v_{P_1})$ est de dimension 1. Il existe donc une unique extension non scindée de la forme (6.61). Ainsi M est isomorphe à la représentation localement algébrique $F_\lambda \otimes \mathrm{Ind}_{P_2}^G(|\epsilon_0^{-2}\epsilon_1\epsilon_2|)^\infty$. Ainsi d'après (4.43), $H^q(N_2, M') = H^q(\mathfrak{n}_2, F'_\lambda) \otimes J_{N_2}(\mathrm{Ind}_{P_2}^G(|\epsilon_0^{-2}\epsilon_1\epsilon_2|)^\infty)'$. Or les suites exactes (4.45) montrent que $J_{N_2}(\mathrm{Ind}_{P_2}^G(|\epsilon_0^{-2}\epsilon_1\epsilon_2|)^\infty) \simeq \mathrm{Ind}_{B\cap L_2}^{L_2}(|\epsilon_1^{-1}\epsilon_2|)^\infty \oplus |\epsilon_0^{-2}\epsilon_1\epsilon_2|$. En utilisant la suite spectrale (4.40), on obtient

$$\mathrm{Ext}^1_{G,\lambda}(M, \mathrm{Ind}_{P_2}^G(F_{s_1\cdot\lambda,2} \otimes \mathrm{St}_2)) = 0. \tag{6.62}$$

Ainsi $E_2 = M' \oplus \mathrm{Ind}_{P_2}^G(F_{s_1\cdot\lambda,2} \otimes \mathrm{St}_2)'$. Mais ceci implique qu'il existe une application $D(G)$-équivariante non triviale de E_2 vers $H^1_{dR}(\lambda) = F'_\lambda \otimes v'_{P_1}$, donc une application non triviale $D_{\lambda(1)} \to H^1_{dR}(\lambda)$, contredisant la proposition 6.14.

Enfin, pour prouver la dernière assertion, on utilise le triangle distingué

$$D_{\lambda(2)}[-2] \to [0 \to D_{\lambda(1)} \to D_{\lambda_2}] \to D_{\lambda(1)}[-1] \to, \tag{6.63}$$

elle est donc équivalente à

$$\mathrm{Hom}_{D^b(\mathcal{M}(G)_\lambda)}(D_{\lambda(1)}[-1], R\Gamma_{dR}(\lambda)) = 0, \tag{6.64}$$

ce qui est conséquence de (6.50) et (6.52). □

Remarque 6.16. — Une conséquence de ce lemme est que les inégalités (6.47) sont en fait des égalités.

On sait maintenant que la dimension de $\mathrm{Ext}^2_{\mathcal{M}(G)_\lambda}(D_{\lambda(2)}, H^0_{dR}(\lambda)) = \mathrm{Ext}^2_{G,\lambda}(F_\lambda, D'_{\lambda(2)})$ est 3. Pour la suite, nous avons besoin d'en savoir plus sur l'image de cet espace dans $\mathrm{Ext}^2_{G,\lambda}(F_\lambda, \Sigma(\lambda))$ via le plongement $D'_{\lambda(2)} \hookrightarrow \Sigma(\lambda)$. Remarquons déjà que pour toute composante M de $\Sigma(\lambda)$, $\mathrm{Ext}^1_{G,\lambda}(F_\lambda, M) = 0$, donc cette application est injective.

Lemme 6.17. — *L'image de* $\mathrm{Ext}^2_{G,\lambda}(F_\lambda, D'_{\lambda(2)})$ *dans* $\mathrm{Ext}^2_{G,\lambda}(F_\lambda, \Sigma(\lambda))$ *n'est pas contenue dans* $\mathrm{Im}(\kappa)$.

Démonstration. — Montrons tout d'abord le cas où $\lambda = 0$ et $\Sigma(0) = \mathrm{St}_3^{an}$. Soit ι l'automorphisme de $\overline{G}$ défini par $g \mapsto (g^{-1})^t$. Si (Σ, ρ) est une représentation localement analytique de $\overline{G}$, on définit la représentation $\iota(\Sigma)$ comme étant $g \mapsto \rho(\iota(g))$. Dire qu'un cocyle de $H^2(\overline{G}, \mathrm{St}_3^{an})$ appartient à $\mathrm{Im}(\kappa)$, c'est dire qu'il est dans l'image de $H^2(\overline{G}, \mathrm{Ind}_B^G(1)) \to H^2(\overline{G}, \mathrm{St}_3^{an})$. Comme $\iota(\mathrm{Ind}_B^G(1)) \simeq \mathrm{Ind}_B^G(1)$ et $\iota(\mathrm{St}_3^{an}) \simeq \mathrm{St}_3^{an}$, on voit que si $H^2(\overline{G}, \Omega^2(\mathcal{X})')$ est contenu dans $\mathrm{Im}(\kappa)$, c'est aussi le cas $H^2(\overline{G}, \iota(\Omega^2(\mathcal{X})'))$. Dans la décomposition (2.52), on voit que

$$\Omega^2(\mathcal{X})' + \iota(\Omega^2(\mathcal{X})') = \mathrm{Fil}_2(\mathrm{St}_3^{an}). \tag{6.65}$$

Supposons $H^2(\overline{G}, \Omega^2(\mathcal{X})') \subset \mathrm{Im}(\kappa)$, on a alors

$$H^2(\overline{G}, \mathrm{Fil}_2(\mathrm{St}_3^{an})) \subset \mathrm{Im}(\kappa). \tag{6.66}$$

Or un calcul montre que $H^2(\overline{G}, M) = 0$ pour tout M composant de $\mathrm{St}_3^{an}/(\Omega^2(\mathcal{X})' + \iota(\Omega^2(\mathcal{X})'))$. Ceci implique $H^2(\overline{G}, \mathrm{St}_3^{an}) \subset \mathrm{Im}(\kappa)$, ce qui est absurde.

Pour λ un poids dominant, on utilise le diagramme commutatif suivant.

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Ext}^2_{\overline{G}}(1, \Omega^2(\mathcal{X})') \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Ext}^2_{\overline{G}}(1, \mathrm{St}_3^{an}) \arrow[d] \\
\mathrm{Ext}^2_{G,\lambda}(F_\lambda, F_\lambda \otimes \Omega^2(\mathcal{X})') \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Ext}^2_{G,\lambda}(F_\lambda, F_\lambda \otimes \mathrm{St}_3^{an}) \arrow[d] \\
\mathrm{Ext}^2_{G,\lambda}(F_\lambda, D'_{\lambda(2)}) \arrow[r, "i_\lambda"] & \mathrm{Ext}^2_{G,\lambda}(F_\lambda, \Sigma(\lambda)).
\end{tikzcd} \tag{6.67}$$

Les flèches verticales du carré du haut proviennent du foncteur exact $\Sigma \mapsto F_\lambda \otimes \Sigma$ et celles du bas proviennent de (6.32) et du lemme 2.23. Le carré du bas est alors commutatif par définition de i_λ. La composée des deux flèches verticales de droite est φ_λ. Comme $\varphi_\lambda \circ \kappa = \kappa$, on déduit le cas général du cas $\lambda = 0$. $\square$

Lemme 6.18. — *Notons* $\mathrm{Fil}^1 D_{\lambda(2)}$ *le sous-objet de* $D_{\lambda(2)}$ *donné par le théorème 6.7. L'image de* $\mathrm{Ext}^2_{G,\lambda}(F_\lambda, (D_{\lambda(2)}/\mathrm{Fil}^1 D$ *dans* $\mathrm{Ext}^2_{G,\lambda}(F_\lambda, \Sigma(\lambda))$ *est le sous-espace engendré par* $c_{1,\mathrm{val}} \wedge c_{2,\mathrm{val}}$ *et* $c_{1,\mathrm{val}} \wedge c_{2,\log}$.

Démonstration. — La proposition 5.15 et (5.67) montrent que les cocycles $c_{1,\mathrm{val}} \wedge c_{2,\log}$ et $c_{1,\mathrm{val}} \wedge c_{2,\mathrm{val}}$ correspondent, par Yonéda, à des extensions de la formes

$$0 \to \Sigma(\lambda) \to A \to B \to F_\lambda \to 0 \tag{6.68}$$

avec

$$0 \to \Sigma(\lambda) \to A \to v_{P_1} \otimes F_\lambda \to 0, \tag{6.69}$$

il suffit donc de prouver que

$$\mathrm{Ext}^1_{G,\lambda}(F_\lambda \otimes v_{P_1}, (D_{\lambda(2)}/\mathrm{Fil}^1 D_{\lambda(2)})') \simeq \mathrm{Ext}^1_{G,\lambda}(F_\lambda \otimes v_{P_1}, \Sigma(\lambda)). \tag{6.70}$$

Comme $H^1_{dR}(\lambda)' \simeq F_\lambda \otimes_K v_{P_1}$ et $(\mathrm{Fil}^1 D_{\lambda(2)})' \simeq \mathrm{Ind}_{P_1}^G(F_{s_2 s_2 \cdot \lambda, 1})$, c'est une conséquence de la remarque 6.16 et de l'exemple 4.47 qui donnent

$$\dim_K \mathrm{Ext}^1(D_{\lambda(2)}, H^1_{dR}(\lambda)) = 2, \quad \mathrm{Ext}^1_{G,\lambda}(F_\lambda \otimes v_{P_1}, \mathrm{Ind}_{P_1}^G(F_{s_2 s_1 \cdot \lambda, 1})) = 0. \tag{6.71}$$

$\square$

On peut à présent comprendre un peu mieux le rapport entre la filtration du complexe $R\Gamma_{dR}(\lambda)$ et l'isomorphisme s. L'espace

$$\begin{aligned} &\mathrm{Hom}_{D^b(\mathcal{M}(G)_\lambda)}(R\Gamma_{dR}(\lambda), H^0_{dR}(\lambda)) = \\ &\qquad \mathrm{End}_{\mathcal{M}(G)_\lambda}(H^0_{dR}(\lambda)) \oplus \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{M}(G)_\lambda}(H^1_{dR}(\lambda), H^0_{dR}(\lambda)) \oplus \mathrm{Ext}^2_{\mathcal{M}(G)_\lambda}(H^2_{dR}(\lambda), H^0_{dR}(\lambda)) \end{aligned} \tag{6.72}$$

est de dimension 3. D'après le corollaire 4.8, on a

$$\dim_K \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{M}(G)_\lambda}(H^1_{dR}(\lambda), H^0_{dR}(\lambda)) = \dim_K \mathrm{Ext}^1_{G,\lambda}(F_\lambda, F_\lambda \otimes v_{P_1}) = 1 \tag{6.73}$$

Soit donc N une flèche non nulle dans la catégorie $D^b(\mathcal{M}(G)_\lambda)$

$$H^1_{dR}(\lambda)[-1] \to H^0_{dR}(\lambda), \tag{6.74}$$

alors d'après le lemme 6.15,

$$\mathrm{Hom}_{D^b(\mathcal{M}(G)_\lambda)}(D_{\lambda(2)}[-2], R\Gamma_{dR}(\lambda)) = Ki_2 \oplus N(\mathrm{Hom}_{D^b(\mathcal{M}(G)_\lambda)}(D_{\lambda(2)}[-2], H^1_{dR}(\lambda)[-1])). \tag{6.75}$$

Comme

$$\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{M}(G)_\lambda}(D_{\lambda(2)}, H^1_{dR}(\lambda)) = \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{M}(G)_\lambda}(D_{\lambda(2)}/\mathrm{Fil}^1 D_{\lambda(2)}, H^1_{dR}(\lambda)), \tag{6.76}$$

la preuve du lemme 6.18 montre que l'image de $N(\mathrm{Hom}_{D^b(\mathcal{M}(G)_\lambda)}(D_{\lambda(2)}[-2], H^1_{dR}(\lambda)[-1]))$ dans $\mathrm{Ext}^2_{G,\lambda}(F_\lambda, \Sigma(\lambda))$, est contenue dans l'image de κ. Ainsi d'après le lemme 6.17, l'élément $s_0 \circ i_2$ n'appartient pas à $\mathrm{Im}(\kappa)$. Dans la décomposition (5.57), on a

$$s_0 \circ i_2 = \alpha c_0 + \beta c_{2,\log} \wedge c_{1,\log} + \gamma c_{1,\log} \wedge c_{2,\mathrm{val}} + \delta c_{1,\mathrm{val}} \wedge c_{2,\log} + \epsilon c_{2,\mathrm{val}} \wedge c_{1,\mathrm{val}} \tag{6.77}$$

avec $\alpha \neq 0$. De même, on montre que $s_1 \circ i_1 \in \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{M}(G)_\lambda}(\Sigma(\lambda)', (F_\lambda \otimes v_{P_1})')$ s'écrit

$$s_1 \circ i_2 = r c_{2,\log} + t c_{2,\mathrm{val}} \tag{6.78}$$

avec $r \neq 0$.

Notons enfin $D^0_{\lambda(1)}$ le noyau de la différentielle de $D_{\lambda(1)}$ dans $D_{\lambda(2)}$. On a

$$\dim_K \mathrm{Hom}_{D^b(\mathcal{M}(G)_\lambda)}(D^0_{\lambda(1)}[-1], R\Gamma_{dR}(\lambda)) = 3. \tag{6.79}$$

En effet, comme le complexe $R\Gamma_{dR}(\lambda)$ est scindé, on a

$$\mathrm{Hom}_{D^b(\mathcal{M}(G)_\lambda)}(D^0_{\lambda(1)}[-1], R\Gamma_{dR}(\lambda)) = \mathrm{Hom}_{D^b(\mathcal{M}(G)_\lambda)}(D^0_{\lambda(1)}[-1], H^0_{dR}(\lambda) \oplus H^1_{dR}(\lambda)). \tag{6.80}$$

La décomposition (6.37) montre que $\dim_K \mathrm{Hom}_K(D^0_{\lambda(1)}, H^1_{dR}(\lambda)) = 1$ et $\mathrm{Hom}_K(D^0_{\lambda(1)}, H^0_{dR}(\lambda)) = 0$. De plus on a d'après (4.47) $\dim_K \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{M}(G)_\lambda}(D^0_{\lambda(1)}, H^0_{dR}(\lambda)) \leq 2$. En appliquant le foncteur $\mathrm{Hom}_{D^b(\mathcal{M}(G)_\lambda)}(\cdot, R\Gamma_{dR}(\lambda))$ au triangle distingué

$$D^0_{\lambda(1)}[-1] \to [0 \to D_{\lambda(1)} \to D_{\lambda(2)}] \to H^2_{dR}(\lambda)[-2] \to, \tag{6.81}$$

et en utilisant le lemme 6.15 ainsi que le fait que $\mathrm{Hom}_{D^b(\mathcal{M}(G)_\lambda)}(H^2_{dR}(\lambda)[-2], R\Gamma_{dR}(\lambda))$ est de dimension 3, on obtient l'inégalité inverse

$$\dim_K \mathrm{Hom}_{D^b(\mathcal{M}(G)_\lambda)}(D^0_{\lambda(1)}[-1], R\Gamma_{dR}(\lambda)) \geq 3. \tag{6.82}$$

D'après (6.37), l'espace $D^0_{\lambda(1)}$ est une extension non scindée de $(\mathrm{Ind}^G_{P_2}(F_{s_1 s_2 \cdot \lambda, 2} \otimes \mathrm{St}_2))'$ par $v^{an}_{P_1}(\lambda)'$ et comme l'utilisation habituelle de la suite spectrale (4.40) nous donne

$$\mathrm{Ext}^1_{G,\lambda}(F_\lambda, \mathrm{Ind}^G_{P_2}(F_{s_1 s_2 \cdot \lambda, 2} \otimes_K \mathrm{St}_2)) = \mathrm{Ext}^2_{G,\lambda}(F_\lambda, \mathrm{Ind}^G_{P_2}(F_{s_1 s_2 \cdot \lambda, 2} \otimes_K \mathrm{St}_2)) = 0, \tag{6.83}$$

on a

$$\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{M}(G)_\lambda}(D^0_{\lambda(1)}, H^0_{dR}(\lambda)) = \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{M}(G)_\lambda}(v^{an}_{P_1}(\lambda)', H^0_{dR}(\lambda)). \tag{6.84}$$

Soit i_1 l'application naturelle $D^0_{\lambda(1)}[-1] \to [0 \to D_{\lambda(1)} \to D_{\lambda(2)}] \to R\Gamma_{dR}(\lambda)$. Par (6.84), on voit l'application $s_0 \circ i_1$ comme un élément de

$$\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{M}(G)_\lambda}(v^{an}_{P_1}(\lambda)', H^0_{dR}(\lambda)) \simeq \mathrm{Ext}^1_{G,\lambda}(F_\lambda, v^{an}_{P_1}(\lambda)). \tag{6.85}$$

et on écrit $s_0 \circ i_1 = u c_{1,\log} + v c_{1,\mathrm{val}}$.

Lemme 6.19. — *Dans la décomposition $s_0 \circ i_1 = u c_{1,\log} + v c_{1,\mathrm{val}}$, on a $u \neq 0$.*

Démonstration. — Soit $N \in \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{M}(G)_\lambda}(H^1_{dR}(\lambda), H^0_{dR}(\lambda))$ un élément non nul. L'égalité dans (6.82) montre que l'application

$$\mathrm{Hom}_{D^b(\mathcal{M}(G)_\lambda)}(H^0_{dR}(\lambda) \oplus H^1_{dR}(\lambda)[-1], R\Gamma_{dR}(\lambda)) \to \mathrm{Hom}_{D^b(\mathcal{M}(G)_\lambda)}(D^0_{\lambda(1)}[-1], R\Gamma_{dR}(\lambda)) \tag{6.86}$$

obtenue par composition avec $s \circ i_1$ est un isomorphisme. Comme N et $id_{H^0(\lambda)}$ forment une base de l'espace des morphismes, dans la catégorie $D^b(\mathcal{M}(G)_\lambda)$, de $H^1_{dR}(\lambda)[-1] \oplus H^0_{dR}(\lambda)$ vers $H^0_{dR}(\lambda)$, les éléments $s_0 \circ i_1$ et $N \circ s_1 \circ i_1$ sont linéairement indépendants. Comme $s_1 \circ i_1$ est juste l'application quotient $D_{\lambda(1)} \to H^1_{dR}(\lambda)$, l'élément $N \circ s_1 \circ i_1$ engendre l'image de

$$\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{M}(G)_\lambda}(H^1_{dR}(\lambda), H^0_{dR}(\lambda)) \hookrightarrow \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{M}(G)_\lambda}(D^0_{\lambda(1)}, H^0_{dR}(\lambda)). \tag{6.87}$$

Comme $H^1_{dR}(\lambda)' \simeq F_\lambda \otimes_K v_{P_1}$, la remarque 5.13 montre que cette image est aussi engendrée par $c_{1,\mathrm{val}}$. Ceci implique bien $u \neq 0$. □

6.6. Réalisation de $\Sigma(\lambda, \underline{\mathcal{L}})$ dans la cohomologie. — Nous allons à présent munir le complexe $R\Gamma_{dR}(\lambda)$ d'endomorphismes φ et N dans la catégorie $D^b(\mathcal{M}(G)_\lambda)$. Comme nous l'avons expliqué dans l'introduction, cette construction est motivée par des considérations géométriques. Fixons donc s un isomorphisme entre $R\Gamma_{dR}(\lambda)$ et le complexe scindé $\bigoplus H^i_{dR}(\lambda)[-i]$. On utilise les éléments

$$c_{1,\mathrm{val}} \in \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{M}(G)_\lambda}(H^1_{dR}(\lambda), H^0_{dR}(\lambda)), \tag{6.88}$$

$$c_{2,\mathrm{val}} \in \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{M}(G)_\lambda}(H^2_{dR}(\lambda), H^1_{dR}(\lambda)), \tag{6.89}$$

$$c_{2,\mathrm{val}} \wedge c_{1,\mathrm{val}} \in \mathrm{Ext}^2_{\mathcal{M}(G)_\lambda}(H^2_{dR}(\lambda), H^0_{dR}(\lambda)) \tag{6.90}$$

pour définir des bases de ces trois espaces de dimension 1. On définit l'endomorphisme N de $\bigoplus H^*_{dR}(\lambda)[-*]$ comme étant $(1,1,0)$ dans cette base. C'est un élément de

$$\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{M}(G)_\lambda}(H^1_{dR}(\lambda), H^0_{dR}(\lambda)) \times \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{M}(G)_\lambda}(H^2_{dR}(\lambda), H^1_{dR}(\lambda)) \times \mathrm{Ext}^2_{\mathcal{M}(G)_\lambda}(H^2_{dR}(\lambda), H^0_{dR}(\lambda)) \subset \mathrm{End}_{D^b(\mathcal{M}(G)_\lambda)}(R\Gamma_{dR}(\lambda)) \tag{6.91}$$

Comme conséquence de la proposition 5.15, on a $N^2 = (0,0,1)$.

On définit l'endomorphisme φ de $\bigoplus_i H^i_{dR}(\lambda)[-i]$ comme étant

$$\varphi = p^{\frac{|\lambda|}{3}-1}(Id_{H^0} + pId_{H^1[-1]} + p^2 Id_{H^2[-2]}), \tag{6.92}$$

où $|\lambda| = \lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2$. L'isomorphisme s permet de transporter φ et N sur $R\Gamma_{dR}(\lambda)$ en posant $\varphi_s = s^{-1} \circ \varphi \circ s$ et $N_s = s^{-1} \circ \varphi \circ s$. La relation $N_s\varphi_s = p\varphi_s N_s$ est alors immédiate.

Enfin nous munissons le complexe $R\Gamma_{dR}(\lambda)$ de la filtration de Schneider (voir [**23**] §1 formule (14)). D'après [**23**, (18)], on a

$$\begin{cases} \mathrm{Fil}^{\lambda_2-1}(R\Gamma_{dR}(\lambda)) \simeq \mathrm{Fil}^{\lambda_2}(R\Gamma_{dR}(\lambda)) = R\Gamma_{dR}(\lambda) \\ \mathrm{Fil}^{\lambda_2+1}(R\Gamma_{dR}(\lambda)) \simeq \cdots \simeq \mathrm{Fil}^{\lambda_1+1}(R\Gamma_{dR}(\lambda)) \simeq [0 \to D_{\lambda(1)} \to D_{\lambda(2)}] \\ \mathrm{Fil}^{\lambda_1+2}(R\Gamma_{dR}(\lambda)) \simeq \cdots \simeq \mathrm{Fil}^{\lambda_0+2}(R\Gamma_{dR}(\lambda)) \simeq D_{\lambda(2)}[-2] \\ \mathrm{Fil}^{\lambda_0+3}(R\Gamma_{dR}(\lambda)) = \cdots = 0. \end{cases} \tag{6.93}$$

Nous pouvons à présent définir le foncteur $D_{s,\lambda}$ de la façon suivante.

Définition 6.20. — Si C est un objet de $D^b(\mathcal{M}(G)_\lambda)$, on pose

$$D_\lambda(C) = \mathrm{Hom}_{D^b(\mathcal{M}(G)_\lambda)}(C, R\Gamma_{dR}(\lambda)). \tag{6.94}$$

On le munit des endomorphismes $\varphi_{s,*}$ et $N_{s,*}$ définis par

$$\varphi_{s,*}(f) = \varphi_s \circ f, \quad N_{s,*}(f) = N_s \circ f, \tag{6.95}$$

ainsi que de la filtration

$$\mathrm{Fil}^i(D_\lambda(C)) = \mathrm{Im}(\mathrm{Hom}_{D_b(\mathcal{M}(G)_\lambda)}(C, \mathrm{Fil}^i(R\Gamma_{dR}(\lambda))) \to D_\lambda(C)). \tag{6.96}$$

C'est donc un (φ, N)-module filtré que l'on note $D_{s,\lambda}(\Sigma)$.

Remarquons tout de suite que d'après (6.93),

$$\begin{cases} \mathrm{Fil}^{\lambda_2}(D_{s,\lambda}(C)) = D_{s,\lambda}(C) \\ \mathrm{Fil}^{\lambda_2+1}(D_{s,\lambda}(C)) = \cdots = \mathrm{Fil}^{\lambda_1+1}(D_{s,\lambda}(C)) \\ \mathrm{Fil}^{\lambda_1+2}(D_{s,\lambda}(C)) = \cdots = \mathrm{Fil}^{\lambda_0+2}(D_{s,\lambda}(C)) \\ \mathrm{Fil}^{\lambda_0+3}(D_{s,\lambda}(C)) = 0, \end{cases} \tag{6.97}$$

et que, sous les notations de l'introduction, $\lambda_0 = h_2 - 2$, $\lambda_1 = h_1 - 1$, $\lambda_2 = h_0$.

Nous pouvons à présent calculer quelques images par ce foncteur, ce qui nous mènera à la preuve du théorème 1.2.

Proposition 6.21. — *Le (φ, N)-module filtré $D_{s,\lambda}(\Sigma(\lambda)'[-2])$ est de la forme suivante.*

$$\begin{aligned} D_{s,\lambda}(\Sigma(\lambda)'[-2]) =& Ke_2 \\ & \oplus Ke_1^{\log} \oplus Ke_1^{\mathrm{val}} \\ & \oplus Ke_0^{dilog} \oplus Ke_0^{\log-\log} \oplus Ke_0^{\log-\mathrm{val}} \oplus Ke_0^{\mathrm{val}-\log} \oplus Ke_0^{\mathrm{val}-\mathrm{val}}, \end{aligned} \tag{6.98}$$

$$\begin{cases}\varphi(e_2) = p^{\frac{|\lambda|+3}{3}+1}e_2, \\ \varphi(e_1^?) = p^{\frac{|\lambda|+3}{3}}e_1^?, \\ \varphi(e_0^?) = p^{\frac{|\lambda|+3}{3}-1}e_0^?, \end{cases} \qquad \begin{cases} N(e_2) = e_1^{\mathrm{val}}, \\ N(e_1^{\mathrm{val}}) = e_0^{\mathrm{val}-\mathrm{val}}, \\ N(e_1^{\log}) = e_0^{\log-\mathrm{val}}, \\ N(e_0^?) = 0, \end{cases} \tag{6.99}$$

$$\mathrm{Fil}^i(D_{s,\lambda}(\Sigma(\lambda)'[-2])) = \begin{cases} D_{s,\lambda}(\Sigma(\lambda)'[-2]) \\ K(e_2 + re_1^{\log} + te_1^{\mathrm{val}} + \alpha e_0^{dilog} + \beta e_0^{\log-\log} - \gamma e_0^{\mathrm{val}-\log} - \delta e_0^{\log-\mathrm{val}} + \epsilon e_0^{\mathrm{val}-\mathrm{val}}) \\ \oplus K(e_1^{\log} + ue_0^{\log-\log} + ve_0^{\log-\mathrm{val}}) \oplus K(e_1^{\mathrm{val}} + ue_0^{\mathrm{val}-\log} + ve_0^{\mathrm{val}-\mathrm{val}}) \\ K(e_2 + re_1^{\log} + te_1^{\mathrm{val}} + \alpha e_0^{dilog} + \beta e_0^{\log-\log} - \gamma e_0^{\mathrm{val}-\log} - \delta e_0^{\log-\mathrm{val}} + \epsilon e_0^{\mathrm{val}-\mathrm{val}}) \\ 0 \end{cases} \tag{6.100}$$

$$\begin{cases} si\ i \leq \lambda_2 \\ si\ \lambda_2 + 2 \leq i \leq \lambda_1 + 1, \\ si\ \lambda_1 + 2 \leq i \leq \lambda_0 + 2, \\ si\ i \geq \lambda_0 + 3. \end{cases} \tag{6.101}$$

Démonstration. — C'est une conséquence des propositions 5.11 et 5.6. On choisit pour e_2 la flèche duale de l'inclusion $F_\lambda \otimes \mathrm{St}_3 \hookrightarrow \Sigma(\lambda)$, $e_1^? = \tilde{sh}_1(c_{2,?})$, avec $? \in \{\log, \mathrm{val}\}$, $e_0^{\sharp,?} = c_{2,\sharp} \wedge c_{1,?}$ avec $\sharp$ et $?$ dans $\{\log, \mathrm{val}\}$ et $e_0^{\mathrm{dilog}} = c_0$. La formule pour l'action de φ est une conséquence immédiate de la définition de φ sur $R\Gamma_{dR}(\lambda)$ et l'action de N est alors une conséquence du calcul de la proposition 5.15. D'après le corollaire 6.11, la dimension de $\mathrm{Hom}_{\mathcal{M}(G)_\lambda}(\Sigma(\lambda)', D_{\lambda(2)})$ est 1 et la forme du $\mathrm{Fil}^{\lambda_0+2}$ est conséquence de (6.77) et (6.78). Il reste à déterminer le $\mathrm{Fil}^{\lambda_1+1}$. Les applications i_2 et i_1 se factorisent toutes deux à travers

$$\mathrm{Fil}^{\lambda_1+1}(R\Gamma_{dR}(\lambda)) \simeq [0 \to D_{\lambda(1)} \to D_{\lambda(2)}], \tag{6.102}$$

on obtient donc une application

$$\begin{aligned}(i_{2,*}, i_{1,*}) : \mathrm{Hom}_{\mathcal{M}(G)_\lambda}(\Sigma(\lambda)'[-2], D_{\lambda(2)}) \oplus \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{M}(G)_\lambda}(\Sigma(\lambda)', D^0_{\lambda(1)}) \\ \to \mathrm{Hom}_{D^b(\mathcal{M}(G)_\lambda)}(\Sigma(\lambda)'[-2], \mathrm{Fil}^{\lambda_1+1}(R\Gamma_{dR}(\lambda))).\end{aligned} \tag{6.103}$$

En appliquant le foncteur $\mathrm{Hom}_{D^b(\mathcal{M}(G)_\lambda}(\Sigma(\lambda)'[-2], \cdot)$ au triangle distingué

$$D^0_{\lambda(1)}[-1] \to \mathrm{Fil}^{\lambda_1+1}R\Gamma_{dR}(\lambda) \to H^2_{dR}(\lambda)[-2] \to, \tag{6.104}$$

on obtient une suite exacte

$$\begin{aligned}0 \to \mathrm{Hom}_{D^b(\mathcal{M}(G)_\lambda}(\Sigma(\lambda)'[-2], D^0_{\lambda(1)}[-1]) \xrightarrow{i_{1,*}} \mathrm{Hom}_{D^b(\mathcal{M}(G)_\lambda}(\Sigma(\lambda)'[-2], \mathrm{Fil}^{\lambda_1+1}(R\Gamma_{dR}(\lambda))) \\ \xrightarrow{q} \mathrm{Hom}_{D^b(\mathcal{M}(G)_\lambda}(\Sigma(\lambda)'[-2], H^2_{dR}(\lambda)[-2])\end{aligned} \tag{6.105}$$

De plus la composition $D_{\lambda(2)}[-2] \to \mathrm{Fil}^{\lambda_1+1}(R\Gamma_{dR}(\lambda)) \to H^2_{dR}(\lambda)[-2]$ coïncide avec l'application quotient $D_{\lambda(2)} \to H^2_{dR}(\lambda)$ décalée par -2. Ainsi la composée $q \circ i_{2,*}$ ci-dessous est bijective d'après le corollaire 6.11.

$$\begin{aligned}\mathrm{Hom}_{D^b(\mathcal{M}(G)_\lambda)}(\Sigma(\lambda)'[-2], D_{\lambda(2)}[-2]) \xrightarrow{i_{2,*}} \mathrm{Hom}_{D^b(\mathcal{M}(G)_\lambda)}(\Sigma(\lambda)'[-2], \mathrm{Fil}^{\lambda_1+1}(R\Gamma_{dR}(\lambda))) \\ \xrightarrow{q} \mathrm{Hom}_{D^b(\mathcal{M}(G)_\lambda)}(\Sigma(\lambda)'[-2], H^2_{dR}(\lambda)[-2])\end{aligned} \tag{6.106}$$

Comme d'après (6.37) et (2.52), le socle de $D_{\lambda(1)}$, n'apparaît pas dans $\Sigma(\lambda)'$, on a

$$\mathrm{Hom}_{D^b(\mathcal{M}(G)_\lambda)}(\Sigma(\lambda)'[-2], D_{\lambda(1)}[-2]) = 0. \tag{6.107}$$

En appliquant le foncteur $\mathrm{Hom}_{D^b(\mathcal{M}(G)_\lambda}(\Sigma(\lambda)'[-2], \cdot)$ au triangle distingué,

$$D_{\lambda(2)}[-2] \to \mathrm{Fil}^{\lambda_1+1}(R\Gamma_{dR}(\lambda)) \to D_{\lambda(1)}[-1] \to, \tag{6.108}$$

on en déduit que $i_{2,*}$ est injective, et donc que son image est en somme directe avec celle de $i_{1,*}$. Autrement dit, l'application (6.103) est bijective. L'image de $i_{2,*}$ s'envoie dans $\mathrm{Fil}^{\lambda_0+1}D_{s,\lambda}(\Sigma(\lambda)'[-2])$ et a déjà été déterminée. Il suffit donc de déterminer l'image de $\mathrm{Im}(i_{1,*})$ dans $D_{s,\lambda}(\Sigma(\lambda)'[-2])$. Pour cela, on utilise la suite exacte

$$0 \to v_{P_1}^{an}(\lambda)' \to D^0_{\lambda(1)} \to \mathrm{Ind}_{P_2}^G(F_{s_1s_2\cdot\lambda,2} \otimes \mathrm{St}_2)' \to 0 \tag{6.109}$$

provenant de (6.37). On peut alors montrer, en utilisant les techniques de la section 5.2, que $\mathrm{Ext}^1_{G,\lambda}(\mathrm{Ind}_{P_2}^G(F_{s_1s_2\cdot\lambda,2} \otimes \mathrm{St}_2), \Sigma(\lambda)) = 0$. Ainsi le terme $\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{M}(G)_\lambda}(\Sigma(\lambda)', D^0_{\lambda(1)})$ s'identifie à $\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{M}(G)_\lambda}(\Sigma(\lambda)', v_{P_1}^{an}(\lambda)')$ et on utilise le calcul de la proposition 5.15 et le lemme 6.19 pour conclure. □

Le même raisonnement, mais en plus simple prouve la proposition suivante.

Proposition 6.22. — *Le (φ, N)-module filtré $D_{s,\lambda}(v_{P_1}^{an}(\lambda)'[-1])$ est de la forme*

$$D_{s,\lambda}(v_{P_1}^{an}(\lambda)'[-1]) = Ke_1 \oplus Ke_0^{\log} \oplus Ke_0^{\mathrm{val}} \tag{6.110}$$

$$\begin{cases} \varphi(e_2) = p^{\frac{|\lambda|+3}{3}} e_1, \\ \varphi(e_0^?) = p^{\frac{|\lambda|+3}{3}-1} e_0^?, \end{cases} \qquad \begin{cases} N(e_1) = e_0^{\mathrm{val}}, \\ N(e_0^?) = 0, \end{cases} \tag{6.111}$$

$$\mathrm{Fil}^i(D_{s,\lambda}(v_{P_1}^{an}(\lambda)'[-1])) = \begin{cases} D_{s,\lambda}(v_{P_1}^{an}(\lambda)'[-1]) & si\ i \leq \lambda_2, \\ K(e_1 + ue_0^{\log} + ve_0^{\mathrm{val}}) & si\ \lambda_2 + 1 \leq i \leq \lambda_1 + 1, \\ 0 & si\ i \geq \lambda_1 + 2. \end{cases} \tag{6.112}$$

Les (φ, N)-modules filtrés $D_{s,\lambda}(v_{P_2}^{an}(\lambda)'[-1])$ et $D_{s,\lambda}(F'_\lambda)$ sont respectivement $1(\lambda_2) \oplus 1(\lambda_2)$ et $1(\lambda_2)$, où $1(\lambda_2)$ est le (φ, N)-module tel que $\varphi = p^{\frac{|\lambda|+3}{3}-1} id$, $N = 0$ et $\mathrm{Fil}^i(1(\lambda_2)) = 1(\lambda_2)$ si et seulement si $i \leq \lambda_2$, et 0 sinon.

Démonstration. — On a

$$\mathrm{Hom}_{D^b(\mathcal{M}(G)_\lambda)}(v_{P_1}^{an}(\lambda)'[-1], R\Gamma_{dR}(\lambda)) =$$
$$\mathrm{Hom}_G(v_{P_1}^{an}(\lambda)', v'_{P_1} \otimes F'_\lambda) \oplus \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{M}(G)_\lambda}(v_{P_1}^{an}(\lambda)', F'_\lambda) \tag{6.113}$$

On choisit alors pour e_1 l'application duale de l'inclusion de $F_\lambda \otimes v_{P_1}$ dans $v_{P_1}^{an}(\lambda)$, et $e_0^{\log} = c_{P_1,\log}$, $e_0^{\mathrm{val}} = c_{P_1,\mathrm{val}}$.

Comme $\mathrm{Hom}_G(F_\lambda \otimes v_{P_1}, v_{P_2}^{an}(\lambda)) = 0$, on a

$$\mathrm{Hom}_{D^b(\mathcal{M}(G)_\lambda)}(v_{P_2}^{an}(\lambda)'[-1], F'_\lambda) = \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{M}(G)_\lambda}(v_{P_2}^{an}(\lambda)', F'_\lambda). \tag{6.114}$$

□

Nous pouvons à présent choisir un isomorphisme s convenable. Si A est un automorphisme de $R\Gamma_{dR}(\lambda)$, en composant à droite avec A, on obtient un morphisme de foncteurs A_* de $D_{s,\lambda}$ vers $D_{s\circ A^{-1},\lambda}$. Soit p_i la projection de $\bigoplus_{i=0}^2 H^i_{dR}(\lambda)[-i]$ sur $H^i_{dR}(\lambda)[-i]$. D'après le corollaire 6.2, tout automorphisme de $R\Gamma_{dR}(\lambda)$ est de la forme

$$A = s^{-1} \circ (\sum_{i=0}^2 a_i p_i + b_{1,2} p_1 \circ N \circ p_2 + b_{0,1} p_0 \circ N \circ p_1 + b_{0,2} p_0 N^2 p_2) \circ s, \tag{6.115}$$

avec $a_i \neq 0$ pour $0 \leq i \leq 2$. On a alors

$$\begin{aligned} A_*(e_2) &= a_2 e_2 + b_{1,2} e_1^{\mathrm{val}} + b_{0,2} e_0^{\mathrm{val}-\mathrm{val}} \\ A_*(e_1^{\log}) &= a_1 e_1^{\log} + b_{0,1} e_0^{\log-\mathrm{val}} \\ A_*(e_1^{\mathrm{val}}) &= a_1 e_1^{\mathrm{val}} + b_{0,1} e_0^{\mathrm{val}-\mathrm{val}} \\ A_*(e_0^?) &= a_0 e_0^?. \end{aligned} \tag{6.116}$$

Ainsi, quitte à remplacer s par $s \circ A^{-1}$ pour un A bien choisi, on peut supposer $t = v = \epsilon = 0$ et $r = u = -1$ dans les propositions 6.21 et 6.22. Nous fixons donc désormais s de cette forme, et nous posons

$$Q = \alpha^{-1}(\beta XY + \gamma X + \delta Y), \tag{6.117}$$

les paramètres α, β, γ, δ étant ceux de (6.77).

D'après la proposition 5.11, l'espace $\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{M}(G)_\lambda}(\Sigma(\lambda)', v_{P_1}^{an}(\lambda)')$ est de dimension 2 et a pour base $(\tilde{sh}_1(c_{2,\log}), \tilde{sh}_1(c_{2,\mathrm{val}}))$. Soit $\sharp \in \{\log, \mathrm{val}\}$. La flèche $\tilde{sh}_1(c_{2,\sharp})$ de $\Sigma(\lambda)'[-2]$ vers $v_{P_1}^{an}(\lambda)'[-1]$ induit une application

$$\tilde{sh}_1(c_{2,\sharp})^* : D_{s,\lambda}(v_{P_1}^{an}(\lambda)'[-1]) \to D_{s,\lambda}(\Sigma(\lambda)'[-2]). \tag{6.118}$$

La proposition 5.15 montre alors que $\tilde{sh}_1(c_{2,\sharp})^*(e_1) = e_1^\sharp$ et $\tilde{sh}_1(c_{2,\sharp})^*(e_0^?) = e_0^{\sharp-?}$.

De même, $D_{s,\lambda}(v_{P_2}^{an}(\lambda)[-1])$ est engendré par des éléments $e_0^{\log}$ et e_0^{val}, et

$$\tilde{sh}_2(c_{1,\sharp}) \in \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{M}(G)_\lambda}(\Sigma(\lambda)', v_{P_2}^{an}(\lambda)') \tag{6.119}$$

donne une application

$$\tilde{sh}_2(c_{1,\sharp})^* : D_{s,\lambda}(v_{P_2}^{an}(\lambda)'[-1]) \to D_{s,\lambda}(\Sigma(\lambda)'[-2]) \tag{6.120}$$

telle que $\tilde{sh}_2(c_{1,\sharp})^*(e_0^?) = -e_0^{?-\sharp}$.

Nous pouvons à présent démontrer le théorème principal.

Théorème 6.23. — *Avec le choix de Q fait en* (6.117) *et l'isomorphisme s que nous avons fixé, pour tout $\underline{\mathcal{L}} \in K^3$, les (φ, N)-modules filtrés suivants sont isomorphes*

$$D_{s,\lambda}(\Sigma(\lambda, \underline{\mathcal{L}})'_Q[-1]) \simeq D(\underline{h}, \underline{\mathcal{L}}). \tag{6.121}$$

Démonstration. — Posons $c_{1,\mathcal{L}} = c_{1,\log} + \mathcal{L}c_{1,\mathrm{val}}$ et $c_{2,\mathcal{L}'} = c_{2,\log} + \mathcal{L}'c_{2,\mathrm{val}}$. Le $D(G)$-module $\Sigma(\lambda, \mathcal{L}, \mathcal{L}')'$ s'insère, par définition, dans un triangle distingué

$$(v_{P_1}^{an}(\lambda)' \oplus v_{P_2}^{an}(\lambda)')[-2] \to \Sigma(\lambda, \mathcal{L}, \mathcal{L}')'[-2] \to \Sigma(\lambda)'[-2] \xrightarrow{(\tilde{sh}_1(c_{2,\mathcal{L}'}), \tilde{sh}_2(c_{1,\mathcal{L}}))} (v_{P_1}^{an}(\lambda)' \oplus v_{P_2}^{an}(\lambda)')[-1] \tag{6.122}$$

On en déduit une suite exacte de K-espaces vectoriels

$$\begin{aligned} D_{s,\lambda}(v_{P_1}^{an}(\lambda)'[-1]) \oplus D_{s,\lambda}(v_{P_2}^{an}(\lambda)'[-1]) &\xrightarrow{(\tilde{sh}_1(c_{2,\mathcal{L}'}), \tilde{sh}_2(c_{1,\mathcal{L}}))^*} D'_{s,\lambda}(\Sigma(\lambda)'[-2]) \\ \to D_{s,\lambda}(\Sigma(\lambda, \underline{\mathcal{L}})') \to D_{s,\lambda}(v_{P_1}^{an}(\lambda)'[-2]) &\oplus D_{s,\lambda}(v_{P_2}^{an}(\lambda)'[-2]) \xrightarrow{\delta'} D'_{s,\lambda}(\Sigma(\lambda)'[-3]). \end{aligned} \tag{6.123}$$

Montrons que la flèche δ' est injective. D'après le corollaire 4.12, on a déjà

$$D_{s,\lambda}(v_{P_i}^{an}(\lambda)'[-2], R\Gamma_{dR}(\lambda)) = \mathrm{Ext}^2_{\mathcal{M}(G)_\lambda}(v_{P_i}^{an}(\lambda)', F'_\lambda) \tag{6.124}$$

Ainsi, l'application δ' est l'application δ' de la suite exacte longue (5.91), elle est donc injective. On en déduit une suite exacte

$$\begin{aligned} D_{s,\lambda}(v_{P_1}^{an}(\lambda)'[-1]) \oplus D_{s,\lambda}(v_{P_2}^{an}(\lambda)'[-1]) &\xrightarrow{(\tilde{sh}_1(c_{2,\mathcal{L}'}), \tilde{sh}_2(c_{1,\mathcal{L}}))^*} D'_{s,\lambda}(\Sigma(\lambda)'[-2]) \\ &\to D_{s,\lambda}(\Sigma(\lambda, \underline{\mathcal{L}})') \to 0 \end{aligned} \tag{6.125}$$

On voit alors que le module filtré $D_{s,\lambda}(\Sigma(\lambda, \mathcal{L}, \mathcal{L}')'[-2])$ est le conoyau de la flèche $(\tilde{sh}_1(c_{2,\mathcal{L}'}), \tilde{sh}_2(c_{1,\mathcal{L}}))^*$ dans la catégorie (non abélienne) des modules filtrés. Les calculs précédents montrent alors que le (φ, N)-module filtré $D_{s,\lambda}(\Sigma(\lambda, \mathcal{L}, \mathcal{L}')'[-2])$ est de la forme

$$D_{s,\lambda}(\Sigma(\lambda, \mathcal{L}, \mathcal{L}')'[-2]) = Ke_2 \oplus Ke_1 \oplus Ke_0^{dilog} \oplus Ke_0, \tag{6.126}$$

$$\begin{cases} \varphi(e_2) = p^{\frac{|\lambda|+3}{3}+1} e_2, \\ \varphi(e_1) = p^{\frac{|\lambda|+3}{3}} e_1, \\ \varphi(e_0^?) = p^{\frac{|\lambda|+3}{3}-1} e_0^?, \end{cases} \qquad \begin{cases} N(e_2) = e_1, \\ N(e_1) = e_0, \\ N(e_0^?) = 0, \end{cases} \tag{6.127}$$

$$\mathrm{Fil}^i(D_{s,\lambda}(\Sigma(\lambda, \mathcal{L}, \mathcal{L}')'[-2])) = \begin{cases} D_{s,\lambda}(\Sigma(\lambda)'[-2]) \\ \mathrm{Fil}^{\lambda_0+2}(D_{s,\lambda}(\Sigma(\lambda, \mathcal{L}, \mathcal{L}')'[-2])) \oplus K(e_1 + \mathcal{L}e_0) \\ K(e_2 + \mathcal{L}'e_1 + \alpha e_0^{dilog} + (\beta\mathcal{L}\mathcal{L}' + \gamma\mathcal{L} + \delta\mathcal{L}')e_0) \\ 0 \end{cases} \tag{6.128}$$

$$\begin{cases} \text{si } i \leq \lambda_2, \\ \text{si } \lambda_2 + 2 \leq i \leq \lambda_1 + 1, \\ \text{si } \lambda_1 + 2 \leq i \leq \lambda_0 + 2, \\ \text{si } i \geq \lambda_0 + 3. \end{cases} \tag{6.129}$$

Alors le triangle distingué (5.99) donne une suite exacte

$$D_{s,\lambda}(F'_\lambda) \xrightarrow{\delta} D_{s,\lambda}(\Sigma(\lambda, \mathcal{L}, \mathcal{L}')'[-2]) \to D_{s,\lambda}(\Sigma(\lambda, \underline{\mathcal{L}})'[-1]) \to \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{M}(G)_\lambda}(F'_\lambda, F'_\lambda) = 0. \tag{6.130}$$

De plus, par définition de $\Sigma(\lambda, \underline{\mathcal{L}})$, l'application δ envoie exactement l'identité sur $e_0^{dilog} - (\mathcal{L}'' - Q(\mathcal{L}, \mathcal{L}'))e_0$ dans $D_{s,\lambda}(\Sigma(\lambda, \mathcal{L}, \mathcal{L}')[-2])$. On obtient au final un isomorphisme de (φ, N)-modules filtrés

$$D_{s,\lambda}(\lambda, \underline{\mathcal{L}}) \simeq D(\underline{h}, \underline{\mathcal{L}}), \tag{6.131}$$

ce qui prouve le théorème 1.2. □

Remarque 6.24. — Dans le cas où λ est le poids $(0, 0, 0)$, on remarque que le (φ, N)-module filtré $D_{s,\lambda}((\mathrm{St}_3^{an})'[-2])$ est admissible. Autrement dit, il existe une représentation galoisienne V de dimension 8 telle que $D_{st}^*(V) \simeq D_{s,\lambda}((\mathrm{St}_3^{an})'[-2])$. Cette représentation galoisienne est telle que toutes les représentations $V(\underline{h}, \underline{\mathcal{L}})$, pour $\underline{h} = (0, 1, 2)$ et $\underline{\mathcal{L}}$ variant dans K^3, apparaissent comme sous-objets de cette représentation. Dans le cas de poids de Hodge-Tate quelconques, toutes les représentations galoisiennes $V(\underline{h}, \underline{\mathcal{L}})$ ne peuvent être sous-objets d'une même représentation galoisienne de dimension finie, mais leurs (φ, N)-modules filtrés associés sont tous quotients d'un même (φ, N)-module filtré (non nécessairement admissible), il s'agit de $D_{s,\lambda}(\Sigma(\lambda)'[-2])$.

7. Appendices

7.1. Appendice 1 : dilogarithme pour $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{Q}_p)$. — Soit $G = \mathrm{PGL}_2(\mathbb{Q}_p)$. Dans cet appendice, nous notons B le sous-groupe des matrices triangulaires inférieures de G et T le sous-groupe des matrices diagonales. On note w la matrice $\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$. Rappelons que le groupe G opère de façon continue sur la droite projective $\mathbb{P}^1(\mathbb{Q}_p)$ par $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \cdot z = \frac{az+b}{cz+d}$. Trouver un cocycle explicite de $H^3(G, K)$ revient à trouver une fonction continue c de G^4 dans K, G-invariante par translation à gauche et vérifiant une certaine équation fonctionnelle. Cette équation fonctionnelle est liée à l'équation fonctionnelle du dilogarithme p-adique. Notons $[x_0, x_1, x_2, x_3] = \frac{(x_3-x_1)(x_2-x_0)}{(x_3-x_0)(x_2-x_1)}$ le birapport de 4 points de $\mathbb{P}^1(\mathbb{Q}_p)$. Si $(g_0, g_1, g_2, g_3) \in G^4$, on aimerait définir

$$c(g_0, g_1, g_2, g_3) = \mathrm{dilog}([g_0 \cdot \infty, g_1 \cdot \infty, g_2 \cdot \infty, g_3 \cdot \infty]). \tag{7.1}$$

Il s'agit bien d'une 3-cochaîne, mais elle n'est bien définie que sur un ouvert dense de G^4. Cependant nous pouvons voir cet élément comme une 3-cochaîne mesurable G-invariante de G, c'est pourquoi nous avons besoin de comparer $H^2(G, \mathrm{St}_2^{an})$ avec un groupe de cohomologie mesurable.

Le groupe G est localement compact. Si A est un K-espace de Fréchet muni d'une action continue de G, Calvin Moore ([**36**]) définit des groupes de cohomologie mesurable $H^n_{mes}(G, A)$ vérifiant les propriétés classiques (voir [**36**], §4). Il montre que cette cohomologie vérifie un lemme de Shapiro et il a été prouvé par Wigner ([**36**, §7, (2)]) que si A est une représentation continue de dimension finie de G, alors $H^n_{mes}(G, A)$ coïncide avec la cohomologie continue de A. De plus, si A est une représentation algébrique de dimension finie, ce groupe de cohomologie coïncide encore avec le groupe de cohomologie localement analytique par les théorèmes 1 et 3 de [**11**]. Soit $I_B^G(K)$ l'espace des fonctions mesurables de G dans K, invariantes à droite par B, on pose $\overline{\mathrm{St}}_2 = I_B^G(K)/K$. On a alors une inclusion $\mathrm{Ind}_B^G(K) \hookrightarrow I_B^G(K)$ qui induit une inclusion $\mathrm{St}_2^{an} \hookrightarrow \overline{\mathrm{St}}_2$.

Proposition 7.1. — *L'inclusion* $\mathrm{St}_2^{an} \hookrightarrow \overline{\mathrm{St}}_2$ *induit un isomorphisme*

$$H^2(G, \mathrm{St}_2) \xrightarrow{\sim} H^2_{mes}(G, \overline{\mathrm{St}}_2). \tag{7.2}$$

Démonstration. — La cohomologie $H^2(G, \mathrm{St}_2^{an})$ est calculée par un complexe de cochaînes localement analytiques. Une cochaîne localement analytique est en particulier mesurable. On a donc bien une application entre ces deux espaces de cohomologie. On a alors deux suites exactes de la forme

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & H^2(G, \mathrm{Ind}_B^G(K)) & \longrightarrow & H^2(G, \mathrm{St}_2) & \longrightarrow & H^3(G, K) & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow \wr & & \downarrow & & \downarrow \wr & & \\ 0 & \longrightarrow & H^2_{mes}(G, I_B^G(K)) & \longrightarrow & H^2_{mes}(G, \overline{\mathrm{St}}_2) & \longrightarrow & H^3_{mes}(G, K) & \longrightarrow & 0. \end{array} \tag{7.3}$$

Les deux termes extrêmes sont isomorphes grâce aux lemmes de Shapiro et comparaison avec la cohomologie continue en dimension finie. On a donc un isomorphisme au milieu. □

Ainsi, nous travaillons désormais uniquement avec la cohomologie mesurable et notons H^q à la place de H^q_{mes}.

Nous allons maintenant utiliser une technique due à Bloch dans le cas archimédien ([**2**]) pour prouver que $H^2(G, \overline{\mathrm{St}}_2)$ s'identifie à un espace de fonctions mesurables sur $\mathbb{P}^1(\mathbb{Q}_p)^4$ vérifiant une certaine équation fonctionnelle.

Tout d'abord, nous allons prouver un analogue p-adique d'un théorème de Bloch.

On note li_2 la fonction dilogarithme $\mathbb{Q}_p \backslash \{0, 1\} \to \mathbb{Q}_p$ construite par Robert Coleman dans [**13**]. Cette fonction dépend du choix d'une détermination du logarithme p-adique, c'est-à-dire la valeur de $\log(p)$. Robert Coleman définit alors le dilogarithme modifié

$$D(z) = li_2(z) + \frac{1}{2}\log(z)\log(1-z), \tag{7.4}$$

prouve l'équation fonctionnelle pour tout $(x, y) \in (\mathbb{C}_p \backslash \{0, 1\})^2$,

$$D(xy) - D(x) - D(y) + D(y\frac{1-x}{1-y}) - D(x\frac{1-y}{1-x}) = 0, \tag{7.5}$$

et montre que D se prolonge par continuité en une fonction $\mathbb{P}^1(\mathbb{Q}_p) \to \mathbb{Q}_p$ si l'on pose $D(0) = D(1) = D(\infty) = 0$.

Comme dans le cas archimédien, l'équation fonctionnelle du dilogarithme a une interprétation en termes de cocyles pour le groupe G. L'application

$$(g_0, g_1, g_2, g_3) \mapsto D([g_0 \cdot \infty, g_1 \cdot \infty, g_2\infty, g_3 \cdot \infty])$$

est un 3-cocycle mesurable et borné sur le groupe G à valeurs dans $\mathbb{Q}_p$. Si on remplace $\mathbb{Q}_p$ par $\mathbb{C}$, et D par le dilogarithme de Bloch-Wigner, un théorème de Bloch affirme que toutes les fonctions mesurables vérifiant l'équation fonctionnelle (7.5) sont les multiples du dilogarithme de Bloch-Wigner. Dans le cas p-adique, la situation n'est plus exactement la même car en choisissant une autre branche du logarithme p-adique, on obtient une fonction dilogarithme vérifiant la même équation. Cette nouvelle fonction est en fait égale à

$$D_{\mathcal{L}}(z) = D(z) + \frac{1}{2}\mathcal{L}[\mathrm{val}(z)\log(1-z) - \mathrm{val}(1-z)\log(z)],$$

le dernier terme ne dépendant évidemment pas de la branche choisie dans le logarithme. Notons $d(z) = \frac{1}{2}[\mathrm{val}(z)\log(1-z) - \mathrm{val}(1-z)\log(z)]$. La fonction d est aussi une fonction mesurable et bornée vérifiant (7.5). L'analogue p-adique du théorème de Bloch est que ce sont les seules.

Théorème 7.2. — *Si* $f : \mathbb{P}^1(\mathbb{Q}_p) \to K$ *est mesurable et vérifie* (7.5)*, alors il existe* λ *et* μ *dans* $\mathbb{Q}_p$ *tels que* $f = \lambda D + \mu d$.

La preuve de Bloch dans le cas archimédien s'adapte sans problème au cadre p-adique. Comme nous n'avons pas trouvé de trace de cette adaptation dans la littérature, nous la reproduisons ici.

Soit $i \geq 0$ et C^i l'espace des applications mesurables de $\mathbb{P}^1(\mathbb{Q}_p)^{i+1}$ dans K muni de l'action naturelle de G. On définit $d_i : C^i \to C^{i+1}$ par

$$d_i(f)(x_0, \ldots, x_i) = \sum_{j=0}^{i}(-1)^j f(x_0, \ldots, \hat{x_j}, \ldots, x_i),$$

elle est G-équivariante. Calvin Moore définit sur ces espaces une topologie métrisable qui en font des espaces complets, munis d'une action continue de G. Le complexe $C^\cdot$ est une résolution de la représentation triviale de G, et l'hypercohomologie du foncteur des G-invariants appliqué à $C^\cdot$ donne la cohomologie mesurable. On a donc une suite spectrale

$$E_1^{p,q} = H^q(G, C^p) \Rightarrow H^{p+q}(G, K). \tag{7.6}$$

Lemme 7.3. — *On a des isomorphismes*

$$\alpha_q : H^q(G, C^0) \simeq H^q(B, K) \text{ et } \beta_q : H^q(G, C^1) \simeq H^q(T, K). \tag{7.7}$$

De plus $H^q(G, C^2)$ est nul sauf lorsque $q = 0$ auquel cas il est de dimension 1.

Démonstration. — L'espace $\mathbb{P}^1(\mathbb{Q}_p)$ est isomorphe à G/B comme espace homogène, on a donc un isomorphisme $C^0 = I_B^G(K)$. D'après le lemme de Shapiro de Moore [**36**, théorème 6], on a un isomorphisme $H^q(G, C^0) \simeq H^q(B, K)$. Pour C^1, on peut remarquer que le complémentaire de la diagonale de $\mathbb{P}^1(\mathbb{Q}_p)^2$ est dense et isomorphe à l'espace homogène G/T, et on conclut de la même façon. Enfin, pour C^2 on considère l'ouvert dense des triplets de points deux-à-deux distincts, isomorphe à G. □

Lemme 7.4. — *L'application $d_1^{0,q} : H^q(G, C^0) \to H^q(G, C^1)$ est nulle si q est pair et égale à deux fois la restriction si q est impair.*

Démonstration. — Rappelons que ev_z désigne l'évaluation en un point z. Notons res_T^B l'application de $H^q(B, K)$ dans $H^q(T, K)$ provenant de l'inclusion $T \hookrightarrow B$. Soit x_0 le point de $\mathbb{P}^1(\mathbb{Q}_p)$ fixé par B. Si $c \in H^q(G, C^0)$, l'image de c dans $H^q(B, K)$ est $ev_{x_0}(c|_{B^{q+1}})$. De même l'image de $c \in H^q(G, C^1)$ dans $H^q(T, K)$ est $ev_{(x_0, wx_0)}(c|_{T^{q+1}})$. Notons p_1 et p_2 la première et la deuxième projection de $\mathbb{P}^1(\mathbb{Q}_p)^2$ sur $\mathbb{P}^1(\mathbb{Q}_p)$, $d_1(c) = c \circ p_1 - c \circ p_2$. Ainsi la flèche $H^q(B, K) \to H^q(T, K)$ induite par d_1 est $c \mapsto res_T^B(c) - w(res_T^B(c))$. Or $H^q(T, K) = \Lambda^q H^1(T, K)$ par le corollaire 3.11, et l'action de w sur $H^1(T, K)$ est la multiplication par -1. Le résultat s'en déduit. □

Démonstration du théorème 7.2. — Notons $Z^i \subset C^i$ le noyau de d_i. Remarquons tout d'abord que si f est une fonction comme dans l'énoncé du théorème, alors la fonction

$$(g_0, g_1, g_2, g_3) \mapsto f([g_0 \cdot \infty, g_1 \cdot \infty, g_2 \cdot \infty, g_3 \cdot \infty]) \tag{7.8}$$

est dans $H^0(G, Z^3)$. Nous allons en fait prouver que $\dim H^0(G, Z^3) = 2$, ce qui implique le théorème. Utilisons la suite spectrale (7.6) ainsi que le fait que $H^q(G, K) = 0$ pour $q \in \{1, 2\}$ et $\dim_K H^3(G, K) = 1$ (d'après le corollaire 3.14). Des lemmes précèdents, on déduit que $E_2^{0,1} = E_2^{1,1} = E_2^{2,1} = 0$. Comme $H^1(G, K) = 0$, et $\dim E_1^{2,0} = 1$, la flèche $d_1^{1,0}$ est nécessairement un isomorphisme de $E_1^{1,0}$ sur $E_1^{2,0}$ et donc $E_2^{1,0} = E_2^{2,0} = 0$. Comme $\dim E_1^{0,2} = 1$, $d_1^{0,2} = 0$ et $H^2(G, K) = 0$, la flèche $d_3^{0,2}$ de $H^2(G, C^0)$ dans $H^0(G, C^3)$ est une injection. Ainsi $\dim H^0(G, Z^3) - 1 \leq \dim H^3(G, K) = 1$. Comme de plus les fonctions D et d sont déjà dans $H^0(G, Z^3)$ on a $\dim H^0(G, Z^3) \geq 2$. On peut donc bien en conclure

$$H^0(G, Z^3) = KD \oplus Kd. \tag{7.9}$$

□

Proposition 7.5. — *Le noyau de l'application $H^0(G, Z^3) \to H^3(G, K)$ est engendré par d. De façon équivalente, d appartient à l'image de $d_3^{0,2}$.*

Démonstration. — Pour x_1, x_2, x_3 dans $\mathbb{Q}_p$ deux à deux distincts, posons

$$\begin{aligned} b(x_1, x_2, x_3) = &- \log_0(x_3 - x_1)\mathrm{val}(x_3 - x_2) + \log_0(x_3 - x_1)\mathrm{val}(x_2 - x_1) \\ &+ \log_0(x_3 - x_2)\mathrm{val}(x_3 - x_1) - \log_0(x_3 - x_2)\mathrm{val}(x_2 - x_1) \\ &- \log_0(x_2 - x_1)\mathrm{val}(x_3 - x_1) + \log_0(x_2 - x_1)\mathrm{val}(x_3 - x_2) \end{aligned} \tag{7.10}$$

Alors, si x_0, x_1, x_2, x_3 sont quatre points de $\mathbb{Q}_p = \mathbb{P}^1(\mathbb{Q}_p) \backslash \{\infty\}$ deux à deux distincts, on vérifie que

$$d([x_0, x_1, x_2, x_3]) = b(x_1, x_2, x_3) - b(x_0, x_2, x_3) + b(x_0, x_1, x_3) - b(x_0, x_1, x_2). \tag{7.11}$$

On définit $B \in C^2(G, K)$ en posant $B(g_0, g_1, g_2) = b(g_0 \cdot \infty, g_1 \cdot \infty, g_2 \cdot \infty)$ presque partout, on voit alors que l'image de d dans $H^3(G, K)$ est $d_2(B)$, donc nulle. □

Les inclusions

$$C^{\cdot}_{\geq 3} \hookrightarrow C^{\cdot}_{\geq 2} \hookrightarrow \cdots \hookrightarrow C^{\cdot} \tag{7.12}$$

induisent des morphismes de suites spectrales d'hypercohomologie. Comme de plus $H^q(G, C^{\cdot}_{\geq i}) = H^{q-i}(G, Z_i)$ où $Z_i = \ker d_i$, la flèche $H^0(G, C^3) \to H^3(G, K)$ se factorise de la façon suivante

$$H^0(G, Z^3) \xrightarrow{\delta} H^1(G, Z_2) \xrightarrow{\delta} H^2(G, Z_1) \xrightarrow{\delta} H^3(G, K). \tag{7.13}$$

L'application δ est à chaque fois le bord provenant de la suite exacte

$$0 \to Z_i \to C^i \to Z_{i+1} \to 0. \tag{7.14}$$

Comme $H^1(G, C^2) = 0$ la première flèche δ est un isomorphisme. De plus, comme $H^1(G, C^0) \simeq H^1(G, C^1)$ et que $H^1(G, C^0) \simeq H^1(G, C^1)$, on voit que la flèche $H^1(G, Z^1) \to H^1(G, C^1)$ est un isomorphisme et donc que $\delta : H^1(G, Z^2) \to H^2(G, Z^1)$ est injective. Comme ces espaces ont même dimension, c'est une bijection.

Comme $Z_1 = \overline{\mathrm{St}}_2$, on obtient finalement un isomorphisme naturel

$$H^0(G, Z^3) \simeq H^2(G, \overline{\mathrm{St}}_2) \tag{7.15}$$

qui permet de définir, pour tout $\mathcal{L} \in K$, une classe de cohomologie dont l'image est non triviale dans $H^3(G, K)$ en choisissant $D + \mathcal{L}d$. De plus, la différence de deux telles classes appartient toujours à $H^2(G, I_B^G(K))$ puisque $I_B^G(K) \simeq C^0$.

Finalement, en utilisant la proposition 7.1, on obtient un isomorphisme

$$\theta : \mathcal{B} = H^0(G, Z^3) \simeq H^2(G, \overline{\mathrm{St}}_2) \simeq H^2(G, \mathrm{St}_2^{an}). \tag{7.16}$$

De plus le noyau de $H^2(G, \mathrm{St}_2^{an}) \to H^3(G, K)$ est engendré par $\theta(d)$.

7.2. Appendice 2 : cohomologie d'algèbres de Lie. — Soit $\lambda = (\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2)$ un poids dominant de $\mathfrak{sl}_3$, relativement à $-\Delta$. Autrement dit, on a $\lambda_0 \leq \lambda_1 \leq \lambda_2$. Rappelons que si $w \in W$, on pose $w * \lambda = w(\lambda - \delta) + \delta$ avec $\delta = (1, 0, -1)$. Si μ est un poids de $\mathfrak{sl}_3$, on note $L(\mu)$ le $\mathfrak{sl}_3$-module simple de plus haut poids μ, pour l'ordre déterminé par $-\Delta$. On note également $L_i(\mu)$ le $\mathfrak{l}_i$-module simple de plus haut poids μ. Si μ est dominant relativement à $-\alpha_i$, alors $L_i(\mu)$ est de dimension finie, et on pose $\mathfrak{m}_i(\mu) = U(\mathfrak{g}) \otimes_{U(\mathfrak{p}_i)} (L_i(\mu))$. On note $W^i \subset W$ un système de représentants de longueur minimale de $W_i \backslash W$. D'après [**26**, §9.4], $w * \lambda$ est dominant relativement à $-\alpha_i$ si et seulement si $w \in W^i$. Ici, $W^1 = \{1, s_2, s_2 s_1\}$ et $W^2 = \{1, s_1, s_1 s_2\}$. Le but de cette section est de déterminer les $\mathfrak{l}_i$-modules $H^q(\mathfrak{n}_i, \mathfrak{m}_1(w * \lambda))$ pour $w \in W^1$. Le résultat est contenu dans les deux propositions 4.22 et 4.30. Il est certainement bien connu, mais je n'ai pas trouvé de référence.

Commençons par le cas où $i = 1$. Soit ρ un $\mathfrak{l}_1$-module de dimension finie. Les espaces de cohomologie $H^i(\mathfrak{n}_1, \mathfrak{m}_1(\rho))$ sont les espaces de cohomologie du complexe de Chevalley-Eilenberg

$$C^0 \xrightarrow{d^0} C^1 \xrightarrow{d^1} C^2, \tag{7.17}$$

où $C^i = \mathrm{Hom}_K(\bigwedge^i \mathfrak{n}_1, U(\mathfrak{g}) \otimes_{U(\mathfrak{p}_1)} \rho)$. Notons $(u^*_{2,0}, u^*_{2,1})$ la base duale de la base $(u_{2,0}, u_{2,1})$ définie dans les notations. Les flèches d^0 et d^1 sont alors

$$\begin{aligned} d^0(m) &= u_{2,0} m \otimes u^*_{2,0} + u_{2,1} m \otimes u^*_{2,1} \\ d^1(m_1 \otimes u^*_{2,0} + m_2 \otimes u^*_{2,1}) &= (u_{2,0} m_2 - u_{2,1} m_1) \otimes (u_{2,0} \wedge u_{2,1})^*. \end{aligned} \tag{7.18}$$

L'algèbre $\mathfrak{l}_1$ agit sur C^i par

$$x(m \otimes u) = (xm) \otimes \omega + m \otimes (\mathrm{ad}(x)\omega). \tag{7.19}$$

Les flèches d^i sont alors $\mathfrak{l}_1$-équivariantes pour cette action.

D'après le théorème 9.4(a) de [**26**], les $\mathfrak{l}$-modules C^i sont des sommes directes de $\mathfrak{l}_1$-modules de dimension finie, ainsi leur restriction au tore $\mathfrak{t}$ est semi-simple, et leur classe d'isomorphisme en tant que $\mathfrak{l}_1$-module est déterminée par leur caractère $ch(C^i)$. Il en est donc de même des $\mathfrak{l}_1$-modules $H^i(\mathfrak{n}_1, \mathfrak{m}_1(\rho))$.

Proposition 7.6. — *Pour toute représentation de dimension finie ρ de $\mathfrak{l}_1$, on a*

$$\sum_{j=0}^{2} (-1)^j ch(H^j(\mathfrak{n}_1, \mathfrak{m}_1(\rho))) = ch(\rho). \tag{7.20}$$

Démonstration. — En tant que complexe de $\mathfrak{t}$-représentations, on a

$$C^{\cdot}(\rho) \simeq \rho \otimes [U(\mathfrak{n}_1^+) \to U(\mathfrak{n}_1^+) \otimes \mathfrak{n}_1^+ \to U(\mathfrak{n}_1^+) \otimes \bigwedge^2 \mathfrak{n}_1^+] \tag{7.21}$$

Or la résolution de Chevalley-Eilenberg

$$V_{\cdot}(\mathfrak{n}_1^+) = [\bigwedge^2 \mathfrak{n}_1^+ \otimes U(\mathfrak{n}_1^+) \to \mathfrak{n}_1^+ \otimes U(\mathfrak{n}_1^+) \to U(\mathfrak{n}_1^+)] \tag{7.22}$$

est une résolution du $\mathfrak{n}_1^+$-module trivial. Comme elle est $\mathfrak{t}$-équivariante, on a l'égalité

$$ch(1) = \sum_{i=0}^{2} (-1)^i ch(U(\mathfrak{n}_1^+) \otimes \Lambda^i \mathfrak{n}_1^+) \tag{7.23}$$

d'où le résultat en utilisant

$$\sum_{i=0}^{2} (-1)^i ch(C^i) = \sum_{i=0}^{2} (-1)^i ch(H^i(\mathfrak{n}_1, \mathfrak{m}_1(\rho))). \tag{7.24}$$

□

L'intérêt de ce résultat est qu'il suffit, pour connaître $H^1(\mathfrak{n}_1, \mathfrak{m}_1(\rho))$ de connaître H^0 et H^2, donc de calculer un noyau et un quotient.

Supposons que $\rho = L_1(\mu)$ avec $\mu = (\mu_0, \mu_1, \mu_2)$ dominant relativement à $-\alpha_1$. On a alors

$$L_1(\mu) = \bigoplus_{k=0}^{\mu_1 - \mu_0} K v_k, \tag{7.25}$$

v_k désignant un vecteur de poids $\mu + k\alpha_1$. On a alors $u_{0,1} v_k = v_{k+1}$ et $u_{1,0} v_k = v_{k-1}$. Posons alors, pour $(n, m) \in \mathbb{N}^2$ et $0 \leq k \leq \mu_1 - \mu_0$, $v_{n,m,k} = u_{0,2}^n u_{1,2}^m \otimes v_{\mu - k\alpha_1}$. Les vecteurs $(v_{n,m,k})$ forment une base de $\mathfrak{m}_1(\mu)$.

Un calcul explicite donne alors

$$u_{2,0} \cdot v_{n,m,k} = -m v_{n,m-1,k-1} - n(m + n - 1 + \mu_0 - \mu_2 + k) v_{n-1,m,k} \tag{7.26}$$
$$u_{2,1} \cdot v_{n,m,k} = -n v_{n-1,m,k+1} - m(n + m - 1 + \mu_1 - \mu_2 - k) v_{n,m-1,k} \tag{7.27}$$

Si on pose $\deg(v_{n,m,k}) = n + m$, les flèches d^i sont de degré -1, il suffit donc de calculer leur noyau et conoyau sur les sous-espaces de degré fixé. Notons $\mathfrak{m}_1(\rho)_r$ le sous-espace de degré r.

Lemme 7.7. — *Si $\mu = s_2 s_1 * \lambda$, la flèche d^1 est surjective.*

Démonstration. — L'égalité $\mu = s_2 s_1 * \lambda$ implique $\mu_2 < \mu_0$. Si on pose $\deg(v_{n,m,k}) = n + m$, les formules (7.26) montrent que les flèches d^i sont de degré -1. Notons $\mathfrak{m}_1(L_1(\mu))_r$ le sous-espace de degré r. Considérons $u_{2,0} : \mathfrak{m}_1(\mu)_r \to \mathfrak{m}_1(\mu)_{r-1}$. Elle respecte la filtration $\mathrm{Fil}_i \mathfrak{m}_1(\mu)_r = \sum_{k \leq i} K v_{n,m,k}$. De plus, au niveau des gradués, on a $u_{2,0} v_{n,m,k} = -n(r - 1 + \mu_0 - \mu_2 + k) v_{n-1,m,k}$. Donc $u_{2,0}$ est surjective. D'après (7.18), ceci prouve que d^2 est surjective. □

Proposition 7.8. — *Soit λ un poids dominant relativement à la base de racines simples $-\Delta$. On a des isomorphismes $\mathfrak{l}_1$-équivariants*

$$\begin{aligned}
H^0(\mathfrak{n}_1, \mathfrak{m}_1(\lambda)) &= L_1(\lambda) \oplus L_1(s_2 * \lambda) & H^0(\mathfrak{n}_1, \mathfrak{m}_1(s_2 * \lambda)) &= L_1(s_2 * \lambda) \oplus L_1(s_2 s_1 * \lambda)\\
H^1(\mathfrak{n}_1, \mathfrak{m}_1(\lambda)) &= L_1(s_2 * \lambda) \oplus L_1(s_2 s_1 * \lambda) & H^1(\mathfrak{n}_1, \mathfrak{m}_1(s_2 * \lambda)) &= L_1(s_2 s_1 * \lambda)\\
H^2(\mathfrak{n}_1, \mathfrak{m}_1(\lambda)) &= L_1(s_2 s_1 * \lambda) & H^2(\mathfrak{n}_1, \mathfrak{m}_1(s_2 * \lambda)) &= 0\\
H^0(\mathfrak{n}_1, \mathfrak{m}_1(s_2 s_1 * \lambda)) &= L_1(s_2 s_1 * \lambda)\\
H^1(\mathfrak{n}_1, \mathfrak{m}_1(s_2 s_1 * \lambda)) &= 0\\
H^2(\mathfrak{n}_1, \mathfrak{m}_1(s_2 s_1 * \lambda)) &= 0
\end{aligned} \tag{7.28}$$

Démonstration. — Tout d'abord, on a des suites exactes

$$\begin{aligned}0 \to L(s_2 * \lambda) \to \mathfrak{m}_1(\lambda) \to L(\lambda) \to 0\\ 0 \to \mathfrak{m}_1(s_2 s_1 * \lambda) \to \mathfrak{m}_1(s_1 * \lambda) \to L(s_2 * \lambda) \to 0,\end{aligned} \tag{7.29}$$

et $L(s_2 s_1 * \lambda) = \mathfrak{m}_1(s_2 s_1 * \lambda)$ est simple. On connaît la cohomologie de $L(\lambda)$, il s'agit du théorème 4.10. Pour tout poids μ dominant relativement à $-\alpha_1$, on a une injection $\mathfrak{p}_1$-équivariante $L_1(\mu) \hookrightarrow \mathfrak{m}_1(\mu)$. Le module de plus haut poids $L(\mu)$ étant un quotient de $\mathfrak{m}_1(\mu)$, la composée

$$L_1(\mu) \hookrightarrow \mathfrak{m}_1(\mu) \twoheadrightarrow L(\mu) \tag{7.30}$$

reste injective. Montrons que $H^0(\mathfrak{n}_1, L(\mu)) = L_1(\mu)$. Comme $H^0(\mathfrak{n}_1, L(\mu))$ est somme directe de $\mathfrak{l}_1$-modules de dimension finie, c'est un $\mathfrak{l}_1$-module simple si et seulement si $H^0(\mathfrak{n} \cap \mathfrak{l}_1, H^0(\mathfrak{n}_1, L(\mu)) = H^0(\mathfrak{n}, L(\mu))$ est de dimension 1. C'est une conséquence du §1.3 et du théorème 6.15(b) de [**26**], ainsi $H^0(\mathfrak{n}_1, L(\mu)) = L_1(\mu)$.

On en déduit des suites exactes

$$\begin{aligned}0 \to H^0(\mathfrak{n}_1, L(s_2 * \lambda)) \to H^0(\mathfrak{n}_1, \mathfrak{m}_1(\lambda)) \to H^0(\mathfrak{n}_1, L(\lambda)) \to 0\\ 0 \to H^0(\mathfrak{n}_1, L(s_2 s_1 * \lambda)) \to H^0(\mathfrak{n}_1, \mathfrak{m}_1(s_2 * \lambda)) \to H^0(\mathfrak{n}_1, L(s_2 * \lambda)) \to 0.\end{aligned} \tag{7.31}$$

D'après le lemme 7.7, on a

$$H^2(\mathfrak{n}_1, \mathfrak{m}_1(s_2 s_1 * \lambda)) = 0. \tag{7.32}$$

On déduit alors de la proposition 7.6 que $H^1(\mathfrak{n}_1, \mathfrak{m}_1(s_2 s_1 * \lambda))$ est nul. On obtient donc des isomorphismes $H^q(\mathfrak{n}_1, \mathfrak{m}_1(s_2 * \lambda)) \simeq H^q(\mathfrak{n}_1, L(s_2 * \lambda))$ pour $q \in \{1, 2\}$. Montrons que $H^2(\mathfrak{n}_1, L(s_2 * \lambda)) = 0$. C'est une somme directe de $U(\mathfrak{l}_1)$-modules simples de dimension finie, il est donc uniquement déterminé par les $\mathfrak{t}$-modules $H^1(\mathfrak{n}/\mathfrak{n}_1, H^2(\mathfrak{n}_1, \mathfrak{m}_1(s_2 * \lambda)))$. Par la suite spectrale de Hochschild-Serre pour la cohomologie d'algèbres de Lie, il s'agit aussi de $H^3(\mathfrak{n}, L(s_2 * \lambda))$. Or les théorèmes 6.15($b$) et 6.11 de [**26**] impliquent que

$$H^3(\mathfrak{n}, L(s_2 * \lambda))_\mu = 0 \tag{7.33}$$

pour tout poids μ. Ainsi $H^2(\mathfrak{n}_1, L(s_2 * \lambda)) = 0$. On en déduit $H^2(\mathfrak{n}_1, \mathfrak{m}_1(s_2 * \lambda)) = 0$ et $H^2(\mathfrak{n}_1, \mathfrak{m}_1(\lambda)) = H^2(\mathfrak{n}_1, L(\lambda))$, qui se déduit du théorème 4.10. Tout le reste se déduit des suites exactes longues associées à (7.29), du théorème 4.10 et de la proposition 7.6. □

Considérons à présent les $\mathfrak{l}_2$-modules $H^q(\mathfrak{n}_2, \mathfrak{m}_1(w * \lambda))$. Il s'agit cette fois-ci des espaces de cohomologie du complexe de Chevalley-Eilenberg

$$C^0 \xrightarrow{d^0} C^1 \xrightarrow{d^1} C^2, \tag{7.34}$$

où $C^i = \mathrm{Hom}_K(\bigwedge^i \mathfrak{n}_2, U(\mathfrak{g}) \otimes_{U(\mathfrak{p}_1)} \rho)$. Notons $(u_{1,0}^*, u_{2,0}^*)$ la base duale de la base $(u_{1,0}, u_{2,0})$ définie dans les notations. Les flèches d^0 et d^1 sont alors

$$\begin{aligned}d^0(m) = u_{1,0} m \otimes u_{1,0}^* + u_{2,0} m \otimes u_{2,0}^*\\ d^1(m_1 \otimes u_{1,0}^* + m_2 \otimes u_{2,0}^*) = (u_{1,0} m_2 - u_{2,0} m_1) \otimes (u_{1,0} \wedge u_{2,0})^*.\end{aligned} \tag{7.35}$$

À présent, pour ρ une représentation de $\mathfrak{l}_1$ de dimension finie, les $\mathfrak{l}_2$-modules $\mathfrak{m}_1(\rho)$ ne sont plus nécessairement semi-simples. Néanmoins, ce sont toujours des sommes directes de caractères de $\mathfrak{t}$, avec multiplicitées finies. Les caractères des C^i et des $H^i(\mathfrak{n}_2, \mathfrak{m}_1(\rho))$ ont toujours un sens.

Proposition 7.9. — *Soit ρ une représentation de dimension finie de $\mathfrak{l}_1$ de plus haut poids λ. Alors*

$$\sum_{j=0}^{2} (-1)^j ch(H^j(\mathfrak{n}_2, \mathfrak{m}_1(\rho))) = (\lambda - s_1 * \lambda) ch(U(\mathfrak{n}_1^+ \cap \mathfrak{l}_2)). \tag{7.36}$$

Démonstration. — Comme précédemment, il faut déterminer la somme alternée des caractères du complexe

$$\Lambda^2 \mathfrak{n}_2^+ \otimes U(\mathfrak{n}_1^+) \otimes \rho \to \mathfrak{n}_2^+ \otimes U(\mathfrak{n}_1^+) \otimes \rho \to U(\mathfrak{n}_1^+) \otimes \rho. \tag{7.37}$$

En utilisant la décomposition $\mathfrak{t}$-équivariante $U(\mathfrak{n}_1^+) \simeq U(K u_{0,2}) \otimes U(\mathfrak{n}_1^+ \cap \mathfrak{l}_2)$, on remarque que le caractère recherché est $ch(\rho) ch(U(K u_{0,1}))^{-1} ch(U(K u_{1,2}))$, c'est à dire

$$ch(\rho \otimes U(\mathfrak{n}_1^+ \cap \mathfrak{l}_2)) - ch(\rho \otimes U(\mathfrak{n}_1^+ \cap \mathfrak{l}_2) \otimes u_{0,1}) = (\lambda - s_1 * \lambda) ch(U(\mathfrak{n}_1^+ \cap \mathfrak{l}_2)). \tag{7.38}$$

□

Supposons que $\rho = L_1(\mu)$ avec $\mu = (\mu_0, \mu_1, \mu_2)$ dominant relativement à $-\alpha_1$. Reprenons $(v_{n,m,k})$ la base de $\mathfrak{m}_1(\mu)$ considérée précédemment.

Un calcul explicite donne alors

$$u_{1,0} \cdot v_{n,m,k} = v_{n,m,k-1} + n v_{n-1,m+1,k} \tag{7.39}$$

$$u_{2,0} \cdot v_{n,m,k} = -m v_{n,m-1,k-1} - n(n + m - 1 + \mu_0 - \mu_2 + k) v_{n-1,m,k}. \tag{7.40}$$

Remarquons déjà que l'on a une injection $\mathfrak{l}_2$-équivariante

$$U(\mathfrak{l}_2) \otimes_{U(\mathfrak{b})} \mu \subset H^0(\mathfrak{n}_2, \mathfrak{m}_1(\mu)) \tag{7.41}$$

pour tout μ, poids dominant relativement à $-\alpha_1$. L'intersection de l'image de ce morphisme avec $\mathfrak{m}_1(\mu)$ est engendrée par le vecteur $v_{0,r,0}$. De plus, on a vu dans la preuve du lemme 7.7 que si $\mu = s_2 s_1 * \lambda$, on a $r - 1 + \mu_0 - \mu_2 + k \neq 0$ pour tout $0 \leq k \leq \mu_1 - \mu_0$ et $r \geq 0$. Ainsi $u_{2,0}$ induit une surjection $\mathfrak{m}_1(s_2 s_1 * \lambda)_r \twoheadrightarrow \mathfrak{m}_1(s_2 s_1 * \lambda)_{r-1}$ et le noyau de la restriction de $u_{2,0}$ à $\mathfrak{m}_1(s_2 s_1 * \lambda)$ est de dimension 1. Ainsi $H^2(\mathfrak{n}_2, \mathfrak{m}_1(s_2 s_1 * \lambda)) = 0$. Dans le cas général, $r - 1 + \mu_0 - \mu_2 + k = 0$ si $k = \mu_0 - \mu_2 - (r-1)$. Ainsi, pour r assez grand, $u_{2,0}$ est une application surjective de $\mathfrak{m}_1(\mu)_r$ sur $\mathfrak{m}_1(\mu)_{r-1}$. Donc $H^2(\mathfrak{n}_2, \mathfrak{m}_1(\mu))$ est toujours de dimension finie.

Proposition 7.10. — *Soit λ un poids dominant (pour $-\Delta$). On a des isomorphismes $\mathfrak{l}_2$-équivariants*

$$\begin{aligned}
H^0(\mathfrak{n}_2, \mathfrak{m}_1(\lambda)) &= U(\mathfrak{l}_2) \otimes_{U(\mathfrak{b})} \lambda & H^0(\mathfrak{n}_2, \mathfrak{m}_1(s_2 * \lambda)) &= U(\mathfrak{l}_2) \otimes_{U(\mathfrak{b})} (s_2 * \lambda) \\
& & &\oplus U(\mathfrak{l}_2) \otimes_{U(\mathfrak{b})} (s_2 s_1 * \lambda) \\
H^1(\mathfrak{n}_2, \mathfrak{m}_1(\lambda)) &= U(\mathfrak{l}_2) \otimes_{U(\mathfrak{b})} (s_1 * \lambda) & H^1(\mathfrak{n}_2, \mathfrak{m}_1(s_2 * \lambda)) &= U(\mathfrak{l}_2) \otimes_{U(\mathfrak{b})} (s_1 s_2 * \lambda) \\
&\oplus L_2(s_1 s_2 * \lambda) & &\oplus U(\mathfrak{l}_2) \otimes_{U(\mathfrak{b})} (s_2 s_1 * \lambda) \\
H^2(\mathfrak{n}_2, \mathfrak{m}_1(\lambda)) &= L_2(s_1 s_2 * \lambda) & H^2(\mathfrak{n}_2, \mathfrak{m}_1(s_2 * \lambda)) &= 0 \\
H^0(\mathfrak{n}_2, \mathfrak{m}_1(s_2 s_1 * \lambda)) &= U(\mathfrak{l}_2) \otimes_{U(\mathfrak{b})} (s_2 s_1 * \lambda) \\
H^1(\mathfrak{n}_2, \mathfrak{m}_1(s_2 s_1 * \lambda)) &= U(\mathfrak{l}_2) \otimes_{U(\mathfrak{b})} (s_1 s_2 s_1 * \lambda) \\
H^2(\mathfrak{n}_2, \mathfrak{m}_1(s_2 s_1 * \lambda)) &= 0
\end{aligned} \tag{7.42}$$

Démonstration. — Les suites exactes (7.29) montrent alors que l'on a une injection $U(\mathfrak{l}_2) \otimes_{U(\mathfrak{b})} \mu \hookrightarrow H^0(\mathfrak{n}_2, L(\mu))$ pour $\mu = s_2 * \lambda$ ou $\mu = s_2 s_1 * \lambda$. Cette injection est un isomorphisme. En effet, soit Q le quotient de $H^0(\mathfrak{n}_2, L(\mu))$ par $U(\mathfrak{l}_2) \otimes_{U(\mathfrak{b})} \mu$. Comme $H^0(\mathfrak{n}, L(\mu))$ est de dimension 1, on a une injection $H^0(\mathfrak{n} \cap \mathfrak{l}_2, Q) \hookrightarrow H^1(\mathfrak{n} \cap \mathfrak{l}_2, U(\mathfrak{l}_2) \otimes_{U(\mathfrak{b})} \mu)$ et ce dernier est nul d'après les théorèmes 6.15(b) et 6.11 de [**26**]. Ainsi $Q = 0$. Nous avons donc déjà que $H^0(\mathfrak{n}_2, \mathfrak{m}_1(s_2 s_1 * \lambda)) = U(\mathfrak{l}_2) \otimes_{U(\mathfrak{b})} (s_2 s_1 * \lambda)$. Comme de plus $H^2(\mathfrak{n}_2, \mathfrak{m}_1(s_2 s_1 * \lambda)) = 0$, on déduit $H^1(\mathfrak{n}_2, \mathfrak{m}_1(s_2 s_1 * \lambda))$ de la proposition 7.9.

Comme $H^0(\mathfrak{n}_2, L(\lambda)) = L_2(\lambda)$ d'après le théorème 4.10, l'injection de $U(\mathfrak{l}_2) \otimes_{U(\mathfrak{b})} \lambda$ dans $H^0(\mathfrak{n}_2, \mathfrak{m}_1(\lambda))$ est un isomorphisme. De plus l'injection de $\mathfrak{m}_1(s_2 s_1 * \lambda)$ dans $\mathfrak{m}_1(s_2 * \lambda)$ induit une injection de $U(\mathfrak{l}_2) \otimes_{U(\mathfrak{b})} (s_2 s_1 * \lambda)$ dans $H^0(\mathfrak{n}_2, \mathfrak{m}_1(s_2 * \lambda))$. Comme $U(\mathfrak{l}_2) \otimes_{U(\mathfrak{b})} (s_2 s_1 * \lambda)$ et $U(\mathfrak{l}_2) \otimes_{U(\mathfrak{b})} (s_2 * \lambda)$ sont deux $U(\mathfrak{l}_2)$-modules simples non isomorphes, on a, à semi-simplification près,

$$H^0(\mathfrak{n}_2, \mathfrak{m}_1(s_2 * \lambda)) = U(\mathfrak{l}_2) \otimes_{U(\mathfrak{b})} (s_2 * \lambda) \oplus U(\mathfrak{l}_2) \otimes_{U(\mathfrak{b})} (s_2 s_1 * \lambda). \tag{7.43}$$

Comme $H^2(\mathfrak{n}_2, L(s_2 s_1 * \lambda)) = 0$, on a un isomorphisme $H^2(\mathfrak{n}_2, \mathfrak{m}_1(s_2 * \lambda)) \simeq H^2(\mathfrak{n}_2, L(s_2 * \lambda))$. L'espace $H^2(\mathfrak{n}_2, \mathfrak{m}_1(s_2 * \lambda))$ étant de dimension finie, c'est une somme directe de $U(\mathfrak{l}_2)$-modules simples. Il est donc uniquement déterminé par les $\mathfrak{t}$-modules $H^1(\mathfrak{n}/\mathfrak{n}_2, H^2(\mathfrak{n}_2, \mathfrak{m}_1(s_2 * \lambda)))$. Par la suite spectrale de Hochschild-Serre pour la cohomologie d'algèbres de Lie, il s'agit aussi de $H^3(\mathfrak{n}, L(s_2 * \lambda))$. Or on a déjà vu, (7.33), que $H^3(\mathfrak{n}, L(s_2 * \lambda)) = 0$. Ainsi $H^2(\mathfrak{n}_2, L(s_2 * \lambda)) = 0$. La proposition 7.9 nous permet alors de déterminer $H^1(\mathfrak{n}_2, \mathfrak{m}_1(s_2 * \lambda))$, et donc $H^2(\mathfrak{n}_2, L(s_2 * \lambda))$. Les suites exactes (7.29) et le théorème 4.10 nous permettent alors de déterminer $H^q(\mathfrak{n}_2, \mathfrak{m}_1(\lambda))$ pour $q \in \{1, 2\}$. □

Reprenons les notations du corps de l'article, c'est-à-dire λ un poids dominant pour Δ. Dans ce cas $-\lambda$ est dominant pour $-\Delta$, et pour $w \in W$, on a $-(w \cdot \lambda) = w * (-\lambda)$, donc $F'_{w \cdot \lambda} \simeq L(w * (-\lambda))$ et $F'_{w \cdot \lambda, i} \simeq L_i(w * (-\lambda))$. On peut donc reformuler les résultats de cet appendice sous la forme suivante, qui est celle sous laquelle ils sont utilisés dans le corps de l'article.

Proposition 7.11. — *Soit λ un poids dominant relativement à la base de racines simples Δ. On a des isomorphismes $\mathfrak{l}_1$-équivariants*

$$\begin{aligned}
H^0(\mathfrak{n}_1, \mathfrak{m}_1(F'_{\lambda,1})) &= F'_{\lambda,1} \oplus F'_{s_2\cdot\lambda,1} & H^0(\mathfrak{n}_1, \mathfrak{m}_1(F'_{s_2\cdot\lambda})) &= F'_{s_2\cdot\lambda,1} \oplus F'_{s_2s_1\cdot\lambda,1}\\
H^1(\mathfrak{n}_1, \mathfrak{m}_1(F'_{\lambda,1})) &= F'_{s_2\cdot\lambda,1} \oplus F'_{s_2s_1\cdot\lambda,1} & H^1(\mathfrak{n}_1, \mathfrak{m}_1(F'_{s_2\cdot\lambda,1})) &= F'_{s_2s_1\cdot\lambda,1}\\
H^2(\mathfrak{n}_1, \mathfrak{m}_1(F'_{\lambda,1})) &= F'_{s_2s_1\cdot\lambda,1} & H^2(\mathfrak{n}_1, \mathfrak{m}_1(F'_{s_2\cdot\lambda,1})) &= 0\\
H^0(\mathfrak{n}_1, \mathfrak{m}_1(F'_{s_2s_1\cdot\lambda,1})) &= F'_{s_2s_1\cdot\lambda,1} & &\\
H^1(\mathfrak{n}_1, \mathfrak{m}_1(F'_{s_2s_1\cdot\lambda,1})) &= 0 & &\\
H^2(\mathfrak{n}_1, \mathfrak{m}_1(F'_{s_2s_1\cdot\lambda,1})) &= 0 & &
\end{aligned} \tag{7.44}$$

Proposition 7.12. — *Soit λ un poids dominant. On a des isomorphismes $\mathfrak{l}_2$-équivariants*

$$\begin{aligned}
H^0(\mathfrak{n}_2, \mathfrak{m}_1(F'_{\lambda,1})) &= U(\mathfrak{l}_2) \otimes_{U(\mathfrak{b})} (-\lambda)\\
H^1(\mathfrak{n}_2, \mathfrak{m}_1(F'_{\lambda})) &= U(\mathfrak{l}_2) \otimes_{U(\mathfrak{b})} (-s_1\cdot\lambda) \oplus F'_{s_1s_2\cdot\lambda,2}\\
H^2(\mathfrak{n}_2, \mathfrak{m}_1(F'_{\lambda,1})) &= F'_{s_1s_2\cdot\lambda,2}\\
H^0(\mathfrak{n}_2, \mathfrak{m}_1(F'_{s_2\cdot\lambda,1})) &= U(\mathfrak{l}_2) \otimes_{U(\mathfrak{b})} (-s_2\cdot\lambda) \oplus U(\mathfrak{l}_2) \otimes_{U(\mathfrak{b})} (-s_2s_1\cdot\lambda)\\
H^1(\mathfrak{n}_2, \mathfrak{m}_1(F'_{s_2\cdot\lambda,1})) &= U(\mathfrak{l}_2) \otimes_{U(\mathfrak{b})} (-s_1s_2\cdot\lambda) \oplus U(\mathfrak{l}_2) \otimes_{U(\mathfrak{b})} (-s_2s_1\cdot\lambda)\\
H^2(\mathfrak{n}_2, \mathfrak{m}_1(F'_{s_2\cdot\lambda,1})) &= 0\\
H^0(\mathfrak{n}_2, \mathfrak{m}_1(F'_{s_2s_1\cdot\lambda,1})) &= U(\mathfrak{l}_2) \otimes_{U(\mathfrak{b})} (-s_2s_1\cdot\lambda)\\
H^1(\mathfrak{n}_2, \mathfrak{m}_1(F'_{s_2s_1\cdot\lambda,1})) &= U(\mathfrak{l}_2) \otimes_{U(\mathfrak{b})} (-s_1s_2s_1\cdot\lambda)\\
H^2(\mathfrak{n}_2, \mathfrak{m}_1(F'_{s_2s_1\cdot\lambda,1})) &= 0
\end{aligned} \tag{7.45}$$

7.3. Appendice 3. — Le but de cet appendice est de prouver un résultat technique utilisé dans la preuve du lemme 6.15. Soit λ un poids dominant de $\mathrm{GL}_{3,\mathbb{Q}_p}$ et $\lambda(1) = s_1\cdot(-w_0\lambda)$. Le poids $\lambda(1)$ est alors dominant relativement à α_2. On peut donc parler de ρ la représentation algébrique irréductible de P_2 de plus haut poids $\lambda(1)$. Notons $\mathcal{F}_\rho$ le faisceau G-équivariant sur $\mathbb{P}^2_{\mathbb{Q}_p} \simeq G/P_2$ défini dans la section 6.2. On note U l'ouvert affine $N_1w_0P_2/P_2$ de $\mathbb{P}^2_{\mathbb{Q}_p}$. L'espace des sections algébriques de $\mathcal{F}_\rho$ au dessus de U est un K-espace vectoriel M muni d'actions compatibles de $U(\mathfrak{g})$ et P_1. Il est isomorphe à $K[U]\otimes_K \rho^{w_0}$ en tant que P_1-module. Notre but est de montrer qu'il n'existe pas d'extension de $U(\mathfrak{g})$-modules de M par le $U(\mathfrak{g})$-module de dimension finie $F_{-w_0\lambda}$.

On fixe un isomorphisme

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{A}^2_{\mathbb{Q}_p} & \xrightarrow{\sim} & U\\ (x,y) & \mapsto & \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ -x & -y & 1\end{smallmatrix}\right)\end{array} \tag{7.46}$$

Les actions de N_1 et de L_1 sur M sont alors, dans ces coordonnées

$$\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ a & b & 1\end{smallmatrix}\right)\cdot f(x,y) = f(x+a, y+b), \quad \left(\begin{smallmatrix} M & 0\\ 0 & \det^{-1}(M)\end{smallmatrix}\right)\cdot f(x,y) = \rho(\left(\begin{smallmatrix} \det^{-1}(M) & 0\\ 0 & M\end{smallmatrix}\right))(f((x,y)M^{-1}\det(M)^2)) \tag{7.47}$$

Soit $\mathcal{O}^{\mathfrak{p}_1}$ la catégorie des $U(\mathfrak{g})$-modules de type fini, dont la restriction à $U(\mathfrak{l}_1)$ est somme directe de $U(\mathfrak{l}_1)$-modules simples de dimension finie, apparaissant avec multiplicité finie, et dont tout vecteur est $\mathfrak{n}_1$-fini. Tout d'abord le $U(\mathfrak{g})$-module M est un objet de $\mathcal{O}^{\mathfrak{p}_1}$. La formule (7.47) montre que $\mathfrak{n}_1$ agit par dérivations sur M et donc que pour tout $m\in M$, $U(\mathfrak{n}_1)m$ est de dimension finie. De plus, l'action de P_1 est algébrique sur M, donc l'action de L_1 aussi. Ainsi M est une somme directe de représentations algébriques irréductibles de dimension finie de $U(\mathfrak{l}_1)$. Enfin, le fait que M soit un $U(\mathfrak{g})$-module de type fini est une conséquence de la suite exacte 1.8 et du lemme 1.2.1 de [**39**]. Le module M est un objet de la catégorie $\mathcal{O}^{\mathfrak{p}_1}$, donc aussi de la catégorie $\mathcal{O}$. Supposons à présent que l'on ait une suite exacte de $U(\mathfrak{g})$-modules

$$0 \to F_{-w_0\lambda} \to \tilde{M} \to M \to 0. \tag{7.48}$$

Comme $F_{-w_0\lambda}$ est de dimension finie, c'est un objet de la catégorie $\mathcal{O}$, et il en est de même de $\tilde{M}$. Nous allons prouver que $\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}}(M, F_{-w_0\lambda}) = 0$, et donc que $\tilde{M}\simeq M\oplus F_{-w_0\lambda}$ en tant que $U(\mathfrak{g})$-modules. Encore une fois, il est plus agréable de renverser l'ordre sur les racines, et de considérer $-\Delta$ comme base de racines positives. Reprenons les notations de l'appendice 2 et notons $L(\mu)$ le $U(\mathfrak{g})$-module simple de plus haut poids μ. On a ainsi, $F_{-w_0\lambda} = L(-\lambda)$.

Remarquons que le sous-espace des fonctions constantes est stable par P_1 et isomorphe à $F_{s_2 s_1 \lambda(1),1} = L_1(s_2 * (-\lambda))$. L'inclusion $\mathfrak{p}_1$-équivariante de $L_1(s_2 * (-\lambda))$ dans M induit une application non triviale

$$\mathfrak{m}_1(s_2 * (-\lambda)) \to M \tag{7.49}$$

Cette application n'est pas injective. Dans le cas contraire, on aurait une injection $H^0(\mathfrak{n}_1, \mathfrak{m}_1(s_2*(-\lambda)) \hookrightarrow H^0(\mathfrak{n}_1, D_{\lambda(1)})$. C'est impossible d'après les propositions 7.8 et 6.3. Comme le $U(\mathfrak{g})$-module $\mathfrak{m}_1(s_2 * (-\lambda))$ est de longueur 2 d'après la décomposition 2.46, l'image de l'application (7.49) est donc le module de plus haut poids $L(s_2 * (-\lambda))$. De plus, comme pour tout poids μ de $\mathfrak{t}$, la composante μ-isotypique de M à même dimension que celle de $\mathfrak{m}_1(s_2 * (-\lambda))$, cette inclusion est stricte. Soit $(\cdot)^\vee$ le foncteur de dualité défini sur la catégorie $\mathcal{O}^{\mathfrak{p}_1}$ (§3. et proposition 9.3(b) de [**26**]). D'après le théorème 3.2 de [**26**], le foncteur $(\cdot)^\vee$ est exact et $L(s_2 * (-\lambda))^\vee \simeq L(s_2 * (-\lambda))$. On obtient donc une surjection $M^\vee \twoheadrightarrow L(s_2 * (-\lambda))$. Comme $H^0(\mathfrak{n}_1, M)$ est un $U(\mathfrak{p}_1)$-module simple, M est indécomposable, et donc en désignant par $P(\lambda(1))$ l'enveloppe projective de $L(s_2 * (-\lambda))$ dans la catégorie $\mathcal{O}^{\mathfrak{p}_1}$, on a une surjection $P(s_2 * (-\lambda)) \twoheadrightarrow M^\vee$. En appliquant le théorème 9.8 de [**26**] à $P(s_2 * (-\lambda))$, on obtient une suite exacte

$$0 \to \mathfrak{m}_1(-\lambda) \to P(s_2 * (-\lambda)) \to \mathfrak{m}_1(s_2 * (-\lambda)) \to 0. \tag{7.50}$$

À présent, comme $M^\vee$ ne contient pas le poids $-\lambda$, $\mathrm{Hom}_{U(\mathfrak{g})}(\mathfrak{m}_1(-\lambda), M^\vee) = 0$, donc l'application (7.50) se factorise à travers $\mathfrak{m}_1(s_2*(-\lambda))$. Comme l'inclusion $L(s_2*(-\lambda)) \hookrightarrow M$ est stricte, l'application (7.50) se factorise en un isomorphisme $\mathfrak{m}_1(s_2*(-\lambda)) \simeq M^\vee$. On a également, d'après le théorème 3.3 de [**26**], que le $U(\mathfrak{g})$-module $L(-\lambda)$ est isomorphe à son dual dans la catégorie $\mathcal{O}^{\mathfrak{p}_1}$. Comme $\mathcal{O}^{\mathfrak{p}_1}$ est une sous-catégorie de $\mathcal{O}$, pour prouver que $\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}^{\mathfrak{p}_1}}(M, L(-\lambda)) = 0$, il suffit de prouver $\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}}(L(-\lambda), \mathfrak{m}_1(s_2 * (-\lambda)) = 0$. D'après le théorème 9.4(b) de [**26**], on a une suite exacte

$$0 \to \mathfrak{m}(s_1 s_2 * (-\lambda)) \to \mathfrak{m}(s_2 * (-\lambda)) \to \mathfrak{m}_1(s_2 * (-\lambda)) \to 0. \tag{7.51}$$

D'après le théorème 6.2 de [**26**], on a une résolution de $L(-\lambda)$ de la forme

$$\cdots \to D_m^{-\lambda} \to \cdots \to D_1^{-\lambda} \to D_0^{-\lambda} \to L(-\lambda) \to 0 \tag{7.52}$$

où $D_m^{-\lambda}$ est une somme directe de modules de Verma $\mathfrak{m}(w * (-\lambda))$ avec w de longueur m. D'après le théorème 6.5(b) de [**26**], on a $\mathrm{Ext}^q_{\mathcal{O}}(D_1^{-\lambda}, \mathfrak{m}(s_2 * (-\lambda))) = \mathrm{Ext}^q_{\mathcal{O}}(D_0^{-\lambda}, \mathfrak{m}(s_1 s_2 * (-\lambda))) = 0$ pour q égal à 0 et ou 1, ce qui permet de conclure.

Références

[1] I. N. Bernstein & A. V. Zelevinsky – « Induced representations of reductive $\mathfrak{p}$-adic groups. I », *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)* **10** (1977), no. 4, p. 441–472.

[2] S. J. Bloch – *Higher regulators, algebraic K-theory, and zeta functions of elliptic curves*, CRM Monograph Series, vol. 11, American Mathematical Society, 2000.

[3] A. Borel – « Cohomologie de SL_n et valeurs de fonctions zeta aux points entiers », *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (4)* **4** (1977), no. 4, p. 613–636.

[4] A. Borel & N. R. Wallach – *Continuous cohomology, discrete subgroups, and representations of reductive groups*, Annals of Mathematics Studies, vol. 94, Princeton University Press, 1980.

[5] N. Bourbaki – *Topologie générale. chapitre* 9., Hermann, Paris, 1974.

[6] C. Breuil – « Série spéciale p-adique et cohomologie étale complétée », disponible sur http ://www.ihes.fr/~breuil, 2003.

[7] ———, « Invariant $\mathcal{L}$ et série spéciale p-adique », *Ann. Scient. de l'E.N.S.* **37** (2004), p. 559–610.

[8] C. Breuil & A. Mézard – « Représentations semi-stables de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$, demi-plan p-adique et réduction modulo p », à paraître à Astérisque.

[9] C. Breuil & P. Schneider – « First steps towards p-adic Langlands functoriality », *J. Reine Angew. Math.* **610** (2007), p. 149–180.

[10] C. J. Bushnell & G. Henniart – *The local Langlands conjecture for* GL(2), Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences], vol. 335, Springer-Verlag, Berlin, 2006.

[11] W. Casselman & D. Wigner – « Continuous cohomology and a conjecture of serre », *Invent. Math.* **25** (1974), p. 199–211.

[12] R. Coleman & A. Iovita – « Hidden structures on semistable curves », à paraître à Astérisque.

[13] R. F. Coleman – « Dilogarithms, regulators and p-adic L-functions », *Invent. Math.* **69** (1982), no. 2, p. 171–208.

[14] P. Colmez – « Série principale unitaire pour $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ et représentations triangulines de dimension 2 », à paraître à Astérisque, 2004.

[15] ———, « Une correspondance de Langlands p-adique pour les représentations semi-stables de dimension 2 », à paraître à Astérisque, 2004.

[16] P. Colmez & J.-M. Fontaine – « Construction des représentations p-adiques semi-stables », *Invent. Math.* **140** (2000), no. 1, p. 1–43.

[17] J. F. Dat – « Espaces symétriques de Drinfeld et correspondance de Langlands locale », *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)* **39** (2006), p. 1–74.

[18] J. Dixmier – *Algèbres enveloppantes*, Gauthier-Villars Éditeur, Paris-Brussels-Montreal, Que., 1974, Cahiers Scientifiques, Fasc. XXXVII.

[19] M. Emerton – « p-adic L-functions and unitary completions of representations of p-adic reductive groups », *Duke Math. J.* **130** (2005), no. 2, p. 353–392.

[20] ———, « Jacquet modules of locally analytic representations of p-adic reductive groups II. The relation to parabolic induction », (2007), A paraître à J. Inst. Math. de Jussieu.

[21] J.-M. Fontaine – « Représentations p-adiques semi-stables », *Astérisque* (1994), no. 223, p. 113–184, With an appendix by Pierre Colmez, Périodes p-adiques (Bures-sur-Yvette, 1988).

[22] H. Frommer – « The locally analytic principal series of split reductive groups », prépublication.

[23] E. Grosse-Klönne – « On the p-adic cohomology of some p-adically uniformized varieties ».

[24] ———, « Frobenius and monodromy operators in rigid analysis, and Drinfel′d's symmetric space », *J. Algebraic Geom.* **14** (2005), no. 3, p. 391–437.

[25] J. E. Humphreys – *Introduction to Lie algebras and representation theory*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 9, Springer-Verlag, 1978, Second printing, revised.

[26] ———, *Representations of semisimple Lie algebras in the BGG category $\mathcal{O}$*, Graduate Studies in Mathematics, vol. 94, American Mathematical Society, Providence, RI, 2008.

[27] A. Iovita & M. Spiess – « Logarithmic differential forms on p-adic symmetric spaces », *Duke Math. J.* **110** (2001), no. 2, p. 253–278.

[28] T. Ito – « Weight-monodromy conjecture for p-adically uniformized varieties », *Invent. Math.* **159** (2005), no. 3, p. 607–656.

[29] B. Keller – « Derived categories and their uses », Handbook of algebra, Vol. 1, North-Holland, 1996, p. 671–701.

[30] A. W. Knapp – *Lie groups, Lie algebras, and cohomology*, Mathematical Notes, vol. 34, Princeton University Press, Princeton, NJ, 1988.

[31] ———, *Representation theory of semisimple groups*, Princeton Landmarks in Mathematics, Princeton University Press, 2001, An overview based on examples, Reprint of the 1986 original.

[32] J. Kohlhaase – « The cohomology of locally analytic representations », prépublication.

[33] ———, « Invariant distributions on p-adic analytic groups. », *Duke Math. J.* **137** (2007), no. 1, p. 19–62.

[34] J.-L. Koszul – « Homologie et cohomologie des algèbres de Lie », *Bull. Soc. Math. France* **78** (1950), p. 65–127.

[35] C. T. Féaux de Lacroix – « Einige Resultate über die topologischen Darstellungen p-adischer Liegruppen auf unendlich dimensionalen Vektorräumen über einem p-adischen Körper », Schriftenreihe des Mathematischen Instituts der Universität Münster. 3. Serie, Heft 23, Schriftenreihe Math. Inst. Univ. Münster 3. Ser., vol. 23, Univ. Münster, 1999, p. x+111.

[36] C. C. Moore – « Group extensions and cohomology for locally compact groups. III », *Trans. Amer. Math. Soc.* **221** (1976), no. 1, p. 1–33.

[37] S. Orlik & M. Strauch – « On the irreducibility of locally analytic principal series representations. », prépublication, 2006.

[38] S. Orlik – « On extensions of generalized Steinberg representations », *J. Algebra* **293** (2005), no. 2, p. 611–630.

[39] ———, « Equivariant vector bundles on Drinfeld's upper half space », *Invent. Math.* **172** (2008), no. 3, p. 585–656.

[40] D. Prasad – « Locally algebraic representations of p-adic groups », *Representation theory* **5** (2001), Appendix to *$U(g)$-finite locally analytic representations.*

[41] P. Schneider – « The cohomology of local systems on p-adically uniformized varieties. », *Math. Ann.* **293** (1992), p. 623–650.

[42] ———, *Nonarchimedean functional analysis*, Springer Monographs in Mathematics, Springer Verlag, 2002.

[43] P. Schneider & U. Stuhler – « The cohomology of p-adic symmetric spaces », *Invent. Math.* **105** (1991), p. 44–122.

[44] P. Schneider & J. Teitelbaum – « $U(\mathfrak{g})$-finite locally analytic representations », *Represent. Theory* **5** (2001), p. 111–128.

[45] ———, « Locally analytic distributions and p-adic representation theory, with application to GL_2. », *J. Amer. Math. Soc.* **15** (2002), p. 443–468.

[46] ———, « p-adic boundary values », *Astérisque* **278** (2002), p. 51–125.

[47] ———, « Algebras of p-adic distributions and admissible representations. », *Invent. Math.* **153** (2003), p. 145–196.

[48] P. Schneider & J. Teitelbaum – « Duality for admissible locally analytic representations », *Represent. Theory* **9** (2005), p. 297–326 (electronic).

[49] B. Schraen – « Représentations p-adiques de $\mathrm{GL}_2(L)$ et catégories dérivées », disponible sur http ://www.dma.ens.fr/ ˜schraen/.

[50] E. de Shalit – « The p-adic monodromy-weight conjecture for p-adically uniformized varieties », *Compos. Math.* **141** (2005), no. 1, p. 101–120.

[51] C. A. Weibel – *An introduction to homological algebra*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, vol. 38, 1994.

[52] N. Yoneda – « On Ext and exact sequences », *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. I* **8** (1960), p. 507–576 (1960).

Benjamin Schraen • *E-mail :* `Benjamin.Schraen@ens.fr`