

# Convexes divisibles I

Yves Benoist

## ABSTRACT Divisible convex I

Let  $\Omega$  be a strictly convex open subset of the real projective space which is divisible (i.e. for which there exists a discrete group  $\Gamma$  of projective transformations preserving  $\Omega$  such that the quotient  $\Gamma\backslash\Omega$  is compact). We prove that such a group  $\Gamma$  is hyperbolic and that the geodesic flow of the quotient space  $\Gamma\backslash\Omega$  is Anosov.

As an application, we study the regularity of the boundary  $\partial\Omega$  : we show that  $\partial\Omega$  is of class  $C^1$  and that its normal map is Hölder continuous. Moreover, we prove the following rigidity assertion : if  $\Omega$  is not an ellipsoïd, then the curvature of the boundary  $\partial\Omega$  is supported by a set of zero measure. We give also a few other applications.

## 1 Introduction

### 1.1 Présentation générale

Notre objectif est d'étudier les ouverts strictement convexes  $\Omega$  de l'espace projectif réel qui sont divisibles, c'est-à-dire pour lesquels il existe un groupe discret  $\Gamma$  de transformations projectives préservant  $\Omega$  tel que le quotient  $M := \Gamma\backslash\Omega$  est compact.

Dans cette optique, l'intérêt principal de ce texte est de relier ce sujet classique, initié par N.Kuiper en 1950, à des sujets plus modernes (les groupes hyperboliques, les flots d'Anosov et le formalisme thermodynamique). En particulier, nous montrerons les deux assertions suivantes:

- Le groupe  $\Gamma$  est un groupe hyperbolique.
- Le flot géodésique pour la métrique de Hilbert de l'espace quotient  $M$  est d'Anosov.

Ces deux assertions ont des conséquences remarquables sur les propriétés de régularité du bord  $\partial\Omega$ . On savait que  $\partial\Omega$  ne peut pas être de classe  $C^2$  avec un Hessien défini positif, à moins que  $\Omega$  ne soit un ellipsoïde (voir [6], [10] et [29]). Nous montrerons que  $\partial\Omega$  est de classe  $C^1$  et que l'application normale est Hölder continue. Nous montrerons aussi que, si l'application normale est absolument continue, alors  $\Omega$  est un ellipsoïde.

- Nous donnerons d'autres conséquences de ces deux assertions. Citons en quelques unes :
- Si le flot géodésique préserve une mesure absolument continue par rapport à une densité  $C^\infty$ , alors  $\Omega$  est un ellipsoïde.
  - Le flot géodésique est topologiquement mélangeant sur le fibré unitaire tangent  $T^1M$ .

L'hypothèse de stricte convexité sur notre ouvert  $\Omega$  peut être vue comme un analogue de l'hypothèse de courbure négative pour les variétés riemanniennes. Les résultats que nous allons démontrer confirmeront en général cette analogie.

## 1.2 Notations et définitions

### 1.2.1 Ouverts strictement convexes divisibles

Notons  $\mathbb{P}(\mathbb{R}^m)$  l'espace projectif de  $\mathbb{R}^m$  et  $\text{PGL}(\mathbb{R}^m)$  le groupe des transformations projectives de  $\mathbb{P}(\mathbb{R}^m)$ : c'est le quotient du groupe linéaire  $\text{GL}(\mathbb{R}^m)$  par le groupe des homothéties. Un ouvert  $\Omega$  de  $\mathbb{P}(\mathbb{R}^m)$  est dit convexe si son intersection avec toute droite projective de  $\mathbb{P}(\mathbb{R}^m)$  est connexe. Il est dit convexe saillant (ou proprement convexe) si, en outre, il existe un hyperplan projectif de  $\mathbb{P}(\mathbb{R}^m)$  qui ne rencontre pas l'adhérence de  $\Omega$ . Il est dit strictement convexe si, en outre, toute droite projective de  $\mathbb{P}(\mathbb{R}^m)$  rencontre le bord  $\partial\Omega := \overline{\Omega} - \Omega$  en au plus deux points. La situation qui nous intéresse ici est la suivante: on se donne un sous-groupe discret  $\Gamma$  de  $\text{PGL}(\mathbb{R}^m)$  qui préserve un ouvert convexe saillant  $\Omega$  de  $\mathbb{P}(\mathbb{R}^m)$  et tel que le quotient  $\Gamma \backslash \Omega$  est compact. On dit alors que  $\Gamma$  divise  $\Omega$  et que  $\Omega$  est divisible. Quitte à remplacer  $\Gamma$  par un sous-groupe d'indice fini, on peut supposer  $\Gamma$  sans torsion, ce que nous ferons dans tout cet article. Le quotient  $M = \Gamma \backslash \Omega$  est alors une variété  $C^\infty$ .

### 1.2.2 L'ellipsoïde

Soit  $q$  une forme quadratique sur  $\mathbb{R}^m$  de signature  $(1, m-1)$  et  $\Omega_0 := \{[v] \in \mathbb{P}(\mathbb{R}^m) / q(v) > 0\}$ . Nous appellerons *ellipsoïde*<sup>1</sup> un tel ouvert convexe de  $\mathbb{P}(\mathbb{R}^m)$ . L'ellipsoïde est un ouvert strictement convexe divisible. En effet, il est divisé par tous les réseaux cocompacts du groupe  $\text{SO}(q)$  des isométries de  $q$ .

Il existe d'autres ouverts strictement convexes divisibles. Cela résultera du corollaire 2.10.

### 1.2.3 Distance de Hilbert

Pour tout couple  $x, y$  de points distincts de  $\mathbb{P}(\mathbb{R}^m)$ , notons  $\langle x, y \rangle$  la droite projective les contenant. Tout ouvert convexe saillant  $\Omega$  de  $\mathbb{P}(\mathbb{R}^m)$  est muni d'une distance  $d_\Omega$  appelée distance de Hilbert et définie par, pour tout  $x, y$  dans  $\Omega$ ,  $d_\Omega(x, y) = |\log((a, b, x, y))|$  où  $a$  et  $b$  sont les deux points du bord de  $\Omega$  tels que  $a, b, x$  et  $y$  sont alignés et où  $(a, b, x, y)$  est le birapport de ces quatre points. Lorsqu'on identifie la droite projective  $\langle x, y \rangle$  avec  $\mathbb{P}(\mathbb{R}^2) \simeq \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ , le birapport est donné par la formule :  $(a, b, x, y) = \left(\frac{x-a}{x-b} : \frac{y-a}{y-b}\right)$ .

---

<sup>1</sup>On ne suivra donc pas l'usage qui consiste à appeler  $\Omega_0$  *espace hyperbolique* et à le noter  $\mathbb{H}^{m-1}$  ...!

Remarquons que toute transformation projective qui préserve  $\Omega$  induit une isométrie pour la distance  $d_\Omega$ .

### 1.2.4 Feuilletage géodésique

On appelle géodésique de  $\Omega$  l'intersection de  $\Omega$  avec une droite projective. Ces courbes minimisent la distance de Hilbert. Réciproquement, lorsque  $\Omega$  est strictement convexe, toute courbe qui minimise la distance est obtenue ainsi. Pour toute variété  $C^\infty$ , on note  $SN$  le fibré tangent en sphère à  $N$ : c'est la variété des directions tangentes à  $N$ . Les géodésiques de  $\Omega$  définissent un feuilletage de dimension 1  $\Gamma$ -invariant de  $S\Omega$  appelé feuilletage géodésique de  $\Omega$ . L'image de ce feuilletage dans la variété compacte  $SM$  est appelé feuilletage géodésique de  $M$ . Ce feuilletage est orienté et de classe  $C^\infty$ .

### 1.2.5 Flot géodésique

Pour  $w = (x, \xi)$  dans  $S\Omega$ , on note  $\tilde{\varphi}_t(w)$ , la direction tangente à la géodésique issue de  $x$  dans la direction  $\xi$ , tangente prise au point  $x_t$  à distance  $t$  de  $x$ . Ce flot  $\tilde{\varphi}_t$ , appelé flot géodésique, est porté par le feuilletage géodésique. Ce flot induit un flot noté  $\varphi_t$  sur le quotient  $SM = \Gamma \backslash S\Omega$  encore appelé flot géodésique de la distance de Hilbert. Sa régularité est celle du bord  $\partial\Omega$ : autrement dit, si  $\partial\Omega$  est de classe  $C^1$ , alors le flot géodésique aussi.

## 1.3 Principaux résultats

**Théorème 1.1** *Soit  $\Gamma$  un sous-groupe discret sans torsion de  $\text{PGL}(\mathbb{R}^m)$  qui divise un ouvert convexe saillant  $\Omega$  de l'espace projectif  $\mathbb{P}(\mathbb{R}^m)$ . Alors les quatre assertions suivantes sont équivalentes.*

- (i) *L'ouvert  $\Omega$  est strictement convexe.*
- (ii) *Le bord  $\partial\Omega$  est de classe  $C^1$ .*
- (iii) *Le groupe  $\Gamma$  est hyperbolique.*
- (iv) *Le feuilletage géodésique de la variété projective quotient  $\Gamma \backslash \Omega$  est d'Anosov.*

Les notions de groupe hyperbolique (due a Gromov) et de feuilletage d'Anosov seront rappelées ci-dessous (définition 2.2 et 3.7). Disons juste que, lorsque  $\partial\Omega$  est de classe  $C^1$ , l'assertion (iv) signifie que le flot géodésique de  $\Gamma \backslash \Omega$  est d'Anosov.

Nous montrerons l'équivalence (i)  $\Leftrightarrow$  (iii) en 2.1, l'équivalence (i)  $\Leftrightarrow$  (ii) en 2.2, l'implication (ii)  $\Rightarrow$  (iv) en 3.2 et enfin l'implication (iv)  $\Rightarrow$  (ii) en 3.3.

**Théorème 1.2** *Soit  $\Omega$  un ouvert strictement convexe divisible de  $\mathbb{P}(\mathbb{R}^m)$ . Alors,*

- a) *il existe  $\alpha \in ]1, 2[$  tel que le bord  $\partial\Omega$  est de classe  $C^\alpha$ .*
- b) *Le flot géodésique  $\varphi_t$  du quotient  $\Gamma \backslash \Omega$  est topologiquement mélangeant <sup>2</sup>.*

<sup>2</sup>i.e.  $\forall U, V$  ouverts de  $\Gamma \backslash \Omega$ ,  $\exists t_0 > 0$ ,  $\forall t > t_0$ ,  $\varphi_t(U) \cap V \neq \emptyset$

La notion de régularité  $C^\alpha$  sera rappelée dans la définition 4.1. Ce théorème nous permettra d'appliquer les résultats standards de la théorie ergodique des systèmes dynamiques hyperboliques (c.f. [15]) au flot  $\varphi_t$ . Par exemple, on donnera dans le corollaire 5.7 un équivalent pour le nombre  $N(T)$  de géodésiques fermées sur  $\Gamma \backslash \Omega$  de longueur majorée par  $T$ .

Nous montrerons le point a) en 4.3 et le point b) en 5.3.

Voici maintenant trois propriétés de rigidité pour notre ouvert convexe divisible  $\Omega$ .

**Théorème 1.3** *Soit  $\Omega$  un ouvert strictement convexe divisible de  $\mathbb{P}(\mathbb{R}^m)$ . On pose  $\alpha_\Omega := \sup\{\alpha \in ]1, 2[ \mid \partial\Omega \text{ est } C^\alpha\}$ . Si  $\Omega$  n'est pas un ellipsoïde alors*

(i)  $\alpha_\Omega < 2$ .

(ii) *La courbure de  $\partial\Omega$  est concentrée sur une partie négligeable de  $\partial\Omega$ .*

(iii) *Le flot géodésique  $\varphi_t$  du quotient  $\Gamma \backslash \Omega$  ne préserve pas de densité.*

**Remarques** (i) En particulier, lorsque  $\Omega$  n'est pas un ellipsoïde, le bord  $\partial\Omega$  n'est pas  $C^{1+\text{Zygmund}}$ . Ceci contraste, lorsque  $m - 1 = 2$ , avec les résultats de régularité de [17], mais ceci ne les contredit pas car notre flot ne préserve pas de densité.

(ii) En particulier, lorsque  $\Omega$  n'est pas un ellipsoïde, l'application normale n'est pas absolument continue. Ceci contraste avec l'absolue continuité du feuilletage stable du flot d'Anosov  $\varphi_t$  (théorème d'Anosov cf.[1] et [26]) mais ceci ne le contredit pas. En dimension  $m - 1 = 2$ , l'assertion (ii) est due à Benzecri ([6]).

(iii) Par définition une "densité" est une mesure absolument continue par rapport à Lebesgue. L'absence de densité invariante par le flot géodésique est la principale différence entre nos quotients  $\Gamma \backslash \Omega$  et les variétés riemanniennes compactes à courbure négative. Rappelons que, pour celles-ci, on dispose de la mesure de Liouville.

Nous montrerons l'assertion (i) en 6.1, l'assertion (ii) en 6.2 et l'assertion (iii) en 6.3.

Ces résultats ont été annoncés dans [5]. Je remercie F.Ledrappier pour d'intéressantes discussions sur ce sujet.

## 2 Le groupe $\Gamma$ est hyperbolique

Dans cette partie, on montre les équivalences (i)  $\Leftrightarrow$  (ii)  $\Leftrightarrow$  (iii) du théorème 1.1.

### 2.1 Groupes hyperboliques

Nous aurons besoin de la définition et de quelques propriétés des groupes hyperboliques. Nous les rappelons ci-dessous, mais nous renvoyons à l'article original de Gromov [13] ou aux deux monographies [9] et [11] pour plus de détail.

Un espace métrique  $(X, d)$  est dit propre si ses boules fermées sont compactes. Il est dit géodésique si, pour tout couple  $(x, y)$  de points de  $X$ , il existe une isométrie de l'intervalle  $[0, d(x, y)]$  dans  $X$  qui envoie les extrémités sur les points  $x$  et  $y$ . On appelle géodésique

de  $x$  à  $y$  l'image d'une telle isométrie et on notera  $[x, y]$  une telle géodésique bien qu'elle ne soit pas toujours unique.

Par exemple, l'espace métrique  $(\Omega, d_\Omega)$  est propre et géodésique.

**Définition 2.1** *Deux espaces métriques  $(X, d)$  et  $(X', d')$  sont dits quasiisométriques s'il existe des applications  $f : X \rightarrow X'$  et  $g : X' \rightarrow X$  et des constantes  $\lambda > 0$  et  $C > 0$  telles que, pour tous  $x, y$  dans  $X$  et  $x', y'$  dans  $X'$ , on a  $d'(f(x), f(y)) \leq \lambda d(x, y) + C$ ,  $d(g(x'), g(y')) \leq \lambda d(x', y') + C$ ,  $d(x, g(f(x))) \leq C$  et  $d(x', f(g(x'))) \leq C$ .*

Donnons tout d'abord un exemple. Soit  $H$  un groupe de type fini. Choisissons une famille génératrice finie  $S$  de  $H$  telle que  $S = S^{-1}$  et notons  $d_S$  la distance sur  $H$  pour laquelle la distance  $d_S(h_1, h_2)$  entre deux éléments de  $H$  est la longueur minimal d'une expression de l'élément  $h_1^{-1}h_2$  comme produit d'éléments de  $S$ . On note  $G(H, S)$  le graphe de Cayley associé: ses sommets sont les éléments de  $H$  et deux sommets  $h_1$  et  $h_2$  sont joints par une arête si et seulement si l'élément  $h_1^{-1}h_2$  est dans  $S$ . On munit  $G(H, S)$  de sa distance naturelle: le graphe de Cayley est alors un espace métrique géodésique et ses arêtes sont de longueur 1. Si  $S'$  est une autre famille génératrice finie de  $H$ , les graphes de Cayley  $G(H, S)$  et  $G(H, S')$  sont quasiisométriques. Autrement dit, les distances  $d_S$  et  $d_{S'}$  sur  $H$  sont quasiisométriques. Ceci permet de parler d'espace métrique quasiisométrique à  $H$ .

**Définition 2.2** *Un espace métrique géodésique  $X$  est dit hyperbolique s'il existe un réel  $\delta > 0$  tel que, pour tout triangle géodésique  $[x, y] \cup [y, z] \cup [z, x]$  de  $X$  et tout point  $u$  de  $[x, y]$  la distance  $d(u, [x, z] \cup [z, y])$  est majorée par  $\delta$ . Un groupe  $H$  engendré par une partie finie  $S$  est dit hyperbolique si son graphe de Cayley  $G(H, S)$  est hyperbolique.*

Le fait suivant assure que cette définition ne dépend pas de la famille génératrice  $S$  de  $H$ .

**Fait 2.3** (cf. [11] thm 5.12) *Un espace métrique géodésique qui est quasiisométrique à un espace métrique hyperbolique est aussi hyperbolique.*

Nous utiliserons ce fait simultanément avec le suivant.

**Fait 2.4** (cf. [11] prop.3.19) *Soit  $(X, d)$  un espace métrique géodésique propre et  $\Gamma$  un groupe discret opérant proprement par isométries sur  $X$  avec quotient  $\Gamma \backslash X$  compact. Alors  $X$  est quasiisométrique à  $\Gamma$ .*

Les deux faits ci-dessus ramènent la preuve de l'équivalence (i)  $\Leftrightarrow$  (iii) du théorème 1.1 à la proposition suivante.

**Proposition 2.5** *Soit  $\Omega$  un ouvert proprement convexe divisible de  $\mathbb{P}(\mathbb{R}^m)$ . On a l'équivalence:*

$$(\Omega, d_\Omega) \text{ est hyperbolique} \Leftrightarrow \Omega \text{ est strictement convexe.}$$

Dans cette proposition, l'hypothèse  $\Omega$  divisible n'est pas utile pour l'implication directe mais est utile pour la réciproque.

**Démonstration** Supposons tout d'abord que  $\Omega$  n'est pas strictement convexe. Le bord  $\partial\Omega$  contient donc un segment *maximal*  $[x_\infty, y_\infty]$  avec  $x_\infty \neq y_\infty$ . Choisissons un point  $u_\infty$  à l'intérieur de ce segment et un point  $z_\infty$  dans  $\Omega$ . On considère alors quatre suites de points  $u_n, x_n, y_n$  et  $z_n$  de  $\Omega$  qui convergent respectivement vers  $u_\infty, x_\infty, y_\infty$  et  $z_\infty$  et telles que

$$z_n = z_\infty, \quad y_n \in [y_\infty, z_\infty], \quad x_n \in [x_\infty, z_\infty] \text{ et } u_n \in [x_n, y_n]$$

(voir figure 1). La distance de  $u_n$  à la réunion  $[x_n, z_n] \cup [z_n, y_n]$  tend vers l'infini avec  $n$ . Donc  $(\Omega, d_\Omega)$  n'est pas hyperbolique.

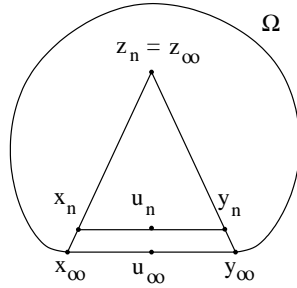


Figure 1: Un convexe non hyperbolique

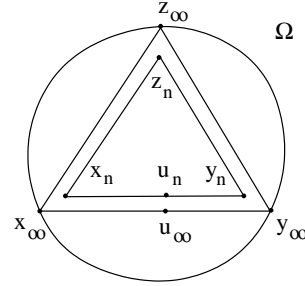


Figure 2: Un convexe hyperbolique

Réciproquement, supposons que  $\Omega$  est strictement convexe mais que  $(\Omega, d_\Omega)$  n'est pas hyperbolique. Il existe donc quatre suites  $u_n, x_n, y_n$  et  $z_n$  dans  $\Omega$ , avec  $u_n$  sur le segment  $[x_n, y_n]$  mais telles que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d_\Omega(u_n, [x_n, z_n] \cup [z_n, y_n]) = \infty \quad (1)$$

Par hypothèse, il existe un groupe  $\Gamma$  qui divise  $\Omega$ . Quitte à remplacer nos points par leurs images par des éléments  $\gamma_n$  de  $\Gamma$ , on peut supposer que la suite  $u_n$  a une limite  $u_\infty$  dans  $\Omega$ . Quitte à extraire, on peut supposer que les suites  $x_n, y_n$  et  $z_n$  convergent vers des points  $x_\infty, y_\infty$  et  $z_\infty$  de  $\overline{\Omega}$ . Comme les distances  $d_\Omega(u_n, x_n)$ ,  $d_\Omega(u_n, y_n)$  et  $d_\Omega(u_n, z_n)$  tendent vers l'infini, les points  $x_\infty, y_\infty$  et  $z_\infty$  sont sur le bord  $\partial\Omega$  (voir figure 2). Le point  $u_\infty$  est sur le segment ouvert entre  $x_\infty$  et  $y_\infty$ . Si on avait  $x_\infty \neq z_\infty$ , la stricte convexité de  $\Omega$  entraînerait que

$$d_\Omega(u_\infty, ]x_\infty, z_\infty[) < \infty,$$

ce qui contredirait la condition (1). On a donc  $x_\infty = z_\infty$  et de la même façon  $z_\infty = y_\infty$ . Contradiction.  $\square$

**Exercice 2.6** Construire un ouvert strictement convexe du plan projectif dont la distance de Hilbert  $d_\Omega$  n'est pas hyperbolique.

## 2.2 Régularité $C^1$ du bord

**Proposition 2.7** *Soit  $\Omega$  un ouvert proprement convexe divisible de  $\mathbb{P}(\mathbb{R}^m)$ . On a l'équivalence:*

$$\Omega \text{ est strictement convexe} \Leftrightarrow \partial\Omega \text{ est de classe } C^1.$$

En dimension  $m - 1 = 2$ , cette équivalence est due à Benzecri qui montre, plus précisément dans [6] que, si  $\Omega$  n'est pas un triangle, alors  $\Omega$  est strictement convexe et à bord de classe  $C^1$ . Cette proposition est une conséquence de la proposition 2.5 que nous venons de montrer et d'un simple argument de dualité. Expliquons comment.

Notons  $V = \mathbb{R}^m$ . Pour tout ouvert convexe saillant  $\Omega$  de  $\mathbb{P}(V)$ , on note  $\Omega^*$  l'ouvert convexe saillant de  $\mathbb{P}(V^*)$  dual de  $\Omega$  :  $\Omega^* := \{\mathbb{R}f \in \mathbb{P}(V^*) / \forall \mathbb{R}v \in \overline{\Omega}, f(v) \neq 0\}$ . Pour tout sous-groupe discret  $\Gamma$  de  $\text{PGL}(V)$ , on note  ${}^t\Gamma$  le sous-groupe de  $\text{PGL}(V^*)$  transposé de  $\Gamma$ . Remarquons que  $\Gamma$  préserve  $\Omega$  si et seulement si  ${}^t\Gamma$  préserve  $\Omega^*$ . Rappelons aussi que

**Lemme 2.8**  $\Gamma$  *divise*  $\Omega$  si et seulement si  ${}^t\Gamma$  *divise*  $\Omega^*$ .

**Démonstration** Donnons, pour la commodité du lecteur la démonstration de cette équivalence en utilisant les propriétés de la dimension cohomologique  $\text{cd}(\Gamma)$  de  $\Gamma$  (cf.[28]). On peut supposer  $\Gamma$  sans torsion. Supposons le quotient  $\Gamma \backslash \Omega$  compact. On a alors l'égalité  $\text{cd}(\Gamma) = \dim \Omega$ . Comme  ${}^t\Gamma$  préserve la distance de Hilbert de  $\Omega^*$ ,  ${}^t\Gamma$  agit proprement sur  $\Omega^*$ . Comme  $\text{cd}(\Gamma) = \dim \Omega^*$ , le quotient  ${}^t\Gamma \backslash \Omega^*$  est compact. C'est ce que l'on voulait. La réciproque se démontre de la même façon.  $\square$

**Démonstration de la proposition 2.7** Il résulte de cette discussion et de la partie précédente, que pour tout ouvert convexe divisible  $\Omega$ , on a l'équivalence:

$$\Omega \text{ est strictement convexe} \Leftrightarrow \Omega^* \text{ est strictement convexe.}$$

Or l'équivalence

$$\Omega^* \text{ est strictement convexe} \Leftrightarrow \text{le bord } \partial\Omega \text{ est de classe } C^1.$$

est un simple exercice d'analyse convexe. Ceci termine la preuve de l'équivalence (i)  $\Leftrightarrow$  (ii) du théorème 1.1  $\square$

## 2.3 Autre conséquence

Le corollaire suivant est une conséquence immédiate de l'équivalence (i)  $\Leftrightarrow$  (iii) du théorème 1.1.

**Corollaire 2.9** *Soient  $\Gamma$  et  $\Gamma'$  des sous-groupes discrets de  $\text{PGL}(\mathbb{R}^m)$  qui divisent des ouverts convexes saillants  $\Omega$  et  $\Omega'$  de l'espace projectif  $\mathbb{P}(\mathbb{R}^m)$ . On suppose que les groupes  $\Gamma$  et  $\Gamma'$  sont isomorphes. On a alors l'équivalence:*

$$\Omega \text{ est strictement convexe} \Leftrightarrow \Omega' \text{ est strictement convexe.}$$

**Corollaire 2.10** *Il existe en toute dimension  $m - 1 \geq 2$  des ouverts strictement convexes divisibles  $\Omega$  de  $\mathbb{P}(\mathbb{R}^m)$  qui ne sont pas des ellipsoïdes.*

**Démonstration** Il résulte du corollaire 2.9 que les exemples d'ouverts convexes divisibles que nous avons construits dans la remarque 1.3 de [4] sont strictement convexes.  $\square$

### 3 Le flot géodésique est d'Anosov

Dans cette partie, on montre l'équivalence (ii)  $\Leftrightarrow$  (iv) du théorème 1.1.

#### 3.1 Flots d'Anosov

Commençons par rappeler quelques définitions standard.

Soient  $W$  une variété compacte de classe  $C^\infty$ ,  $X$  un champ de vecteurs sur  $W$  de classe  $C^1$  et  $\varphi_t$  le flot de  $X$ . On munit  $W$  d'une norme riemannienne  $\|\cdot\|_W$  auxiliaire.

**Définition 3.1** *Le champ de vecteurs  $X$  (ou le flot  $\varphi_t$ ) est dit d'Anosov s'il existe une décomposition du fibré tangent  $TW := E^+ \oplus \mathbb{R}X \oplus E^-$  continue et invariante par le flot, et s'il existe des constantes positives  $a$  et  $C_a$  telles que, pour tout  $t > 0$ ,  $v^+$  dans  $E^+$  et  $v^-$  dans  $E^-$ , on a les inégalités,*

$$\|D\varphi_{-t}(v^+)\|_W \leq C_a e^{-at} \|v^+\|_W \quad \text{et} \quad \|D\varphi_t(v^-)\|_W \leq C_a e^{-at} \|v^-\|_W . \quad (2)$$

**Remarques** - On peut d'ailleurs, choisir la métrique riemannienne sur  $W$  de sorte que la constante  $C_a = 1$  convienne.

- La distribution  $E^-$  (resp.  $E^+$ ,  $E^- \oplus \mathbb{R}X$  et  $E^+ \oplus \mathbb{R}X$ ) s'appelle la distribution stable (resp. instable, centrale stable et centrale instable). Elle est intégrable. Le feuilletage intégrale est noté  $\mathcal{F}^-$  (resp.  $\mathcal{F}^+$ ,  $\mathcal{F}^{-,0}$  et  $\mathcal{F}^{+,0}$ ) et est appelé feuilletage stable (resp. instable, central stable et central instable). Les feuilles sont de classe  $C^1$  mais le feuilletage lui-même n'est que de classe  $C^0$ .

- On notera  $\widetilde{W}$  un revêtement de  $W$ ; le plus souvent ce revêtement sera le revêtement universel de  $W$ . On notera  $\widetilde{X}$  (resp.  $\widetilde{\varphi}_t$ ,  $\widetilde{\mathcal{F}}^- \dots$ ) le relevé de  $X$  (resp.  $\varphi_t$ ,  $\mathcal{F}^- \dots$ ) sur  $\widetilde{W}$ . On notera aussi  $d_{\widetilde{W}}$  la distance de la métrique riemannienne de  $\widetilde{W}$  relevée de celle de  $W$ .

- Rappelons que deux points  $w_1, w_2$  de  $\widetilde{W}$  sont sur la même feuille stable si et seulement si, on a  $\lim_{t \rightarrow \infty} d_{\widetilde{W}}(\widetilde{\varphi}_t(w_1), \widetilde{\varphi}_t(w_2)) = 0$ .

- Comme pour tout flot sur une variété compacte, il existe aussi des constantes  $b$  et  $C_b > 0$  telles que pour tout  $t > 0$ ,  $v^+$  dans  $E^+$  et  $v^-$  dans  $E^-$ , on a les inégalités,

$$\|D\varphi_{-t}(v^+)\|_W \geq C_b e^{-bt} \|v^+\|_W \quad \text{et} \quad \|D\varphi_t(v^-)\|_W \geq C_b e^{-bt} \|v^-\|_W . \quad (3)$$

**Définition 3.2** *On note  $a_\varphi$  la borne supérieure des constantes  $a$  possibles et  $b_\varphi$  la borne inférieure des constantes  $b$  possibles. On a  $0 < a_\varphi \leq b_\varphi < \infty$ .*



## 3.2 Le flot géodésique

Nous voulons montrer l'implication (ii)  $\implies$  (iv) du théorème 1.1, c'est-à-dire montrer la proposition 3.3 ci-dessous.

Revenons à notre ouvert  $\Omega$  et rappelons que la métrique de Hilbert sur  $\Omega$  est une métrique finslérienne. Autrement dit, elle provient de la donnée d'un champ continu de normes sur les espaces tangents à  $\Omega$ . Une formule explicite pour la norme sur chaque espace tangent sera donnée ci-dessous. Cette métrique finslérienne nous permet d'identifier le fibré  $S\Omega$  au fibré unitaire tangent  $T^1\Omega$ .

**Proposition 3.3** *Soient  $\Omega$  un ouvert strictement convexe de  $\mathbb{P}(\mathbb{R}^m)$  et  $\Gamma$  un sous-groupe discret sans torsion de  $\mathrm{PGL}(\mathbb{R}^m)$  qui divise  $\Omega$ . Alors le flot géodésique de la variété quotient  $\Gamma \backslash \Omega$  munie de la métrique de Hilbert est d'Anosov*

Pour démontrer cette proposition, nous allons décrire de façon plus précise la métrique de Hilbert sur  $\Omega$ , ses géodésiques et ses horocycles. Cette description explicite jouera aussi un rôle important dans la suite de cet article.

### 3.2.1 La norme de Hilbert

On peut supposer que l'adhérence  $\bar{\Omega}$  est incluse dans l'espace affine  $\mathbb{R}^{m-1} \subset \mathbb{P}(\mathbb{R}^m)$  formé des points dont la dernière coordonnée homogène est non nulle. L'ouvert  $\Omega$  est alors un ouvert convexe borné de  $\mathbb{R}^{m-1}$  et sa variété tangente s'identifie à  $\Omega \times \mathbb{R}^{m-1}$ .

Pour chaque vecteur tangent non nul  $w = (x, \xi)$  de  $T\Omega$ , on pose  $p(w) := x$  et on note  $p^+(w)$ ,  $p^-(w)$  les points de  $\partial\Omega$  et  $\sigma^+(w)$ ,  $\sigma^-(w)$  les réels positifs tels que

$$\xi = \sigma^+(w)(p^+(w) - x) \text{ et } \xi = \sigma^-(w)(x - p^-(w)) \quad (4)$$

Les applications  $p$ ,  $p^+$ ,  $p^-$ ,  $\sigma^+$  et  $\sigma^-$  sont de classe  $C^1$ . Les applications  $p$ ,  $p^+$  et  $p^-$  ne dépendent pas du choix de la carte affine. La somme  $\|w\|_\Omega = \sigma^+(w) + \sigma^-(w)$ , qui est égale à la norme de ce vecteur tangent pour la métrique de Hilbert, ne dépend pas non plus du choix de la carte affine. Rappelons que la longueur d'un chemin  $t \rightarrow c(t)$  tracé sur  $\Omega$  est donné par  $L_\Omega(c) = \int \|c'(t)\|_\Omega dt$ . Rappelons aussi que la distance de Hilbert entre deux points  $x$  et  $y$  de  $\Omega$  est la longueur du plus court chemin les joignant et que ce plus court chemin est la ligne droite. Le fibré unitaire tangent est  $T^1\Omega = \{w \in T\Omega / \|w\|_\Omega = 1\}$ .

### 3.2.2 Le flot géodésique

L'image  $w_t := \tilde{\varphi}_t(w)$  d'un point  $w = (x, \xi)$  de  $T^1\Omega$  par le flot géodésique est le point  $w_t = (x_t, \xi_t)$  donné par les formules (voir la figure 3)

$$x_t = x + \frac{e^t - 1}{\sigma^+(w)e^t + \sigma^-(w)} \xi, \quad (5)$$

$$\xi_t = \frac{e^t}{(\sigma^+(w)e^t + \sigma^-(w))^2} \xi. \quad (6)$$

Cette formule nous permet de calculer le champ de vecteurs  $X$  générateur infinitésimal du flot géodésique  $\tilde{\varphi}_t$ :

$$X_w = (\xi, (\sigma^-(w) - \sigma^+(w))\xi) \in T_w(T^1\Omega) \subset T_w(T\Omega) \simeq \mathbb{R}^{m-1} \times \mathbb{R}^{m-1}. \quad (7)$$

**Remarques** - Nous laissons au lecteur les détails de ces calculs.

- Ces formules prouvent que la régularité de la métrique finslérienne, du flot géodésique et de son générateur infinitésimal est celle du bord  $\partial\Omega$ . Ils sont donc de classe  $C^1$ .

- Il existe une reparamétrisation  $\psi_t = \varphi_{\tau(t)}$  du flot géodésique qui est un flot de classe  $C^\infty$ . Pour la construire, considérons une métrique riemannienne  $g$  de classe  $C^\infty$  et  $\Gamma$ -invariante sur  $\Omega$ . Le flot relevé  $\tilde{\psi}_t$  consiste à suivre les géodésiques de la métrique de Hilbert à vitesse constante relativement à  $g$ .

### 3.2.3 Le feuilletage stable

Construisons maintenant le feuilletage  $\tilde{\mathcal{F}}^{-,0}$  (resp.  $\tilde{\mathcal{F}}^-$ ) sur  $T^1\Omega$ . Anticipons en disant que l'image dans  $T^1M$  de ce feuilletage sera le feuilletage central stable (resp. le feuilletage stable) du flot géodésique que l'on montrera ainsi être d'Anosov.

Pour  $w_1 = (x_1, \xi_1)$  dans  $T^1\Omega$ , on note  $\tilde{\mathcal{F}}_{w_1}^{-,0} := (p^+)^{-1}(p^+(w_1))$  la fibre de  $p^+$  contenant  $w_1$ . Géométriquement, c'est la variété des vecteurs  $w_2$  tangents à  $\Omega$  qui pointent vers le même point du bord que  $w_1$ .

Pour  $p$  dans  $\partial\Omega$ , on note  $H_p \subset \mathbb{P}(\mathbb{R}^m)$  l'hyperplan projectif tangent en  $p$  à  $\partial\Omega$ . On pose alors

$$\tilde{\mathcal{F}}_{w_1}^- := \{w_2 = (x_2, \xi_2) \in \tilde{\mathcal{F}}_{w_1}^{-,0} / w_2 = w_1 \text{ ou } \langle x_1, x_2 \rangle \cap \langle p^-(w_1), p^-(w_2) \rangle \subset H_{p^+(w_1)}\}$$

Cette définition est justifiée par le lemme suivant.

**Lemme 3.4** *Soit  $\Omega$  un ouvert strictement convexe divisible de  $\mathbb{P}(\mathbb{R}^m)$ . Avec les notations ci-dessus, on a l'égalité*

$$\tilde{\mathcal{F}}_{w_1}^- := \{w_2 = (x_2, \xi_2) \in T^1\Omega / \lim_{t \rightarrow \infty} d_\Omega(x_{1,t}, x_{2,t}) = 0\}$$

où  $x_{i,t} = p(\tilde{\varphi}_t(w_i))$ .

**Démonstration** Il est clair que si  $p^+(w_1) \neq p^+(w_2)$  alors  $\lim_{t \rightarrow \infty} d_\Omega(x_{1,t}, x_{2,t}) = \infty$ .

Supposons maintenant que  $p^+(w_1) = p^+(w_2) = p_1^+$ . Notre raisonnement est basé sur une interprétation géométrique du flot géodésique (voir la figure 4).

Soit  $q$  le point d'intersection  $q := \langle p^-(w_1), p^-(w_2) \rangle \cap \langle x_1, x_2 \rangle$ . L'égalité des birapports  $(p_1^+, p^-(w_1), x_1, x_{1,t}) = (p_1^+, p^-(w_2), x_2, x_{2,t}) = e^t$  prouve que la droite  $\langle x_{1,t}, x_{2,t} \rangle$

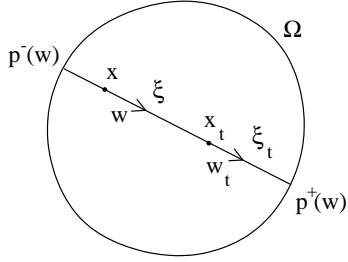


Figure 3: Le flot géodésique ...

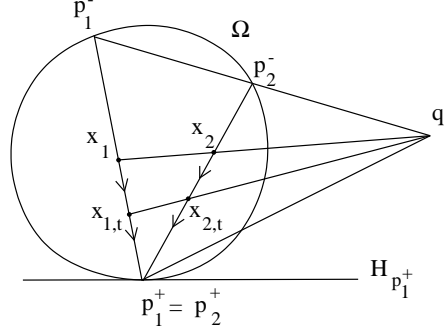


Figure 4: ... sur une feuille centrale stable

contient toujours le point  $q$ . Cette droite converge, pour  $t$  infini, vers la droite  $\langle p_1^+, q \rangle$ . On a donc les équivalences :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} d_\Omega(x_{1,t}, x_{2,t}) = 0 \Leftrightarrow \langle p_1^+, q \rangle \text{ est tangent à } \partial\Omega \Leftrightarrow q \in H_{p_1^+}$$

C'est ce que l'on voulait.  $\square$

On note  $s : T^1\Omega \rightarrow T^1\Omega$  l'involution définie par  $s((x, \xi)) = (x, -\xi)$  de sorte que  $s \circ \tilde{\varphi}_t = \tilde{\varphi}_{-t} \circ s$  et on définit le feuilletage faible instable et le feuilletage instable par les égalités  $\tilde{\mathcal{F}}_w^{+,0} := s(\tilde{\mathcal{F}}_{s(w)}^-)$  et  $\tilde{\mathcal{F}}_w^+ := s(\tilde{\mathcal{F}}_{s(w)}^-)$ . On note  $\tilde{\mathcal{F}}^0$  le feuilletage géodésique de  $T^1\Omega$ .

Tous ces feuilletages sont invariants par  $\Gamma$  et par le flot  $\tilde{\varphi}_t$ . Autrement dit, on a  $\gamma(\tilde{\mathcal{F}}_w^-) = \tilde{\mathcal{F}}_{\gamma(w)}^-$ , pour tout  $\gamma$  dans  $\Gamma$  et  $\tilde{\varphi}_t(\tilde{\mathcal{F}}_w^-) = \tilde{\mathcal{F}}_{\tilde{\varphi}_t(w)}^-$ , pour tout  $t$  dans  $\mathbb{R}$ .

### 3.2.4 Les horocycles

On note  $b$  la fonction de Busemann définie, pour  $x_1, x_2$  dans  $\Omega$  et  $p$  dans  $\partial\Omega$ , par la limite  $b_{x_1}(x_2, p) = \lim_{x \rightarrow p} (d_\Omega(x_2, x) - d_\Omega(x_1, x))$ .

Donnons une deuxième définition équivalente de la fonction de Busemann : pour cela, notons  $p_i^-$  le point différent de  $p$  de l'intersection  $\partial\Omega \cap \langle x_i, p \rangle$ , pour  $i = 1, 2$  et  $q = H_p \cap \langle p_1^-, p_2^- \rangle$ . La quantité  $b_{x_1}(x_2, p)$  est alors égale au logarithme du birapport des quatre droites:  $\langle q, p \rangle$ ,  $\langle q, p_1^- \rangle$ ,  $\langle q, x_2 \rangle$  et  $\langle q, x_1 \rangle$ .

Pour  $w = (x, \xi)$  dans  $T^1\Omega$ , on note  $\mathcal{H}_w$  l'horocycle correspondant :  $\mathcal{H}_w := \{x_2 \in \Omega / b_x(x_2, p^+(w)) = 0\}$ . Par définition de la fonction de Busemann, l'horocycle  $\mathcal{H}_w$  est l'image dans  $\Omega$  de la feuille stable  $\mathcal{F}_w^-$ . L'horocycle  $\mathcal{H}_w$  est aussi la limite des sphères (pour  $d_\Omega$ ) passant par  $x$  lorsque le centre de ces sphères tend vers le point  $p$ .

On note  $H_w$  l'hyperplan projectif tangent à  $\mathcal{H}_w$  en  $x$ , c'est aussi l'unique hyperplan projectif passant par  $x$  et contenant l'intersection  $I_w := H_{p^+(w)} \cap H_{p^-(w)}$ .

### 3.2.5 La distribution stable

On notera  $\tilde{E}^{-,0}$  (resp.  $\tilde{E}^-, \tilde{E}^0, \dots$ ) la distribution tangente au feuilletage  $\tilde{\mathcal{F}}^{-,0}$  (resp.  $\tilde{\mathcal{F}}^-, \tilde{\mathcal{F}}^0, \dots$ ). Par définition, pour  $w = (x, \xi)$ , on a les égalités :

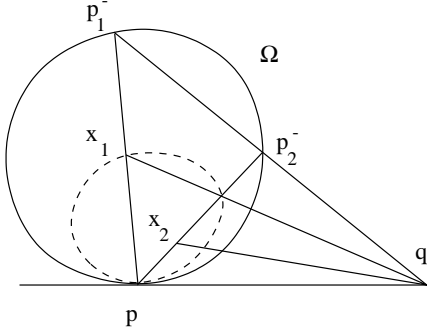


Figure 5: La fonction de Busemann ...

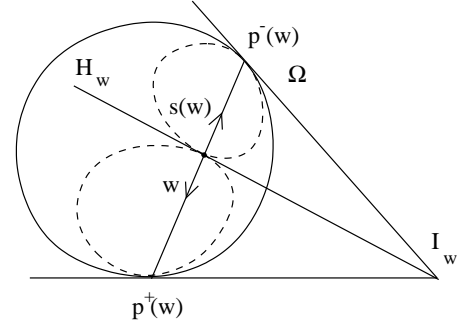


Figure 6: ... et les horocycles  $\mathcal{H}_w$  et  $\mathcal{H}_{s(w)}$

$$\begin{aligned}\tilde{E}_w^- &= \{v^- \in T_w(T^1\Omega) / v^- = (y, -\sigma^+(w)y) \text{ avec } y \in T_x\mathcal{H}_w\}, \\ \tilde{E}_w^+ &= \{v^+ \in T_w(T^1\Omega) / v^+ = (y, \sigma^-(w)y) \text{ avec } y \in T_x\mathcal{H}_w\}, \\ \tilde{E}_w^0 &= \mathbb{R} \cdot (\xi, (\sigma^-(w) - \sigma^+(w))\xi) \text{ et } \tilde{E}_w^{0,\pm} = \tilde{E}_w^0 \oplus \tilde{E}_w^\pm.\end{aligned}$$

Par construction, ces distributions sont des sous-fibrés continus du fibré tangent à  $T^1\Omega$  qui sont invariants par  $\Gamma$  et par le flot  $\tilde{\varphi}_t$ . En outre, on a l'égalité

$$T(T^1\Omega) = \tilde{E}^- \oplus \tilde{E}^0 \oplus \tilde{E}^+$$

Pour montrer la propriété d'Anosov pour le flot  $\varphi_t$ , il ne reste plus qu'à montrer la décroissance uniformément exponentielle des normes  $\|T\tilde{\varphi}_t(v^-)\|_{T^1\Omega}$ , pour  $v^-$  dans  $\tilde{E}^-$  (la décroissance dans  $\tilde{E}^+$  s'en déduira à l'aide de l'involution  $s$ ). Pour cela, on aura besoin de comparer la restriction à  $\tilde{E}^-$  de la norme riemannienne sur  $T^1\Omega$  et la norme finslérienne sur  $\Omega$ . C'est ce que fait le lemme suivant.

**Lemme 3.5** *Soit  $\Omega$  un ouvert strictement convexe de  $\mathbb{P}(\mathbb{R}^m)$  qui est divisé par un sous-groupe  $\Gamma$  de  $\text{PGL}(\mathbb{R}^m)$ . Choisissons une norme riemannienne  $\Gamma$ -invariante  $\|\cdot\|_{T^1\Omega}$  sur  $T^1\Omega$  et rappelons que l'on note  $\|\cdot\|_\Omega$  la norme finslérienne de Hilbert sur  $\Omega$ .*

*Alors il existe une constante  $C > 1$  telle que, pour tout  $v^-$  dans  $\tilde{E}^-$ , on a*

$$C^{-1}\|v^-\|_{T^1\Omega} \leq \|Dp(v^-)\|_\Omega \leq C\|v^-\|_{T^1\Omega}. \quad (8)$$

**Remarque** Rappelons que  $p$  est la projection de  $T^1\Omega$  sur  $\Omega$  et  $Dp$  est son application tangente. Lorsqu'on écrit le vecteur  $v^-$  de  $\tilde{E}_w^-$  sous la forme  $v^- = (y, -\sigma^+(w)y)$  avec  $y$  tangent à l'horosphère  $\mathcal{H}_w$ , on a l'égalité  $Dp(v^-) = y$ .

On note  $\tilde{E}_1^-$  le fibré en sphères  $\tilde{E}_1^- := \{v^- \in \tilde{E}^- / \|v^-\|_{T^1\Omega} = 1\}$ .

**Démonstration** La fonction continue  $v^- \rightarrow \|Dp(v^-)\|_\Omega$  est  $\Gamma$ -invariante et ne s'annule pas sur  $\tilde{E}_1^-$ . Comme le quotient  $\Gamma \backslash \tilde{E}_1^-$  est compact, cette fonction prend ses valeurs dans un intervalle  $[C^{-1}, C]$  avec  $C > 1$ .  $\square$

### 3.2.6 La propriété d'Anosov

Pour démontrer la propriété d'Anosov pour le flot géodésique  $\varphi_t$ , il nous suffit de trouver un réel  $t_0 > 0$  tel que

$$\|T\tilde{\varphi}_{t_0}(v^-)\|_{T^1\Omega} \leq \frac{1}{2}\|v^-\|_{T^1\Omega} \quad \forall v^- \in \tilde{E}^- . \quad (9)$$

Les inégalités de définition (2) sont alors vérifiées en prenant  $a := (\log 2)/t_0$  et  $C_a := 2 \cdot \sup\{\|T\tilde{\varphi}_t(v^-)\|_{T^1\Omega} / t \in [0, t_0] \text{ et } v^- \in \tilde{E}_1^-\} < \infty$ .

Pour trouver ce réel  $t_0$ , on utilise les inégalités (8) et on pose  $\lambda := 1/(2C^2)$ . Il nous suffit donc de trouver un réel  $t_0 > 0$  vérifiant la propriété suivante : Pour tout point  $w = (x, \xi)$  de  $T^1\Omega$  et tout vecteur  $v^- = (y, -\sigma^+(w)y)$  de  $\tilde{E}_w^-$ , si on note  $\tilde{\varphi}_t(w) = (x_t, \xi_t)$ ,  $T\tilde{\varphi}_t(v^-) = (y_t, -\sigma^+(w_t)y_t)$ , alors

$$\|y_t\|_{\Omega} \leq \lambda\|y\|_{\Omega} .$$

La construction géométrique du vecteur  $y_t$  à partir du vecteur  $y$  s'obtient de la façon suivante :  $y_t$  est l'unique vecteur tangent à l'horosphère  $\mathcal{H}_{w_t}$  tel que dans notre carte affine, les trois points  $p^+(w)$ ,  $x + y$  et  $x_t + y_t$  sont alignés (voir la figure 8).

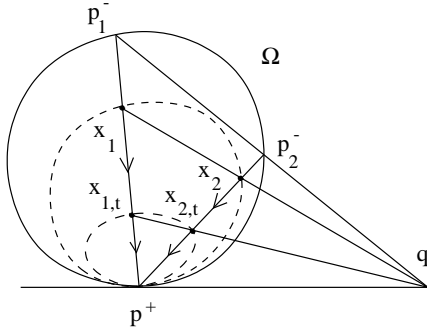


Figure 7: L'action de  $\tilde{\varphi}_t$  sur les feuilles stables ...

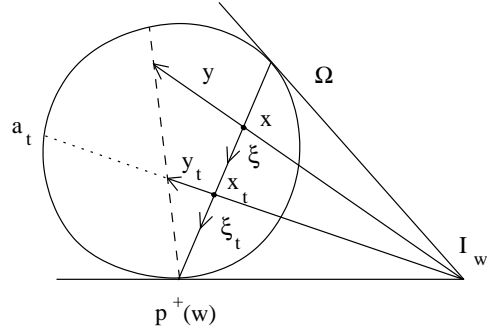


Figure 8: ... et sur la distribution stable

La norme de  $y_t$  est donnée par la formule  $\|y_t\|_{\Omega} = \sigma^+(y_t) + \sigma^-(y_t)$ . Comme  $\partial\Omega$  est strictement convexe, la fonction  $t \rightarrow \|y_t\|$  est strictement décroissante. En outre, comme le bord  $\partial\Omega$  est de classe  $C^1$ , cette fonction décroît vers 0 lorsque  $t$  tend vers l'infini.

Introduisons la fonction  $F$  définie sur  $\tilde{E}_1^- \times \mathbb{R}$  par  $F(v^-, t) = \|y_t\|_{\Omega} / \|y\|_{\Omega}$ . Cette fonction est continue, strictement décroissante en  $t$ , vérifie  $F(v^-, 0) = 1$  et  $\lim_{t \rightarrow \infty} F(v^-, t) = 0$ . Ces propriétés assurent qu'il existe une unique fonction  $\tau : \tilde{E}_1^- \rightarrow ]0, \infty[$  définie par l'égalité  $F(v^-, \tau(v^-)) = \lambda$  et que cette fonction  $\tau$  est continue. Par construction cette fonction est  $\Gamma$ -invariante. Comme le quotient  $\Gamma \backslash \tilde{E}_1^-$  est compact, cette fonction est majorée par un réel  $t_0 > 0$ . C'est le réel que l'on cherchait.  $\square$

**Remarque** Il existe donc des constantes  $0 < a \leq b$  vérifiant la propriété suivante:  $\exists C'_a, C'_b > 0, \forall w \in T^1\Omega, \forall v^- = (y, -\sigma^+(w)y) \in \tilde{E}_w^-, \forall t > 0,$

$$C'_b e^{-bt} \|y\|_{\Omega} \leq \|y_t\|_{\Omega} \leq C'_a e^{-at} \|y\|_{\Omega} \quad (10)$$

Les constantes  $a$  et  $b$  qui interviennent dans ces équations sont les mêmes que celles qui interviennent dans les équations (2) et (3).

### 3.2.7 La régularité des feuilletages

Terminons cette section par une remarque sur la régularité de nos feuilletages. Celle-ci est reliée à la régularité du bord  $\partial\Omega$ . Énonçons cela dans le lemme suivant qui est une conséquence des constructions.

**Lemme 3.6** *Soit  $\Omega$  un ouvert strictement convexe divisible de  $\mathbb{P}(\mathbb{R}^m)$ . Alors*

- le feuilletage géodésique  $\tilde{\mathcal{F}}^0$  est de classe  $C^\infty$ ,
- le flot géodésique  $\tilde{\varphi}_t$  et son champ de vecteurs  $X$  ont même régularité que  $\partial\Omega$ ,
- les feuilles faibles stables  $\tilde{\mathcal{F}}_w^{-,0}$  sont de classe  $C^\infty$ ,
- les feuilles stables  $\tilde{\mathcal{F}}_w^-$  ont même régularité que  $\partial\Omega$ ,
- le feuilletage faible stable  $\tilde{\mathcal{F}}^{-,0}$  et la distribution faible stable  $\tilde{E}^{-,0}$  ont même régularité que  $\partial\Omega$ ,
- le feuilletage stable  $\tilde{\mathcal{F}}^-$  et la distribution stable  $\tilde{E}^-$  ont même régularité que la variété tangente  $T(\partial\Omega)$ ,

**Remarque** La régularité de  $\partial\Omega$  est  $C^1$  et celle de  $T(\partial\Omega)$  est  $C^0$ . Nous avons énoncé ce lemme sous cette forme bizarre, car nous saurons bientôt que  $\partial\Omega$  est  $C^{1+\varepsilon}$  et que  $T(\partial\Omega)$  est  $C^\varepsilon$ .

La démonstration du lemme 3.6 est laissée au lecteur. Cependant, pour illustrer les problèmes de régularité de ces feuilletages, nous avons dessiné dans la figure 9 l'application d'holonomie  $w \rightarrow w'$  entre deux transversales  $T_x^1\Omega$  et  $T_{x'}^1\Omega$  au feuilletage central stable  $\mathcal{F}^{-,0}$ . et, dans la figure 10, l'application d'holonomie  $w \rightarrow w'$  entre deux transversales  $(p^-)^{-1}(a)$  et  $(p^-)^{-1}(a')$  au feuilletage stable  $\mathcal{F}^-$ .

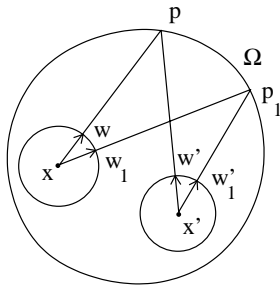


Figure 9: L'holonomie de  $\mathcal{F}^{-,0}$  ...

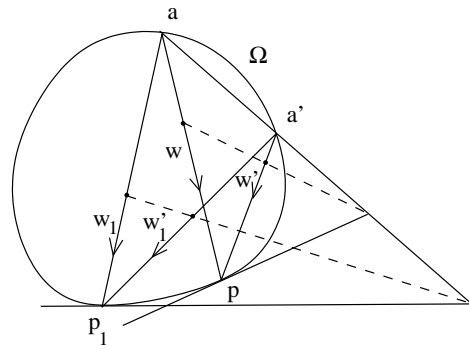


Figure 10: ... et l'holonomie de  $\mathcal{F}^-$

### 3.3 Feuilletage géodésique

Le but de cette section est de montrer la dernière implication (iv)  $\implies$  (ii) du théorème 1.1. Cette implication ne sera pas utilisée dans la suite de cet article. Commençons par clarifier nos définitions.

**Définition 3.7** *Un feuilletage  $\mathcal{F}^0$  de classe  $C^1$  et de dimension 1 sur une variété compacte  $W$  est dit d'Anosov s'il existe un champ de vecteurs  $X$  de classe  $C^1$  tangent à  $\mathcal{F}^0$  et d'Anosov.*

**Remarques** Dans ce cas, tout champ de vecteurs de classe  $C^1$  tangent à  $\mathcal{F}^0$  est d'Anosov. Le feuilletage stable (resp. instable) dépend du choix de  $X$  mais le feuilletage central stable (resp. central instable) n'en dépend pas.

Dans le raisonnement ci-dessous, nous utiliserons l'assertion classique suivante qui affirme que deux points dont les orbites restent suffisamment proches sont sur la même feuille centrale stable.

**Fait 3.8** *Soit  $\psi_t$  un flot d'Anosov sur une variété compacte  $W$ . Alors, il existe une constante  $\varepsilon > 0$  telle que, pour tous points  $w_1, w_2$  du revêtement  $\widetilde{W}$ , pour lesquels il existe une bijection croissante  $\tau : [0, \infty[ \rightarrow [0, \infty[$  telle que, pour tout  $t > 0$  on a  $d_{\widetilde{W}}(\tilde{\psi}_t(w_1), \tilde{\psi}_{\tau(t)}(w_2)) \leq \varepsilon$ , alors les deux points  $w_1$  et  $w_2$  sont sur la même feuille centrale stable.*

Revenons à notre ouvert proprement convexe  $\Omega$  et notons  $d_{S\Omega}$  une distance induite par une métrique riemannienne  $\Gamma$ -invariante sur  $S\Omega$ . Pour tout point  $w = (x, \xi)$  dans  $S\Omega$ , on note encore  $p^+(w)$  le point de  $\partial\Omega$  à l'extrémité de la géodésique issue de  $x$  dans la direction  $\xi$ .

Le lemme technique suivant jouera un rôle analogue au lemme 3.5. Il compare deux distances naturelles sur les fibres de  $p^+$ .

**Lemme 3.9** *Pour tout  $\varepsilon > 0$ , on peut trouver  $\alpha > 0$  tel que, pour tout  $w_1 = (x_1, \xi_1)$  et  $w_2 = (x_2, \xi_2)$  dans  $S\Omega$  on a l'implication  $[d_{\Omega}(x_1, x_2) < \alpha$  et  $p^+(w_1) = p^+(w_2)] \implies d_{S\Omega}(w_1, w_2) < \varepsilon$ .*

**Démonstration** Par  $\Gamma$ -équivariance, on se ramène au cas où  $w_1$  et  $w_2$  restent dans un compact de  $S\Omega$ . On applique alors un simple argument d'uniforme continuité sur ce compact à l'inverse de l'homéomorphisme de  $S\Omega$  sur  $\Omega \times \partial\Omega$  qui envoie  $w = (x, \xi)$  sur  $(x, p^+(w))$ .  $\square$

**Démonstration de l'implication (iv)  $\implies$  (ii) du théorème 1.1** Notons  $W := \Gamma \backslash \Omega$  et supposons que le feuilletage géodésique est d'Anosov. Fixons alors les réels  $\varepsilon > 0$  et  $\alpha > 0$  comme dans le fait et le lemme ci-dessus. Montrons que le bord  $\partial\Omega$  est de classe  $C^1$ . Si ce n'est pas le cas, il existe un point  $p$  du bord  $\partial\Omega$  et un 2-plan affine  $\Pi$  contenant  $p$  tel que les deux demidroites  $\Delta_1$  et  $\Delta_2$  tangentes en  $p$  au bord  $\partial(\Pi \cap \Omega)$  ne sont pas

alignées. Choisissons alors deux demidroites distinctes  $D_1$  et  $D_2$  issues de  $p$ , rencontrant  $\Pi \cap \Omega$  et de sorte que, si on note  $(D_1, D_2, \Delta_1, \Delta_2)$  le birapport de ces quatre demidroites et  $\delta = |\log(D_1, D_2, \Delta_1, \Delta_2)|$ , on a la majoration  $\delta < \alpha$ .

Nous aurons besoin d'une cinquième droite  $\Delta$  du plan  $\Pi$  passant par  $p$ . Nous la choisirons de sorte qu'elle ne rencontre  $\overline{\Omega} \cup \Delta_1 \cup \Delta_2$  qu'au point  $p$  (voir le dessin).

Pour  $i = 1, 2$ , on note  $x_i$  un point de  $D_i \cup \Omega$ , et  $w_i = (x_i, \xi_i)$  le point de  $S\Omega$  basé en  $x_i$  et qui pointe vers  $p$  (i.e. tel que  $p^+(w_i) = p$ ). On va montrer tout d'abord que  $w_1$  et  $w_2$  sont sur la même feuille centrale stable. On en déduira alors une contradiction.

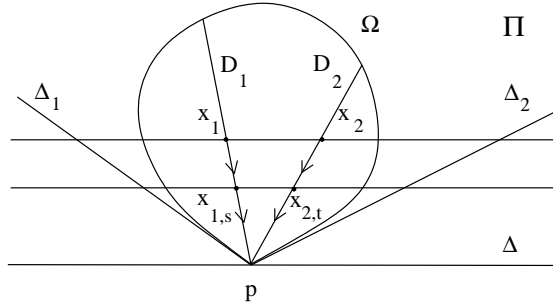


Figure 11: Un flot géodésique non Anosov

Notons encore  $w_{i,t} = (x_{i,t}, \xi_{i,t}) = \tilde{\varphi}_t(w_i)$  la géodésique issue de  $w_i$  en  $t = 0$ . Choisissons tout d'abord une fonction  $t \rightarrow s = s(t)$  de sorte que, pour  $t$  grand, la droite portée par  $x_{1,s}$  et  $x_{2,t}$  soit parallèle à  $\Delta$  dans le plan affine  $\Pi$ , alors on a  $\lim_{t \rightarrow \infty} d_\Omega(x_{1,s}, x_{2,t}) = \delta$ . Mais alors, pour  $t$  grand on a,  $d_\Omega(x_{1,s}, x_{2,t}) < \alpha$  et donc, d'après le lemme 3.9, on a  $d_{S\Omega}(w_{1,s}, w_{2,t}) \leq \varepsilon$ . Le fait 3.8 prouve alors que les points  $w_{1,s}$  et  $w_{2,t}$  sont sur la même feuille centrale stable. Les points  $w_1$  et  $w_2$  aussi.

On peut maintenant modifier cette fonction  $t \rightarrow s = s(t)$  de sorte que, pour  $t$  grand,  $w_{1,s}$  et  $w_{2,t}$  soient sur la même feuille stable d'un flot porté par notre feuilletage géodésique. On aurait alors  $\lim_{t \rightarrow \infty} d_{S\Omega}(w_{1,s}, w_{2,t}) = 0$ , ce qui est impossible car par définition de la distance de Hilbert, on a, pour tous réels  $s, t \geq 0$ ,  $d_\Omega(x_{1,s}, x_{2,t}) \geq \delta$  (voir la figure 11).  $\square$

## 4 Régularité du bord

Le but de cette partie est de montrer la régularité  $C^\alpha$  de  $\partial\Omega$ .

### 4.1 Régularité $C^\alpha$

Commençons par quelques préliminaires sur la régularité  $C^\alpha$  adaptés à notre question. On choisira des normes euclidiennes  $\|\cdot\|_E$  sur tous les espaces  $\mathbb{R}^d$  et on notera  $d_E$  leur distance euclidienne.

**Définition 4.1** Soit  $\alpha \in ]1, 2[$ . Une fonction  $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^d$  de classe  $C^1$  et à support compact est dite de classe  $C^\alpha$ , si on a une des trois assertions équivalentes suivantes :



- (i)  $\exists C_1 > 0$ ,  $\forall x, x' \in \mathbb{R}^m$ ,  $\|Df(x') - Df(x)\|_E \leq C_1 \|x' - x\|_E^{\alpha-1}$ .  
(ii)  $\exists C_2 > 0$ ,  $\forall x, x' \in \mathbb{R}^m$ ,  $\|f(x') - f(x) - Df(x)(x' - x)\|_E \leq C_2 \|x' - x\|_E^\alpha$ .  
(iii)  $\exists C_3 > 0$ ,  $\forall x, x' \in \mathbb{R}^m$ ,  $\|f(x) + f(x') - 2f(\frac{x+x'}{2})\|_E \leq C_3 \|x' - x\|_E^\alpha$ .

Plus généralement, une fonction de  $\mathbb{R}^m$  dans  $\mathbb{R}^d$  est dite de classe  $C^\alpha$  si, au voisinage de tout point, elle coïncide avec une fonction à support compact de classe  $C^\alpha$ .

**Remarque** La définition (i) exprime que la dérivée  $f'$  est  $(\alpha-1)$ -Hölder. La définition (ii) sera plus adapté à notre point de vue géométrique.

**Démonstration** C'est classique. Donnons seulement des pistes. Les implications (i)  $\Rightarrow$  (ii)  $\Rightarrow$  (iii) sont évidentes.

Pour montrer (iii)  $\Rightarrow$  (ii), on se ramène au cas où  $x = 0$ ,  $f(x) = 0$  et  $Df(x) = 0$ . On remarque que, pour  $k \geq 0$ , on a la majoration :

$$\|2^k f(2^{-k} x') - 2^{k+1} f(2^{-k-1} x')\|_E \leq C_3 2^{-(\alpha-1)k} \|x'\|_E^\alpha.$$

On somme alors cette série pour obtenir la majoration  $\|f(x')\|_E \leq C_3 (1 - 2^{-(\alpha-1)})^{-1} \|x'\|_E^\alpha$ .

L'implication (ii)  $\Rightarrow$  (i) est plus délicate. En effet, si on échange  $x$  et  $x'$  dans (ii) et, si on fait la somme, on obtient seulement

$$\|(Df(x') - Df(x))(x' - x)\|_E \leq 2C_2 \|x' - x\|_E^\alpha.$$

Ce qui permet de conclure en dimension 1. Pour conclure en dimension supérieure, on applique le théorème de Nikolskii suivant (c.f. [21] théorème 9.1) qui affirme que si la dépendance de  $f$  est de classe  $C^\alpha$  séparément en chaque variable avec un contrôle uniforme sur les constantes  $C_1$ , alors  $f$  est globalement de classe  $C^\alpha$ . De façon plus précise, notons

$$\|f\|_\alpha := \sup_{x, x' \in \mathbb{R}^m} \frac{\|Df(x') - Df(x)\|_E}{\|x' - x\|_E^\alpha}.$$

Le théorème de Nikolskii s'énonce alors :

Soit  $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^d$ , une fonction de classe  $C^1$  à support compact. On suppose qu'il existe une constante  $C_4 > 0$  telle que,  $\forall j = 1, \dots, m$ ,  $\forall (x_1, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^{m-1}$ , on a

$$\|x \rightarrow f(x_1, \dots, x_{j-1}, x, x_{j+1}, \dots, x_m)\|_\alpha \leq C_4.$$

Alors  $\|f\|_\alpha < \infty$ . □

On vérifie aisément que la composée de deux applications de classe  $C^\alpha$  est encore de classe  $C^\alpha$  et que le théorème des fonctions implicites est valable pour les fonctions de classe  $C^\alpha$ . Ce qui permet de définir les variétés et les sous-variétés de classe  $C^\alpha$ . Le lemme suivant donne une caractérisation géométrique de ces sous-variétés.

**Lemme 4.2** Soit  $M$  une sous-variété fermée  $C^1$  de  $\mathbb{R}^q$ . Alors  $M$  est de classe  $C^\alpha$  si et seulement si, pour tout compact  $K$  de  $M$ , il existe une constante  $C_K > 0$  telle que, pour tous  $p, p'$  dans  $K$ ,

$$d_E(p', T_p M) \leq C_K d_E(p', p)^\alpha. \quad (11)$$

On a identifié implicitement  $T_p M$  à un sous-espace affine de  $\mathbb{R}^q$ .

**Démonstration** Comme la question est locale, on peut supposer que  $M$  est le graphe d'une "petite" fonction. Plus précisément, on peut supposer que

$$M = \{(x, f(x)) / x \in \mathbb{R}^d\}$$

où  $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^{q-d}$  est une fonction  $C^1$  à support compact telle que  $\sup_{x \in \mathbb{R}^d} \|Df(x)\| \leq 1$ . On a alors les inégalités, pour tous  $p = (x, f(x))$  et  $p' = (x', f(x'))$  :

$$\|x' - x\|_E \leq d_E(p', p) \leq \sqrt{2} \|x' - x\|_E \text{ et}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \|f(x') - f(x) - Df(x)(x' - x)\|_E \leq d_E(p', T_p M) \leq \|f(x') - f(x) - Df(x)(x' - x)\|_E .$$

Notre équivalence s'en déduit.  $\square$

## 4.2 $\beta$ -convexité

Soit  $\Omega$  un ouvert strictement convexe de  $\mathbb{P}(\mathbb{R}^m)$ . Comme précédemment, on choisit une carte affine  $\mathbb{R}^{m-1}$  contenant  $\overline{\Omega}$  et on la munit d'une distance euclidienne  $d_E$ .

**Définition 4.3** Soit  $2 \leq \beta < \infty$ . Le bord  $\partial\Omega$  d'un ouvert strictement convexe  $\Omega$  de  $\mathbb{R}^p$  est dit  $\beta$ -convexe s'il existe  $C > 0$  tel que, pour tous  $p, p'$  dans  $\partial\Omega$ , on a

$$d_E(p', T_p \partial\Omega) \geq C^{-1} d_E(p', p)^\beta . \quad (12)$$

**Définition 4.4** Pour tout ouvert strictement convexe  $\Omega$  à bord  $C^1$ , on note  $\alpha_\Omega = \sup\{\alpha \in [1, 2[ / \partial\Omega \text{ est } C^\alpha\}$  et  $\beta_\Omega = \inf\{\beta \in [2, \infty[ / \Omega \text{ est } \beta\text{-convexe}\}$ .

**Lemme 4.5** Soit  $\Omega$  un ouvert strictement convexe de  $\mathbb{P}(\mathbb{R}^m)$ ,  $\Omega^*$  son dual et  $1 < \alpha \leq 2 \leq \beta < \infty$  avec  $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 1$ . On a l'équivalence  $\partial\Omega$  est  $\beta$ -convexe  $\iff \partial\Omega^*$  est de classe  $C^\alpha$ .

Autrement dit, on a l'égalité  $\frac{1}{\alpha_{\Omega^*}} + \frac{1}{\beta_\Omega} = 1$ . La démonstration est laissée au lecteur.

## 4.3 Régularité $C^\alpha$ et $\beta$ -convexité du bord

**Proposition 4.6** Soit  $\Omega$  un ouvert strictement convexe divisible de  $\mathbb{P}(\mathbb{R}^m)$ . Alors il existe  $\alpha \in ]1, 2]$  et  $\beta \in [2, \infty[$  tels que le bord  $\partial\Omega$  est de classe  $C^\alpha$  et est  $\beta$ -convexe.

**Remarque** - Même en dimension  $m - 1 = 2$ , la régularité  $C^\alpha$  du bord semble nouvelle.

- Soit  $\varepsilon = \alpha - 1$ . Montrer que  $\partial\Omega$  est de classe  $C^\alpha$  équivaut à montrer que la distribution stable du flot d'Anosov  $\varphi_t$  est Hölder continue d'exposant  $\varepsilon$  (voir lemme 3.6). C'est un point technique qui mérite un commentaire: rappelons que la régularité Hölder de

la distribution stable d'un flot (ou d'un difféomorphisme) d'Anosov est vraie sous des hypothèses de régularité  $C^{1+\varepsilon}$  pour ce flot. Cela est dû à Anosov (voir [2]). A ce stade de notre raisonnement, nous savons seulement que le flot  $\varphi_t$  est de classe  $C^1$ . Remarquons, par ailleurs, qu'il est facile de construire un flot d'Anosov de classe  $C^1$  dont la distribution stable n'est pas Hölder continue. Il suffit pour cela de prendre le conjugué  $\psi \circ \varphi_t \circ \psi^{-1}$  de n'importe quel flot d'Anosov  $\varphi_t$  par un difféomorphisme  $\psi$  de classe  $C^1$  bien choisi. La démonstration qui suit ne paraît donc pas inutile.

**Démonstration** Choisissons, comme précédemment, un ouvert affine  $\mathbb{R}^{m-1}$  contenant  $\bar{\Omega}$  et munissons-le d'une distance euclidienne  $d_E$ . Pour tout point  $v^-$  de  $\tilde{E}^-$ , on garde les notations  $w, x, y, w_t, x_t, y_t \dots$  de la section 3.2.6 et on note  $a_t$  le point du bord  $\partial\Omega$  tel que  $\sigma^+(y_t) \cdot (a_t - x_t) = y_t$  (voir figure 8). Tous ces points sont des fonctions de  $v^-$ .

Choisissons un compact  $K$  de  $\tilde{E}_1^-$  suffisamment gros de sorte que l'on peut trouver  $\varepsilon > 0$  tel que, pour tous points  $p, p'$  de  $\partial\Omega$  tels que  $d_E(p', p) \leq \varepsilon$ , il existe  $v^-$  dans  $K$  et  $t \geq 0$  tels que  $(p, p') = (p^+(w), a_t)$ . C'est possible. On choisira  $K$  de sorte qu'il contienne le compact  $K' := \{v^- \in \tilde{E}_1^- / H_{p^+(w)} \text{ et } H_{p^-(w)} \text{ sont parallèles et } x \text{ est le milieu de } p^+(w) \text{ et } p^-(w)\}$ .

On utilisera les notations classiques suivantes pour deux fonctions positives  $f$  et  $g$  sur  $K \times [0, \infty[$ . On écrira  $f = O(g)$  si la fonction  $f/g$  est bornée sur  $K \times [0, \infty[$ . On écrira  $f \simeq g$  si les fonctions  $f/g$  et  $g/f$  sont bornées sur  $K \times [0, \infty[$ .

La régularité  $C^\alpha$  du bord que l'on veut montrer équivaut donc, d'après le lemme 4.2, à l'estimation suivante

$$d_E(a_t, H_{p^+(w)}) = O(d_E(a_t, p^+(w))^\alpha). \quad (13)$$

Pour la démontrer, remarquons tout d'abord que, par la formule (5), on a

$$d_E(a_t, H_{p^+(w)}) \simeq d_E(x_t, p^+(w)) \simeq e^{-t}. \quad (14)$$

Remarquons ensuite que l'on a

$$d_E(a_t, p^+(w)) \simeq d_E(a_t, x_t) = \frac{\|y_t\|_E}{\sigma^+(y_t)}. \quad (15)$$

Or la construction de  $y_t$  donnée en 3.2.6 donne l'estimation

$$\|y_t\|_E \simeq d_E(x_t, p^+(w)) \simeq e^{-t}. \quad (16)$$

On peut supposer le compact  $K$  choisi de sorte que  $\Gamma.K = \tilde{E}_1^-$ . L'inégalité de droite dans (10) qui exprime la propriété d'Anosov pour le flot  $\varphi_t$  est alors équivalente à

$$\|y_t\|_\Omega = O(e^{-at}). \quad (17)$$

On peut aussi supposer  $K$  stable par changement de signe:  $(w, \eta) \rightarrow (w, -\eta)$ . L'estimée (17) est alors équivalente à

$$\sigma^+(y_t) = O(e^{-at}). \quad (18)$$

Les estimées (15), (16) et (18) donnent

$$e^{-(1-a)t} = O(d_E(a_t, p^+(w))) . \quad (19)$$

On en déduit que  $a < 1$ . A partir des estimées (14) et (19), on obtient l'estimée (13) avec  $\alpha = \frac{1}{1-a}$ . Ceci prouve bien que le bord est de classe  $C^\alpha$ .

La  $\beta$ -convexité de  $\partial\Omega$  résulte de la régularité  $C^\alpha$  de  $\partial\Omega^*$  (lemmes 2.8 et 4.5)  $\square$

**Complément à la proposition 4.6** Avec les définitions 3.2 et 4.3, on a les égalités  $a_\varphi = 1 - \frac{1}{\alpha_\Omega}$  et  $b_\varphi = 1 - \frac{1}{\beta_\Omega}$ .

**Remarque** En particulier, on a  $0 < a_\varphi \leq \frac{1}{2}$  et  $\frac{1}{2} \leq b_\varphi < 1$ .

**Démonstration** Le raisonnement ci-dessus prouve l'inégalité  $\alpha_\Omega \geq \frac{1}{1-a_\varphi}$ .

A l'inverse, si le bord est de classe  $C^\alpha$ , l'estimée (13) est vraie et le même raisonnement permet d'obtenir l'estimée (17) avec  $a = 1 - \frac{1}{\alpha}$ . Autrement dit, on a aussi l'inégalité  $a_\varphi \geq 1 - \frac{1}{\alpha_\Omega}$ . Ce qui donne bien l'égalité  $a_\varphi = 1 - \frac{1}{\alpha_\Omega}$ .

La formule pour  $b_\varphi$  se montre de façon analogue. Les détails sont laissés au lecteur.  $\square$

Il est probable qu'on a aussi l'égalité  $a_\varphi + b_\varphi = 1$ , i.e. que  $\alpha_\Omega = \alpha_{\Omega^*}$  et que  $\beta_\Omega = \beta_{\Omega^*}$ ?

## 5 Dynamique du flot géodésique

Le but de cette partie est de montrer le mélange topologique du flot géodésique.

### 5.1 Géodésiques périodiques

La proposition suivante décrit les orbites périodiques du flot  $\varphi_t$ . Il confirme l'analogie entre les quotients  $M = \Gamma \backslash \Omega$  et les variétés riemanniennes compactes à courbure négative.

On identifiera  $\text{PGL}(\mathbb{R}^m)$  à  $\text{SL}^\pm(\mathbb{R}^m)/_{\pm Id}$ . Pour tout élément  $g$  de ce groupe, on note  $\lambda_1(g) \geq \dots \geq \lambda_m(g)$  les modules des valeurs propres de  $g$  répétées avec multiplicité et  $\ell_1(g) \geq \dots \geq \ell_m(g)$  les logarithmes de ces modules. On dit que  $g$  est proximal si  $\lambda_1(g) > \lambda_2(g)$ . On note alors  $x_g^+$  le point fixe attracteur de  $g$  dans  $\mathbb{P}(\mathbb{R}^m)$  et  $y_g^-$  l'unique hyperplan  $g$ -invariant de  $\mathbb{P}(\mathbb{R}^m)$  qui ne contient pas  $x_g^+$ . On dit que  $g$  est biproximal lorsque  $g$  et  $g^{-1}$  sont proximaux. On note alors  $x_g^- := x_{g^{-1}}^+$  et  $y_g^+ := y_{g^{-1}}^-$ .

**Proposition 5.1** Soit  $\Omega$  un ouvert strictement convexe de  $\mathbb{P}(\mathbb{R}^m)$  divisé par un sous-groupe discret sans torsion  $\Gamma$  de  $\text{PGL}(\mathbb{R}^m)$  et  $M = \Gamma \backslash \Omega$  la variété quotient munie de la distance de Hilbert. Alors,

- Tout élément  $g$  de  $\Gamma - \{1\}$  est proximal; les points  $x_g^+$  et  $x_g^-$  sont dans  $\partial\Omega$  et  $g$  stabilise une unique géodésique dans  $\Omega$ , celle joignant  $x_g^+$  et  $x_g^-$ .
- Aucune géodésique périodique de  $M$  n'est homotopiquement triviale.
- Toute classe d'homotopie libre non triviale  $[g]$  de  $M$  contient une unique géodésique

périodique. Celle-ci est de longueur minimale et cette longueur est égale à  $\ell_{[g]} := \ell_1(g) - \ell_m(g)$ .

**Remarques** - En dimension  $m - 1 = 2$ , cette proposition est due à W.Goldman (voir [12]).

-  $\Gamma$  se relève toujours en un sous groupe de  $\mathrm{SL}^\pm(\mathbb{R}^m)$  de sorte qu'il préserve chacun des deux cônes convexes de  $\mathbb{R}^m$  d'image  $\Omega$ . Nous identifierons  $\Gamma$  à son relevé.

**Démonstration** b) Une géodésique dans  $M$  ne peut pas être homotopiquement triviale car ses relevés dans  $\Omega$  seraient compacts.

a) & c) Par compacité de  $M$ , il existe, dans toute classe d'homotopie libre non triviale, une géodésique de longueur minimale.

Donnons nous une classe d'homotopie libre non triviale  $[g]$  de  $M$ , c'est à dire une classe de conjugaison d'un élément  $g$  de  $\Gamma - \{1\}$ . Une géodésique périodique dans cette classe se relève en une géodésique  $t \rightarrow x_t$  de  $\Omega$  invariante par  $g$ . Cette géodésique est une ligne droite qui rejoint deux points  $x^-$  et  $x^+$  du bord  $\partial\Omega$ . Ces points sont des points fixes de  $g$ , c'est à dire des droites propres associées à des valeurs propres positives  $\lambda^-$  et  $\lambda^+$ .

Fixons  $R > 0$  et notons  $B_\Omega(x_0, R)$  la boule de rayon  $R$  pour  $d_\Omega$  centrée au point  $x_0$  de notre géodésique. L'image  $g^n B_\Omega(x_0, R)$  est la boule de rayon  $R$  pour  $d_\Omega$  centrée au point  $g^n x_0$ . Ces centres  $g^n x_0$  tendent vers  $x^+$  lorsque  $n$  tend vers l'infini. Comme  $\Omega$  est strictement convexe, le diamètre pour la distance euclidienne de ces boules tend vers 0:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathrm{diam}_E(g^n B_\Omega(x_0, R)) = 0 .$$

Ceci implique, d'une part, que les valeurs propres de  $g$  autres que  $\lambda^+$  ont un module strictement plus petit que  $\lambda^+$  et, d'autre part, que  $\lambda^+$  est une valeur propre sans multiplicité (pour se convaincre de ce dernier point, on explicitera l'action de  $g$  sur un sous-espace  $g$ -invariant de dimension 3 contenant  $x^+$  et  $x^-$ ). Autrement dit,  $g$  est proximal et  $x^+ = x_g^+$ .

De la même façon  $g^{-1}$  est proximal et  $x^- = x_g^-$ . Ceci prouve l'unicité de notre géodésique.

La période est donnée par  $\ell_{[g]} = d_\Omega(x_0, gx_0) = \log((x_g^+, x_g^-, x_0, gx_0)) = \ell_1(g) - \ell_m(g)$ .  $\square$

**Définition 5.2** Soit  $g$  un élément biproximal de  $\mathrm{PGL}(\mathbb{R}^m)$  et  $\Gamma$  comme ci-dessus. On note

$$\alpha_g := \frac{\ell_1(g) - \ell_m(g)}{\ell_1(g) - \ell_{m-1}(g)} \text{ et } \beta_g := \frac{\ell_1(g) - \ell_m(g)}{\ell_1(g) - \ell_2(g)} ,$$

$$\alpha_\Gamma := \min_{g \in \Gamma - \{1\}} \alpha_g \text{ et } \beta_\Gamma := \max_{g \in \Gamma - \{1\}} \beta_g .$$

**Remarque** On a les égalités  $\frac{1}{\alpha_g} + \frac{1}{\beta_{g^{-1}}} = 1$  et  $\frac{1}{\alpha_\Gamma} + \frac{1}{\beta_\Gamma} = 1$ .

Le corollaire suivant fournit une majoration du "cône limite" de  $\Gamma$  (cf [3]).

**Corollaire 5.3** Avec les notations de la proposition 5.1, on a les inégalités

$$1 < \alpha_\Omega \leq \alpha_\Gamma \leq 2 \leq \beta_\Gamma \leq \beta_\Omega < \infty$$

**Démonstration** Fixons un élément  $g \neq 1$  de  $\Gamma$ . Cet élément est biproximal et l'hyperplan projectif  $y_g^+$  est tangent à  $\partial\Omega$  au point  $x_g^+$ . Autrement dit, on a l'égalité  $H_{x_g^+} = y_g^+$ .

On peut choisir une carte affine  $\mathbb{R}^{m-1} = \mathbb{R}^{m-2} \times \mathbb{R} \subset \mathbb{P}(\mathbb{R}^m)$  pour laquelle l'hyperplan  $y_g^-$  est l'hyperplan à l'infini, le point  $x_g^+$  est l'origine, l'hyperplan  $y_g^+$  est l'hyperplan "horizontal" complété de  $\mathbb{R}^{m-2} \times \{0\}$  et pour laquelle l'action de  $g$  est donnée par une matrice  $\frac{1}{\lambda_1(g)} \begin{pmatrix} A(g) & 0 \\ 0 & \lambda_m(g) \end{pmatrix}$  où  $A(g)$  est une matrice carrée de taille  $m-2$  dont les modules des valeurs propres sont  $\lambda_2(g) \geq \dots \geq \lambda_{m-1}(g)$ .

Il existe des points  $p$  de  $\partial\Omega$  pour lesquels on a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log d_E(g^n p, x_g^+) = \ell_{m-1}(g) - \ell_1(g) \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log d_E(g^n p, y_g^+) = \ell_m(g) - \ell_1(g).$$

Comme les points  $g^n p$  sont sur  $\partial\Omega$ , la condition de régularité  $C^\alpha$  du bord (11) exprimée au point  $x_g^+$  implique alors que  $\alpha \leq \alpha_g$ . On a donc  $\alpha_\Omega \leq \alpha_\Gamma$ .

En outre, pour un ouvert dense de points  $p$  de  $\partial\Omega$ , on a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log d_E(g^n p, x_g^+) = \ell_2(g) - \ell_1(g) \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log d_E(g^n p, y_g^+) = \ell_m(g) - \ell_1(g).$$

De même que ci-dessus, la condition de  $\beta$ -convexité du bord (12) exprimée au point  $x_g^+$  implique alors que  $\beta_g \leq \beta$ . On a donc  $\beta_\Gamma \leq \beta_\Omega$ .  $\square$

Il est probable qu'on a aussi les égalités  $\alpha_\Omega = \alpha_\Gamma$  et  $\beta_\Omega = \beta_\Gamma$ ?

## 5.2 Propriétés du groupe $\Gamma$

Rassemblons maintenant quelques propriétés du groupe  $\Gamma$  qui joueront un rôle crucial dans la suite. Gardons les notations de 5.1.

**Fait 5.4** Soient  $\Gamma$  un sous-groupe discret sans torsion de  $\text{SL}(\mathbb{R}^m)$  qui divise un ouvert strictement convexe  $\Omega$  de  $\mathbb{P}(\mathbb{R}^m)$ . Alors,

- a) L'action de  $\Gamma$  sur  $\partial\Omega$  est minimale.
- b) Si  $\Omega$  n'est pas un ellipsoïde, alors  $\Gamma$  est Zariski dense dans  $\text{SL}(\mathbb{R}^m)$ .
- c) L'ensemble  $F_\Gamma^0 := \{(x_g^-, x_g^+) / g \in \Gamma - \{1\}\}$  est dense dans  $\partial\Omega \times \partial\Omega$ .

**Démonstration** a) Mieux, tout fermé  $\Gamma$ -invariant non vide de  $\mathbb{P}(\mathbb{R}^m)$  contient  $\partial\Omega$ . C'est ce qu'affirme le lemme 3.8 de [4].

b) C'est le théorème 3.6 de [4].

c) C'est le lemme 3.6 iv) de [3].  $\square$

Notons  $\mathfrak{a} := \{(x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^m / x_1 + \dots + x_m = 0\}$  et, pour  $g$  dans  $\text{SL}(\mathbb{R}^m)$ , notons  $\ell(g) := (\ell_1(g), \dots, \ell_m(g)) \in \mathfrak{a}$ .

**Fait 5.5** Soient  $\Gamma$  un sous-groupe Zariski-dense de  $\mathrm{SL}(\mathbb{R}^m)$ . Alors,

a) Les vecteurs  $\ell(g)$ , pour  $g$  dans  $\Gamma$ , engendrent l'espace vectoriel réel  $\mathfrak{a}$ .

b) Mieux, le sous-groupe de  $\mathfrak{a}$  engendré par les vecteurs  $\ell(g)$ , pour  $g$  dans  $\Gamma$ , est dense dans  $\mathfrak{a}$

**Démonstration** a) C'est le théorème 1.2.a.β de [3].

b) C'est la proposition de [3] (II). □

### 5.3 Mélange topologique du flot géodésique

**Proposition 5.6** Soit  $\Omega$  un ouvert strictement convexe de  $\mathbb{P}(\mathbb{R}^m)$  et  $\Gamma$  un sous-groupe discret sans torsion de  $\mathrm{SL}(\mathbb{R}^m)$  qui divise  $\Omega$ . Alors le flot géodésique  $\varphi_t$  sur le quotient  $\Gamma \backslash S\Omega$  est topologiquement mélangeant.

Notons  $\partial^2\Omega := \{(p, q) \in \partial\Omega \times \partial\Omega / p \neq q\}$ . On a alors une identification

$$\begin{aligned} S\Omega & \xrightarrow{\sim} \partial^2\Omega \times \mathbb{R}. \\ w = (x, \xi) & \longrightarrow (p^-(w), p^+(w), b_{x_0}(x, p^-(w))) \end{aligned} \quad (20)$$

qui est un homéomorphisme bihöldérien. Avec cette identification, le flot géodésique et l'action des éléments  $g$  de  $\Gamma$  s'expriment simplement:

$$\begin{aligned} \varphi_t(p^-, p^+, s) & = (p^-, p^+, s + t) \text{ et} \\ g.(p^-, p^+, s) & = (g.p^-, g.p^+, s - b_{x_0}(g^{-1}x_0, p^-)) \end{aligned} \quad (21)$$

**Démonstration de la proposition 5.6** Vérifions tout d'abord que le flot  $\varphi_t$  est topologiquement transitif, c'est à dire qu'il a une orbite dense dans  $\Gamma \backslash S\Omega$ . Comme le flot  $\varphi_t$  est d'Anosov, d'après [1], il suffit de vérifier que la réunion des orbites périodiques de  $\varphi_t$  est dense dans  $\Gamma \backslash S\Omega$ . Cette dernière assertion n'est qu'une reformulation de la proposition 5.4.c car, d'après la proposition 5.1, les relevés des orbites périodiques de  $\varphi_t$  sont les géodésiques d'extrémités  $(x_g^-, x_g^+)$  avec  $g$  dans  $\Gamma - \{1\}$ .

Pour montrer que  $\varphi_t$  est topologiquement mélangeant, il suffit alors, d'après l'exercice 18.3.4 du livre [15], de vérifier que le sous-groupe de  $\mathbb{R}$  engendré par les longueurs  $\ell_{[g]}$  des orbites périodiques est dense dans  $\mathbb{R}$ . Cette dernière assertion est une conséquence immédiate de la proposition 5.5.b. □

**Corollaire 5.7** Soit  $\Omega$  un ouvert strictement convexe de  $\mathbb{P}(\mathbb{R}^m)$  et  $\Gamma$  un sous-groupe discret sans torsion de  $\mathrm{SL}(\mathbb{R}^m)$  qui divise  $\Omega$ . Notons  $N(T)$  le nombre de géodésiques fermées sur  $\Gamma \backslash \Omega$  de longueur majorée par  $T$ . Alors on a  $\lim_{T \rightarrow \infty} 2hTe^{-hT}N(T) = 1$  où  $h \in ]0, \infty[$  est l'entropie topologique du flot géodésique  $\varphi_t$ .

**Remarque** On peut, comme pour les variétés riemanniennes à courbure négative, identifier  $h$  au taux de croissance exponentiel du volume des boules pour la métrique de Hilbert de  $\Omega$ .

**Démonstration** C'est une conséquence de nos proposition 4.6 et 5.6 et du théorème, dû à Margulis, de comptage des orbites périodiques pour un flot d'Anosov topologiquement mélangeant (voir [25] ou [15] théorème 20.6.9). Ce théorème est cité habituellement sous l'hypothèse de régularité  $C^2$ , mais sa preuve n'utilise que la régularité  $C^{1+\varepsilon}$ .  $\square$

## 6 Rigidité des convexes divisibles

Le but de cette partie est de montrer le théorème 1.3, c'est à dire trois propositions de rigidité pour les ouverts convexes divisibles.

Pour chacune de ces trois propositions, la Zariski-densité du groupe discret et la régularité Hölder du bord joueront un rôle essentiel.

### 6.1 Rigidité $C^\alpha$ du bord

Le premier phénomène de rigidité affirme simplement que la proposition 4.6 est optimale.

**Proposition 6.1** *Soit  $\Omega$  un ouvert proprement convexe divisible de  $\mathbb{P}(\mathbb{R}^m)$  tel que le bord  $\partial\Omega$  est de classe  $C^\alpha$ , pour tout  $\alpha < 2$ , alors  $\Omega$  est un ellipsoïde.*

**Remarque** - En dimension  $m - 1 = 2$ , la démonstration de cette proposition remonte à N.Kuiper dans [22].

- En dimension  $m - 1 \geq 2$  Benzecri avait montré dans [6] qu'un ouvert proprement convexe, qui n'est pas un ellipsoïde et dont le bord est  $C^2$  à Hessian défini positif n'est pas divisible. Plus récemment, E. Socie a montré dans [29] que le groupe des automorphismes d'un tel convexe est compact.

**Démonstration** Soit  $\Gamma$  un sous-groupe discret sans torsion de  $SL(\mathbb{R}^m)$  qui divise  $\Omega$ . D'après le corollaire 5.3, on a  $\alpha_\Gamma = 2$ . Ce qui signifie que, pour tout  $g$  dans  $\Gamma$ , on a  $2\ell_{m-1}(g) = \ell_1(g) + \ell_m(g)$ . Si  $\Omega$  n'est pas un ellipsoïde, ceci contredit le fait que  $\ell(\Gamma)$  engendre l'espace vectoriel  $\mathfrak{a}$  (proposition 5.4.b et 5.5.a).  $\square$

### 6.2 Rigidité $C^{1+\text{absolument continue}}$ du bord

Le second phénomène de rigidité ressemble beaucoup au premier, mais sa démonstration utilisera un outil supplémentaire: le formalisme thermodynamique pour les flots d'Anosov.

**Proposition 6.2** *Soit  $\Omega$  un ouvert proprement convexe divisible de  $\mathbb{P}(\mathbb{R}^m)$  tel que le bord  $\partial\Omega$  est de classe  $C^{1+\text{absolument continue}}$ , alors  $\Omega$  est un ellipsoïde.*

*Mieux, si  $\Omega$  n'est pas un ellipsoïde, alors la courbure de  $\partial\Omega$  est concentrée sur une partie de mesure nulle de  $\partial\Omega$ .*

**Remarques** - "De mesure nulle" fait référence à une mesure de volume pour une métrique Riemannienne de  $\partial\Omega$ .



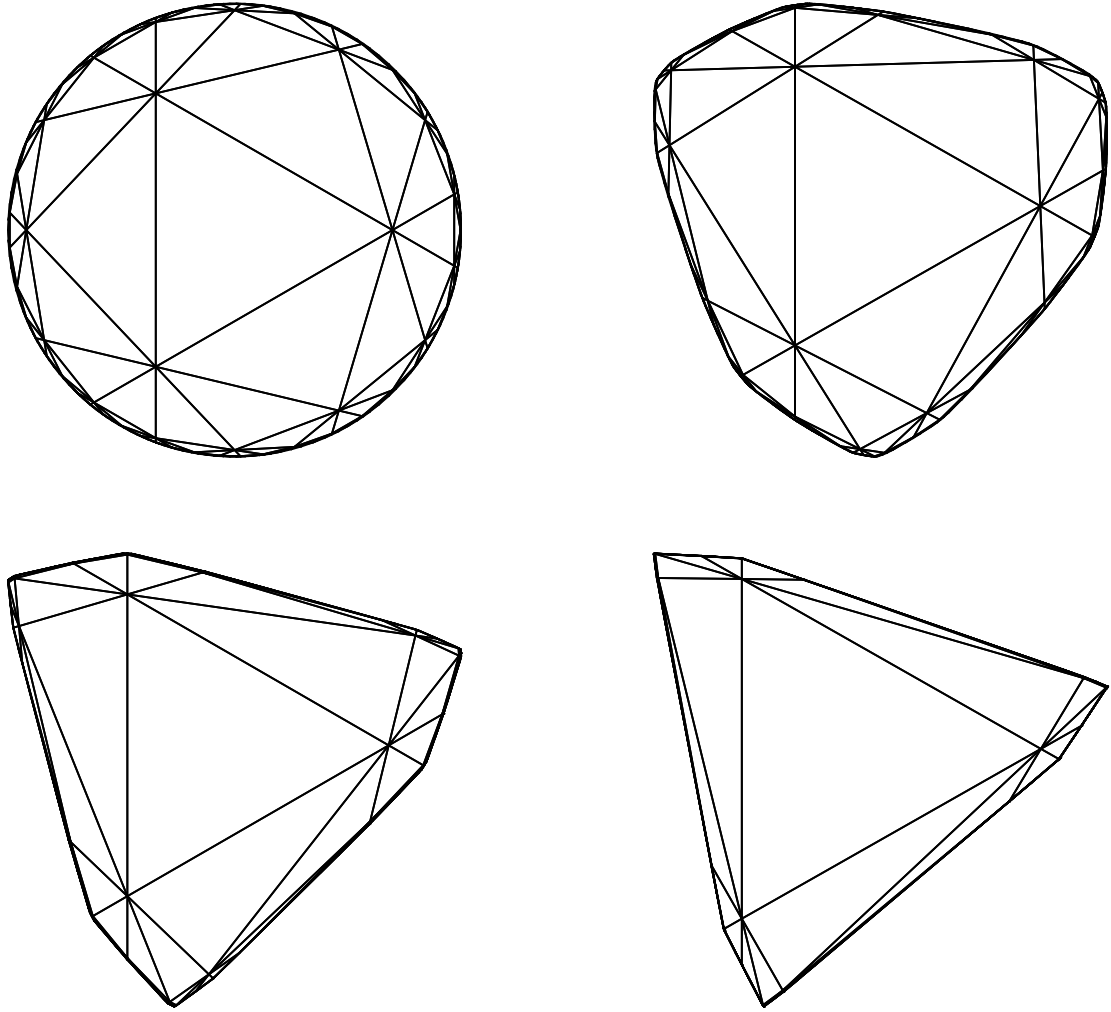


Figure 12: Pavages projectifs d'ouverts convexes du plan obtenus par déformation à partir d'un pavage hyperbolique. Le bord de ces convexes est de classe  $C^1$  mais la courbure du bord est concentrée sur une partie de mesure nulle.

- En dimension  $m-1 = 2$ , cette proposition est due à Benzecri. Plus précisément, Benzecri avait annoncé hâtivement dans [6] que le seul ouvert strictement convexe divisible du plan projectif est l'ellipsoïde. Une étude attentive de sa preuve nécessite l'hypothèse d'absolue continuité pour l'application tangente à la courbe  $\partial\Omega$  (voir le lemme 4 p.327 de [6]). C'est donc cet énoncé que nous généralisons en toute dimension.

On notera  $\Gamma$  un sous-groupe discret sans torsion de  $SL(\mathbb{R}^m)$  qui divise  $\Omega$ . Associons à chaque point  $p$  de  $\partial\Omega$  son hyperplan tangent  $T_p\partial\Omega$ . Cet hyperplan tangent s'identifie à un point  $n(p)$  du bord  $\partial\Omega^*$  de l'ouvert convexe dual de  $\Omega$ . L'application  $n : \partial\Omega \longrightarrow \partial\Omega^*$  ainsi construite s'appelle l'application normale. Elle est bijective, bihöldérienne et  $\Gamma$ -équivariante. Munissons  $\partial\Omega$  et  $\partial\Omega^*$  d'une métrique riemannienne et notons  $\mu_{\partial\Omega}$  et  $\mu_{\partial\Omega^*}$  les mesures de volume de ces métriques riemanniennes.

Dire que  $\partial\Omega$  est de classe  $C^1$ +absolument continue, c'est dire que l'application normale est absolument continue, c'est-à-dire que, pour tout borélien  $A$  de  $\partial\Omega$  tel que  $\mu_{\partial\Omega}(A) = 0$ , on a  $\mu_{\partial\Omega^*}(n(A)) = 0$ .

Dire que la courbure de  $\partial\Omega$  est concentrée sur une partie de mesure nulle de  $\partial\Omega$  signifie qu'il existe un borélien  $B$  de  $\partial\Omega$  tel que  $\mu_{\partial\Omega}(B) = 0$  et  $\mu_{\partial\Omega^*}(n(B^c)) = 0$ .

**Définition 6.3** Une mesure positive finie sur  $\partial\Omega$  est dite quasiinvariante si, pour tout  $g$  dans  $\Gamma$ , la mesure image  $g_*(\mu)$  est absolument continue par rapport à  $\mu$  et si la dérivée de Radon-Nikodym est une fonction Hölder. Autrement dit, si on peut écrire  $g_*(\mu) = e^{-c(g,\cdot)}\mu$  où  $p \rightarrow c(g, p)$  est une fonction Hölder sur  $\partial\Omega$ .

On note alors  $\ell_\mu : \Gamma \rightarrow \mathbb{R}_+$  la fonction période donnée par  $\ell_\mu(g) = c(g, x_g^+)$  si  $g \neq 1$  et  $\ell_\mu(1) = 0$ .

**Exemple** Les mesures  $\mu_1 := \mu_{\partial\Omega}$  et  $\mu_2 := n_*^{-1}(\mu_{\partial\Omega^*})$  sont quasiinvariantes.

Dire que  $\partial\Omega$  est de classe  $C^1$ +absolument continue, c'est dire que la mesure  $\mu_2$  est absolument continue par rapport à  $\mu_1$ .

Dire que la courbure de  $\partial\Omega$  est concentrée sur une partie de mesure nulle de  $\partial\Omega$  c'est dire que  $\mu_1$  et  $\mu_2$  sont étrangères.

**Fait 6.4** Soient  $\Omega$  un ouvert strictement convexe de  $\mathbb{P}(\mathbb{R}^m)$  et  $\Gamma$  un sous-groupe discret sans torsion de  $SL(\mathbb{R}^m)$  qui divise  $\Omega$ . Soient  $\mu$  et  $\mu'$  des mesures quasiinvariantes sur  $\partial\Omega$ . Alors,

a) La mesure  $\mu$  est  $\Gamma$ -ergodique (i.e. pour toute partie mesurable  $\Gamma$ -invariante de  $\partial\Omega$ , on a  $\mu(A) = 0$  ou  $\mu(A^c) = 0$ ).

b) La mesure  $\mu'$  est absolument continue par rapport à  $\mu$  si et seulement si  $\mu$  et  $\mu'$  ont mêmes périodes (i.e.  $\ell_\mu = \ell_{\mu'}$ ). Si ce n'est pas le cas,  $\mu$  et  $\mu'$  sont étrangères.

**Démonstration** Ce fait est un analogue du théorème 1.d de [23]. Ce théorème est énoncé pour des mesures quasi-invariantes sur le bord à l'infini du revêtement universel d'une variété riemannienne compacte  $M$  à courbure strictement négative. Sa démonstration utilise tous les ingrédients classiques du formalisme thermodynamique pour les flots d'Anosov: unicité, ergodicité et structure de produit pour la mesure d'équilibre d'un potentiel höldérien sur  $SM$ , classification des mesures d'équilibres à l'aide des classes de Livschitz de potentiels höldériens ... Grace aux théorèmes 1.1 et 1.2, cette démonstration s'adapte sans changement à notre situation.  $\square$

Pour démontrer la proposition 6.2, nous devons donc calculer les périodes de  $\mu_1$  et  $\mu_2$ .

**Lemme 6.5** La période  $\ell_{\mu_1}$  associée à la mesure  $\mu_1 := \mu_{\partial\Omega}$  est donnée par, pour tout  $g$  dans  $\Gamma$ ,  $\ell_{\mu_1}(g) = (m-1)\ell_1(g) + \ell_m(g)$ .

**Démonstration** La période  $\ell_{\mu_1}(g)$  est le logarithme du Jacobien au point  $x_g^+$  de l'action de  $g^{-1}$  sur l'hyperplan  $y_g^+$  de  $\mathbb{P}(\mathbb{R}^m)$ . Les modules des valeurs propres de la différentielle

de l'action de  $g$  sur  $\mathbb{P}(\mathbb{R}^m)$  au point  $x_g^+$  sont  $(\lambda_i(g)/\lambda_1(g))_{2 \leq i \leq m}$ . Lorsqu'on se restreint à l'hyperplan tangent à  $y_g^+$ , c'est la dernière qui est omise. On a donc

$$\ell_{\mu_1}(g) = \sum_{2 \leq i \leq m-1} (\ell_1(g) - \ell_i(g)) = (m-1)\ell_1(g) + \ell_m(g). \quad \square$$

**Corollaire 6.6** *La période  $\ell_{\mu_2}$  associée à la mesure  $\mu_2 := n_*^{-1}(\mu_{\partial\Omega^*})$  est donnée par, pour tout  $g$  dans  $\Gamma$ ,  $\ell_{\mu_2}(g) = -\ell_1(g) - (m-1)\ell_m(g)$ .*

**Démonstration** L'application normale  $n$  est  $\Gamma$ -équivariante, c'est à dire que, pour tout  $g$  dans  $\Gamma$ , on a l'égalité  $n \circ g = {}^t g^{-1} \circ n$ . On a donc, par le lemme 6.5,

$$\ell_{\mu_2}(g) = \ell_{\mu_{\partial\Omega^*}}({}^t g^{-1}) = (m-1)\ell_1({}^t g^{-1}) + \ell_m({}^t g^{-1}) = -\ell_1(g) - (m-1)\ell_m(g) \quad \square$$

**Démonstration de la proposition 6.2** On vient de voir que si  $\partial\Omega$  est de classe  $C^{1+\text{absolument continue}}$ , alors, on a l'égalité, pour tout  $g$  dans  $\Gamma$ ,  $\ell_{\mu_1}(g) = \ell_{\mu_2}(g)$ . C'est à dire  $\ell_1(g) + \ell_m(g) = 0$ . Si  $\Omega$  n'est pas un ellipsoïde, ceci contredit le fait que  $\ell(\Gamma)$  engendre l'espace vectoriel  $\mathfrak{a}$  (proposition 5.4.b et 5.5.a).  $\square$

### 6.3 Densité invariante

Le troisième phénomène de rigidité repose aussi sur le formalisme thermodynamique pour les flots d'Anosov.

**Proposition 6.7** *Soient  $\Omega$  un ouvert proprement convexe de  $\mathbb{P}(\mathbb{R}^m)$  et  $\Gamma$  un sous-groupe discret sans torsion de  $\text{SL}(\mathbb{R}^m)$  qui divise  $\Omega$ . On suppose qu'il existe sur le quotient  $\Gamma \backslash S\Omega$  une mesure borélienne finie  $m$  invariante par le flot géodésique et qui est absolument continue par rapport à Lebesgue. Alors  $\Omega$  est un ellipsoïde.*

Nous utiliserons le théorème suivant de Livschitz-Sinai.

**Fait 6.8** *Soit  $\varphi_t$  un flot d'Anosov de classe  $C^{1+\varepsilon}$  sur une variété compacte  $W$ . On a l'équivalence*

(i) *Le flot  $\varphi_t$  préserve une mesure borélienne finie absolument continue par rapport à Lebesgue.*

(ii) *Pour tout  $w_0$  dans  $W$  et  $t_0 > 0$  tels que  $\varphi_{t_0}(w_0) = w_0$ , on a  $\text{Jac}_{w_0}(\varphi_{t_0}) = 1$ .*

La démonstration de ce théorème n'est qu'esquissée dans l'article original [24]. Elle est détaillée pour les difféomorphismes d'Anosov dans [7] (theorem 4.14). Cette démonstration est basée sur l'existence de partitions de Markov, existence qui est rédigée dans [27] pour les flots d'Anosov. La démonstration est, comme pour le fait 6.4, basée sur le formalisme thermodynamique:

**Démonstration de la proposition 6.7** Pour tout  $g$  dans  $\Gamma$ , on note  $w_0 = (x_0, \xi_0)$  un point de  $S\Omega$  sur la géodésique reliant  $x_g^-$  à  $x_g^+$  et  $t_0 = \ell_{[g]}$  la période de l'image dans

$\Gamma \backslash S\Omega$  de  $w_0$ . La condition (ii) du fait 6.8 s'écrit  $\text{Jac}_{w_0}(\varphi_{t_0} \circ Dg^{-1}) = 1$ . Pour calculer ce Jacobien, on reprend l'identification (20) et on obtient

$$\begin{aligned} \log(\text{Jac}_{w_0}(\varphi_{t_0} \circ Dg^{-1})) &= \log(\text{Jac}_{x_g^-}(g^{-1}|_{\partial\Omega})) + \log(\text{Jac}_{x_g^+}(g^{-1}|_{\partial\Omega})) \\ &= -\ell_{\mu_1}(g^{-1}) + \ell_{\mu_1}(g) \\ &= m(\ell_1(g) + \ell_m(g)) \quad \text{par le lemme 6.5} \end{aligned}$$

La condition (ii) donne donc l'égalité, pour tout  $g$  dans  $\Gamma$ ,  $\ell_1(g) + \ell_m(g) = 0$ . On conclut alors comme pour la proposition 6.2.  $\square$

**Remarque** Gurevich et Oseledets ont montré dans [14] que tout système d'Anosov  $\varphi_t$  de classe  $C^{1+\varepsilon}$  sur une variété compacte  $W$  qui ne préserve pas de mesure absolument continue par rapport à une mesure de Lebesgue  $m$  est dissipatif relativement à  $m$ . Cela s'applique donc à notre flot géodésique  $\varphi_t$  lorsque  $\Omega$  n'est pas un ellipsoïde.

## 6.4 Convexes divisibles autoduaux

Terminons cet article par un exemple.

**Exemple 6.9** *Il existe un sous-groupe Zariski dense  $\Gamma$  de  $\text{SL}(3, \mathbb{R})$  qui vérifie  ${}^t\Gamma = \Gamma$  et qui divise un ouvert strictement convexe  $\Omega$  du plan projectif  $\mathbb{P}(\mathbb{R}^3)$ .*

**Remarque** Identifions  $V = \mathbb{R}^3$  avec son dual à l'aide du produit scalaire standard. On a l'égalité  $\Omega = \Omega^*$  et pourtant  $\Omega$  n'est pas un ellipsoïde. Cet exemple est donc un erratum à l'implication trop optimiste (iii)  $\Rightarrow$  (iv) du théorème 5 de l'annonce [5].

**Démonstration** Choisissons 6 points  $(y_i)_{i \in \mathbb{Z}/6}$  de l'ouvert affine  $\mathbb{R}^2$  du plan projectif  $\mathbb{P}(\mathbb{R}^2)$  de sorte que :

- (i) Pour tout  $i$ , les segments  $]y_i, y_{i+2}[$  et  $]y_{i+1}, y_{i+3}[$  de l'ouvert affine  $\mathbb{R}^2$  se rencontrent.
- (ii) Pour tout  $i$ , les droites  $y_i$  et  $y_{i+2}$  de  $\mathbb{R}^3$  sont orthogonales.
- (iii) Aucune transformation projective  $g \in \text{SL}(3, \mathbb{R})$  ne vérifie, pour tout  $i$ ,  $g(y_i) = y_{i+3}$ .

On note  $s_i \in \text{SL}(3, \mathbb{R})$  la symétrie égale à  $+Id$  sur  $y_i$  et à  $-Id$  sur  $y_{i-1}$  et  $y_{i+1}$ . On note  $P$  l'hexagone intersection des deux triangles de sommets  $(y_1, y_3, y_5)$  et  $(y_2, y_4, y_6)$ . Les symétries  $s_i$  sont des symétries projectives par rapport aux côtés de  $P$  qui vérifient, pour tout  $i$ ,  $(s_i s_{i+1})^2 = 1$ . Comme le groupe  $\Gamma$  engendré par ces symétries  $s_i$  est une déformation d'un groupe de Coxeter du plan hyperbolique, il résulte de [8] que  $\Gamma$  divise un ouvert strictement convexe  $\Omega$  du plan projectif  $\mathbb{P}(\mathbb{R}^3)$ . Par (ii), on a les égalités  ${}^t s_i = s_{i+3}$  et donc  ${}^t \Gamma = \Gamma$ . Par (iii), le groupe  $\Gamma$  ne préserve aucune forme bilinéaire sur  $\mathbb{R}^3$ . Donc  $\Gamma$  est Zariski dense dans  $\text{SL}(3, \mathbb{R})$ .  $\square$

## Références

- [1] D.V.ANOSOV - Geodesic flows on closed riemannian manifold with negative curvature, Proc. Stekl. Inst. Math. 90 (1967).
- [2] D.V.ANOSOV - Tangential fields of transversal foliations in  $\mathcal{U}$ -systems. Math. Notes of USSR Acad. Sc., 2 (1967) p.818-823.

- [3] Y.BENOIST - Propriétés asymptotiques des groupes linéaires, *Geom. Funct. Anal.* 7 (1997) p.1-47 et (II), *Adv. Stud. Pure Math.* 26 (2000) p.33-48.
- [4] Y.BENOIST - Automorphismes des cônes convexes, *Inv. Math.* 141 (2000) p.149-193.
- [5] Y.BENOIST - Convexes divisibles, *CRAS* 332 (2001) p.387-390.
- [6] J.P.BENZECRI - Sur les variétés localement affines et localement projectives, *Bull. Soc. Math. Fr.* 88 (1960) p.229-332.
- [7] R.BOWEN - Equilibrium states and the ergodic theory of Anosov diffeomorphism, LN 470 Springer (1974)
- [8] S.CHOI, W.GOLDMAN - Convex real projective structures on closed surfaces are closed, *Proc. Am. Math. Soc.* 118 (1993) p.657-661.
- [9] M.COORNAERT, A.PAPADOPOULOS - Symbolic dynamics and hyperbolic groups, LN 1539 Springer (1993).
- [10] P.FOULON - Locally symmetric Finsler spaces in negative curvature, *Comptes Rendus Acad. Sc.* 324 (1997) p.1127-1132.
- [11] E.GHYS, P. DE LA HARPE - Sur les groupes hyperboliques d'après Mikhael Gromov, PM 83 Birkhäuser(1990).
- [12] W.GOLDMAN - Convex real projective structures on compact surfaces, *Journ. Diff. Geom.* 31 (1990) p.791-845.
- [13] M.GROMOV - Hyperbolic groups, in "Essays in group theory" MSRI Publ. 8 (1987) p.75-263.
- [14] B.GUREVICH, V.OSELEDETS - Gibbs distributions and dissipativeness of U-diffeomorphisms, *Soviet Math. Dokl.* 14 (1973) p.570-573.
- [15] B.HASSELBLATT, A.KATOK - Modern theory of dynamical systems, Cambridge Univ. Press (1995).
- [16] S.HELGASON - Differential geometry, Lie groups and symmetric spaces, Acad. Press (1978).
- [17] S.HURDER, A.KATOK - Differentiability, rigidity and Godbillon-Vey classes for Anosov flows, *Publ. Math. IHES* 72 (1990) p.5-61.
- [18] D.JOHNSON, J.MILLSON - Deformation spaces associated to compact hyperbolic manifolds, in "Discrete subgroups..." PM 67 Birkhäuser(1984) p.48-106.
- [19] V.KAC, E.VINBERG - Quasihomogeneous cones, *Math. Notes* 1 (1967) p.231-235.
- [20] J.L.KOSZUL - Déformation des connexions localement plates, *Ann. Inst. Fourier* 18 (1968) p.103-114.
- [21] S.KRANTZ - Lipschitz spaces, smoothness of functions, and approximation theory, *Exposition. Math.* 1 (1983) p.193-260.
- [22] N.KUIPER - On convex locally projective spaces, *Convegno Internazionale di Geometria Differenziale, Cremonese* (1954) p.200-213.
- [23] F. LEDRAPPIER - Structure au bord des variétés à courbure négative. Séminaire Grenoble (1995) p.97-122.
- [24] A.LIVSCHITZ, J.SINAI - On invariant measures compatible with the smooth structure for transitive U-systems, *Soviet Math. Dokl.* 13 (1972) p.1656-1659.
- [25] G.MARGULIS - Certain measures associated with U-flows on compact manifolds, *Func. Anal. Appl.*, 4 (1969) p.55-67.
- [26] C.PUGH, M.SHUB - Ergodicity of Anosov actions, *Invent. Math.* 15 (1972) p.1-23.
- [27] M.RATNER - Markov partitions for Anosov flows on n-dimensional manifolds, *Isr. Jour. Math.* 15 (1973) p.92-114.
- [28] J.P.SERRE - Cohomologie des groupes discrets, *Annals of Math. Studies* 70 (1971) p.77-169.
- [29] E.SOCIÉ-MÉTHOU - Isométries hyperboliques en géométrie de Hilbert, preprint (2000).
- [30] J.VEY - Sur les automorphismes affines des ouverts convexes saillants, *Ann. Scu. Norm. Sup. Pisa* 24 (1970) p.641-665.