Flots d'Anosov
à distributions stable et instable différentiables

Yves Benoist[1] Patrick Foulon[2] François Labourie[3]

[1] Université Paris-VII, UFR de Mathématiques, 2, place Jussieu, 75721 Paris Cedex, FRANCE — URA 748 du CNRS

[2] Ecole Polytechnique, Centre de Physique théorique, 91128 Palaiseau Cedex, FRANCE — LP 014 du CNRS

[3] Ecole Polytechnique, Centre de Mathématiques, 91128 Palaiseau Cedex, FRANCE — URA D.0169 du CNRS

Résumé: Nous décrivons les flots d'Anosov sur les variétés compactes dont les distributions stable et instable sont différentiables et dont la 1-forme canonique est de contact : à des revêtements finis près et après un reparamétrage C^∞, ils se réalisent tous comme le flot géodésique sur (le fibré unitaire tangent à) un espace localement symétrique riemannien à courbure strictement négative.

Abstract: We describe which Anosov flows on compact manifolds have C^∞ stable and unstable distributions and a contact canonical 1-form: up to finite coverings and up to a C^∞ change of parameters, each of them is isomorphic to the geodesic flow on (the unit tangent bundle of) a compact locally symmetric space of strictly negative curvature.

Plan

0. Introduction

0.1. Rappelons la définition d'un flot d'Anosov. Soient V une variété C^∞ compacte et connexe, X un champ de vecteurs C^∞ et φ_t le flot associé. On munit V d'une métrique riemannienne annexe.

Définition. *On dit que X (ou φ_t) est* d'Anosov, *s'il existe une décomposition (que nous appellerons aussi d'Anosov) invariante par le flot, du fibré tangent à V: $TV = E^+ \oplus \mathbf{R}X \oplus E^-$ et des constantes a et b strictement positives telles que*

(i) $\forall Z^+ \in E^+ \quad \forall t \geq 0 \qquad \|T\varphi_{-t}(Z^+)\| \leq a\|Z^+\|e^{-bt}$

(ii) $\forall Z^- \in E^- \quad \forall t \geq 0 \qquad \|T\varphi_t(Z^-)\| \leq a\|Z^-\|e^{-bt}$

Il est facile de vérifier que cette notion ne dépend pas du choix de la métrique. On note E^0 le fibré de rang un $\mathbf{R}X$.

Une importante classe d'exemples, qui motiva l'introduction de cette notion par Anosov, est constituée par les flots géodésiques des variétés riemanniennes compactes à courbure strictement négative.

La distribution E^+ (resp. E^-, $E^+ \oplus E^0$, $E^- \oplus E^0$) est intégrable et s'appelle distribution instable (resp. stable, centrale instable et centrale stable). Les feuilles intégrales s'appellent feuilles instables (resp. stables, centrales instables et centrales stables). Dans le cas des variétés à courbure négative, ces distributions sont reliées aux distributions horosphériques.

Chaque feuille est C^∞. Par contre, la distribution est, en général, transversalement peu différentiable. Anosov montre qu'elle est tout de même continue et vérifie des conditions Hölder avec un coefficient strictement positif [A]. Dans le cas des flots géodésiques sur les surfaces ou sur les variétés à courbure négative (1/4)-strictement pincée, la distribution est de classe C^1 [HP]. Par contre, Hurder et Katok [HK] ont montré que pour les flots géodésiques sur les surfaces la condition C^2 entraîne C^∞, ce qui suggère qu'une condition de différentiabilité supplémentaire est très contraignante.

On appelle *1-forme canonique* associée au flot, la 1-forme donnée par $\lambda(E^\pm) = 0$ et $\lambda(X) = 1$. Le flot est dit *Anosov-contact* si λ est C^∞ et est de contact (*i.e.* $\lambda \wedge (d\lambda)^{n-1}$ est nulle part nulle, si dim $V = 2n-1$).

Les flots géodésiques des variétés à courbure négative forment une classe d'exemples de flots Anosov-contact et dans ce cas la 1-forme canonique coïncide avec la forme de Liouville.

0.2. Nous nous intéressons dans ce papier aux flots d'Anosov dont les distributions stable et instable sont C^∞ et tout spécialement aux flots Anosov-contact. En voici quelques exemples :

1. Le premier exemple est donné par le flot géodésique sur le fibré unitaire des variétés compactes riemanniennes localement symétriques à courbure strictement négative.

2. Le deuxième exemple est obtenu à partir du premier en prenant des revêtements finis et des quotients finis.
3. Enfin, on peut perturber par des reparamétrisations C^∞ ces exemples à l'aide de certains éléments du premier groupe de cohomologie. Plus précisemment, soit X un champ Anosov-contact sur une variété compacte dont la décomposition d'Anosov est C^∞ et soit α une 1-forme fermée telle que $1+\alpha(X)>0$ alors le champ $X' = \dfrac{X}{1+\alpha(X)}$ est aussi Anosov-contact et sa décomposition d'Anosov est C^∞ (cf. 4.4.1).

0.3. Le théorème principal de cet article affirme que nous avons parcouru ainsi tous les cas possibles :

Théorème 1.

2. Seule compte vraiment la classe de cohomologie $[\alpha]$. En effet, si β et α sont deux 1-formes fermées vérifiant $1+\beta(X)>0$ et $1+\alpha(X)>0$, alors les flots $\dfrac{X}{1+\alpha(X)}$ et $\dfrac{X}{1+\beta(X)}$ sont C^∞-conjugués si et seulement si β et α sont cohomologues.

3. Une vérification rapide montre que $1-\alpha(Y)>0$ et que $X = \dfrac{Y}{1-\alpha(Y)}$; autrement dit le reparamétrage est réversible et le champ de vecteurs X s'obtient bien comme nous l'avions prédit à partir des variétés localement symétriques.

4. Si on suppose seulement que les distributions $E^\pm$ sont de classe C^k avec $k \geq 2(2n^2-n+1)$, le résultat est encore vrai avec la conjugaison de classe C^k. Vraisemblablement, la meilleure hypothèse de différentiabilité pour un tel résultat est $C^{1+\mathrm{Lipschitz}}$.

5. Nous donnons un énoncé plus technique et précis de ce théorème en 7.2.

0.4. Dans le cas des flots géodésiques sur les variétés riemanniennes notre résultat se spécialise et nous montrons :

Théorème 2. *Soit N une variété riemannienne compacte de dimension n à courbure strictement négative; si la distribution centrale stable du flot géodésique est C^∞, alors le flot géodésique est C^∞-conjugué à celui d'une variété riemannienne localement symétrique à courbure strictement négative.*

Remarques. 1. Ce résultat avait été démontré pour les surfaces par Ghys ([Gh]) et dans toutes les dimensions par Kanai ([Ka]) sous l'hypothèse de courbure (4/9)-pincée. Puis il avait été étendu en utilisant la même méthode d'approche par Feres et Katok [FK 1 et 2] avec les hypothèses n impair, ou courbure strictement (1/4)-pincée. Remarquons que dans ces cas, les seuls candidats localement symétriques possibles sont les espaces hyperboliques réels.

2. Signalons par ailleurs que faire l'hypothèse que le flot est le flot géodésique sur une variété riemannienne à courbure strictement négative simplifie considérablement la démonstration de notre théorème 1 (cf. 7.5.5), et que ce théorème n'est en aucun cas une éneralisation immédiate du théorème 2.

3. Les théorèmes 1 et 2 ont été annoncés dans [BFL].

0.5. Nous montrons enfin, par les mêmes méthodes, un résultat partiel sur les difféomorphismes d'Anosov (cf. 3.4):

THÉORÈME 3. *Soit (V, ω) une variété symplectique compacte de dimension $2n$ munie d'un difféomorphisme d'Anosov symplectique. Si la décomposition d'Anosov est C^∞, alors le groupe des difféomorphismes symplectiques du revêtement universel $\tilde{V}$ préservant la décomposition d'Anosov est un groupe de Lie qui agit transitivement.*

0.6. Nous exprimons notre gratitude à P. Pansu pour son intérêt constant pour ce travail et ses remarques toujours pertinentes, et M. Gromov pour nous avoir suggéré d'utiliser un de ses résultats comme point de départ de ce travail.

Nous remercions aussi J.-P. Bourguignon, J. Faraut, E. Ghys, D. Sullivan, D. Wigner et J.-C. Yoccoz pour de fructueuses discussions à ce sujet.

1. Structure de la démonstration

La démonstration s'effectue en deux temps; dans un premier temps, nous montrons que V admet une structure localement homogène. Il s'agit ensuite, dans un deuxième temps, d'identifier les groupes en question. En général, lorsqu'il s'agit d'identifier les espaces homogènes vérifiant une propriété, la tâche est grandement facilitée quand la propriété est locale et le problème se dissout alors presque immédiatement dans l'algèbre. Ici, la propriété d'Anosov est globale, ce qui va nous obliger à un va-et-vient entre algèbre et dynamique. En particulier, nous serons amenés à étudier la dynamique du groupe fondamental de V.

Un autre exemple de question globale et délicate est le suivant : quels espaces homogènes admettent des quotients compacts ?

Voici maintenant les trois étapes de la démonstration dont les méthodes sont relativement distinctes (quoique les deux premières se chevauchent). Nous sommes dans les hypothèses du théorème 1, et $\tilde{V}$ est le revêtement universel de V.

1.1. Une structure d'espace homogène

Notre but dans cette première étape est de démontrer la proposition suivante :

1.1.1. Proposition. *Le groupe G' des difféomorphismes de $\tilde{V}$ qui préservent la décomposition d'Anosov et le flot est un groupe de Lie qui agit transitivement sur $\tilde{V}$.*

Nous utilisons pour cela un résultat de Gromov qui montre que, sous nos hypothèses, un ouvert dense de V admet une structure localement homogène puis grâce à une connexion (analogue à celle de Kanai) nous démontrons que cette structure s'étend.

C'est l'objet des chapitres 2 et 3.

1.2. Propriétés du groupe G' et des groupes d'isotropie

L'outil fondamental, dans les sections 3 et 4, est l'étude des connexions invariantes par le flot, et plus précisément des courbures des fibrés des formes volume, sur les sous-fibrés parallèles de TV. On montrera en particulier que ces courbures sont nulles. On utilisera ici l'existence d'orbites denses et d'orbites périodiques.

Ecrivons $\tilde{V} = G'/H'$, où H' est le groupe d'isotropie d'un point v_0. Pour tout groupe de Lie K, on notera K_e sa composante connexe et $\mathfrak{k}$ son algèbre de Lie.

Notre deuxième étape est essentiellement de démontrer deux propositions.

1.2.1. Proposition. *On peut écrire $G' = G \times \mathbf{R}$, où $\mathbf{R}$ est le sous-groupe de G' donné par le flot φ_t et où G est semisimple et agit transitivement sur $\tilde{V}$.*

On note $H = H' \cap G$, c'est un groupe algébrique et on a $\tilde{V} = G/H$. Soit alors $\mathfrak{p}^+$, (resp. $\mathfrak{g}_0$) l'algèbre de Lie du stabilisateur dans G de la feuille centrale instable (resp. orbite) du flot φ_t issue du point v_0.

1.2.2. Proposition.

(i) *$\mathfrak{p}^+$ est une sous-algèbre parabolique maximale de $\mathfrak{g}$.*

(ii) *$\mathfrak{g}_0$ est une composante réductive de $\mathfrak{p}^+$.*

(iii) *On a $\mathfrak{h} = [\mathfrak{g}_0, \mathfrak{g}_0] \oplus \mathfrak{z}_0^E$ où $\mathfrak{z}_0^E$ est la partie elliptique du centre de $\mathfrak{g}_0$.*

Remarque. En particulier $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{h} \oplus \mathbf{R}X_0$ où X_0 est un élément hyperbolique du centre de $\mathfrak{g}_0$.

La démonstration de ces propositions commencée au chapitre 2 est achevée au chapitre 4.

C'est maintenant en 4.4 que s'introduit le problème de la reparamétrisation. Soit en effet Γ le groupe d'holonomie de V dans G'. Comme $G' = G \times \mathbf{R}$, notons Γ_0 la projection sur le premier facteur et h l'élément de $\mathrm{Hom}\,(\Gamma, \mathbf{R}) = H^1(V, \mathbf{R})$ donné par la projection sur le deuxième facteur. Alors :

1.2.3. Proposition.

(i) Il existe une 1*-forme fermée* α*, représentant* $-h$ *en cohomologie de de Rham, telle que* $1 + \alpha(X) > 0$.

(ii) Pour toute telle 1*-forme* α*, le flot* $Y = \dfrac{X}{1 + \alpha(X)}$ *est Anosov-contact et est* C^∞*-conjugué au flot de* X *sur* $\Gamma_0 \setminus \tilde{V}$*. Ici par abus de langage, nous avons noté de la même manière* X *ainsi que son relevé sur* $\tilde{V}$*.*

Nous démontrerons également la proposition nécessaire à la construction des exemples.

1.3. La dynamique de Γ et le rang de G

Nous pouvons supposer maintenant, après un reparamétrage C^∞ que Γ est inclus dans G. Nous voulons montrer, pour conclure:

Proposition. *Le rang réel de* G *est égal à 1.*

La démonstration est basée sur la dynamique du groupe d'holonomie sur l'espace $\tilde{\mathcal{F}}^+$ des feuilles instables et l'espace $\mathcal{O}$ des orbites du flot.

Notre intuition est d'essayer de copier l'action d'un groupe hyperbolique sur la sphère à l'infini d'une variété à courbure négative. Nous traduirons des propriétés classiques des flots d'Anosov : closing lemma, densité des feuilles centrales ... en des propriétés de la dynamique de Γ. La preuve de cette proposition se décompose de la manière suivante :

1.3.1. On se ramène au cas où $\Gamma \subset G_e$ et où le groupe $\mathrm{Ad}\,(\Gamma)$ est sans torsion.

Dans le chapitre 5, on montre en étudiant les points ω-limites d'un élément γ de Γ dans $\tilde{\mathcal{F}}^+$ et $\mathcal{O}$

Proposition. *Soit* γ *un élément de* Γ *qui n'est pas dans le centre de* G_e*. On suppose que* $\tilde{\mathcal{F}}^+$ *est compact ou que* γ *fixe un point de* $\mathcal{O}$*. Si* γ *est semisimple (i.e.* $\mathrm{Ad}\,(\gamma)$ *est semisimple), le rang de* G *est* 1.

Il nous faut donc trouver des éléments semisimples dans Γ. C'est le but du chapitre 6. On distingue deux cas.

1.3.2. *Si* $\tilde{\mathcal{F}}^+$ *est compact.* En utilisant le fait que toute feuille centrale instable est dense on montre:

Proposition. *La clôture de Zariski de* $\mathrm{Ad}\,(\Gamma)$ *est réductive. En particulier* $\mathrm{Ad}\,(\Gamma)$ *contient des éléments semisimples.*

1.3.3. *Si* $\tilde{\mathcal{F}}^+$ *est non compact.* Les cas possibles forment une courte liste. L'existence d'orbites périodiques du flot φ_t permet de trouver des éléments γ de Γ qui fixent un point de $\mathcal{O}$. Une étude cas par cas montre alors que:

Proposition. *Si $\tilde{\mathcal{F}}^+$ est non compact, tout élément γ de Γ qui fixe un point de $\mathcal{O}$ est semisimple.*

1.4. En conclusion, nous démontrons les théorèmes 1 et 2. L'essentiel a été fait, il suffit de mettre les idées en place (cf. 7.0).

Remarque. Chacun des chapitres qui suivent commence par une partie zéro qui en décrit la démarche. Ainsi, la réunion de ces parties zéro fournit une description plus détaillée de la structure de la démonstration.

2. Une algèbre de Lie semisimple

2.0. Le but des chapitres 2 et 3 est de démontrer la proposition 1.1. On montre tout d'abord à l'aide d'un théorème de Gromov que le pseudo-groupe des difféomorphismes de V qui préservent X et $E^{\pm}$ est de Lie et a une orbite ouverte et dense Ω (2.1). On veut en déduire que l'ouvert Ω est muni d'une certaine $(G', \overline{V})$-structure au sens de [T]. Ce but ne sera atteint qu'en 3.1, lorsque nous aurons sufisamment de renseignements sur l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}'$ des champs de vecteurs locaux sur Ω qui préservent X et $E^{\pm}$.

La suite de ce chapitre est consacrée à cette algèbre de Lie $\mathfrak{g}'$, ce qui permettra en fait de montrer l'essentiel de la proposition 1.2.1.

On construit tout d'abord une connexion sur V, analogue à celle de Kanai, préservée par ce pseudo-groupe (2.2). On montre alors et de façon simultanée que le fibré des formes volume sur E^+ est plat et que $\mathfrak{g}'$ est une algèbre de Lie réductive dont le centre est donné par le champ X. Pour cela, on introduit un opérateur B^+ qui permet de calculer la courbure de ce fibré et on montre, à l'aide de la notion d'entropie, qu'il est nilpotent (2.3). En utilisant alors une réalisation de $\mathfrak{g}'$ par les 1-jets en un point et une graduation de $\mathfrak{g}'$ liée à l'application premier retour, on montre que $\mathfrak{g}'$ est réductive (2.4); on en déduit que B^+ est semisimple donc nul (2.5).

2.1. Le pseudo-groupe des isométries locales

2.1.1. Faisons quelques rappels simplifiés de [Gr].

Soient M une variété C^∞ de dimension m et $R(M)$ le fibré des repères de M: c'est un $\mathbf{GL}(m)$-fibré principal. Soit Z une variété algébrique lisse (réelle) munie d'une action algébrique de $\mathbf{GL}(m)$.

Définition. *On appelle A-structure (d'ordre* 1 *et de type* Z*) une section* C^∞, g, *du fibré* $Z(M) := R(M) \times_{\mathbf{GL}(m)} Z$.

Un exemple simple est donné par les métriques pseudo-riemaniennes.

Soit g une A-structure. Les difféomorphismes de M agissent sur les sections de $Z(M)$; on appelle isométries locales les difféomorphismes locaux qui préservent g. On note $\forall x, x_1, x_2 \in M, \quad \forall r \geq 1$

$$\begin{aligned} \mathrm{Is}^{\mathrm{loc}}(x_1, x_2) &= \text{l'ensemble des germes en } x_1 \text{ d'isométries locales qui envoient } x_1 \\ &\quad\ \text{sur } x_2. \\ \mathrm{Is}^{\mathrm{loc}}(x) &= \mathrm{Is}^{\mathrm{loc}}(x, x) : \text{ c'est un groupe.} \\ \mathrm{Is}^{r}(x) &= \text{le groupe des } r\text{-jets en } x \text{ de difféomorphismes de } M \text{ qui préservent} \\ &\quad\ \text{le } (r+1)\text{-jet de } g \text{ et envoient } x \text{ sur lui-même.} \end{aligned}$$

On appelle orbites du pseudo-groupe $\mathrm{Is}^{\mathrm{loc}}$ les classes de la relation d'équivalence $\mathrm{Is}^{\mathrm{loc}}(x_1, x_2) \neq \emptyset$.

Définition. *L'A-structure* g *est dite rigide (à l'ordre* 1*) si,* $\forall x \in M$, $\forall r \geq 1$, *l'application naturelle* $\mathrm{Is}^{r+1}(x) \to \mathrm{Is}^{r}(x)$ *est injective.*

Dans ce cas, l'application naturelle $\mathrm{Is}^{\mathrm{loc}}(x) \to \mathrm{Is}^{1}(x)$ est injective et $\mathrm{Is}^{\mathrm{loc}}$ est un pseudo-groupe de Lie. A nouveau, les métriques pseudo-riemanniennes fournissent une exemple d'A-structure rigide.

Proposition ([Gr] §3). *Si le pseudo-groupe des isométries locales d'une A-structure rigide* g *a une orbite dense* Ω, *celle-ci est ouverte.*

Remarque. Cet énoncé est encore vrai pour g de clase C^r, $\forall r \geq r_0 = \dim R(M) + 1$ (loc. cit. §1.6).

2.1.2. La décomposition $(X, E^{\pm})$ va s'avérer être une A-structure rigide. Prenons $M = V$; on a $m = 2n - 1$. Soit

$$Z = \Big\{ (x, e^+, e^-, \omega) \mid x \in \mathbf{R}^{2n-1},\ e^+ \text{ et } e^- \text{ sont des } (n-1)\text{-plans de } \mathbf{R}^{2n-1} \text{ tels que } \mathbf{R}^{2n-1} = e^+ \oplus \mathbf{R}x \oplus e^-, \text{ et } \omega \text{ est une 2-forme antisymétrique sur } \mathbf{R}^{2n-1} \text{ de noyau } \mathbf{R}x \text{ telle que } \omega(e^-, e^-) = \omega(e^+, e^+) = 0 \Big\}$$

L'action naturelle de $\mathbf{GL}(2n-1)$ sur Z est transitive. Soit $g = g_X$ la section de $Z(V)$ donnée par

$$\forall v \in V, g_X(v) = (X_v, E_v^+, E_v^-, (d\lambda)_v)$$

La 2-forme $d\lambda$ a pour noyau $\mathbf{R}X$ et vérifie $d\lambda(E^+, E^+) = d\lambda(E^-, E^-) = 0$ car λ est de contact et est invariante par le flot φ_t.

Lemme. *L'A-structure g_X est rigide.*

Démonstration. La forme bilinéaire symétrique b donnée par, $\forall Z^\pm \in E^\pm$, $b(X,X)=1$, $b(X,Z^\pm)=b(Z^+,Z^+)=b(Z^-,Z^-)=0$ et $b(Z^-,Z^+)=d\lambda(Z^-,Z^+)$ est une métrique pseudoriemannienne non dégénérée sur V. Par construction, le $(n-1)$-jet de b est invariant par $\mathrm{Is}^r(v)$; g_X est donc rigide ■

2.1.3. Corollaire. *Le pseudo-groupe des difféomorphismes locaux de V qui préservent X et $E^\pm$ a une orbite ouverte dense Ω.*

Démonstration. Ce pseudo-groupe est le pseudo-groupe des isométries de g_X. Il contient le flot φ_t, il a donc une orbite Ω dense ([A]). Ce qui précède prouve que Ω est ouverte ■

2.1.4. Voici une propriété de l'ouvert Ω qui nous sera utile. Pour v dans V, on note F_v^+ (resp. F_v^-) la feuille instable (resp. stable) contenant v; on a

$$F_v^\pm = \left\{ v' \in V \mid \lim_{t\to\mp\infty} d(\varphi_t(v),\varphi_t(v'))=0 \right\}$$

où d est la distance sur V associée à la métrique riemannienne annexe.

Lemme. *Soit $\Delta=\{v\in V \mid F_v^+\subset\Omega \quad \text{et} \quad F_v^-\subset\Omega\}$, alors Δ est dense dans V.*

Démonstration. Il suffit de voir que Δ contient la réunion des orbites périodiques incluses dans Ω, car celle-ci est dense ([A]). Soit $v\in\Omega$ tel que $\varphi_{t_0}(v)=v$, pour $t_0>0$, montrons que $F_v^+\subset\Omega$: soit $v'\in F_v^+$, on a $\lim_{n\to\infty}\varphi_{-nt_0}(v')=v$, donc il existe $n_0>0$ tel que $\varphi_{-n_0t_0}(v')\in\Omega$ et par suite $v'\in\Omega$. On montre de même que $F_v^-\subset\Omega$ ■

2.2. Une première connexion

2.2.1. *Entropie.* Avant de poursuivre, rappelons la définition de l'entropie s d'un sous-fibré F du fibré tangent TV invariant par le flot φ_t. On pose

$$a_t=a_t(F)=\int_V \log|\det(T\varphi_t)_F|\lambda\wedge(d\lambda)^{n-1}$$

où la valeur absolue du déterminant de l'application tangente au flot est calculée à l'aide d'une section, nulle part nulle, du fibré des densités sur F. On vérifie que $\forall t,t'\in\mathbf{R}$

$$a_t+a_{t'}=a_{t+t'}$$

donc il existe $s\in\mathbf{R}$ tel que $a_t=s.\mathrm{vol}(V).t$, où $\mathrm{vol}(V)=\int_V\lambda\wedge(d\lambda)^{n-1}$. Ce réel s est l'entropie du fibré F (il ne dépend pas du choix de la section).

Soient s^+ (resp. s^-) l'entropie du fibré E^+ (resp. E^-). L'existence d'une forme bilinéaire non dégénérée invariante par le flot sur $E^+ \oplus E^-$ (la forme $d\lambda$) prouve que l'entropie de $E^+ \oplus E^-$ est nulle : $s^+ + s^- = 0$ La propriété d'Anosov (0.1) prouve que $s^+ > 0$: en effet pour t positif, on a $a_t(E^+) > 0$.

2.2.2. On note p^+ (resp. p^-) la projection sur E^+ (resp. E^-) parallèlement à $E^0 \oplus E^-$ (resp. $E^0 \oplus E^+$) et $\sigma^\pm = \dfrac{s^\pm}{\mathrm{rang}\,(E)}$.

Lemme. *Il existe une unique connexion ∇ sur V telle que*

(i) $\nabla\lambda=0$, $\nabla(d\lambda) = 0$ et $\nabla(E^\pm) \subset E^\pm$

(ii) $\forall Z^\pm$ section de $E^\pm$, on a

$$\begin{aligned} \nabla_{Z^-} Z^+ &= p^+([Z^-, Z^+]) \\ \nabla_{Z^+} Z^- &= p^-([Z^+, Z^-]) \\ \textit{et}\ \nabla_X Z^\pm &= [X, Z^\pm] + \sigma^\pm Z^\pm \end{aligned}$$

Remarques. 1. Cette connexion a été introduite par M. Kanai ([Ka]) au facteur $\sigma^\pm$ près, facteur dont on verra l'utilité en 2.3.

2. Par construction, ∇ est invariante par le pseudogroupe $\mathrm{Is}^{\mathrm{loc}}$

3. Soit T la torsion de ∇, alors la connexion $\nabla - (1/2)T$ est la connexion de Levi-Civita de la structure pseudoriemannienne b du 2.1.2: en effet, elle est sans torsion et b est parallèle.

Démonstration. L'unicité et l'existence de ∇ résulte des formules, $\forall Y^\pm, Z^\pm$ sections de $E^\pm$

$$\begin{aligned} \nabla X &= 0 \\ d\lambda(\nabla_{Y^+} Z^+, Z^-) &= L_{Y^+}(d\lambda(Z^+, Z^-)) - d\lambda(Z^+, [Y^+, Z^-]) \\ d\lambda(\nabla_{Y^-} Z^-, Z^+) &= L_{Y^-}(d\lambda(Z^-, Z^+)) - d\lambda(Z^-, [Y^-, Z^+]) \end{aligned}$$

■

2.2.3. Soient T et R la torsion et la courbure de ∇ et $S = \sigma^+ p^+ + \sigma^- p^- \in \mathrm{End}\,(TV)$

Lemme.

a) $T(Y, Z) = d\lambda(Y, Z).X + \lambda(Y)S(Z) - \lambda(Z)S(Y)$. En particulier $T(E^+, E^+) = 0$

b) $R(E^+, E^+) = 0$

c) Les géodésiques de ∇ tangentes aux distributions stable (resp. instable) sont complètes.

Remarque. En particulier, les feuilles stables ou instables munies de la connexion induite sont plates et complètes. En outre, elles sont difféomorphes à $\mathbf{R}^{n-1}$ ([A]).

Démonstration. *a)* On calcule $\forall Y^{\pm}, Z^{\pm}, u^{\pm}$ sections de $E^{\pm}$

$$\begin{aligned} d\lambda(T(Y^+,Z^+),u^-) &= d(d\lambda)(Y^+,Z^+,u^-) = 0; \quad \text{donc } T(E^+,E^+) = 0 \\ T(Y^+,Z^-) &= -\lambda([Y^+,Z^-])X = d\lambda(Y^+,Z^-).X \\ \text{et} \quad T(X,Y^{\pm}) &= \sigma^{\pm}Y^{\pm} \quad ; \text{ce qui prouve } a) \end{aligned}$$

b) D'après *a)*, $\nabla T = 0$. La formule de Bianchi nous donne :

$$\begin{aligned} R(Y^+,Z^+)u^- + R(u^-,Y^+)Z^+ + R(Z^+,u^-)Y^+ & \\ &= T(T(Y^+,Z^+),u^-) + T(T(u^-,Y^+),Z^+) + T(T(Z^+,u^-),Y^+) \\ &= Z^+\sigma^+ d\lambda(u^-,Y^+) + Y^+\sigma^+ d\lambda(Z^+,u^-) \end{aligned}$$

or E^+ et E^- sont parallèles et en particulier $R(V,W)T^{\pm}$ appartient à $E^{\pm}$. Ceci nous donne donc

$$R(Y^+,Z^+)u^- = 0$$

Ensuite, $R(Y^+,Z^+)$ est antisymétrique pour $d\lambda$ car $d\lambda$ est parallèle et donc $R(E^+,E^+) = 0$.

c) Par compacité de V, il existe une constante $c > 0$ telle que, si Y^+ est un vecteur tangent à E^+ et vérifie $\|Y^+\| < c$, alors la géodésique dont la condition initiale est Y^+ s'intègre pour un temps supérieur ou égal à 1.

Or quand t tend vers $-\infty$, la norme de $T\varphi_t(Y^+)$ tend vers 0; autrement dit, pour tout Y de E^+, il existe t tel que $\|T\varphi_t(Y)\| < c$. Dès lors, la géodésique tangente à $T\varphi_t(Y)$ s'intègre pour un temps supérieur ou égal à 1. Le flot étant affine, nous obtenons le même résultat pour Y, d'où l'on déduit que la géodésique dans la direction de Y est complète.

On procède de même pour les géodésiques tangentes à E^- $\blacksquare$

2.3. La courbure du fibré des formes volume sur E^+

2.3.1. Soit Λ^+ le fibré de rang 1 des formes volume sur E^+. Il est naturellement muni d'une connexion induite de ∇. Soit Ω^+ la 2-forme de courbure de ce fibré. On a $\forall Y, Z \in E^+$

$$\Omega^+(Y,Z) = \mathrm{tr}\,(R(Y,Z)|_{E^+})$$

Soit B^+ l'opérateur de E dans lui-même défini par

$$\Omega^+(Y,Z) = d\lambda(B^+Y,Z) \text{ et } \lambda(B^+Z) = 0$$

Le but de ce paragraphe est de montrer la

Proposition. *L'opérateur B^+ est nilpotent.*

2.3.2. Construisons tout d'abord une primitive β^+ de Ω^+ (*i.e.* $d\beta^+ = \Omega^+$). C'est la 1-forme de connexion, associée à une section de Λ^+. Si le fibré Λ^+ est trivialisable, on choisit une section ω^+, nulle part nulle, de Λ^+ et on définit β^+ par l'égalité

$$\nabla_Z \omega^+ = \beta^+(Z)\omega^+$$

Si le fibré Λ^+ n'est pas trivialisable, on remarque que le fibré $|\Lambda^+|$ des densités positives sur E^+ l'est (une section de $|\Lambda^+|$ est une "section de Λ^+ modulo le signe"; la fibre de $|\Lambda^+|$ est $\mathbf{R}/\{\pm \mathrm{Id}\} \simeq [0, +\infty[$). On peut donc utiliser la même formule pour définir β^+ à l'aide d'une section ω^+, nulle part nulle, de $|\Lambda^+|$.

2.3.3. Lemme. *On a* $\displaystyle\int_V \beta^+(X)\lambda \wedge (d\lambda)^{n-1} = 0.$

Démonstration. Soit $\Delta^+(t)$ le déterminant de la restriction à E^+ du transport parallèle τ_t pendant le temps t le long des orbites du flot ($\Delta^+(t)$ est calculé à l'aide de la section ω^+). D'après la construction de la connexion, on a

$$\tau_t\big|_{E^+} = e^{-\sigma^+ t} T\varphi_t\big|_{E^+}$$

donc $\Delta^+(t) = e^{-s^+ t}\det\left(T\varphi_t\big|_{E^+}\right)$. On a alors

$$\beta^+(X) = -\frac{d}{dt}\log \Delta^+(t) = -\frac{d}{dt}\left(\log\left(\det\left(T\varphi_t\right)\big|_{E^+}\right)\right) + s^+$$

et donc

$$\int_V \beta^+(X)\lambda \wedge (d\lambda)^{n-1} = 0$$

(dériver par rapport à t la définition de l'entropie) ■

2.3.4. Lemme. $\forall p \in \{1, \ldots, n-1\}$, *on a* $(\Omega^+)^p \wedge (d\lambda)^{n-1-p} = 0$.

Démonstration. Par ergodicité du flot φ_t ([A]), la 2-forme Ω^+ étant invariante par ce flot, il existe des constantes c_q telles que $\lambda \wedge (\Omega^+)^q \wedge (d\lambda)^{n-1-q} = c_q \lambda \wedge (d\lambda)^{n-1}$, $\forall q \in \{0, \ldots, n-1\}$.

Une intégration par parties donne alors:

$$\begin{aligned}\int_V \lambda \wedge (\Omega^+)^p \wedge (d\lambda)^{n-1-p} &= \int_V \beta^+ \wedge (\Omega^+)^{p-1} \wedge (d\lambda)^{n-p} \\ &= c_{p-1}\int_V \beta^+(X)\lambda \wedge (d\lambda)^{n-1} \\ &= 0 \qquad \text{(lemme 2.3.3)}\end{aligned}$$

Donc $c_p = 0$ ■

Démonstration de la proposition. Remarquons que B^+ laisse stable E^+ (2.2.3 *b)*). Soient $x_1, \ldots, x_{n-1}$ les valeurs propres de $B^+_{v_0}\big|_{E^+_{v_0}}$: le lemme 2.3.4 prouve que, $\forall p \in \{1, \ldots, n-1\}$ on a $\sum_{i_1 < \ldots < i_p} x_{i_1} \ldots x_{i_p} = 0$. Donc $x_1, \ldots, x_{n-1}$ sont nuls et $B^+_{v_0}$ est nilpotent ■

2.4. Une algèbre de Lie réductive

2.4.1. *Notations.* On fixe désormais un point v_0 dans Ω et on suppose que v_0 est sur une orbite périodique du flot de période t_0.

Soit $\mathfrak{g}'$ l'algèbre de Lie des germes en v_0 de champs de vecteurs Y qui préservent X et $E^{\pm}$ (*i.e.* : $[Y,X]=0$ et $[Y,E^{\pm}]\subset E^{\pm}$). C'est l'algèbre de Lie des champs de Killing de la structure géométrique au sens de Gromov [Gr].

Soit $\mathfrak{h}'$ la sous-algèbre de Lie des champs de vecteurs qui s'annulent en v_0 ($Y_{v_0}=0$). C'est l'algèbre de Lie de $H'=\mathrm{Is}^{\mathrm{loc}}(v_0)$.

Soit $\mathfrak{q}'^{\pm}$ la sous-algèbre de Lie des champs de vecteurs Y tels que $Y_{v_0}\in E^{\pm}_{v_0}$. C'est l'algèbre de Lie du "stabilisateur" d'une feuille stable (ou instable). Enfin, $\mathfrak{p}'^{\pm}=\mathfrak{q}'^{\pm}\oplus\mathbf{R}X$, est l'algèbre de Lie du "stabilisateur" d'une feuille centrale stable (ou instable).

A tout champ de vecteurs Y on associe le $(1,1)$-tenseur $A_Y=L_Y-\nabla_Y$ (où L_Y est la dérivée de Lie). Le lemme suivant est classique [KN]; on note $E:=TV$.

Lemme.

a) *L'application $i:\mathfrak{g}'\to E_{v_0}\times\mathrm{End}\,(E_{v_0})$ donnée par $i(Y)=(Y_{v_0},(A_Y)_{v_0})$ est injective.*

b) *La structure d'algèbre de Lie induite sur $i(\mathfrak{g}')$ est donnée par , $\forall(y,A),(y',A')\in i(\mathfrak{g}')$:*
$$[(y,A),(y',A')]=(Ay'-A'y+T(y,y'),[A,A']-R(y,y'))$$

c) *L'application $j:H'\to\mathbf{GL}(E_{v_0})$ donnée par $j(h)=T_{v_0}(h)$ est injective et $dj=i\big|_{\mathfrak{h}'}$.*

Remarquons que $\mathfrak{g}'/\mathfrak{h}'$ (resp. $\mathfrak{q}'^{\pm}/\mathfrak{h}'$) s'identifie à E_{v_0} (resp. $E^{\pm}_{v_0}$) comme H'-module (corollaire 2.1.3). On identifiera $\mathfrak{g}'$ à $i(\mathfrak{g}')$, $\mathfrak{h}'$ à $i(\mathfrak{h}')$ et H' à $j(H')$.

2.4.2. Soit h l'application de premier retour de l'orbite de v_0 : $h=T_{v_0}\varphi_{t_0}\in H'\subset\mathbf{GL}(E_{v_0})$. Soit L_0 le logarithme de la partie hyperbolique (dans la décomposition de Jordan) de h.

Lemme.

a) *H' est un sous-groupe algébrique de $\mathbf{GL}(E_{v_0})$.*

b) *$L_0\in\mathfrak{h}'$*

c) *Les valeurs propres de L_0 dans $E^{+}_{v_0}$ sont strictement positives.*

Démonstration. a) D'après ([Gr] §1), il existe r tel que $\mathrm{Is}^{\mathrm{loc}}(v_0)\simeq\mathrm{Is}^{r}(v_0)$. Le groupe $\mathrm{Is}^{r}(v_0)$ est algébrique par construction, il en est de même de son image dans $\mathbf{GL}(E_{v_0})$.

b) résulte de ce que H' est algébrique, et contient donc la partie elliptique et hyperbolique de tout élément.

c) résulte de ce que le flot φ_t est d'Anosov ∎

2.4.3. On note $X=(X_{v_0},-S)$ l'élément de $\mathfrak{g}'\approx i(\mathfrak{g}')$ donné par le champ de vecteurs X (où $S=\sigma^+p^++\sigma^-p^-$: cf. 2.2.3).

Proposition. *L'algèbre de Lie $\mathfrak{g}'$ est réductive; son centre est $\mathbf{R}X$.*

Démonstration. Par construction, X est dans le centre de $\mathfrak{g}'$. Il nous suffit de démontrer que tout idéal nilpotent $\mathfrak{i}$ de $\mathfrak{g}'$ est inclus dans $\mathbf{R}X$.

Soient $\mathfrak{g}'_i$ (resp. $\mathfrak{h}'_i$, $E_{v_0,i}$) l'espace propre pour la valeur propre réelle i de l'action de L_0 dans $\mathfrak{g}'$ (resp. $\mathfrak{h}'$, E_{v_0}). On a les égalités:

$$\mathfrak{g}' = \oplus_{i\in\mathbf{R}}\mathfrak{g}'_i, \quad \mathfrak{i} = \oplus_{i\in\mathbf{R}}\mathfrak{i}_i \quad \text{et} \quad E_{v_0} = \oplus_{i\in\mathbf{R}}E_{v_0,i}$$

Montrons que, $\forall i \neq 0$, $\mathfrak{i}_i \subset \mathfrak{h}'$: soit $(y, A) \in \mathfrak{i}_i$. Pour tout $(y', A') \in \mathfrak{g}_{-i}$, posons

$$(y'', A'') = [(y, A), (y', A')] \in \mathfrak{i}_0 \subset \mathfrak{g}'_0 \subset \mathfrak{h}' \oplus \mathbf{R}X \qquad (2.4.2\ c))$$

On a les égalités, en remarquant que $Ay' = A'y = 0$ (car $E^+_{v_0} \cap E_{v_0,0} = 0$)

$$\begin{aligned}(y'', A'') &= \big(d\lambda(y, y')X_{v_0}, [A, A'] - R(y, y')\big) && (2.2.3 \text{ et } 2.4.1)\\ &= \big(0, d\lambda(y, y')S + [A, A'] - R(y, y')\big) && \text{modulo } \mathbf{R}X\end{aligned}$$

Comme $\mathfrak{i}$ est un idéal nilpotent, on a

$$\mathrm{tr}\big|_{E^+_{v_0}}((y'', A'')) = 0$$

Le calcul de cette trace donne : $d\lambda((s^+ + B^+)y, y') = 0$, $\forall y' \in E_{v_0,-i}$ (remarquer que $[A, A']$ a une trace nulle). On a donc $(s^+ + B^+)y = 0$. Comme B^+ est un opérateur nilpotent (2.3.1) et $s^+ \neq 0$ (2.2.1), on en déduit $y = 0$ et $\mathfrak{i}_i \subset \mathfrak{h}'$.

Donc $\mathfrak{i} \subset \mathfrak{h}' \oplus \mathbf{R}X$. Comme $\mathfrak{h}'$ ne contient pas d'idéal de $\mathfrak{g}'$ on a $\mathfrak{h}' \cap (\mathfrak{i} \oplus \mathbf{R}X) = 0$ *i.e.* $\mathfrak{i} \subset \mathbf{R}X$ ■

2.5. La courbure du fibré des formes volume sur E^+ (bis)

2.5.1. Lemme. *Il existe une sous-algèbre de Cartan $\mathfrak{c}'$ de $\mathfrak{g}'$ incluse dans $\mathfrak{h}' \oplus \mathbf{R}X$.*

Démonstration. Soit $L_0 \in \mathfrak{h}'$ comme en 2.4.2. Il existe une sous-algèbre de Cartan $\mathfrak{c}'$ de $\mathfrak{g}'$ contenant L_0 On a alors $\mathfrak{c}' \subset \mathfrak{g}'_0 \subset \mathfrak{h}' \oplus \mathbf{R}X$ (cf. 2.4.2) ■

2.5.2. Proposition. *La courbure Ω^+ du fibré des formes volume sur E^+ est nulle.*

Démonstration. Pour tout espace vectoriel W, on note $W_{\mathbf{C}}$ son complexifié. L'opérateur $B^+_{v_0}$ sur $E_{v_0} \approx \mathfrak{g}'/\mathfrak{h}'$ commute à l'action de H'; il commute donc à l'action de $\mathfrak{c}'$. Or les espaces de poids de l'action adjointe de $\mathfrak{c}'_{\mathbf{C}}$ dans $\mathfrak{g}'_{\mathbf{C}}/\mathfrak{h}'_{\mathbf{C}}$ sont de dimension 1 ([Bo] Ch. VIII §2 théorème 1); il en est de même dans $\mathfrak{g}'_{\mathbf{C}}/\mathfrak{h}'_{\mathbf{C}}$. On en déduit que $B^+_{v_0}$ est semisimple; or il est nilpotent (2.3.1), il est donc nul et $\Omega^+ = 0$ ■

2.5.3. Puisque le fibré de rang un $\Lambda\tilde{E}^+$ est plat (2.5.2), il existe une section parallèle $\tilde{\omega}^+$ de ce fibré (unique à une constante près). Soit $d\chi : \mathfrak{g}' \to \mathbf{R}$ le caractère défini par, $\forall Y \in \mathfrak{g}'$, $L_Y(\tilde{\omega}^+) = d\chi(Y).\tilde{\omega}^+$

Soient $\mathfrak{g} = \{Y \in \mathfrak{g}' \mid L_Y(\tilde{\omega}^+) = 0\}$, $\mathfrak{h} = \mathfrak{h}' \cap \mathfrak{g}$ et $H = \{h \in H' \mid h_*\tilde{\omega}^+ = \pm\tilde{\omega}^+\}$.

LEMME.

a) $\mathfrak{g}$ *est une algèbre de Lie semisimple.*

b) $\mathfrak{g}' = \mathfrak{g} + \mathfrak{h}'$.

Démonstration. a) résulte de 2.4.2.

b) Il suffit de voir que $\mathfrak{h}' \not\subset \mathfrak{g}$. Or l'élément L_0 de 2.4.2 est dans $\mathfrak{h}'$ et n'est pas dans $\mathfrak{g}$ car $d\chi(L_0) = \mathrm{tr}\big|_{E^+_{v_0}}(L_0) > 0$ (d'après 2.4.2) ■

REMARQUE. Ceci prouve aussi qu'il existe $r \in \mathbf{R}$ tel que $X - rL_0 \in \mathfrak{g}$: prendre $r = \dfrac{s^+}{d\chi(L_0)}$.

3. Une structure d'espace homogène

3.0. Le but de ce chapitre est de terminer la démonstration de la proposition 1.1.

On construit en 3.1 une certaine $(G', \overline{V})$-structure sur l'ouvert Ω. Grâce à la complétude de la connexion le long des feuilles stables, on prolonge en 3.2 cette $(G', \overline{V})$-structure à V tout entier et on montre en 3.3 que ce prolongement est complet. Ce qui signifie que $\tilde{V}$ s'identifie à $\overline{V}$ et que G' s'identifie au groupe des difféomorphismes de $\tilde{V}$ qui préservent $\tilde{X}$ et $\tilde{E}^{\pm}$. On peut alors écrire $G' = G \times \mathbf{R}$ où G est semisimple et agit transitivement sur $\tilde{V}$.

On montre en 3.4 comment ces méthodes s'adaptent à l'étude des difféomorphismes d'Anosov symplectiques.

3.1. Construction d'un espace modèle

3.1.1. Il est commode de construire un espace modèle $(\overline{V}, \overline{X}, \overline{E}^{\pm})$ auquel on compare $(\tilde{V}, \tilde{X}, \tilde{E}^{\pm})$. Soit $\overline{G}'$ le groupe connexe et simplement connexe d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}'$, $\overline{H}'$, $\overline{G}$, $\overline{H}$ et $\overline{Q}'^{\pm}$ les sous-groupes connexes d'algèbres de Lie $\mathfrak{h}'$, $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{h}$ et $\mathfrak{q}'^{\pm}$.

LEMME. *Le sous-groupe* $\overline{H}'$ *est fermé dans* $\overline{G}'$.

REMARQUE. Cette propriété indispensable à la construction de notre espace modèle n'est pas valable pour toutes les structures 1-rigides (cf. [LT]).

Démonstration. Le morphisme :

$$\begin{aligned} H' &\to \mathrm{Aut}\,(\mathfrak{g}') \\ h' &\mapsto (Y \mapsto h'_*(Y)) \end{aligned}$$

est injectif car $\mathfrak{g}'/\mathfrak{h}' \simeq E_{v_0}$. En outre, ce morphisme est algébrique (cf. 2.4.2). Il permet d'identifier H et H' à des sous-groupes algébriques, donc fermés, de $\mathrm{Aut}\,(\mathfrak{g}')$.

Comme $\mathfrak{g}$ est semisimple, l'application adjointe $\mathrm{Ad} : \overline{G} \to \mathrm{Aut}\,(\mathfrak{g}')$ est un revêtement sur son image. On a l'égalité $\mathrm{Ad}\,(\overline{H}) = H_e$. Donc $\overline{H}$ est fermé et par suite $\overline{H}'$ aussi ■

3.1.2. Soient $\overline{V} = \overline{G}'/\overline{H}'$ la variété quotient, $\overline{v}_0$ le point-base de $\overline{V}$, $\overline{\varphi}_t$ le flot sur $\overline{V}$ défini par l'élément $X \in \mathfrak{g}' : \overline{\varphi}_t(\overline{v}) = \exp\,(tX).\overline{v}$ et $\overline{X}$ le champ de vecteurs correspondant. Soient $\overline{E}^{\pm}$ la distribution tangente au feuilletage $\{g\overline{Q}'^{\pm}/\overline{H}' \mid g\overline{Q}'^{\pm} \in \overline{G}'/\overline{Q}'^{\pm}\}$.

Nous obtenons donc sur $\overline{V}$ une A-structure homogène donnée par $(\overline{E}^{\pm}, X)$ et qui est localement isomorphe à celle de Ω. En effet, la formule $\theta(\exp\,(Y).v_0) = \exp\,(Y).\overline{v}_0$, pour tout Y dans $\mathfrak{g}'$ suffisamment petit, définit un difféomorphisme θ d'un voisinage ouvert de v_0 dans un voisinage ouvert de $\overline{v}_0$ et on a $\theta_*(X) = \overline{X}$, $\theta_*(E^{\pm}) = \overline{E}^{\pm}$.

3.1.3. Soit G' le groupe des difféomorphismes de $\overline{V}$ qui préservent $\overline{X}$ et $\overline{E}^{\pm}$: c'est un groupe de Lie dont la composante connexe est l'image de $\overline{G}'$ dans Diffeom$(\overline{V})$. Soit H' le sous-groupe d'isotropie dans G' du point-base $\overline{v}_0$; cette notation ne prête pas à confusion car on a le lemme :

Lemme.

a) On a les identifications suivantes

$$H' \approx \mathrm{Is}^{\mathrm{loc}}(\overline{v}_0) \approx \{A \in \mathrm{Aut}\,(\mathfrak{g}') \mid A(X) = X,\ A(\mathfrak{q}'^{\pm}) \subset \mathfrak{q}'^{\pm} \textit{ et } A(\mathfrak{h}') \subset \mathfrak{h}'\}$$

b) Tout difféomorphisme d'un ouvert connexe de $\overline{V}$ dans un autre, qui préserve $\overline{X}$ et $\overline{E}^{\pm}$ est la restriction d'un élément de G'.

Démonstration. a) Soit H'_1 le membre de droite de l'égalité. Rappelons que $\mathrm{Is}^{\mathrm{loc}}(\overline{v}_0)$ est le groupe des germes en $\overline{v}_0$ des difféomorphismes locaux de $\overline{V}$ qui préservent $\overline{X}$ et $\overline{E}^{\pm}$ et envoient $\overline{v}_0$ sur lui-même. On a des inclusions $H' \subset \mathrm{Is}^{\mathrm{loc}}(\overline{v}_0) \subset H'_1$: remarquer qu'un élément de $\mathrm{Is}^{\mathrm{loc}}(\overline{v}_0)$ agit naturellement sur $\mathfrak{g}'$. Un élément de H'_1 est aussi un automorphisme de $\overline{G}'$ qui préserve $\overline{H}'$, donc un difféomorphisme de $\overline{V}$, ce qui permet de prouver l'inclusion inverse $H'_1 \subset H'$.

b) On se ramène au cas où le difféomorphisme fixe le point $\overline{v}_0$. L'affirmation est alors une conséquence de l'égalité $H' = \mathrm{Is}^{\mathrm{loc}}(\overline{v}_0)$ que l'on vient de démontrer ■

Remarque. On a $\overline{V} = G'/H'$. Comme H' est algébrique, on en déduit que H' et G' ont un nombre fini de composantes connexes.

3.1.4. Lemme. *Les difféomorphismes θ d'un ouvert de Ω sur un ouvert de $\overline{V}$ tels que $\theta_*(X) = \overline{X}$ et $\theta_*(E^\pm) = \overline{E}^\pm$ forment l'atlas maximal d'une $(G', \overline{V})$-structure sur Ω (au sens de [T]).*

Démonstration. Par construction, les domaines de définition de ces difféomorphismes recouvrent Ω. Il résulte de 3.1.3, que les changements de cartes sont donnés localement par des éléments de G' ■

Corollaire. *Pour tout ouvert connexe et simplement connexe O de Ω, il existe une "application développante" $\theta : O \to \overline{V}$; i.e. un difféomorphisme local tel que $\theta_*(X) = \overline{X}$ et $\theta(E^\pm) = \overline{E}^\pm$.*

Démonstration. Classique ■

3.1.6. Soit $\overline{\nabla}$ la connexion sur $\overline{V}$ construite comme en 2.2.2.

Remarques. 1. G' est un groupe de transformations affines pour $\overline{\nabla}$.
2. Toute carte d'un ouvert de V dans $\overline{V}$ envoie ∇ sur $\overline{\nabla}$

Lemme. *Les géodésiques (de $\overline{\nabla}$) tangentes aux distributions $\overline{E}^+$ (resp. $\overline{E}^-$) sont complètes.*

Démonstration. Rappelons l'existence de l'ensemble Δ, défini en 2.1.4. Soit $\overline{Y} \in \overline{E}^+$. Montrons que la géodésique de condition initiale $\overline{Y}$ s'intègre pendant un temps supérieur à 1. Il existe un ouvert connexe et simplement connexe O de Ω, une application développante $\theta : O \to \overline{V}$ et un élément $Y \in E^+|_O$ tel que le point-base $v \in \Omega$ de Y est dans Δ et $T\theta(Y) = \overline{Y}$. D'après 2.2.3, la géodésique $t \to \gamma(t)$ issue de Y s'intègre pendant un temps supérieur à 1 et est incluse dans $F_v^+ \subset \Omega$. On peut donc supposer que $\gamma([0,1]) \subset O$. Alors le lacet $t \to \theta \circ \gamma(t)$ est la géodésique issue de $\overline{Y}$. C'est ce que l'on voulait ■

3.2. Prolongement à V de la $(G', \overline{V})$-structure

3.2.1. *A-coordonnées.* Grâce à la complétude de la connexion le long des feuilles stables et instables, nous allons définir en tout point v de V des applications ψ_v que nous appellerons A-coordonnées. Il s'agit d'atteindre les points de V par une géodésique brisée d'abord le long d'une orbite du flot puis dans une feuille instable et enfin dans une feuille stable. Elles sont données par la formule :

$$\psi_v : T_v(V) = E_v^+ \oplus E_v^0 \oplus E_v^- \to V$$
$$Y = Y^+ + tX + Y^- \mapsto \psi_v(Y) = \varphi_t(\exp^\nabla(\tau_{Y^+}(Y^-)))$$

où $\exp^{\nabla}$ désigne l'application exponentielle pour la connexion ∇ et $\tau_{Y^+}(Y^-)$ est l'image par le transport parallèle pendant le temps 1 le long de la géodésique $t \to \exp^{\nabla}(tY^+)$ du vecteur Y^-.

On définit de même, en tout point $\tilde{v}$ de $\tilde{V}$ et $\overline{v}$ de $\overline{V}$ des A-coordonnées $\tilde{\psi}_{\tilde{v}}$ et $\overline{\psi}_{\overline{v}}$. Les A-coordonnées sont des difféomorphismes au voisinage de l'origine.

3.2.2. *Ouverts A-étoilés.* On dira qu'un ouvert O de V est A-étoilé par rapport à v si il existe un ouvert U de T_vV (nous l'appellerons ouvert associé) tel que :

i) ψ_v est un difféomorphisme de U sur O.

ii) Tout point de O est atteint par une géodésique brisée issue de v; plus précisément, pour tout s dans $[0,1]$, si $Y = Y^+ + tX + Y^-$ est dans U alors $Y^+ + tX + sY^-$, $sY^+ + tX$ et stX aussi.

Par construction, les ouverts A-étoilés se comportent bien vis-à vis des transformations affines, autrement dit, si O est un ouvert A-étoilé par rapport à v et si θ est une application développante de O dans $\overline{V}$ alors

$$\theta \circ \psi_v = \overline{\psi}_{\theta(v)} \circ T_v\theta \qquad (*)$$

Remarquons que les ouverts A-étoilés sont contractiles et donc connexes et simplement connexes.

Le lemme suivant est important :

Lemme. *Soit v un point de Δ (2.1.4) et O un ouvert A-étoilé par rapport à v. Alors il existe un ouvert dense O' de O A-étoilé par rapport à v et inclus dans Ω.*

Démonstration. Soient U l'ouvert de T_vV associé à O et

$$U' = \Big\{ Y = Y^+ + tX + Y^- \in U \text{ tel que, } \forall s \in [0,1], \psi_v(Y^+ + tX + sY^-) \in \Omega \Big\}$$

On prend $O' = \psi_v(U')$. Toutes les propriétés sont évidemment vérifiées ∎

3.2.3. Proposition. $\Omega = V$

Démonstration. Il suffit de démontrer que l'on peut étendre à V la $(G', \overline{V})$-structure sur Ω.

Remarquons tout d'abord que l'on peut recouvrir V par des ouverts O_{v_i} A-étoilés par rapport à des points v_i de Δ (prendre $O_{v_i} = \psi_{v_i}\big(\{Y = Y^+ + tX + Y^- \in T_{v_i}V \text{ tel ques } \|Y^+\| + |t| + \|Y^-\| < \varepsilon\}\big)$ pour ε sufisamment petit). On peut alors grâce au lemme précédent construire des ouverts O'_{v_i} de $O_{v_i} \cap \Omega$ A-étoilés par rapport à v_i et denses dans O_{v_i}.

En particulier, comme ils sont simplement connexes et inclus dans Ω, il existe une application développante θ de O'_{v_i} dans $\overline{V}$. Définissons alors $\overline{\theta}$ de O_{v_i} dans $\overline{V}$ par

$$\overline{\theta} = \overline{\psi}_{\theta(v_i)} \circ (T_{v_i}\theta) \circ \psi_{v_i}^{-1}$$

D'après $(*)$, $\overline{\theta}$ est une extension de θ. Enfin, comme O'_{v_i} est dense dans O_{v_i}, on a $\overline{\theta}_*(X) = \overline{X}$ et $\overline{\theta}_*(E^{\pm}) = \overline{E}^{\pm}$. On en déduit que $\overline{\theta}$ est un difféomorphisme local et donc une application développante. C'est ce qu'on voulait ∎

3.3. Complétude de la $(G', \overline{V})$-structure

3.3.1. Proposition. *Soit $\theta : \tilde{V} \to \overline{V}$ une application développante de la $(G', \overline{V})$-structure. Alors θ est un difféomorphisme surjectif.*

Démonstration. Il suffit de voir que θ est un revêtement. Soit donc w un point de $\overline{V}$, l'image réciproque de w est constituée de points $(v_i)_{i \in I}$. Soient O un ouvert A-étoilé par rapport à w, U l'ouvert associé dans $T_w\overline{V}$ et $O_i = \tilde{\psi}_{v_i}\big((T_{v_i}\theta)^{-1}(U)\big)$. Nous allons démontrer :

i) θ induit un difféomorphisme θ_i de O_i sur O.
ii) les ouverts O_i sont deux à deux disjoints
iii) $\theta^{-1}(O) = \bigcup_{i \in I} O_i$

Le *i)* résulte de $(*)$. Le *ii)* résulte de ce que $\{w' \in O \mid \theta_i^{-1}(w') = \theta_j^{-1}(w')\}$ est ouvert et fermé, il est donc vide lorsque $i \neq j$. Le *iii)* est le point crucial. On peut soit faire un dessin soit introduire de nouvelles notations. Soient $\tilde{\Psi}$ le transport parallèle le long de nos géodésiques brisées :

$$\tilde{\Psi} : T\tilde{V} \to T\tilde{V}$$
$$\tilde{Y} = \tilde{Y}^+ + t\tilde{X} + \tilde{Y}^- \mapsto (\tilde{\varphi}_t)_* \left(\tilde{\tau}_{\left(\tilde{\tau}_{\tilde{Y}^+}(\tilde{Y}^-)\right)}\big(\tilde{\tau}_{\tilde{Y}^+}(\tilde{Y})\big)\right)$$

et $\overline{\Psi} : T\overline{V} \to T\overline{V}$ donnée par des formules semblables; de sorte que

$$T\theta \circ \tilde{\Psi} = \overline{\Psi} \circ T\theta$$

L'application $\tilde{\Psi}$ est un difféomorphisme: on peut écrire la formule explicite pour $\tilde{\Psi}^{-1}$.

Soit $v' \in \tilde{V}$ tel que $\theta(v') \in O$. On peut écrire $\theta(v') = \tilde{\psi}_w(\overline{Y})$ avec $\overline{Y} \in U$. Soient $\tilde{Y} := \tilde{\Psi}^{-1}\left((T_{v'}\theta)^{-1}(\overline{\Psi}(\overline{Y}))\right)$ et $v \in \tilde{V}$ le point base de $\tilde{Y}$; on a $\theta(v) = w$, donc, $\exists i \in I$, tel que $v = v_i$. On a $(T_{v_i}\theta)(\tilde{Y}) = \overline{Y}$ et $v' = \tilde{\psi}_{v_i}(\tilde{Y})$; donc $v' \in O_i$. C'est ce qu'il fallait démontrer ■

3.3.2. La proposition 1.1 est une conséquence immédiate de 3.3.1. On identifiera désormais $\tilde{V}$ et $\overline{V} = G'/H'$. On note $\tilde{v}_0$ le point base de $\tilde{V}$.

3.3.3. Il est facile de terminer la démonstration de la proposition 1.2.1. Reprenons les notations de 2.5.3. Soit $\chi : G' \to \mathbf{R}^*$ le caractère défini par

$$\forall g \in G', \quad g_*(\tilde{\omega}^+) = \chi(g)\tilde{\omega}^+$$

Soit $G = \{g \in G' \mid \chi(g) = \pm 1\}$ et $\mathbf{R}$ le sous-groupe à un paramètre donné par le flot $\tilde{\varphi}_t$: on a $\chi(\tilde{\varphi}_t) = e^{s^+.t}$.

LEMME.

a) $G' = G \times \mathbf{R}$

b) *G est semisimple et agit transitivement sur* $\tilde{V}$.

Démonstration. *a)* est clair et *b)* résulte de 2.5.3.

3.4. Les difféomorphismes d'Anosov symplectiques.

Cette partie, par ses notations et ses résultats, est indépendante du reste. On y donne la démonstration du théorème 3: c'est la même, mutatis mutandis, *que celle de la proposition 1.1.*

3.4.1. Soient (V, ω) une variété symplectique compacte, φ un difféomorphisme d'Anosov([A]) et $TV = E^+ \oplus E^-$ la décomposition d'Anosov du fibré tangent en sous-fibrés instable et stable. On suppose que φ est symplectique (*i.e.* $\varphi_*(\omega) = \omega$) et que $E^\pm$ varient de façon C^∞. On montre successivement :

LEMME. *Le pseudogroupe des difféomorphismes locaux de* V *qui préservent* ω *et* $E^\pm$ *est de Lie et a une orbite ouverte dense* Ω.

Démonstration. Comme en 2.1 ■

3.4.2. Choisissons un point périodique v_0 dans Ω : $\varphi^{n_0}(v_0) = v_0$. Soient $\mathfrak{g}'$ l'algèbre de Lie des champs de vecteurs locaux en v_0 préservant ω et $E^\pm$ et $\mathfrak{h}' = \{Y \in \mathfrak{g}' \mid Y_{v_0} = 0\}$. Soit L_0 le logarithme de la partie hyperbolique de $T_{v_0}\varphi^{n_0}$. On a, comme en 2.4.2 :

LEMME.

a) $L_0 \in \mathfrak{h}'$

b) *Les valeurs propres de* L_0 *dans* $E^+_{v_0}$ *sont strictement positives.*

COROLLAIRE. *Le centre de* $\mathfrak{g}'$ *est nul.*

Démonstration. Le lemme précédent prouve que ce centre est inclus dans $\mathfrak{h}'$. Il est donc nul ■

3.4.3. Soient $\overline{G}'$ le groupe de Lie connexe et simplement connexe d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}'$ et $\overline{H}'$ le sous-groupe connexe d'algèbre de Lie $\mathfrak{h}'$.

LEMME. $\overline{H}'$ *est fermé dans* $\overline{G}'$.

Démonstration. On procède comme en 3.1.1 grâce au corollaire ci-dessus ■

On construit comme en 3.1.2 un espace-modèle $(\overline{V}, \overline{\omega}, \overline{E}^\pm)$. Soit G' le groupe (de Lie) des difféomorphismes de $\overline{V}$ préservant $\overline{\omega}$ et $\overline{E}^\pm$. L'ouvert Ω est naturellement muni d'une $(G', \overline{V})$-structure.

3.4.4. On démontre comme en 2.2 :

LEMME.

a) Il existe une unique connexion ∇ sur V telle que

i) $\nabla\omega = 0$ *et* $\nabla E^{\pm} \subset E^{\pm}$

ii) $\forall Z^{\pm}$ *section de* $E^{\pm}$

$$\begin{aligned}\nabla_{Z^-} Z^+ &= p^+([Z^-, Z^+]) \\ \nabla_{Z^+} Z^- &= p^-([Z^+, Z^-])\end{aligned}$$

où $p^{\pm}$ *est la projection sur* $E^{\pm}$ *parallèlement à* $E^{\mp}$.

b) Cette connexion est complète le long des feuilles instables.

On utilise cette connexion, comme en 3.2 et 3.3 pour démontrer le

LEMME. $\Omega = V$ *et la* $(G', \overline{V})$*-structure sur* V *est complète.*

Le théorème 3 est une reformulation de ce lemme.

Nous oublions désormais les notations de cette partie 3.4 pour revenir à l'étude des flots Anosov-contact.

4. Propriétés des sous-groupes d'isotropie H

4.0. Le but de ce chapitre est de montrer la proposition 1.2.2. On remarque tout d'abord que $\mathfrak{p}^+$ est une sous-algèbre parabolique de $\mathfrak{g}$ dont $\mathfrak{g}_0$ est une composante réductive. (4.1). Pour toute décomposition G'_e-invariante du fibré $\tilde{E}^+$, on construit une nouvelle connexion G'_e-invariante pour laquelle cette décomposition est parallèle. Le fibré des formes volume sur chacun des sous-fibrés est alors plat (4.2). En appliquant ceci à la décomposition du fibré $\tilde{E}^+$ associée à un élément hyperbolique du centre de $\mathfrak{g}_0$, on montre que $\mathfrak{p}^+$ est maximale (4.3).

On montre en 4.4 comment un reparamétrage C^∞ du flot permet de supposer que le groupe d'holonomie $\Gamma = \pi_1(V)$ est un sous-groupe de G (au lieu de $G' = G \times \mathbf{R}$). Les résultats de cette partie seront aussi utiles pour la construction de l'exemple fondamental.

On interprète enfin, en termes algébriques, les objets géométriques associés au flot (4.5).

4.1. La sous-algèbre $\mathfrak{p}^+$ est parabolique

4.1.1. Notons $\mathfrak{p}^{\pm} := \mathfrak{p}'^{\pm} \cap \mathfrak{g}$, $\mathfrak{q}^{\pm} := \mathfrak{q}'^{\pm} \cap \mathfrak{g}$, $\mathfrak{h} := \mathfrak{h}' \cap \mathfrak{g}$ et $\mathfrak{g}_0 := \big(\mathfrak{h}' \oplus \mathbf{R}X\big) \cap \mathfrak{g}$; ce sont des sous-algèbres de Lie de $\mathfrak{g}$. Ces algèbres sont les algèbres de Lie stabilisant certains ensembles géométriques de $\tilde{V}$ dans G : $\mathfrak{h}$ est l'algèbre de Lie du groupe d'isotropie d'un point, $\mathfrak{p}^{\pm}$ celle du stabilisatuer d'une feuille centrale instable (ou stable), $\mathfrak{q}^{\pm}$ celle du stabilisateur d'une feuille stable (ou instable) et enfin $\mathfrak{g}_0$ est celle du stabilisateur d'une orbite du flot φ_t.

Lemme. *Il existe une sous-algèbre de Cartan $\mathfrak{c}$ de $\mathfrak{g}$ incluse dans $\mathfrak{g}_0$.*

Démonstration. Cela résulte de 2.5.1 : prendre $\mathfrak{c} = \mathfrak{c}' \cap \mathfrak{g}$ ■

4.1.2. Pour α dans $\mathfrak{c}_{\mathbf{C}}^*$ et E un sous-espace vectoriel de $\mathfrak{g}_{\mathbf{C}}$ stable par l'action adjointe de $\mathfrak{c}_{\mathbf{C}}$, on note $E^{\alpha} = \{Y \in E \mid [Z,Y] = \alpha(Z)Y, \forall Z \in \mathfrak{c}_{\mathbf{C}}\}$ et $\Delta(E, \mathfrak{c}_{\mathbf{C}}) = \{\alpha \in \mathfrak{c}_{\mathbf{C}}^* \setminus \{0\} \mid E^{\alpha} \neq 0\}$.

Soient $\Delta = \Delta(\mathfrak{g}_{\mathbf{C}}, \mathfrak{c}_{\mathbf{C}})$ le système de racines de $\mathfrak{g}_{\mathbf{C}}$, $\Delta_0 = \Delta(\mathfrak{g}_{0\mathbf{C}}, \mathfrak{c}_{\mathbf{C}})$ et $\Delta_{0,\pm} = \Delta(\mathfrak{p}^{\pm}_{\mathbf{C}}, \mathfrak{c}_{\mathbf{C}})$.

Lemme.

a) *Les sous-algèbres $\mathfrak{p}^+$ et $\mathfrak{p}^-$ sont des sous-algèbres paraboliques opposées (i.e. $\Delta = \Delta_{0,+} \cup \Delta_{0,-}$ et $\Delta_{0,-} = -\Delta_{0,+}$).*

b) *La sous-algèbre $\mathfrak{g}_0$ est une composante réductive de $\mathfrak{p}^+$ (resp. $\mathfrak{p}^-$).*

Démonstration. Soient $\Delta_{\pm} = \Delta_{0,\pm} \setminus \Delta_0$. On a la réunion disjointe $\Delta = \Delta^+ \cup \Delta_0 \cup \Delta_-$. L'isomorphisme canonique de $\mathfrak{p}^{\pm}/\mathfrak{g}_0 \approx \mathfrak{q}^{\pm}/\mathfrak{h}$ sur $E^{\pm}_{v_0}$ est un isomorphisme de $\mathfrak{c}$-modules, la 2-forme $(d\lambda)_{v_0}$ est $\mathfrak{c}_{\mathbf{C}}$-invariante et met en dualité non dégénérée $E^+_{v_0}$ et $E^-_{v_0}$; donc $\Delta_- = -\Delta^+$, puis $\Delta_{0,-} = -\Delta_{0,+}$ et $\Delta = \Delta_{0,+} \cup (-\Delta_{0,+})$. Ceci prouve que $\mathfrak{p}^+$ et $\mathfrak{p}^-$ sont des sous-algèbres paraboliques opposées de $\mathfrak{g}$ et que $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{p}^+ \cap \mathfrak{p}^-$ est la composante réductive de $\mathfrak{p}^+$ (cf. [Bo2] ch. VIII §3 n° 4) ■

4.2. Une connexion adaptée à une décomposition de E^+

Quitte à remplacer V par un revêtement fini, on supposera dans cette partie et la suivante que Γ est inclus dans G'_e (cf. 3.1.3).

4.2.1. Fixons dans cette partie, une décomposition H'_e-invariante de $E^+_{v_0}$: $E^+_{v_0} = \oplus_{i \in I^+} E^{+,i}_{v_0}$ où I^+ est un ensemble d'indices. On note $E^-_{v_0} = \oplus_{i \in I^+} E^{-,i}_{v_0}$ la décomposition H'_e-invariante de $E^-_{v_0}$ qui s'en déduit :

$$E^{-,i}_{v_0} = \big\{Z \in E^-_{v_0} \mid \forall j \neq i, \forall Y \in E^{+,j}_{v_0}, d\lambda(Y,Z) = 0\big\}$$

Soit $I = \{+,-\} \times I^+$. Pour i dans I, on note $\tilde{E}^i$ le sous-fibré G'_e-invariant de $T\tilde{V}$ dont la fibre en $\tilde{v}_0$ est $E^i_{v_0}$, E^i l'image de $\tilde{E}^i$ dans TV, s^i l'entropie de E^i (cf. 2.2.1), $\sigma^i = \dfrac{s^i}{\operatorname{rang}(E^i)}$ et p^i la projection sur E^i parallèlement à $E^0 \oplus (\oplus_{j \neq i} E^j)$.

LEMME. *Il existe une unique connexion D sur V telle que*

i) $D\lambda = 0$, $D(d\lambda) = 0$ *et* $D(E^i) \subset E^i \quad \forall i \in I$

ii) $\forall i, j \in I$ *de signes différents,* $\forall Z^i, Z^j$ *sections de* E^i, E^j

$$\begin{aligned} D_{Z^j} Z^i &= p^i([Z^j, Z^i]) \\ \text{et} \quad D_X Z^i &= [X, Z^i] + \sigma^i . Z^i \end{aligned}$$

REMARQUE. La connexion $\tilde{D}$ sur $\tilde{V}$ relevée de D est, par construction, invariante par G'_e.

Démonstration. La même qu'en 2.2.2 ■

4.2.2. Pour tout i dans I, le fibré E^i est parallèle pour la nouvelle connexion D. Soit Λ^i le fibré des formes volume sur E^i, il est naturellement muni d'une connexion induite par D. Le but de ce paragraphe est de montrer que le fibré Λ^i est plat.

On procède comme en 2.3 et 2.5 : soient Ω^i la 2-forme de courbure du fibré Λ^i et B^i l'opérateur de E dans lui-même donné par :

$$\Omega^i(Y, Z) = d\lambda(B^i Y, Z) \text{ et } \lambda(B^i(Z)) = 0$$

On construit une 1-forme β^i, primitive de Ω^i à l'aide de la formule

$$D_Z \, \omega^i = \beta^i(Z) . \omega^i$$

où ω^i est une section nulle part nulle du fibré $|\Lambda^i|$ des densités de E^i. On montre alors, comme en 2.3 et 2.5 :

LEMME.

a) On a $\displaystyle\int_V \beta^i(X) \lambda \wedge (d\lambda)^{n-1} = 0$

b) $\forall p \in \{1, \ldots, n-1\}$, *on a* $(\Omega^i)^p \wedge (d\lambda)^{n-1-p} = 0$.

c) B^i *est nilpotent.*

d) Le fibré Λ^i *est plat.*

4.2.3. COROLLAIRE. $\forall Y \in \mathfrak{h}$, $\forall i \in I$, *on a* $\operatorname{tr}_{E^i_{v_0}}(Y) = 0$.

Démonstration. Le fibré $\tilde{\Lambda}^i$, relevé du fibré Λ^i, est plat (pour la connexion $\tilde{D}$); il existe donc une section parallèle $\tilde{\omega}^i$ de ce fibré, unique à une constante près. Soit $\chi^i : G' \to \mathbf{R}^*$, le caractère défini par, $\forall g \in G'$,

$$g_* \tilde{\omega}^i = \chi^i(g) . \tilde{\omega}^i$$

Comme l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ est semisimple, on a $d\chi^i(\mathfrak{g}) = 0$; donc $\forall Y \in \mathfrak{h}$, on a $d\chi^i(Y) = \operatorname{tr}_{E^i_{v_0}}(Y) = 0$ ■

4.3. La sous-algèbre $\mathfrak{p}^+$ est parabolique maximale

4.3.1. Soient $\mathfrak{n}^\pm$ le radical unipotent de $\mathfrak{p}^\pm$, $\mathfrak{z}_0$ le centre de $\mathfrak{g}_0$, $\mathfrak{z}_0^E$ (resp. $\mathfrak{a}$) la partie elliptique (resp. hyperbolique) de $\mathfrak{z}_0$, *i.e.*

$$\mathfrak{z}_0^E = \Big\{ Y \in \mathfrak{z}_0 \mid \mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}(Y) \text{ est elliptique} \Big\}$$
$$(\text{resp. } \mathfrak{a} = \Big\{ Y \in \mathfrak{z}_0 \mid \mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}(Y) \text{ est hyperbolique} \Big\});$$

on a l'égalité $\mathfrak{z}_0 = \mathfrak{z}_0^E \oplus \mathfrak{a}$. Soit $\mathfrak{m} = [\mathfrak{g}_0, \mathfrak{g}_0] \oplus \mathfrak{z}_0^E$. On a la "décomposition de Langlands" du parabolique $\mathfrak{p}^+$:

$$\mathfrak{p}^+ = \mathfrak{m} \oplus \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}^+ \qquad \text{(cf. [Wa])}$$

et l'égalité $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{m} \oplus \mathfrak{a}$.

Proposition.

a) La sous-algèbre parabolique $\mathfrak{p}^+$ est maximale (i.e. $\dim(\mathfrak{a}) = 1$*)*

b) On a l'égalité $\mathfrak{h} = \mathfrak{m}$.

Démonstration. a) Il suffit de voir que $\mathfrak{h} \cap \mathfrak{a} = 0$. Soit $Y_0 \in \mathfrak{h} \cap \mathfrak{a}$ et $E_{v_0}^+ = \oplus_{\mu \in \mathbf{R}} E_{v_0}^{+,\mu}$ la décomposition (H_e'-invariante) de $E_{v_0}^+$ en sous-espaces propres sous l'action de Y_0. Le corollaire 4.2.3 prouve que $\mathrm{tr}_{E_{v_0}^{+,\mu}}(Y_0) = \mu . \dim E_{v_0}^{+,\mu} = 0$. Donc, Y_0 agit trivialement dans $E_{v_0}^+$ puis $Y_0 = 0$.

b) Comme $\mathfrak{p}^+$ est maximale, on a l'égalité $\mathfrak{m} = \{ Y \in \mathfrak{g}_0 \mid \mathrm{tr}\,(\mathrm{ad}(Y)) = 0 \}$. D'autre part, l'isomorphisme canonique de $\mathfrak{q}^+/\mathfrak{h} \approx \mathfrak{n}^+$ sur $E_{v_0}^+$ est un isomorphisme de $\mathfrak{h}$-modules; le corollaire 4.2.3 prouve alors que, $\forall Y \in \mathfrak{h}$, on a $\mathrm{tr}\,(\mathrm{ad} Y) = 0$. Donc $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{m}$ puis $\mathfrak{h} = \mathfrak{m}$ ■

4.3.2. Corollaire. *$\mathfrak{g}$ est une algèbre de Lie simple.*

Démonstration. Soit $\mathfrak{g} = \oplus_{i=1,\dots,l} \mathfrak{g}(i)$ la décomposition de $\mathfrak{g}$ en idéaux simples; comme $\mathfrak{p}^+$ est maximale, il existe i_0 tel que $\mathfrak{h} \supset \oplus_{i \neq i_0} \mathfrak{g}(i)$. Or $\mathfrak{h}$ ne contient pas d'idéaux de $\mathfrak{g}$, car, par construction, l'action de G sur G/H est effective. Donc $l = 1$ et $\mathfrak{g}$ est simple ■

4.4. Reparamétrisation

Nous venons de voir que G' était isomorphe à $G \times \mathbf{R}$, nous pouvons donc considérer Γ_0, la projection de Γ le groupe d'holonomie dans le premier facteur. La projection h dans le deuxième facteur, que nous voyons comme un élément de $\mathrm{Hom}\,(\Gamma, \mathbf{R}) = H^1(V, \mathbf{R})$, est représentée en cohomologie par $\dfrac{\beta^+}{s^+}$ où β^+ est la 1-forme de connexion du fibré Λ^+ des formes volume sur E^+ pour la connexion ∇ (3.4.1), et où s^+ est l'entropie du fibré E^+.

Par construction, $h(\varphi_t) = t$. En particulier, la projection p_1 de G' sur le premier facteur G est donnée par

$$p_1(g) = g.\varphi_{-h(g)}$$

Nous allons maintenant démontrer 1.2.3.

4.4.1. *Construction des nouveaux exemples.*
Cette partie est autonome du reste, son but est de démontrer

PROPOSITION. *Soit X un flot Anosov-contact sur une variété compacte V, dont la décomposition d'Anosov est C^∞. Si α est une 1-forme fermée telle que*

$$1 + \alpha(X) > 0$$

alors le flot de $Y = \dfrac{X}{1+\alpha(X)}$ a les mêmes propriétés.

Démonstration. La forme de contact $\lambda + \alpha$ est invariante par Y, et les sous-fibrés

$$E_Y^{\pm} = \left\{ z - \alpha(z) Y ; z \in E^{\pm} \right\}$$

sont stables et instables pour le flot de Y ■

4.4.2. *Construction de la reparamétrisation.*
Démontrons tout d'abord 1.2.3*(i)*

LEMME. *Il existe une 1-forme α cohomologue à $-\dfrac{1}{s^+}\beta^+$, telle que $1 + \alpha(X) > 0$.*

Démonstration. On a l'égalité (cf. 2.3.3)

$$\frac{1}{t} \log \left(\det \left(T_v \varphi_{-t}\big|_{E^+} \right) \right) = -s^+ + \frac{1}{t} \int_0^t \beta^+(X(\varphi_{-s}(v)))\, ds$$

Or comme φ_t est Anosov, il existe des constantes $c, d > 0$ telles que pour tout t positif

$$\frac{1}{t} \log \left(\det \left(T_v \varphi_{-t}\big|_{E^+} \right) \right) \leq \frac{1}{t} \log(c) - d$$

Donc il existe $t_0 > 0$ tel que pour tout v de V

$$s^+ - \frac{1}{t_0} \int_0^{t_0} \beta^+(X(\varphi_{-t}(v)))\, dt > \varepsilon$$

On prend alors

$$\alpha = -\frac{1}{s^+} \frac{1}{t_0} \int_0^{t_0} \left(\varphi_{-t} \right)^* \left(\beta^+ \right) dt$$ ■

Soit p_1 la projection de G' sur G, le premier facteur. La proposition 1.2.3 *(ii)* découle immédiatement du :

Lemme. *Soit α une 1-forme fermée, représentant $-h$ en cohomologie de de Rham, telle que $1+\alpha(X)>0$. Alors il existe un difféomorphisme ψ de $\tilde{V}$ tel que*

(i) pour tout élément de γ, et v de $\tilde{V}$

$$\psi(\gamma v)=p_1(\gamma)\psi(v)$$

(ii) $T\psi\left(\dfrac{X}{1+\alpha(X)}\right)=X$

Démonstration. On construit le difféomorphisme ψ explicitement. Soit f une primitive de α sur le revêtement universel $\tilde{V}$ de V, on pose

$$\psi(z)=\tilde{\varphi}_{f(z)}(z)$$

Calculons tout d'abord la différentielle de ψ; nous obtenons :

$$T_y\psi(Z)=T\tilde{\varphi}_{f(z)}(Z)+df(Z)X$$

En particulier :

$$T\psi\left(\frac{X}{1+\alpha(X)}\right)=X \tag{1}$$

Ceci montre *(ii)* et on en déduit aisément que $T\psi$ est bijective.

Montrons que ψ est une bijection. Comme ψ envoie une orbite de X sur elle-même, il suffit de montrer que sa restriction aux orbites est une bijection, or ceci découle immédiatement de (1).

Montrons la relation de commutation (i). Il s'agit d'une suite d'identifications triviales que nous allons expliciter. Nous voulons montrer :

$$\tilde{\varphi}_{f(\gamma(z))}(\gamma z)=p_1(\gamma)\left(\tilde{\varphi}_{f(z)}(z)\right) \tag{2}$$

Or

$$p_1(\gamma)=\gamma\circ\varphi_{-h(\gamma)}$$

En remplaçant dans (2) et en utilisant le fait que les éléments de G' commutent avec le flot, il nous faut démontrer :

$$f(\gamma(z))-f(z)=-h(\gamma)$$

et ceci vient de ce que α représente $-h$ en cohomologie de de Rham ■

4.5. Interprétation algébrique des objets géométriques

Nous avons vu que le groupe G_e agissait transitivement sur $\tilde{V}$.

Le stabilisateur G_0 d'une orbite de $\tilde{\varphi}_t$ dans $\tilde{V}$ a pour algèbre de Lie $\mathfrak{g}_0$ et est fermé dans G_e. En particulier, $\mathcal{O} = G_e/G_0$, l'"espace des orbites" possède une structure de variété.

De même, le groupe P_e^+, le stabilisateur d'une feuille centrale instable, est d'algèbre de Lie $\mathfrak{p}^+$ et est fermé dans G_e. Le sous-groupe P_e^+ est la composante connexe du sous-groupe parabolique maximal P^+ associé à $\mathfrak{p}^+$: $P^+ = \left\{g \in G_e \mid \mathrm{Ad}\,(g)(\mathfrak{p}^+) = \mathfrak{p}^+\right\}$. En particulier, $\tilde{\mathcal{F}}^+ = G_e/P_e^+$ "l'espace des feuilles centrales stables" possède une bonne structure de variété. De plus, c'est un revêtement de $\mathcal{F}^+ = G_e/P^+$, l'espace des sous-algèbres paraboliques maximales conjuguées à P^+, qui est une variété compacte et algébrique réelle, dont la structure, par exemple comme P^+-espace, est bien connue.

Nous noterons $p \in \mathbf{N} \cup \{\infty\}$ l'indice de ce revêtement (c'est aussi le cardinal de P^+/P_e^+). L'hypothèse "p fini" équivaut naturellement à $\tilde{\mathcal{F}}^+$ compact.

Bien sûr nous avons les fibrations :

$$\tilde{V} \to \mathcal{O} \to \tilde{\mathcal{F}}^+ \to \mathcal{F}^+$$

correspondant aux inclusions

$$H \subset G_0 \subset P_e^+ \subset P^+$$

Les deux premières flèches signifient qu'un point est sur une orbite, et qu'une orbite est dans une feuille centrale instable.

5. Dynamique d'un élément du groupe d'holonomie

5.0. Nous nous proposons dans cette section de démontrer la proposition 1.3.1. Dans cette partie γ sera un élément de Γ, le groupe d'holonomie de V. On commence par des réductions préliminaires (5.1) de façon à ce que Γ soit inclus dans G_e et que les éléments de torsion de Γ soient inclus dans le centre Z de G_e.

On se placera dans la suite du texte dans ce cas; on supposera que γ n'est pas de torsion et nous allons étudier sa dynamique sur $\tilde{\mathcal{F}}^+$, $\mathcal{O}$ et $\mathcal{F}^+$. Notre intuition est de copier le comportement du cas des flots géodésiques.

Rappelons (cf. [EO]) que dans ce cas l'espace des feuilles $\tilde{\mathcal{F}}^+$, s'identifie à la sphère à l'infini du revêtement universel de la variété à courbure négative, et chaque élément de Γ sur $\tilde{\mathcal{F}}^+$ a la dynamique suivante : un point fixe attracteur dont le complémentaire du bassin est réduit à un point fixe répulseur.

Supposons pour simplifier que $\tilde{\mathcal{F}}^+$ est compact. Soit γ un élément de Γ tel que $\mathrm{Ad}\,(\gamma) \neq 1$. On montre que, quitte à remplacer γ par une puissance γ^n, tout point fixe de γ dans $\mathcal{F}^+$ est la projection d'une feuille centrale instable γ-invariante du flot $\tilde{\varphi}_t$ et que celle-ci contient une orbite γ-invariante de ce flot (5.2). Ceci permet de montrer que tout point fixe de γ dans $\mathcal{F}^+$ est soit attracteur, soit répulseur et que son bassin d'attraction (resp. de répulsion) est un ouvert dense. Il y a donc au plus deux points fixes (5.3). On montre ensuite à l'aide du closing-lemma que les points ω-limites de l'action de γ dans $\mathcal{O}$ sont périodiques (5.4). On en déduit que, si γ est semisimple, il existe une puissance γ^n qui a au moins $\#W/\#W_{\mathfrak{p}^+}$ points fixes dans $\mathcal{F}^+$ où W (resp. $W_{\mathfrak{p}^+}$) est le groupe de Weyl restreint de $\mathfrak{g}$ (resp. $\mathfrak{h}$). Or, si le rang réel de G est ≥ 2, on a l'inégalité $\#W/\#W_{\mathfrak{p}^+} \geq 3$. Donc γ ne peut pas être semisimple (5.5).

Convenablement modifiés, ces arguments sont encore pertinents lorsque $\tilde{\mathcal{F}}^+$ n'est pas compact et que γ a un point fixe dans $\mathcal{O}$.

5.1. Réductions préliminaires

5.1.1. Soit Z le centre de G_e et $Z_\Gamma = Z \cap \Gamma$.

Lemme.

a) Quitte à reparamétrer le flot, on peut supposer que Γ est un sous-groupe de G.

b) Quitte à remplacer V par un revêtement fini, on peut supposer que

i) $\Gamma \subset G_e$

ii) le groupe adjoint $\mathrm{Ad}\,(G)$ est sans torsion.

Démonstration.

a) C'est la proposition 4.4.3.

b) i) Remplacer Γ par $\Gamma \cap G_e$ (cf. remarque 3.1.3).

ii) Le groupe Γ est le π_1 d'une variété compacte, il est donc de type fini ([Ra] th. 6.16). Il existe donc un sous-groupe Γ' d'indice fini de Γ tel que $\mathrm{Ad}\,(\Gamma')$ est sans torsion ([Ra] cor. 6.13). Remplacer alors Γ par Γ' ■

> *On supposera dans les chapitres 5 et 6 que $\Gamma \subset G_e$ et que $\mathrm{Ad}\,(\Gamma)$ est sans torsion.*

5.2. Points fixes de γ dans $\tilde{\mathcal{F}}^+$

5.2.1. LEMME. *Soit $\gamma \in \Gamma \setminus Z_\Gamma$. Toute "feuille centrale instable" du flot $\tilde{\varphi}_t$ invariante par γ contient une unique orbite invariante par γ. Autrement dit tout point fixe de γ dans $\tilde{\mathcal{F}}^+$ se relève en un point fixe dans $\mathcal{O}$.*

Démonstration. Soient s une feuille centrale instable invariante par γ et r une feuille instable incluse dans s. Il existe un réel t_0 tel que $\gamma \circ \tilde{\varphi}_{t_0}$ laisse stable r. Le cas où $t_0 = 0$ est exclu car il existerait une courbe sur V non homotopiquement triviale et inscrite dans une feuille instable du flot φ_t : son image par le flot φ_t pour t très négatif serait de longueur arbitrairement petite et non homotopiquement triviale, ce qui contredit la compacité de V.

Supposons donc $t_0 < 0$ (le cas $t_0 > 0$ se traite de même). L'application $h = \gamma \circ \tilde{\varphi}_{t_0}$ (ou au moins une de ses puissances h^n) induit une contraction sur cette feuille instable r, pour la métrique riemannienne induite, car γ^n est une isométrie et $\tilde{\varphi}_{nt_0}$ une contraction. Elle a donc un unique point fixe. C'est ce que l'on voulait ■

5.2.2. COROLLAIRE. *Soit f_0^+ un point fixe de γ dans $\tilde{\mathcal{F}}^+$. f_0^+ est alors point attracteur (ou répulseur) de γ. Le bassin de f_0^+ est l'ensemble des feuilles f^+ rencontrant la feuille f_0^- telle que $f_0^- \cap f_0^+$ est l'orbite de φ_t fixée par γ dans f_0^+.*

Autrement dit, le bassin de f_0^+ est l'orbite dans $\tilde{\mathcal{F}}^+$ du stabilisateur P_e^- de f_0^-.

Démonstration. La démonstration découle de celle du lemme précédent ■

5.3. Points fixes de γ dans $\mathcal{F}^+$

Nous voulons montrer la proposition suivante :

5.3.1. PROPOSITION. *Soit $\gamma \in \Gamma \setminus Z_\Gamma$. On suppose que $\tilde{\mathcal{F}}^+$ est compact ou que γ a au moins un point fixe dans $\mathcal{O}$, alors γ a au plus deux points fixes dans $\mathcal{F}^+$.*

Il nous faut tout d'abord établir un lemme technique dans le cas où $p = \infty$.

5.3.2. LEMME.

a) Le centre Z de G_e et P_e ont une intersection triviale : $Z \cap P_e = \{1\}$.

b) Pour tout g de G_e, le groupe $P_e^+ \cap gP^+g^{-1}$ a un nombre fini de composantes connexes.

Démonstration. a) Soit $P^+ = MAN^+$ la décomposition de Langlands du sous-groupe parabolique P^+ ([Wa] § 1.2.4) : M est un sous-groupe fermé de G_e qui contient Z et dont l'algèbre de Lie est $\mathfrak{h}$. On a donc $Z \cap P_e^+ = Z \cap M_e = Z \cap H_e$. Or $Z \cap H_e = 1$ car Z agit effectivement sur $\tilde{V}$.

b) Comme $P_e^+ \cap Z = \{1\}$, le morphisme $G_e \xrightarrow{\mathrm{Ad}} \mathrm{Ad}\,(G_e)$ induit un isomorphisme de P_e^+ sur son image $\mathrm{Ad}\,(P_e^+)$ qui est la composante connexe d'un groupe algébrique réel. On a donc un isomorphisme :

$$P_e^+ \cap gP^+g^{-1} \to \mathrm{Ad}\left(P_e^+ \cap gP^+g^{-1}\right)$$

Or $\mathrm{Ad}\,(P_e^+ \cap gP^+g^{-1}) = \mathrm{Ad}\,(P_e^+) \cap g\mathrm{Ad}\,P^+g^{-1}$, et ce dernier groupe est un sous-groupe ouvert d'un groupe algébrique, il n'a donc qu'un nombre fini de composantes connexes ■

5.3.3. COROLLAIRE. *On a l'équivalence :*

$$\tilde{\mathcal{F}}^+ \textit{est compact} \Longleftrightarrow \#Z < \infty$$

Démonstration.

- $\Longleftarrow$ d'après *a)* Z s'injecte dans P^+/P_e^+.
- $\Longrightarrow$ $P^+/Z \simeq \mathrm{Ad}\,(P^+)$ a un nombre fini de composantes connexes ■

5.3.4. *Démonstration de 5.3.1. a)* Si $\tilde{\mathcal{F}}^+$ est compact ou si γ a au moins un point fixe dans $\mathcal{O}$, alors la fibre au-dessus d'un point fixe de γ dans $\mathcal{F}^+$ est constituée de points périodiques dans $\tilde{\mathcal{F}}^+$.

Ceci est évident quand $\tilde{\mathcal{F}}^+$ est compact, car alors la fibre est finie.

Dans le cas où p est infini, on utilise 5.3.2. Soit f_0^+ un point de $\tilde{\mathcal{F}}^+$ fixé par γ et P_e^+ son stabilisateur. Soit P^+ le sous-groupe parabolique maximal contenant P_e^+. L'espace $\mathcal{F}^+$ s'identifie à G/P^+. Si γ fixe un point gP^+ de $\mathcal{F}^+$, alors γ appartient à $P_e^+ \cap gP^+g^{-1} = B$. Or B a un nombre fini de composantes connexes, donc une puissance γ^n de γ appartient à $P_e^+ \cap gP_e^+g^{-1}$ qui est ouvert dans B. Ce qui entraîne que gP_e^+ est fixé par γ^n.

b) On en déduit (5.2.2) que un point fixe de γ dans $\mathcal{F}^+$ est un attracteur et que le bassin de ce point fixe est l'orbite de ce point sous P^- où P^- est un sous-groupe parabolique maximal opposé à P^+. D'après le lemme de Bruhat ([Wa] §1.2.4.10) ceci est un ouvert dense. On en déduit le résultat ■

5.4. Points ω-limites de l'action de γ dans $\mathcal{O}$

Notre but est de montrer la

5.4.1. Proposition. *Soit $\gamma \in \Gamma \setminus Z_\Gamma$; c' et c des points de $\mathcal{O}$ et n_i une suite d'entiers tendant vers l'infini telle que $\lim n_i = +\infty$ et $\lim \gamma^{n_i} c' = c$. Alors c est un point périodique sous l'action de γ. Autrement dit, les points ω-limites de l'action de γ sont périodiques.*

Ceci sera la traduction du closing-lemma. Il nous faut un lemme préliminaire.

5.4.2. Lemme. *Soit $\gamma \in \Gamma \setminus Z_\Gamma$, alors l'ensemble*

$$P_\gamma = \{c \in \mathcal{O} \mid \exists n > 0 \text{ tel que } \gamma^n c = c\}$$

est localement fini (i.e. discret et fermé) dans $\mathcal{O}$.

Démonstration. D'après le lemme 5.3.1, γ a au plus deux points périodiques dans $\mathcal{F}^+$. Donc l'ensemble des points périodiques de γ dans $\tilde{\mathcal{F}}^+$ est localement fini. Il en est de même de P_γ (5.2.1) ■
Rappelons le

Closing Lemma. *([A] lemma 13.1)*
Soit φ_t un flot d'Anosov sur une variété compacte V. Pour tout $\alpha > 0$, il existe $\beta > 0$ et $t_0 > 0$ tels que si $t_1 > t_0$ et si v_1 dans V vérifie

$$d(v_1, \varphi_{t_1}(v_1)) < \beta$$

alors il existe $v \in V$ et $T > 0$ tels que $|T - t_1| < \alpha$, $\varphi_T(v) = v$ et $\forall t \in [0, T]$

$$d(\varphi_t(v), \varphi_t(v_1)) < \alpha.$$

Opérons la traduction de ce closing lemma dans notre proposition 5.4.1.

Démonstration de 5.4.1. D'après 5.4.2, il suffit de construire des points périodiques sous l'action de γ et arbitrairement proches de c.

Soit $v \in \tilde{V}$ un point de l'orbite c et v' un point de c'. Par hypothèse, il existe une suite (t_i) telle que

$$\lim_{i \to \infty} \varphi_{t_i}(\gamma^{n_i}.v') = v$$

La suite (t_i) tend vers l'infini, puisque n_i tend vers l'infini.

Pour tout $\beta > 0$ et $t_0 > 0$ on peut donc trouver i_0 tel que $\forall j > i_0$

$$d\left(\varphi_{t_{i_0}}(\gamma^{n_{i_0}} v'), \varphi_{t_j}(\gamma^{n_j} v')\right) < \beta.$$

Posons $w = \varphi_{t_{i_0}}(\gamma^{n_{i_0}} v')$, et soit $j > i_0$ tel que $n = n_j - n_{i_0} > 0$ et $t = t_j - t_{i_0} > t_0$.

On a alors

$$d(w', \gamma^n \varphi_t(w')) < \beta$$

Grâce au closing-lemma, on peut donc trouver pour tout $\alpha > 0$, T et w tels que

$$\begin{aligned} &\varphi_T(w) = \gamma^n w, \text{ où} \\ &d(w, w') < \alpha \text{ et donc} \\ &d(w, v) \leq \alpha + \beta \end{aligned}$$

Comme α et β sont arbitraires, on a construit une orbite (celle de w), point périodique pour γ, arbitrairement proche de celle de v ■

5.5. Non-semisimplicité de γ

Nous nous proposons de démontrer 1.3.1. Pour cela nous allons montrer en utilisant le closing lemma, que si γ est semisimple et si le rang de G est supérieur ou égal à deux, alors γ possède plus de deux points fixes dans $\mathcal{F}^+$, et obtenir la contradiction avec 5.3.1.

5.5.1. Rappelons quelques définitions classiques (cf. [Wa] chap. 1) :

- Une sous-algèbre (resp. un sous-espace) de Cartan $\mathfrak{c}$ est une sous-algèbre commutative formée d'éléments Y semisimples (resp. hyperboliques), et maximale pour cette propriété.
- Un sous-groupe de Cartan C de G_e est le centralisateur d'une sous-algèbre de Cartan : $C = \{x \in G_e \mid \forall Y \in \mathfrak{c}, \operatorname{Ad} x(Y) = Y\}$.
- Un élément g de G_e est semisimple (*i.e.* $\operatorname{Ad}(g)$ est un endomorphisme semisimple) si et seulement si il appartient à un sous-groupe de Cartan ([Wa] th. 1.4.1.7 et 1.4.3).

5.5.2. Lemme. *Soient $\gamma \in \Gamma \setminus Z_\Gamma$ un élément semisimple, on suppose que γ appartient à la composante connexe C_e d'un sous-groupe de Cartan. Soit c un point de $\mathcal{O}$ tel que l'orbite $C_e.c$ est compacte, alors $C_e.c$ est réduit à un point.*

Démonstration. La suite $\gamma^n.c$ reste dans le compact $C_e.c$; elle a donc un point adhérent c'. D'après 5.4.1, c' est périodique pour γ : $\gamma^q(c') = c'$.

On a alors, $\forall x \in C_e$, $\gamma^q(x.c') = x.(\gamma^q.c') = x.c'$: tout point de l'orbite $C_e.c' = C_e.c$ est un point fixe de γ^q. Donc $C_e.c$ est réduit à un point (lemme 5.4.2) ■

5.5.3. *Notations.* Soit $\mathfrak{a}_0$ un sous-espace de Cartan de $\mathfrak{g}$ qui contient X_0, $A_0 = \exp(\mathfrak{a}_0)$, $\Sigma = \Sigma(\mathfrak{g}, \mathfrak{a}_0)$ le système de racines restreintes, Σ^+ un choix de racines positives tel que, $\forall \alpha \in \Sigma^+$, on ait $\alpha(X_0) \geq 0$; soient

$$N_{G_e}(\mathfrak{a}_0) = \Big\{g \in G_e \mid \operatorname{Ad} g(\mathfrak{a}_0) \subset \mathfrak{a}_0\Big\},$$

$$Z_{G_e}(\mathfrak{a}_0) = \Big\{g \in G_e \mid \forall Y \in \mathfrak{a}_0, \operatorname{Ad} g(Y) = Y\Big\}$$

et $W = N_{G_e}(\mathfrak{a}_0)/Z_{G_e}(\mathfrak{a}_0)$ le groupe de Weyl restreint, c'est aussi le groupe de Weyl du système de racines restreintes. On fixe, $\forall w \in W$, un représentant $\tilde{w}$ de w dans $N_{G_e}(\mathfrak{a}_0)$.

Remarquons que $\mathfrak{a}_0$ est un sous-espace de Cartan de l'algèbre de Lie réductive $\mathfrak{g}_0$. On peut donc introduire le système de racines restreintes et le groupe de Weyl correspondants :

$$\Sigma_{\mathfrak{p}^+} = \{\alpha \in \Sigma \mid \alpha(X_0) = 0\}, \qquad W_{\mathfrak{p}^+} = N_{G_0}(\mathfrak{a}_0)/Z_{G_0}(\mathfrak{a}_0)$$

où $N_{G_0}(\mathfrak{a}_0) = G_0 \cap N_G(\mathfrak{a}_0)$ et $Z_{G_0}(\mathfrak{a}_0) = G_0 \cap Z_G(\mathfrak{a}_0)$.

Le groupe de Weyl va nous servir à fabriquer de nouveaux points fixes. Essentiellement la proposition suivante revient à démontrer que l'orbite d'un point fixe de γ dans $\mathcal{F}^+$ sous W est constituée de points fixes. Pour cela d'après ce qui précède, un point fixe dans $\mathcal{F}^+$ se relevant en un point fixe dans $\mathcal{O}$, (sous nos hypothèses), il suffit de montrer que l'orbite dans $\mathcal{O}$ d'un point fixe de γ sous W est constituée de points fixes.

5.5.4. PROPOSITION. *Soit $\gamma \in \Gamma \setminus Z_\Gamma$ un élément semisimple; on suppose que $\tilde{\mathcal{F}}^+$ est compact ou que γ a un point fixe dans $\mathcal{O}$. Alors, il existe $N \geq 1$ tel que γ^N a au moins $\#(W/W_{\mathfrak{p}^+})$ points fixes dans $\mathcal{F}^+$.*

Démonstration. Si $p < \infty$, soit C un sous-groupe de Cartan de G contenant γ. Comme C a un centre fini (cor. 5.3.3), C a un nombre fini de composantes connexes et il existe une puissance γ^N de γ telle que $\gamma^N \in C_e$.

Si $p = \infty$, on peut supposer que $\gamma \in G_0$: en effet, γ a un point fixe dans $\mathcal{O}$. Soit C' un sous-groupe de Cartan de G_0 contenant γ. D'après 2.4.2 le groupe H est algébrique, donc C' a un nombre fini de composantes connexes et il existe une puissance γ^N de γ telle que $\gamma^N \in C'_e$. C'_e est aussi la composante connexe C_e d'un sous-groupe de Cartan C de G.

Dans ces deux cas, soient $\mathfrak{c}$ l'algèbre de Lie de C_e, $\mathfrak{a}'$ la sous-algèbre formée des éléments hyperboliques de $\mathfrak{c}$ et T_e le sous-groupe formé des éléments g elliptiques de C_e (*i.e.* tels que $\mathrm{Ad}\,(g)$ est un endomorphisme semisimple dont les valeurs propres sont de module égal à 1). On a l'égalité $C_e = T_e A'$ où $A' = \exp(\mathfrak{a}')$. On peut supposer que $\mathfrak{a}' \subset \mathfrak{a}_0$.

Montrons que le groupe T_e est compact : on sait que $\mathrm{Ad}\,(T_e) = T_e/(T_e \cap Z)$ est compact, il suffit de voir que $T_e \cap Z$ est fini. Si $p < \infty$, le corollaire 5.3.3 prouve que Z est fini. Si $T_e \subset G_0$, le lemme 5.3.2 *a)* prouve que $T_e \cap Z = \{e\}$. Dans les deux cas, T_e est compact.

Montrons que, $\forall w \in W$, $\tilde{w}P^+$ est un point fixe de γ dans $\mathcal{F}^+ = G/P^+$. Notons $c_0 = G_0$ le point base de $\mathcal{O} = G/G_0$. On a l'égalité $C_e.\tilde{w}c_0 = T_e.\tilde{w}c_0$ car $\tilde{w}^{-1}A'\tilde{w} \subset A_0 \subset G_0$. Donc $C_e.\tilde{w}c_0$ est compact. Le lemme 5.2.2 prouve que $C_e.\tilde{w}c_0 = \{\tilde{w}c_0\}$; en particulier $\gamma.(\tilde{w}c_0) = \tilde{w}.c_0$ et $\gamma.\tilde{w}P^+ = \tilde{w}P^+$.

D'après le lemme de Bruhat ([Wa] prop. 1.2.1.10), l'application de W dans $\mathcal{F}^+$ qui envoie w sur $\tilde{w}P^+$ induit une surjection de $W/W_{\mathfrak{p}^+}$ dans $\mathcal{F}^+ = G_e/P^+$. Notre lemme s'en déduit ■

5.5.5. LEMME. *Gardons les notations précédentes. On a l'inégalité* $\#(W/W_{\mathfrak{p}^+}) \geq 2$ *avec égalité si et seulement si* $\mathfrak{g}$ *est de rang réel un.*

Démonstration. Il est clair que $W_{\mathfrak{p}^+} \neq W$. Supposons que $W_{\mathfrak{p}^+}$ est un sous-groupe d'indice 2 de W. Le sous-groupe $W_{\mathfrak{p}^+}$ est alors distingué et l'ensemble $\Sigma_{\mathfrak{p}^+}$ est donc invariant par W : en effet, notons s_α la symétrie par rapport à $\alpha \in \Sigma$; on a $\forall w \in W\, \forall \alpha \in \Sigma_{\mathfrak{p}^+} s_{w.\alpha} = w s_\alpha w^{-1} \in W_{\mathfrak{p}^+}$ donc $w\alpha \in \Sigma_{\mathfrak{p}^+}$

Comme l'action de W sur $\mathfrak{a}_0$ est irréductible, on en déduit que $\Sigma_{\mathfrak{p}^+} = \emptyset$. Donc $\dim \mathfrak{a}_0 = 1$ et $\mathfrak{g}$ est de rang réel un ■

5.5.6. Nous pouvons maintenant donner la

Démonstration de la proposition 1.3.1. Cela résulte de 5.3.1, 5.5.4 et 5.5.5 ■

6. A la recherche d'éléments semisimples

6.0. Le but de ce chapitre est de montrer les propositions 1.3.2 et 1.3.3. En utilisant le fait que toutes les feuilles centrales instables du flot φ_t sont denses dans V, on montre que la clôture de Zariski du groupe adjoint de Γ agit transitivement sur $\mathcal{F}^+$ et est donc un groupe réductif. On en déduit que $\Gamma \setminus Z_\Gamma$ contient des éléments semisimples (6.1).

On dresse la liste des sous-groupes paraboliques maximaux $P^+ = MAN^+$ de G_e pour lesquels le revêtement universel $\tilde{\mathcal{F}}^+$ de $\mathcal{F}^+ = G_e/P^+$ n'est pas compact. Il y en a relativement peu (6.2). On prouve alors par une étude de chacun de ces cas, que tout élément de $G_0 := M_e A$ non semisimple a au moins trois points fixes dans $\mathcal{F}^+$. On en déduit que, lorsque $\tilde{\mathcal{F}}^+$ n'est pas compact, tout élément γ de Γ qui fixe un point de $\mathcal{O}$ est semisimple (6.3).

6.1. Existence d'éléments semisimples dans Γ

6.1.1. Soient $\overline{\mathrm{Ad}\,(\Gamma)}$ l'adhérence de Zariski de $\mathrm{Ad}\,(\Gamma)$ dans $\mathrm{Ad}\,(G_e) \subset \mathbf{GL}(\mathfrak{g})$.

LEMME. *Le groupe* $\overline{\mathrm{Ad}\,(\Gamma)}$ *agit transitivement sur* $\mathcal{F}^+$.

Démonstration. Chaque feuille centrale instable du flot φ_t est dense ([A] th. 9). Ceci entraîne immédiatement que chaque orbite de Γ sur $\tilde{\mathcal{F}}^+$ est dense et donc chaque orbite de $\overline{\mathrm{Ad}\,(\Gamma)}$ est dense dans la variété algébrique réelle $\mathcal{F}^+ = \{$sous-algèbres paraboliques de $\mathfrak{g}$ conjuguées à $\mathfrak{p}^+\}$. Ceci entraîne que $\overline{\mathrm{Ad}\,(\Gamma)}$ agit transitivement puisque l'action de

$\overline{\mathrm{Ad}(\Gamma)}$ est algébrique et que toute action algébrique d'un groupe algébrique possède une orbite fermée (l'orbite de dimension minimale dans la stratification de Rosenlicht). ■

Démontrons deux lemmes généraux :

6.1.2. Lemme. *Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie semisimple et $\mathfrak{s}$ une sous-algèbre qui n'est incluse dans aucune sous-algèbre parabolique propre de $\mathfrak{g}$. Alors $\mathfrak{s}$ est réductive dans $\mathfrak{g}$.*

Démonstration. Par récurrence sur la dimension de $\mathfrak{g}$. Supposons $\mathfrak{s}$ non réductive dans $\mathfrak{g}$. Soit $\mathfrak{g}'$ une sous-algèbre propre de $\mathfrak{g}$, contenant $\mathfrak{s}$ et maximale. On sait que $\mathfrak{g}'$ est une sous-algèbre soit parabolique, soit réductive dans $\mathfrak{g}$ ([Bo2] §10 cor. 1 du th. 2). Le premier cas est exclu par hypoyhèse. Donc $\mathfrak{g}'$ est réductive et par hypothèse de récurrence il existe une sous-algèbre parabolique $\mathfrak{p}'$ propre de $\mathfrak{g}'$ contenant $\mathfrak{s}$. On peut trouver un élément semisimple hyperbolique H de $\mathfrak{g}'$ tel que $\mathfrak{p}' = \oplus_{i\geq 0}\big\{X \in \mathfrak{g}' \mid [H,X] = iX\big\}$. La sous-algèbre $\mathfrak{s}$ est alors incluse dans la sous-algèbre parabolique de $\mathfrak{g}$ $\mathfrak{p} := \oplus_{i\geq 0}\big\{X \in \mathfrak{g} \mid [H,X] = iX\big\}$. Contradiction ■

6.1.3. Lemme. *Soit G_e un groupe de Lie semisimple connexe, P^+ un sous-groupe parabolique et S un sous-groupe de Lie de G_e. Si S agit transitivement sur G_e/P^+ alors S est réductif dans G_e (i.e. $\mathfrak{s} := \mathrm{Lie}\,(S)$ est réductive dans $\mathfrak{g} := \mathrm{Lie}\,(G_e)$).*

Démonstration. D'après le lemme 6.1.2, il suffit de voir que $\mathfrak{s}$ n'est incluse dans aucune sous-algèbre parabolique de $\mathfrak{g}$. Supposons par l'absurde que $\mathfrak{s}$ soit incluse dans la sous-algèbre parabolique $\mathfrak{p}'$. Comme S agit transitivement sur G_e/P^+, on a

$$\forall g \in G_e, \mathfrak{s} + \mathrm{Ad}\,g\,(\mathfrak{p}^+) = \mathfrak{g} \text{ où } \mathfrak{p}^+ = \mathrm{Lie}\,(P^+)$$

donc

$$(*) \qquad \mathfrak{p}' + \mathrm{Ad}\,g\,(\mathfrak{p}^+) = \mathfrak{g}$$

Quitte à bien choisir g, on peut supposer que $\mathfrak{p}'$ et $\mathrm{Ad}\,g\,(\mathfrak{p}^+)$ contiennent une même sous-algèbre parabolique minimale $\mathfrak{p}^{\min}$. Soit $\mathfrak{a}_0 \subset \mathfrak{p}^{\min}$ un sous-espace de Cartan, $\Sigma = \Sigma(\mathfrak{g}, \mathfrak{a}_0)$ et Σ^+ le choix de racines positives correspondant à $\mathfrak{p}^{\min}$. Soit $\alpha_{\max}$ la plus grande racine de Σ^+. La racine $-\alpha_{\max}$ n'est ni un poids de $\mathfrak{p}'$, ni un poids de $(\mathrm{Ad}\,g)(\mathfrak{p})$. Ce qui contredit l'égalité $(*)$ ■

6.1.4. Il est facile maintenant de conclure :

Démonstration de la proposition 1.3.2. Il résulte des lemmes 6.1.1 et 6.1.3 que le groupe $\overline{\mathrm{Ad}(\Gamma)}$ est réductif dans $\mathrm{Ad}\,(G_e)$. Or l'ensemble des éléments non semisimples d'un tel groupe n'est pas Zariski-dense dans celui-ci ([Wa] th. 1.4.1.7 et 1.4.3). Donc $\mathrm{Ad}\,\Gamma \setminus \{1\}$ contient des éléments semisimples.

Remarque. Il peut exister des sous-groupes réductifs G' de G, autres que G qui agissent transitivement sur G/P^+ et même sur G/H. Exemple : $G = \mathbf{SL}(2n, \mathbf{R}) \supset H = \mathbf{SL}(2n-1, \mathbf{R})$ et $G' = \mathbf{Sp}(n, \mathbf{R})$; dans ce cas

$$G/H = \big\{(v, F) \mid v \in \mathbf{R}^n \setminus \{0\} \text{ et } F \text{ est un hyperplan de } \mathbf{R}^n \text{ ne contenant pas } v\big\} \quad ■$$

6.2. Les paraboliques maximaux avec $\tilde{\mathcal{F}}^+$ non compact

Les résultats de cette partie sont de nature générale, mais nous évitons d'introduire de nouvelles notations.

6.2.1. LEMME. *Soient $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie simple réelle, $\mathfrak{p}^+ = \mathfrak{m} \oplus \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}^+$ la décomposition de Langlands d'une sous-algèbre parabolique maximale $\mathfrak{p}^+$, X_0 une base de $\mathfrak{a}$ et, $\forall i \in \mathbf{R}$, $\mathfrak{g}_i := \{Y \in \mathfrak{g} \mid [X_0, Y] = iY\}$. Alors*

a) $\exists i_0 \neq 0$ et $l \in \{1, 2, \ldots, 6\}$ tel que

$$\mathfrak{g}_i \neq 0 \Longleftrightarrow i = ki_0$$

avec $k \in \{-l, -l+1, \ldots, l-1, l\}$. *On suppose désormais que $i_0 = 1$.*

b) On a $[\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_i] = \mathfrak{g}_{i+1}$ et $[\mathfrak{g}_{-1}\mathfrak{g}_i] = \mathfrak{g}_{i-1}$, $\forall i \in \{-l, \ldots, l\}$.

c) Si $\mathfrak{g}$ est de type hermitienne (i.e. si l'ensemble des points fixes d'une involution de Cartan de $\mathfrak{g}$ a un centre non trivial) alors $l = 1$ ou 2.

Démonstration.
a) Reprenons les notations de 5.5.3. Comme $\mathfrak{p}^+$ est maximale, il existe une unique racine simple α^+ de Σ^+ telle que $\alpha^+(X_0) = i_0 \neq 0$. On peut supposer que $i_0 = 1$. Soient Π l'ensemble des racines simples de Σ^+ et $\alpha_{\max}$ la plus grande racine de Σ^+; écrivons $\alpha_{\max} = \sum_{\alpha \in \Pi} a_\alpha.\alpha$. Soit $l = a_{\alpha^+}$; il résulte de la liste des systèmes de racines que $l \leq 6$ ([Bo1]).

Pour montrer *a)*, il suffit de voir que la sous-algèbre $\mathfrak{n}^+ = \oplus_{i>0}\mathfrak{g}_i$ est engendrée par $\mathfrak{g}_1$. Soient $\mathfrak{n}'^{\pm}$ la sous-algèbre de $\mathfrak{g}$ engendrée par $\mathfrak{g}_{\pm 1}$ et $\mathfrak{g}' = \mathfrak{n}'^{+} \oplus \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{n}'^{-}$. On vérifie que $\mathfrak{g}'$ est une sous-algèbre de Lie de $\mathfrak{g}$. Or elle contient les sous-espaces de poids $\pm\alpha$, $\forall \alpha \in \Pi$. Donc $\mathfrak{g}' = \mathfrak{g}$ et $\mathfrak{n}'^{+} = \mathfrak{n}^+$.

b) Soit U l'algèbre enveloppante de $\mathfrak{g}$ munie de la graduation $U = \oplus_{i \in \mathbf{Z}} U_i$ où $U_i = \{u \in U \mid \mathrm{ad}X_0(u) = iu\}$. Puisque $\mathfrak{g}_1$ engendre $\mathfrak{n}$, on a l'égalité $U_1 = \mathfrak{g}_1.U_0$.

Comme $\mathfrak{g}$ est un $\mathfrak{g}$-module simple pour l'action adjointe, on a l'égalité, $\forall i \in \{-l, \ldots, l\}$ $\quad \mathfrak{g} = \mathrm{ad}(U).\mathfrak{g}_i$. Donc $\mathfrak{g}_{i+1} = \mathrm{ad}(U_1).\mathfrak{g}_i = \mathrm{ad}\mathfrak{g}_1\left(\mathrm{ad}(U_0).\mathfrak{g}_i\right) = [\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_i]$. On montrerait de même que $\mathfrak{g}_{i-1} = [\mathfrak{g}_{-1}, \mathfrak{g}_i]$.

c) Pour les algèbres de Lie de type hermitien, le diagrame de Dynkin du système de racines restreintes est de type classique ([He] p. 518 et p. 532–534). Dans ce cas, $\forall \alpha \in \Pi$, on a $a_\alpha \leq 2$ ([Bo1]); donc $l \leq 2$ ■

6.2.2. LEMME. *(Avec les notations du lemme 6.2.1). Soient G_e un groupe connexe d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$, P^+ le sous-groupe parabolique d'algèbre de Lie $\mathfrak{p}^+$, $\mathcal{F}^+ := G_e/P^+$ et $\tilde{\mathcal{F}}^+$ le revêtement universel de $\mathcal{F}^+$. Si $\tilde{\mathcal{F}}^+$ est non compact alors $\mathfrak{n}^+ = \mathfrak{g}_1$ (i.e. $l = 1$).*

Démonstration. Soient θ une involution de Cartan de $\mathfrak{g}$ telle que $\theta(X_0) = -X_0$, $\mathfrak{k} = \{Z \in \mathfrak{g} \mid \theta(Z) = Z\}$, K le sous-groupe connexe de G_e d'algèbre de Lie $\mathfrak{k}$ et $L = K \cap P_e = K \cap H$. On a l'égalité $G_e/P_e^+ = K/L$. Donc si G_e/P_e^+ n'est pas compact, K non plus et $\mathfrak{k}$ a un centre non nul $\mathfrak{z}$ ([He] ch. II th. 6.9). On a $\dim \mathfrak{z} = 1$ car $\mathfrak{g}$ est simple ([He] ch. VIII §6).

Ecrivons $\mathfrak{k} = [\mathfrak{k}, \mathfrak{k}] \oplus \mathfrak{z}$. Soit $\mathfrak{l} = \mathfrak{g}_0 \cap \mathfrak{k}$ l'algèbre de Lie de L. Comme le sous-groupe connexe d'algèbre de Lie $[\mathfrak{k}, \mathfrak{k}]$ est compact, la non-compacité de K/L implique l'inclusion $\mathfrak{l} \subset [\mathfrak{k}, \mathfrak{k}]$.

D'après le lemme 6.2.1 *c)*, on a $l = 1$ ou $l = 2$. Montrons que $l = 1$: supposons, par l'absurde, que $l = 2$.

Soit $\mathfrak{k}_{[i]} = (1+\theta)(\mathfrak{g}_i)$. On a $\mathfrak{k} = \mathfrak{k}_{[0]} \oplus \mathfrak{k}_{[1]} \oplus \mathfrak{k}_{[2]}$ et $\mathfrak{k}_{[0]} = \mathfrak{l} \subset [\mathfrak{k}, \mathfrak{k}]$. Soient X_1 et X_1' dans $\mathfrak{g}_1$; on a

$$(1+\theta)[X_1, X_1'] = [(1+\theta)X_1, (1+\theta)X_1'] - (1+\theta)[X_1, \theta X_1'] \in [\mathfrak{k}, \mathfrak{k}] + \mathfrak{k}_{[0]} = [\mathfrak{k}, \mathfrak{k}]\ ;$$

d'où $\mathfrak{k}_{[2]} = (1+\theta)([\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_1]) \subset [\mathfrak{k}, \mathfrak{k}]$ (lemme 6.2.1 *b)*)

De même, soient $X_{-1} \in \mathfrak{g}_{-1}$ et $X_2 \in \mathfrak{g}_2$: on a

$$(1+\theta)[X_{-1}, X_2] = [(1+\theta)X_{-1}, (1+\theta)X_2] \in [\mathfrak{k}, \mathfrak{k}] \qquad (\text{car } \mathfrak{g}_{\pm 3} = 0);$$

d'où $\mathfrak{k}_{[1]} = (1+\theta)\big([\mathfrak{g}_{-1}, \mathfrak{g}_2]\big) \subset [\mathfrak{k}, \mathfrak{k}]$ (lemme 6.2.1 *b)*).

Finalement on a $\mathfrak{k} = [\mathfrak{k}, \mathfrak{k}]$. Contradiction. Donc $l = 1$ ■

REMARQUE. La même raisonnement prouve que, réciproquement, si $l = 1$ alors $\mathfrak{l} \subset [\mathfrak{k}, \mathfrak{k}]$ (et donc que, si en outre $\mathfrak{g}$ est de type hermitien, l'espace $\tilde{\mathcal{F}}^+$ est non compact). En effet, soient $X_{-1} \in \mathfrak{g}_{-1}$ et $X_1 \in \mathfrak{g}_1$; on a

$$(1+\theta)[X_{-1}, X_1] = [(1+\theta)X_{-1}, (1+\theta)X_1] \in [\mathfrak{k}, \mathfrak{k}] \qquad \text{car } \mathfrak{g}_{\pm 2} = 0$$

d'où $\mathfrak{l} = (1+\theta)\big([\mathfrak{g}_{-1}, \mathfrak{g}_1]\big) \subset [\mathfrak{k}, \mathfrak{k}]$.

6.2.3. COROLLAIRE. *(Avec les mêmes notations). Si $\tilde{\mathcal{F}}^+$ est non compact, alors la sous-algèbre parabolique maximale $\mathfrak{p}^+$ est caractérisée par sa partie semisimple $\mathfrak{h}$ et, avec les notations de ([He] p. 518), le couple $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ fait partie de la liste:*

1)	*a)*	$(\mathfrak{sp}(n,\mathbf{R}), \mathfrak{sl}(n,\mathbf{R}))$	$n \geq 3$
	b)	$(\mathfrak{su}(n,n), \mathfrak{sl}(n,\mathbf{C}))$	$n \geq 2$
	c)	$(\mathfrak{so}^*(4n), \mathfrak{su}^*(2n))$	$n \geq 3$
2)		$(\mathfrak{so}(2,n), \mathfrak{so}(1,n-1))$	$n = 1$ *ou* $n \geq 3$
3)		$(\mathfrak{e}_{7(-25)}, \mathfrak{e}_{6(-26)})$	

REMARQUE. Réciproquement, pour tous les couples de cette liste, $\tilde{\mathcal{F}}^+$ est non compact.

Démonstration. Reprenons les notations de 6.1.1. L'algèbre de Lie simple $\mathfrak{g}$ est de type hermitien. La liste de ces algèbres est donnée dans ([He] p. 518 et p. 532–534). On calcule, pour chacune de celles-ci, la plus grande racine restreinte $\alpha_{\max} = \sum_{\alpha\in\Pi} a_\alpha.\alpha$, et on détermine les racines simples $\alpha \in \Pi$ pour lesquelles $a_\alpha = 1$: on en trouve au plus une. On calcule alors $\mathfrak{h}$ à l'aide du diagramme de Satake de $\mathfrak{g}$ auquel on a enlevé le point blanc correspondant à α^+ ■

Remarque culturelle. Cette liste est en bijection naturelle avec la liste des

– domaines symétriques hermitiens de type tube,
– algèbres de Jordan euclidiennes simples,
– cones homogènes autoduaux irréductibles.

En outre, l'espace homogène G_e/P^+ est la frontière de Shilov du domaine symétrique (cf. [Sa] p. 37).

6.3. Semisimplicité de l'application premier retour lorsque $\tilde{\mathcal{F}}^+$ est non compact

6.3.1. Proposition. *Si $\tilde{\mathcal{F}}^+$ n'est pas compact, alors tout élément g non semisimple de G_0 a au moins trois points fixes dans $\mathcal{F}^+$.*

Remarque. Si $\tilde{\mathcal{F}}^+$ est compact, il peut exister des éléments non semisimples de G_0 ayant un seul point fixe dans $\mathcal{F}^+$: prendre $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}) = (\mathfrak{sl}(n, \mathbf{R}), \mathfrak{sl}(n-1, \mathbf{R}))$ avec $n = 2k+1$ et $k \geq 2$; dans ce cas $G_0 \approx \mathbf{GL}^+(n-1, \mathbf{R})$ agit sur $\mathcal{F}^+ = P(\mathbf{R}^n)$ l'ensemble des droites de $\mathbf{R}^n$.

Démonstration. Cela résulte du corollaire 6.2.3 et d'une étude cas par cas qui est menée dans les trois paragraphes suivants ■

6.3.2. *La variété des lagrangiens.*

On suppose que l'on est dans le cas 1) du corollaire 6.2.3.

Soient $\mathbf{F} = \mathbf{R}, \mathbf{C}$ ou $\mathbf{H}$ et $z \to \overline{z}$ la conjugaison de $\mathbf{F}$ (pour $\mathbf{F} = \mathbf{R}$ il s'agit de l'identité). On pose $\varepsilon = -1$ lorsque $\mathbf{F} = \mathbf{R}$ ou $\mathbf{H}$, et $\varepsilon = 1$ lorsque $\mathbf{F} = \mathbf{C}$.

Soit V un $\mathbf{F}$-espace vectoriel à gauche de dimension $n \geq 1$ et V^* son dual. $\forall v \in V, f \in V^*$, on note $\langle v, f \rangle$ l'image de v par f. On munit V^* de la structure de $\mathbf{F}$-espace vectoriel à gauche donnée par, $\forall v \in V$, $\forall f \in V^*$, $\lambda \in \mathbf{F}$, $\langle v, \lambda f \rangle = \langle v, f \rangle \overline{\lambda}$. Pour B dans $\mathrm{End}_{\mathbf{F}}(V)$, on définit $B^* \in \mathrm{End}_{\mathbf{F}}(V^*)$ par $\langle v, B^* f \rangle = \langle Bv, f \rangle$.

Soit $W = V \oplus V^*$ que l'on munit de la forme sesquilinéaire ε-symétrique $\psi : W \times W \to \mathbf{F}$ (*i.e.* vérifiant $\forall \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbf{F}$, $w_1, w_2, w \in W$ $\psi(\lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2, w) = \lambda_1 \psi(w_1, w) + \lambda_2 \psi(w_2, w)$ et $\psi(w_2, w_1) = \varepsilon \overline{\psi(w_1, w_2)}$) déterminée par $\psi\big|_{V \times V} = \psi\big|_{V^* \times V^*} = 0$ et $\psi(v, f) = \langle v, f \rangle$.

On a (cf. [He] p. 446)

$$\mathfrak{g} = \Big\{ A \in \mathrm{End}_{\mathbf{F}}(W) \mid \forall w_1, w_2 \in W \ \psi(Aw_1, w_2) + \psi(w_1, Aw_2) = 0 \Big\}$$

$$\mathfrak{p}^+ = \Big\{ A \in \mathfrak{g} \mid A(V) \subset V \Big\}$$

$$\mathfrak{g}_0 = \Big\{ A \in \mathfrak{g} \mid A(V) \subset V \text{ et } A(V^*) \subset V^* \Big\} = \left\{ \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & -B^* \end{pmatrix} \mid B \in \mathrm{End}_{\mathbf{F}}(V) \right\}$$

Donc $G_0 \approx \big(\mathbf{GL}_{\mathbf{F}}(V)\big)_e$ et

$$\begin{aligned}\mathcal{F}^+ \simeq \mathcal{L} :=& \Big\{V' \text{ sous-espace vectoriel lagrangien de } (W,\psi)\Big\} \\ =& \Big\{V' \subset W \text{ tel que } \psi\big|_{V'\times V'} = 0 \text{ et } 2\dim V' = \dim W\Big\}\end{aligned}$$

En outre, l'action de G_0 sur $\mathcal{L}$ factorise à travers l'action naturelle de $\mathbf{GL}_{\mathbf{F}}(V)\big/\{\pm \mathrm{Id}\}$.

La proposition 6.3.1 est donc, dans ce cas, une conséquence du lemme élémentaire suivant :

Lemme. *Tout élément b non semisimple de $\mathbf{GL}_{\mathbf{F}}(V)$ a au moins trois points fixes dans la variété $\mathcal{L}$ des lagrangiens de $V \oplus V^*$.*

Démonstration. Les sous-espaces $V_1 = V$ et $V_2 = V^*$ sont deux éléments de $\mathcal{L}$ fixés par b; construisons-en un troisième : soit b_n la partie unipotente de la décomposition de Jordan de b, on a $b_n \in \mathbf{GL}_{\mathbf{F}}(V)$; le sous-espace $U = \mathrm{Ker}\,(b_n - \mathrm{Id})$ est invariant par b et vérifie $0 \subsetneq U \subsetneq V$. Soit $U^\perp = \big\{f \in V^* \mid \forall v \in U, \langle v, f\rangle = 0\big\}$; alors $V_3 = U \oplus U^\perp$ est un élément de $\mathcal{L}$ fixé par b ■

6.3.3. *La variété des droites isotropes.*

On suppose que l'on est dans le cas 2) du corollaire 6.2.3.

Soit $W = \mathbf{R}^{2+n}$ muni de la forme bilinéaire symétrique ψ telle que

$$\forall w = (x_1, x_2, \ldots, x_{n+2}) \in W \quad \psi(w,w) = x_1x_2 + x_3x_4 + x_5^2 + \ldots + x_{n+2}^2$$

Soient Δ et Δ' les droites $\Delta = \mathbf{R}.(1,0,\ldots,0)$ et $\Delta' = \mathbf{R}.(0,1,0,\ldots,0)$, $W_0 = \big\{w = (x_1,\ldots,x_{n+2}) \mid x_1 = x_2 = 0\big\}$ et $\psi_0 = \psi\big|_{W_0\times W_0}$.

On a :

$$\begin{aligned}\mathfrak{g} = \mathfrak{so}(\psi) &= \Big\{A \in \mathrm{End}_{\mathbf{F}}(W) \mid \forall w_1, w_2 \in W\ \psi(Aw_1, w_2) + \psi(w_1, Aw_2) = 0\Big\} \\ \mathfrak{p}^+ &= \Big\{A \in \mathfrak{g} \mid A(\Delta) \subset \Delta\Big\} \\ \mathfrak{g}_0 &= \Big\{A \in \mathfrak{g} \mid A(\Delta) \subset \Delta \text{ et } A(\Delta') \subset \Delta'\Big\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & -\lambda \end{pmatrix} & 0 \\ 0 & (B) \end{pmatrix} \mid \lambda \in \mathbf{R}, B \in \mathfrak{so}(\psi_0) \right\}\end{aligned}$$

Donc $G_0 \approx \mathbf{R}_+^* \times \mathbf{SO}_e(1, n-1)$ et

$$\begin{aligned}\mathcal{F}^+ \simeq \mathcal{I} :=& \Big\{\Delta \text{ droite isotrope de } W\Big\} \\ =& \Big\{\Delta \subset W \text{ tel que } \psi\big|_{\Delta\times\Delta} = 0 \text{ et } \dim \Delta = 1\Big\}\end{aligned}$$

En outre, l'action de G_0 sur $\mathcal{I}$ factorise à travers l'action naturelle de $\mathbf{R}_+^* \times \mathbf{SO}_e(1, n-1) = \left\{ \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & 1/\alpha \end{pmatrix} & 0 \\ 0 & (b) \end{pmatrix} \mid \alpha \in \mathbf{R}_+^*, b \in \mathbf{SO}_e(\psi_0) \right\}$. Donc tout élément a de G_0 a au moins deux points fixes dans $\mathcal{I}$: $D_1 = \Delta$ et $D_2 = \Delta'$. Lorsque a n'est pas semisimple, on en construit un troisième grâce au lemme élémentaire suivant :

Lemme. *Soit b un élément non semisimple de $\mathbf{SO}(1, m)$, alors il existe une droite isotrope de $\mathbf{R}^{1+m}$ invariante par b.*

Démonstration. Soit $b_n \in \mathbf{SO}(1, m)$ la partie unipotente de la décomposition de Jordan de b, $N = \mathrm{Log}\,(b_n) \in \mathfrak{so}(1, m)$ et l le plus grand entier tel que $N^l \neq 0$. Le sous-espace $D_3 = \mathrm{Im}\,(N^l)$ est isotrope et invariant par b. C'est forcément une droite ■

6.3.4. *Le cas exceptionnel.*

On suppose que l'on est dans le cas 3) du corollaire 6.2.3.

Dans ce cas on a un résultat un peu plus précis :

Lemme. *Si $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}) = (\mathfrak{e}_{7(-25)}, \mathfrak{e}_{6(-26)})$, alors tout élément g de G_0 a au moins trois points fixes dans $\mathcal{F}^+$.*

Remarque. Voici les propriétés particulières à ce couple $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ que nous utiliserons :

a) $\mathrm{rg}_{\mathbf{R}}(\mathfrak{g}) \geq 2$

b) $\mathfrak{g}_0$ a une seule classe de conjugaison de sous-algèbre de Cartan

c) Les sous-algèbres $\mathfrak{p}^+$ et $\mathfrak{p}^-$ sont conjuguées sous $\mathrm{Ad}\,(G)$.

En effet, il résulte de ([He] p. 518) que $\mathrm{rg}_{\mathbf{R}}(\mathfrak{g}) = 3$ et que le rang complexe de G_0 est la somme de son rang réel et du rang complexe de son compact maximal ($7 = 3 + 4$) et, de ([He] p. 534), que le groupe de Weyl du système de racines restreintes de $\mathfrak{g}$ contient $-\mathrm{Id}$. Ceci prouve *a) b)* et *c)*.

Démonstration. On veut trouver trois points fixes de g dans $\mathcal{F}^+$, c'est-à dire trois sous-algèbres paraboliques conjuguées à $\mathfrak{p}$ qui sont normalisées par g. Grâce à *c)*, on en trouve facilement deux : $\mathfrak{p}_1 = \mathfrak{p}^+$ et $\mathfrak{p}_2 = \mathfrak{p}^-$; elles sont, en fait, normalisées par G_0 tout entier.

Pour en construire une troisième, reprenons les notations de 5.5.3.

Soit θ une involution de Cartan de $\mathfrak{g}$ telle que $\theta(\mathfrak{a}_0) = \mathfrak{a}_0$, $\mathfrak{k} = \{Z \in \mathfrak{g} \mid \theta(Z) = Z\}$, $\mathfrak{l} = \mathfrak{g}_0 \cap \mathfrak{k}$, K le sous-groupe connexe d'algèbre de Lie $\mathfrak{k}$ et $L = G_0 \cap K$; le groupe L est compact. Soient $\Sigma^+_{\mathfrak{p}^+} = \Sigma^+ \cap \Sigma_{\mathfrak{p}^+}$, Π l'ensemble des racines simples de Σ^+, α^+ la racine de Π qui n'est pas dans $\Sigma^+_{\mathfrak{p}^+}$ et $s^+ \in W$ la symétrie définie par α^+.

Pour α dans Σ, on note $\mathfrak{g}^\alpha = \{Z \in \mathfrak{g} \mid \forall Y \in \mathfrak{a}_0, [Y, Z] = \alpha(Y)Z\}$. Soient $\mathfrak{z}_{\mathfrak{l}}(\mathfrak{a}_0) = \{Z \in \mathfrak{l} \mid \forall Y \in \mathfrak{a}_0, [Y, Z] = 0\}$, $\mathfrak{n}_0 = \oplus_{\alpha \in \Sigma^+_{\mathfrak{p}^+}} \mathfrak{g}^\alpha$, $Z_L(\mathfrak{a}_0) = \{x \in L \mid \forall Y \in \mathfrak{a}_0, \mathrm{Ad}\,(x)(Y) = Y\}$ et $N_0 = \exp\,(\mathfrak{n}_0)$. Soient $\mathfrak{p}_0^{\min}$ la sous-algèbre parabolique minimale de $\mathfrak{g}_0$ associée à $\Sigma^+_{\mathfrak{p}^+}$ et $P_0^{\min}$ le sous-groupe parabolique correspondant : on a $\mathfrak{p}_0^{\min} = \mathfrak{z}_{\mathfrak{l}}(\mathfrak{a}_0) \oplus \mathfrak{a}_0 \oplus \mathfrak{n}_0$ et $P_0^{\min} = Z_L(\mathfrak{a}_0).A_0.N_0$.

Montrons que g est conjugué à un élément de $P_0^{\min}$: d'après *b)*, les groupes compacts L et $Z_L(\mathfrak{a}_0)$ ont même rang complexe; donc la caractéristique d'Euler de la variété $G_0/P_0^{\min} = L/Z_L(\mathfrak{a}_0)$ est non nulle ([GHV.] ch. XI th. VII). Le théorème de Lefschetz prouve alors que l'action de g sur $G_0/P_0^{\min}$ a un point fixe, c'est-à dire que g est conjugué dans G_0 à un élément de $P_0^{\min}$.

On peut donc supposer que $g \in P_0^{\min}$. Soit $\mathfrak{p}_3 = \mathrm{Ad}\,(\tilde{s}^+)(\mathfrak{p}^+)$. Montrons que $\mathfrak{p}_3$ est normalisé par $P_0^{\min}$ (et donc par g); il suffit de voir que $\mathfrak{p}_0^{\min} \subset \mathfrak{p}_3$; or ceci est une conséquence de l'inclusion $\Sigma^+_{\mathfrak{p}^+} \subset \Sigma^+ \setminus \left\{\alpha^+, 2\alpha^+\right\} = s^+\left(\Sigma^+ \setminus \left\{\alpha^+, 2\alpha^+\right\}\right) \subset s^+\left(\Sigma^+\right)$. Finalement, on remarque que $\mathfrak{p}_3 \neq \mathfrak{p}_1$ et, d'après *a)*, $\mathfrak{p}_3 \neq \mathfrak{p}_2$ ■

6.3.5. *Démonstration de la proposition 1.3.3.* Cela résulte de 5.3 et 6.3.1.

Démonstration de la proposition 1.3. Si $\tilde{\mathcal{F}}^+$ est compact, les propositions 1.3.1 et 1.3.2 prouvent que $r = 1$.

Si $\tilde{\mathcal{F}}^+$ est non compact. On choisit un élément γ de $\Gamma \setminus \{1\}$ qui a un point fixe dans $\mathcal{O}$, *i.e.* qui est conjugué à un élément de G_0 (l'existence d'orbites périodiques pour le flot φ_t ([A] théorème 3) implique l'existence d'un tel élément γ). Comme $G_0 \cap Z = \{1\}$ (5.2.2 *a)*), on a $\gamma \in \Gamma \setminus Z_\Gamma$. Les propositions 1.3.1 et 1.3.3 prouvent alors que $r = 1$ ■

7. Conclusion

7.0. Le but de ce chapitre est d'achever les démonstrations des théorèmes 1 et 2 de l'introduction.

On donne tout d'abord une nouvelle présentation de l'exemple fondamental (7.1) et une nouvelle formulation du théorème 1 (7.2). Les principales propriétés de l'exemple fondamental sont démontrées en 7.3. Le théorème 1 est démontré en 7.4 et le théorème 2 en 7.5.

7.1. L'exemple fondamental

7.1.1. A des revêtements finis près et après reparamétrage, il s'agit du flot géodésique sur un espace localement symétrique riemannien à courbure strictement négative (ELSRCSN) compact. Plus précisément :

Choisissons $\tilde{S}$ un ELSRCSN simplement connexe de dimension $n \geq 2$. Soit $\tilde{V} = V_{\tilde{S}} = \{v \in T\tilde{S} \mid \|v\| = 1\}$ le fibré unitaire tangent à $\tilde{S}$ et $G = \mathrm{Is}(\tilde{S})$ le groupe des isométries de $\tilde{S}$; sauf pour $n = 2$ où $\tilde{V} = \widetilde{\mathbf{SL}(2,\mathbf{R})}$ (resp $G = \widetilde{\mathbf{SL}^{\pm}(2,\mathbf{R})}$) est le revêtement universel de $V_{\tilde{S}}$ (resp. $\mathrm{Is}(\tilde{S})$). Le groupe G agit transitivement sur $\tilde{S}$ et $\tilde{V}$. Soit φ_t le flot géodésique sur $\tilde{V}$ (pour $n = 2$ il s'agit du relevé de ce flot à $\tilde{V}$).

Choisissons Γ_0 un sous-groupe discret de G tel que $V_0 := \Gamma_0 \backslash \tilde{V}$ est une variété compacte. Soit φ_t^0 le flot sur V_0 image de φ_t et X^0 le champ de vecteurs associé. A des revêtements finis près, il s'agit du flot géodésique sur un ELSRCSN compact (cf. 7.3.1).

Soit Ω_{V_0} l'ouvert convexe symétrique et borné (cf. 7.3.4) de l'espace vectoriel de dimension finie $E = \mathrm{Hom}(\Gamma_0, \mathbf{R}) = H^1(V_0, \mathbf{R})$:

$$\Omega_{V_0} := \Big\{ h_0 \in E \mid \text{ il existe une 1-forme fermée } \alpha_0 \text{ représentant } h_0 \text{ telle que } \alpha_0(X^0) + 1 > 0 \text{ en tout point de } V_0 \Big\}$$

Choisissons $h_0 \in \Omega_{V_0}$. Soit Γ_1 le sous-groupe de $G' := G \times \mathbf{R}$: $\Gamma_1 := \{(\gamma_0, h_0(\gamma_0)) \mid \gamma_0 \in \Gamma_0\}$. Le groupe G' agit transitivement sur $\tilde{V}$ par : $\forall (g,t) \in G', \tilde{v} \in \tilde{V}$

$$(g,t).\tilde{v} = \tilde{\varphi}_t(g.\tilde{v})$$

7.1.2. Le lemme suivant se démontre comme la proposition 1.2.3.

Lemme.

a) *Le quotient $V_1 := \Gamma_1 \backslash \tilde{V}$ est une variété compacte; le flot φ_t^1 image de $\tilde{\varphi}_t$ sur V_1 est d'Anosov; ses distributions stable et instable sont C^∞ et sa 1-forme canonique est de contact.*

b) *A reparamétrage près, les flots φ_t^0 et φ_t^1 coïncident : c'est-à dire qu'il existe un difféomorphisme C^∞ ψ de V_0 sur V_1 et une fonction C^∞ strictement positive k_0 sur V_0 tels que $\psi_*(k_0.X^0) = X^1$ est le champ de vecteurs associé au flot φ_t^1.*

Le flot φ_t^1 sur V_1 sera appelé flot associé au triplet $(\tilde{S}, \Gamma_0, h_0)$.

7.2. Classification

Voici une “reformulation” du théorème 1 :

Theorème 1bis. *Soit φ_t un flot d'Anosov C^∞ sur une variété compacte V de dimension $2n-1$ tel que*

i) *les distributions stable et instable sont C^∞*

ii) *la 1-forme canonique est de contact.*

Alors il existe un triplet $(\tilde{S}, \Gamma_0, h_0)$ comme en 7.1, tel que le flot φ_t^1 sur V_1 associé à ce triplet soit C^∞-conjugué à φ_t : c'est-à dire qu'il existe un difféomorphisme C^∞ F de V sur V_1 tel que $\forall t \in \mathbf{R} \quad F \circ \varphi_t = \varphi_t^1 \circ F$.

Ce triplet est unique (à isomorphisme près).

7.3. Propriétés de l'exemple fondamental

Nous démontrons dans cette partie diverses propriétés de l'exemple fondamental : nous prenons les notations de 7.1.

7.3.1. *Propriétés de φ_t^0.*

Si $n \geq 3$. Le groupe Γ_0 est un sous-groupe de type fini ([Ra] th. 6.16) du groupe algébrique $G = \mathrm{Is}(\tilde{S})$; il est connu ([Ra] cor. 6.13) qu'alors il existe un sous-groupe d'indice fini Γ_0' de Γ_0 sans torsion.

Si $n = 2$. Le même argument permet de trouver un sous-groupe d'indice fini Γ_0'' de Γ_0, inclus dans $\Gamma_e = \widetilde{\mathbf{SL}(2,\mathbf{R})}$ et tel que $\mathrm{Ad}\,(\Gamma_0'')$ est sans torsion. Ce groupe Γ_0'' est cocompact dans G_e, car $\mathfrak{h} = 0$. Soit Z le centre de G_e. Il est connu qu'alors, $Z \cap \Gamma_0''$ est d'indice fini dans Z ([Mo]). Donc Γ_0'' est d'indice fini dans le groupe $\Gamma_0' := Z.\Gamma_0''$ qui est encore discret.

Dans tous les cas, le flot φ_t^0 est, à revêtement fini près, égal au flot géodésique $\varphi_t'^0$ sur le fibré unitaire tangent $V_0' := \Gamma_0' \setminus \tilde{V}$ à un ELSRCSN compact $S_0' := \Gamma_0' \setminus \tilde{S}$. Or le flot $\varphi_t'^0$ est d'Anosov ([A]), sa 1-forme canonique est la 1-forme de Liouville et est donc de contact, et les distributions stables et instables sont analytiques car elles se relèvent en des distributions sur $V_{\tilde{S}}$ invariantes par le groupe $\mathrm{Is}(\tilde{S})$. Il en est de même du flot φ_t^0.

7.3.2. Remarques.

1) En général, le quotient $\Gamma_0 \setminus \tilde{S}$ n'est pas une variété. Exemple : soient $\theta \in \mathrm{Is}(\tilde{S})$ la symétrie par rapport à un point $\tilde{s}_0$ de $\tilde{S}$, Γ_0' un sous-groupe discret sans torsion cocompact de $\mathrm{Is}(\tilde{S})$ tel que $\theta\Gamma_0'\theta^{-1} = \Gamma_0'$ (ça existe) et $\Gamma_0 := \Gamma_0' \cup \theta\Gamma_0'$; le quotient $V_0 := \Gamma_0 \setminus V_{\tilde{S}}$ est une variété mais pas $\Gamma_0 \setminus \tilde{S}$.

2) Dans cet exemple, l'élément $\theta \in \Gamma_0$ a pour image dans $H_1(V_0, \mathbf{Z}) = \Gamma_0/[\Gamma_0, \Gamma_0]$ un élément $\overline{\theta}$ tel que $2\overline{\theta} = 0$. Il n'existe donc pas d'orbite périodique du flot φ_t^0 qui représente $\overline{\theta}$ (Dans le cas du flot géodésique sur un ELSRCSN compact, tout élément de $H_1(V_0, \mathbf{Z})$ est représenté par une orbite périodique).

3) Pour $n \geq 3$, on a vu que (φ_t^0, V_0) admet un revêtement fini qui s'identifie au flot géodésique sur un ELSRCSN compact. Ce n'est plus le cas pour $n = 2$: soient Γ un sous-groupe discret cocompact sans torsion de $\mathbf{SL}(2,\mathbf{R})$ (ça existe car $\mathbf{SL}(2,\mathbf{R})$ est algébrique) et $V_0 = \Gamma \setminus \mathbf{SL}(2,\mathbf{R})$; dans ce cas c'est (φ_t^0, V_0) qui est le revêtement fini d'un flot géodésique sur une surface de Riemann compacte.

7.3.3. Soient G' le groupe des difféomorphismes de $\tilde{V}$ qui préservent $\tilde{X}$ et $\tilde{E}^{\pm}$, et $G := \big\{g \in G' \mid \chi(g) = \pm 1\big\}$ (cf. 3.3.3).

Lemme. *$G = \mathrm{Is}(\tilde{S})$ (sauf pour $n = 2$ où G est le revêtement universel de $\mathrm{Is}(\tilde{S})$).*

Démonstration. Supposons $n \geq 3$ (le cas $n = 2$ se traite de même). Le groupe $I := \mathrm{Is}(\tilde{S})$ agit sur $\tilde{V}$: c'est un sous-groupe de G. Remarquons que I et G sont des groupes semisimples, que I agit transitivement sur $\tilde{V} = G/H$ et que H est compact (car $\mathrm{rg}_{\mathbf{R}}(G) = 1$); on en déduit que $\mathrm{Lie}\,(I) = \mathrm{Lie}\,(G)$.

Soit $g \in G$, montrons que $g \in I$. Comme I agit transitivement sur $\tilde{V}$, on peut supposer que g stabilise le point base $\tilde{v}_0$ de $\tilde{V}$. Soit $\varphi = \mathrm{Ad}\,(g) \in \mathrm{Aut}\,(\mathfrak{g})$. Il est connu que $\mathrm{Aut}\,(\mathfrak{g}) \simeq \mathrm{Is}(\tilde{S})$, on peut donc supposer que $\varphi = \mathrm{Id}$; ce qui signifie que le 1-jet de g en v_0 est celui de l'identité et donc que $g = 1$ (cf. 2.1.2). Donc $G = \mathrm{Is}(\tilde{S})$ ∎

7.3.4. Donnons quelques propriétés de l'ouvert Ω_{V_0} "de reparamétrage" introduit en 7.1.1.

Lemme. Ω_{V_0} *est un voisinage ouvert convexe symétrique et borné de 0.*

Démonstration. Il est clair que Ω_{V_0} est un voisinage ouvert convexe de 0. Construisons un difféomorphisme σ_0 de V_0 tel que :

$$\begin{aligned} \sigma_{0*}(X^0) &= -X^0 \quad \text{et} \\ \sigma_0^*(h) &= h \quad \forall h \in H^1(V_0, \mathbf{R}) \end{aligned} \tag{$*$}$$

On définit le difféomorphisme $\tilde{\sigma}_0$ de $V_{\tilde{S}}$ par $\tilde{\sigma}_0(\tilde{v}) = -\tilde{v}$ (sauf pour $n = 2$ où $\tilde{\sigma}_0$ est un relevé à $\tilde{V}$ de ce difféomorphisme). On a, $\forall g \in G$, $g \circ \tilde{\sigma}_0 = \tilde{\sigma}_0 \circ g$. Donc $\tilde{\sigma}_0$ passe au quotient en un difféomorphisme σ_0 de V_0 vérifiant $(*)$.

Montrons que Ω_{V_0} est symétrique. Soit $h \in \Omega_{V_0}$. Il existe une 1-forme fermée α_0 qui représente h telle que $\alpha_0(X^0) + 1 > 0$. La 1-forme fermée $\alpha_0' = -\sigma_0^*(\alpha_0)$ représente $-h$ et vérifie $\alpha_0'(X^0) + 1 > 0$. Donc $-h \in \Omega_{V_0}$.

Montrons que Ω_{V_0} est borné. Il suffit de voir que 0 est le seul élément de Ω_{V_0} qui vérifie, $\forall t \geq 0$, $th \in \Omega_{V_0}$. Soit h un tel élément.

Soit c une orbite périodique du flot φ_t^0 de période T_0, on a, $\forall t \geq 0$, $t\displaystyle\int_c h > -T_0$, donc $\displaystyle\int_c h \geq 0$; comme Ω_{V_0} est symétrique, on en déduit que $\displaystyle\int_c h = 0$. Il n'est pas très restrictif de supposer que φ_t^0 est le flot géodésique sur un ELSRCSN compact S_0 (cf. 7.3.1). Dans ce cas, tout élément $\overline{c}$ de $H_1(V_0, \mathbf{Z}) = H_1(S_0, \mathbf{Z})$ est représenté par une orbite périodique c, donc $\langle h, \overline{c} \rangle = 0$ puis $h = 0$ ∎

7.3.5. Lorsque $n \geq 3$, $\Gamma_0 \subset G_e$ et $h_0 \neq 0$, l'espace localement homogène V est un exemple intéressant : on a $V = \Gamma \backslash G_e'/H_e'$ avec Γ Zariski-dense dans G_e' ($\approx \mathrm{Aut}\,(\mathfrak{g})_e \times \mathbf{R}$) et H_e' est non-compact !

7.4. Démonstration du théorème 1 bis

Le but de cette partie est de démontrer le théorème 1 bis dont nous prenons les notations (cf. 7.2).

7.4.1. Il résulte des propositions de 1 qu'il existe un groupe de Lie simplement connexe G_e de rang réel un, θ une involution de Cartan de G_e, X_0 un élément de $\mathfrak{g} := \mathrm{Lie}\,(G_e)$ vérifiant $\theta(X_0) = -X_0$, tels que, en notant $K_e := \big\{g \in G_e \mid \theta(g) = g\big\}$, $M := \big\{k \in K_e \mid \mathrm{Ad}\,k(X_0) = X_0\big\}$ et M_e la composante connexe de M, le revêtement universel $\tilde{V}$ de V s'identifie à G_e/M_e et le flot $\tilde{\varphi}_t$ est donné par $\tilde{\varphi}_t(gM_e) = g\,e^{-X_0 t}M_e$. Soit $\tilde{S} := G_e/K_e$; c'est un ELSRCSN simplement connexe pour toute métrique G_e-invariante. On fixe cette métrique de sorte que X_0, considéré comme un élément de $T_{K_e}(\tilde{S}) \simeq \big\{Y \in \mathfrak{g} \mid \theta(Y) = -Y\big\}$, soit de norme 1. La variété $\tilde{V}$ s'identifie alors à $V_{\tilde{S}} := \big\{v \in T\tilde{S} \mid \|v\| = 1\big\}$ et $\tilde{\varphi}_t$ au flot géodésique sur $V_{\tilde{S}}$ (sauf pour $n = 2$ où $\tilde{V}$ est le revêtement universel de $V_{\tilde{S}}$ et $\tilde{\varphi}_t$ le relevé à $\tilde{V}$ du flot géodésique).

7.4.2. Soit $G = \mathrm{Is}(\tilde{S})$ (sauf pour $n = 2$ où G est le revêtement universel de $\mathrm{Is}(\tilde{S})$). Les lemmes 4.4 et 7.3.3 prouvent qu'il existe un sous-groupe discret Γ_0 de G tel que le quotient $V_0 := \Gamma_0 \setminus \tilde{V}$ soit une variété compacte, et un élément h_0 dans Ω_{V_0} tel que le π_1 de V soit égal au sous-groupe $\Gamma = \big\{(\gamma_0, h_0(\gamma_0)) \mid \gamma_0 \in \Gamma_0\big\}$ du groupe $G' \simeq G \times \mathbf{R}$. Ceci prouve l'assertion d'existence dans le théorème 1bis.

7.4.3. Démontrons l'unicité du triplet $(\tilde{S}, \Gamma_0, h_0)$; soit $(\tilde{S}^{\mathrm{bis}}, \Gamma_0^{\mathrm{bis}}, h_0^{\mathrm{bis}})$ un autre triplet. Le lemme 7.3 prouve que $\mathrm{Is}(\tilde{S}) = \mathrm{Is}(\tilde{S}^{\mathrm{bis}})$, l'égalité $X_0 = X_0^{\mathrm{sevenrm\ bis}}$ prouve alors que $\tilde{S}$ et $\tilde{S}^{\mathrm{bis}}$ sont isométriques. Il est facile de voir qu'alors $\Gamma_0 = \Gamma_0^{\mathrm{bis}}$ et $h_0 = h_0^{\mathrm{bis}}$. Ceci termine la démonstration du théorème 1.

7.5. Le cas riemannien

Le but de cette partie est de montrer le théorème 2 dont nous prenons les notations.

7.5.1. Soit σ le difféomorphisme de V_N donné par $\sigma(v) = -v$. La 1-forme canonique λ du flot φ_t^N est égale à la 1-forme de Liouville : remarquer que la 1-forme de Liouville est invariante par le flot et donc nulle sur E^+ et E^-. Son noyau $\mathrm{Ker}\,\lambda$ est une distribution C^∞, par hypothèse il en est de même des distributions stable $E^- = (E^0 \oplus E^-) \cap \mathrm{Ker}\,\lambda$ et instable $E^+ = \sigma(E^-)$. En outre λ est une 1-forme de contact. On peut donc appliquer le théorème 1 : il existe un triplet $(\tilde{S}, \Gamma_0, h_0)$ ... Il suffit de voir, pour conclure, que $h_0 = 0$, que $\mathrm{Ad}\,(\Gamma_0)$ est sans torsion et que, pour $n = 2$, Γ_0 contient le centre Z de G_e. C'est ce qu'affirment les trois lemmes suivants :

7.5.2. LEMME. *On a* $h_0 = 0$.

Démonstration. Soit $\tilde{N}$ le revêtement universel de N et $\tilde{\sigma}$ le difféomorphisme de $\tilde{V} = V_{\tilde{N}}$ donné par $\tilde{\sigma}(\tilde{v}) = -\tilde{v}$ (sauf pour $n = 2$ où $\tilde{V}$ est le revêtement universel de $V_{\tilde{N}}$ et $\tilde{\sigma}$ le relevé à $\tilde{V}$ de ce difféomorphisme). Par construction, on a, $\forall \gamma \in \Gamma = \pi_1(V_N)$, $\gamma \circ \tilde{\sigma} = \tilde{\sigma} \circ \gamma$. On en déduit que σ agit trivialement sur $H_1(V_N, \mathbf{R})$. En particulier, soit $h \in H^1(V_N, \mathbf{R})$ comme en 4.4.1, on a $\sigma^*(h) = h$. D'autre part l'égalité $\sigma \circ \varphi_t^N = \varphi_{-t}^N \circ \sigma$ prouve que $\sigma^*(h) = -h$. Donc $h = 0$ et $h_0 = 0$ ■

7.5.3. LEMME. *Si* $n \geq 3$, Γ_0 *est sans torsion.*

Démonstration. En effet $\Gamma_0 = \pi_1(N)$ et N est à courbure négative.

7.5.4. Supposons que $n = 2$. Soit $Z' = \pi_1(V_{\tilde{N}})$: c'est un sous-groupe de Γ_0 et donc un sous-groupe de $G = \widetilde{\mathbf{SL}^{\pm}(2, \mathbf{R})}$. Soit Z le centre de $G_e = \widetilde{\mathbf{SL}(2, \mathbf{R})}$.

LEMME.

a) *On a* $Z = Z'$

b) Γ_0/Z *est sans torsion.*

Démonstration. Choisissons une orientation pour le fibré $\tilde{E}^+$; ceci définit une orientation pour la fibre de la submersion $\tilde{V} \to \tilde{N}$ (travailler modulo $\tilde{E}^0 \oplus \tilde{E}^-$). $\Gamma_0 \cap G_e$ est donc le sous-groupe des éléments de Γ_0 qui préservent l'orientation de cette fibre. Par suite Z' est dans le centre de $\Gamma_0 \cap G_e$. Or $\mathrm{Ad}\,(\Gamma_0 \cap G_e)$ est Zariski-dense dans $\mathbf{PSL}(2, \mathbf{R})$ donc $Z' \subset Z$.

Soient $\tilde{\mathcal{F}}^+ = G_e/P_e^+$ et $\mathcal{F}^+ = G_e/P^+$ comme en 4.5. L'espace $\mathcal{F}^+_{\tilde{N}} := G_e/Z'P_e^+$ est l'espace des directions vers $-\infty$ des géodésiques de $\tilde{N}$. Donc tout élément non trivial de $\pi_1(N) = \Gamma_0/Z'$ agit sur $\mathcal{F}^+_{\tilde{N}}$ avec un unique point fixe attracteur et un unique point fixe répulsif. On en déduit que le revêtement $\mathcal{F}^+_{\tilde{N}} \to \mathcal{F}^+$ est un difféomorphisme (car l'action de γ passe au quotient sur $\mathcal{F}^+$) donc $Z = Z'$ et Γ_0/Z est sans torsion ■

7.5.5. REMARQUE. Dans le cas particulier des flots géodésiques, on peut simplifier la démonstration du théorème 1. En effet, dans ce cas, $\mathcal{F}^+$ est difféomorphe à la sphère S^{n-1} (raisonner comme en 7.5.4). On peut donc remplacer les chapitres 5 et 6 par le lemme suivant :

LEMME. *Soient* G_e *un groupe de Lie simple connexe et* P^+ *un sous-groupe parabolique. Alors* G_e/P^+ *est difféomorphe à une sphère si et seulement si* G_e *est de rang réel un.*

Démonstration. (omise) Cela résulte d'une étude cas par cas, à l'aide de la classification de Borel-Montgomery-Samelson des actions transitives de groupes de Lie compacts sur une sphère.

On peut éviter de passer par cette liste en démontrant à l'aide de 5.2.2 que P^- a exactement deux orbites sur $\mathcal{F}^+$ et que ceci montre que G est de rang un (5.5.4) ■

Références

[A] D.V. Anosov, Geodesic flows on closed Riemann manifolds with negative curvature, *Proc. Stek. Inst. Math.* **90** (1967).

[BFL] Y. Benoist, P. Foulon, F. Labourie, Flots d'Anosov à distributions de Liapounov différentiables, *C. R. Acad. Sci. Paris,* à paraître.

[Bo1] N. Bourbaki, Groupes et algèbres de Lie, ch. 4, 5, 6, Masson, Paris, 1984.

[Bo2] N. Bourbaki, Groupes et algèbres de Lie, ch. 7 et 8, Hermann, Paris,.

[EO] P. Eberlein, B. O'Neill, Visibility manifolds, *Pac. J. Math.* **46** (1976), pp. 43–110.

[F] R. Feres, Geodesic flows on manifolds of negative curvature with smooth horospheric foliations, preprint, 1990.

[FK1] R. Feres, A. Katok, Invariant tensor fields of dynamical systems with pinched Lyapunov exponents and rigidity of geodesic flows, *Erg. Th. Dyn. Syst.* **9** (1989), pp. 427–432.

[FK2] R. Feres, A. Katok, Anosov flows with smooth foliations and rigidity of geodesic flows in three dimensional manifolds of negative curvature, preprint, 1989.

[FL] P. Foulon, F. Labourie, Flots d'Anosov à distributions de Liapounov différentiables, *C. R. Acad. Sci. Paris* **309** (1989), pp. 255–260.

[Gh] E. Ghys, Flots d'Anosov dont les feuilletages stables sont différentiables, *Ann. Sci. Ec. Norm. Sup.* **20** (1987), pp. 251–270.

[GHV] Greub, Halperin, Vanstone, Connection, Curvature and Homology, vol. III, Academic Press, New York,.

[Gr] M. Gromov, Rigid transformation groups, dans "Géométrie différentielle", D. Bernard et Y. Choquet-Bruhat éditeurs, Travaux en cours **33**, pp. 65–139, Hermann, Paris, 1988.

[HP] M. Hirsch, C. Pugh, Stable manifolds and hyperbolic sets in Proc. Symp. Pure Math., **33**, pp. 133–164. Amer. Math. Soc., 1970.

[HK] S. Hurder, A. Katok, Differentiability, rigidity and Godbillon-Vey classes for Anosov flows, preprint.

[He] S. Helgason, Differential geometry, Lie groups and symmetric spaces, Academic Press, New York, 1978.

[Ka] M. Kanai, Geodesic flows of negatively curved manifolds with smooth stable and unstable foliations, *Erg. Th. Dyn. Syst.* **8** (1988), pp. 215–240.

[KN] S. Kobayashi, K. Nomizu, Foundations of differential geometry, Interscience, New York-London, 1963.

[LT] F. Lastaria, F. Tricerri, Some remarks about the curvature of locally homogeneous spaces, preprint.

[Mo] G.D. Mostow, Intersections of discrete subgroups with Cartan subgroups, *J. Indian Math. Soc.* **34** (1970), pp. 203–214.

[Ra] M.S. Raghunathan, Discrete subgroups of Lie groups, Springer, Berlin-Heidelberg-New York, 1972.

[Sa] I. Satake, Algebraic structures of symmetric domains, Princeton University Press, Princeton, N.J., 1980.

[T] W. Thurston, The Geometry and Topology of 3-manifolds, Princeton Lecture Notes.

[Wa] G. Warner, Harmonic analysis on semisimple Lie groups, vol 1,Springer, Berlin-Heidelberg-New York, 1972.