Analyse du troisième champ critique en supraconductivité.

Bernard Helffer
Mathématiques -
Univ Paris Sud- UMR CNRS 8628
(d'après S. Fournais et B. Helffer)

Collège de France, Janvier 2007

– Typeset by FoilTEX –

Principaux objectifs

Utilisant de récents résultats par les auteurs sur l'asymptotique du Laplacien de Neumann avec champ magnétique, nous avions donné des asymptotiques sur le champ critique H_{C_3}, qui correspond à l'apparition de la supraconductivité pour les supraconducteurs de type II. Les premières preuves ont été obtenues avec des hypothèses supplémentaires sur le bord. Ici nous montrons que toutes les définitions locales ou globales de ce champ critique coincident toujours.

La fonctionnelle de Ginzburg-Landau

La fonctionnelle de Ginzburg-Landau est définie par

$$\mathcal{E}_{\kappa,H}[\psi,\vec{A}] = \\ \int_\Omega \left\{ |\nabla_{\kappa H\vec{A}}\psi|^2 - \kappa^2|\psi|^2 + \frac{\kappa^2}{2}|\psi|^4 \\ +\kappa^2 H^2 |\ \mathrm{curl}\ \vec{A} - 1|^2 \right\} dx\ ,$$

avec Ω simplement connexe, borné,
$(\psi,\vec{A}) \in W^{1,2}(\Omega;\mathbb{C}) \times W^{1,2}(\Omega;\mathbb{R}^2)$
et où $\nabla_{\vec{A}} = (\nabla - i\vec{A})$.

Cette fonctionnelle a une invariance de Jauge mais il est commode de faire le choix suivant :

$$\mathrm{div}\ \vec{A} = 0 \quad \text{dans } \Omega\ ,\ \vec{A}\cdot\nu = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega\ .$$

Les minimiseurs $(\psi, \vec{A})$ de la fonctionnelle vérifient les équations de Ginzburg-Landau,

$$\left.\begin{array}{r} -\nabla^2_{\kappa H\vec{A}}\psi = \kappa^2(1-|\psi|^2)\psi \\ \text{curl}\,^2\vec{A} = -\frac{i}{2\kappa H}(\overline{\psi}\nabla\psi - \psi\nabla\overline{\psi}) - |\psi|^2\vec{A} \end{array}\right\} \quad \text{dans} \quad \Omega\,; \tag{1a}$$

$$\left.\begin{array}{r} (\nabla_{\kappa H\vec{A}}\psi)\cdot\nu = 0 \\ \text{curl}\,\vec{A} - 1 = 0 \end{array}\right\} \quad \text{sur} \quad \partial\Omega\,. \tag{1b}$$

Ici $\text{curl}\,(A_1, A_2) = \partial_{x_1}A_2 - \partial_{x_2}A_1$,

$$\text{curl}\,^2\vec{A} = (\partial_{x_2}(\text{ curl }\vec{A}), -\partial_{x_1}(\text{ curl }\vec{A}))\,.$$

Introduisons $\vec{F}$ comme le potentiel vecteur qui engendre le champ magnétique extérieur constant et qui correspond au choix de jauge mentionné précédemment

$$\left.\begin{array}{c} \text{div } \vec{F} = 0 \\ \text{curl } \vec{F} = 1 \end{array}\right\} \quad \text{dans } \Omega\,,$$

et la condition aux limites

$$\vec{F} \cdot \nu = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega\,.$$

Terminologie pour les minimiseurs

L'étude des propriétés des minimiseurs de la fonctionnelle de Ginzburg-Landau conduit à l'introduction du vocabulaire suivant hérité des physiciens.

La paire $(0, \vec{F})$ est appelée état normal. On remarque que cette solution est toujours un point critique de la fonctionnelle.

Un minimiseur (ψ, A) pour lequel ψ ne s'annule jamais sera appelé état supraconducteur.

Dans les autres cas, nous parlerons d'état mixte.

La question générale est de déterminer la topologie des sous-ensembles dans $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ des paires (κ, H) correspondant à chacune des trois situations et de démontrer, au moins pour κ grand, un des dessins standards des ouvrages de supraconductivité.

Existence du troisième champ critique $\underline{H}_{C3}(\kappa)$

Il est bien connu que, pour une paire donnée κ, H, la fonctionnelle $\mathcal{E}$ a des minimiseurs.

Moreover, after some analysis of the functional, one finds (see [GiPh]) that, for given κ, there exists $H(\kappa)$ such that if $H > H(\kappa)$ then $(0, \vec{F})$ is the unique minimizer of $\mathcal{E}_{\kappa,H}$ (up to change of gauge).

Suivant Lu et Pan [LuPa1], nous définissons

$$\underline{H}_{C_3}(\kappa) = \inf\{H > 0 \ : \ (0, \vec{F}) \text{ minimizer of } \mathcal{E}_{\kappa,H}\} \ .$$

Une question centrale dans l'étude des supraconducteurs de Type II est d'obtenir une asymptotique de $\underline{H}_{C_3}(\kappa)$ pour κ grand.

Nous discuterons aussi la justification de cette définition et décrirons comment $\underline{H}_{C_3}(\kappa)$ peut-être déterminé à partir de l'étude d'un problème linéaire.

Un premier résultat [FoHe3] est l'amélioration d'un résultat de [HePa].

Theorème A
Soit Ω un ouvert simplement connexe, borné de $\mathbb{R}^2$ à bord régulier. Soit $k_{\max}$ la courbure maximale de $\partial\Omega$. Alors

$$\underline{H}_{C_3}(\kappa) = \frac{\kappa}{\Theta_0} + \frac{C_1}{\Theta_0^{\frac{3}{2}}} k_{\max} + \mathcal{O}(\kappa^{-\frac{1}{2}}) \,, \qquad (2)$$

où C_1, Θ_0 sont des constantes universelles.

Remarque
Les constantes Θ_0, C_1 sont associées à des problèmes spectraux auxiliaires. Θ_0 est le bas du spectre de l'opérateur modèle associé à $\mathbb{R}^2_+$ (champ magnétique constant égal à 1). Notons que $\Theta_0 \in]0,1[$ et que $C_1 > 0$.

Localisation au bord

Des résultats de Helffer-Morame [HeMo2]

——(qui amélioraient ceux de Del Pino-Fellmer-Sternberg et Lu-Pan) (voir aussi Helffer-Pan [HePa] pour le cas non-linéaire)——

nous savons que, lorsque H est suffisamment proche de $\underline{H}_{C3}(\kappa)$, les minimiseurs (non-triviaux) de la fonctionnelle de Ginzburg-Landau sont exponentiellement localisés, quand $\kappa \to +\infty$, dans un voisinage tubulaire (de taille $\frac{C}{\kappa}$) du bord. Ce phénomène correspond d'ailleurs à toute la zone entre $H_{C2}(\kappa)$ (qui est de l'ordre de κ) et $H_{C3}(\kappa)$ (voir Helffer-Pan, Pan, Almog, Fournais-Helffer).

Ceci est appelé Supraconductivité de Surface.
La preuve est basée des estimations semi-classiques d'Agmon, mais la distance d'Agmon est ici remplacée par la distance au bord.

Des estimations semi-classiques d'Agmon à des résultats de localisation plus faibles mais fort utiles

Notons que les estimations d'Agmon donnent d'abord, pour un $\alpha > 0$,

$$|| \exp \alpha \, \kappa \, d(x, \partial\Omega) \psi ||_2^2 \leq C \, ||\psi||_2^2 \; ,$$

qui impliquent

$$||\psi||_2^2 \leq M \int_{d(x,\partial\Omega) \leq \frac{M}{\kappa}} |\psi(x)|^2 dx \; ,$$

En fait, nous n'avons besoin que d'une forme plus faible de cette localisation qui prend la forme :

$$||\psi||_{L^2(\Omega)} \leq C \, \kappa^{-\frac{1}{4}} \, ||\psi||_{L^4(\Omega)} \; , \qquad (3)$$

et qui est vraie pour κ assez grand.

Localisation aux points de courbure maximale

Le résultat en dimension 2 est que, lorsque H est très proche (i.e. $o(1)$ quand $\kappa \to +\infty$) du troisième champ critique, la composante ψ de la paire minimisante est aussi localisée dans la direction tangentielle dans une région autour des points de courbure maximale.

Ceci conduit en particulier (dans le cas générique) à l'amélioration

$$||\psi||_{L^2(\Omega)} \leq C\kappa^{-\frac{3}{8}}||\psi||_{L^4(\Omega)} \,, \tag{4}$$

Notons que, lorsque $H_{C3}(\kappa) - H$ croît, on observe rapidement un phénomène d'uniformisation le long du bord, du à la non-linéarité, dont l'analyse reste incomplète (voir Lu-Pan, Helffer-Pan, Fournais-Helffer, Almog-Helffer).

Discussion sur la définition du troisième champ critique

Si on y réfléchit, il y a bien plus d'une définition possible pour ce champ critique. Nous avons déjà introduit $\underline{H}_{C_3}$.
Mais on peut aussi introduire

$$\begin{aligned} &\overline{H}_{C_3}(\kappa) \\ &\quad = \inf\{H > 0 \ :\ \forall H' > H\,, (0,\vec{F}) \\ &\qquad\qquad \text{unique minimiseur de } \mathcal{E}_{\kappa,H'}\}\ , \end{aligned}$$

Bien sûr, nous avons

$$\underline{H}_{C_3}(\kappa) \leq \overline{H}_{C_3}(\kappa)\ .$$

Notons que les asymptotiques à deux termes obtenues dans les premiers travaux pour $\underline{H}_{C_3}(\kappa)$ étaient aussi valides pour $\overline{H}_{C_3}(\kappa)$.

L'opérateur de Schrödinger avec champ magnétique

Soit, pour $B \in \mathbb{R}_+$, le laplacien de Neumann magnétique $\mathcal{H}(B)$ qui est l'opérateur autoadjoint (avec condition de Neumann) associé à la forme quadratique

$$W^{1,2}(\Omega) \ni u \mapsto Q_B(u) := \int_\Omega |(-i\nabla - B\vec{F})u|^2 \, dx \,, \tag{5}$$

Nous noterons $\lambda_1(B)$ la plus petite valeur propre de $\mathcal{H}(B)$.

Champs critiques locaux.

Nous définissons ces champs critiques locaux par :

$$\overline{H}^{\mathrm{loc}}_{C_3}(\kappa) = \inf\{H > 0 \ :\ \forall H' > H, \lambda_1(\kappa H') \geq \kappa^2\}\ ,$$

et

$$\underline{H}^{\mathrm{loc}}_{C_3}(\kappa) = \inf\{H > 0 \ :\ \lambda_1(\kappa H) \geq \kappa^2\}\ .$$

Notons que la coincidence de $\overline{H}^{\mathrm{loc}}_{C_3}(\kappa)$ et $\underline{H}^{\mathrm{loc}}_{C_3}(\kappa)$ peut résulter de la preuve de la stricte monotonie de $B \mapsto \lambda_1(B)$.
Ces deux champs correspondent en effet aux deux extrémités du plus petit intervalle fermé contenant

$$\frac{1}{\kappa}\lambda_1^{-1}(\kappa^2)\ .$$

Ces champs locaux interviennent naturellement lorsqu'on veut analyser la stabilité locale de la solution normale $(0, \vec{F})$.

L'étape suivante est de comparer les différents champs ([FoHe3]). C'est l'objet du

Théorème de comparaison C

Soit Ω un ouvert, borné, simplement connexe à bord régulier dans $\mathbb{R}^2$ et soit $\kappa > 0$, alors on a

$$\overline{H}_{C_3}(\kappa) \geq \overline{H}^{\mathrm{loc}}_{C_3}(\kappa)\ ,$$

et

$$\underline{H}_{C_3}(\kappa) \geq \underline{H}^{\mathrm{loc}}_{C_3}(\kappa)\ .$$

FACILE ET GENERAL.

Le prochain résultat est plus délicat !

Theorème D

Soit Ω un ouvert, borné, simplement connexe à bord régulier dans $\mathbb{R}^2$ et soit $\kappa > 0$, alors on a

$$\overline{H}_{C_3}(\kappa) = \overline{H}^{\mathrm{loc}}_{C_3}(\kappa)\ ,$$

et

$$\underline{H}_{C_3}(\kappa) = \underline{H}^{\mathrm{loc}}_{C_3}(\kappa)\ ,$$

Par conséquent, si la monotonie de $\lambda_1(B)$ pour B grand est établie, ou si, par d'autres méthodes, nous démontrons que $\underline{H}_{C_3}^{\mathrm{loc}}(\kappa) = \overline{H}_{C_3}^{\mathrm{loc}}(\kappa)$ alors nous aurons la coincidence des quatre champs !!

Dans le cas de la dimension 2, nous avons montré [FoHe3] cette monotonie dans le cas générique (en même temps qu'un développement asymptotique complet).

Autour de la preuve du Théorème D

Un point crucial réside dans l'argument suivant.

Si, pour un H, il y a une paire minimisante (ψ, A), i.e. vérifiant

$$\mathcal{E}(\psi, \vec{A}) \leq 0 \, .$$

alors

$$0 < \Delta := \kappa^2 ||\psi||_2^2 - Q_{\kappa H \vec{A}}[\psi] = \kappa^2 ||\psi||_4^4 \, ,$$

où $Q_{\kappa H \vec{A}}[\psi]$ est l'énergie cinétique (magnétique) de ψ introduite en (5).

L'égalité de droite est une conséquence de la première équation de Ginzburg-Landau.

Si on combine aveec la propriété faible de localisation de ψ (3), ceci donne

$$||\psi||_2 \leq C\kappa^{-\frac{3}{4}}\Delta^{\frac{1}{4}} \, .$$

Par comparaison des formes quadratiques $Q_{\vec{A}}$ et $Q_{\vec{F}}$ respectivement associées à $\vec{A}$ et $\vec{F}$, nous obtenons, avec $\vec{a} = \vec{A} - \vec{F}$:

$$\Delta \leq \left[\kappa^2 - (1-\rho)\lambda_1(\kappa H)\right] \|\psi\|_2^2 + \rho^{-1}(\kappa H)^2 \int_\Omega |\vec{a}\psi|^2 \, dx \, , \tag{6}$$

pour tout $\rho > 0$.

Notons qu'en utilisant la régularité du système Curl-Div, combiné avec l'injection de Sobolev, nous obtenons

$$\|\vec{a}\|_4 \leq C_1 \|\vec{a}\|_{W^{1,2}} \leq C_2 \| \text{ curl } \vec{a}\|_2 \, .$$

Maintenant Δ contrôle aussi $\| \text{curl } \vec{a}\|_2^2$, de sorte que nous obtenons :

$$(\kappa H)^2 \|\vec{a}\|_4^2 \leq C\,\Delta\ .$$

La combinaison de toutes ces inégalités donne :

$$\begin{aligned} 0 < \Delta & \leq \\ & \leq \left[\kappa^2 - (1-\rho)\lambda_1(\kappa H)\right] \|\psi\|_2^2 + \rho^{-1}(\kappa H)^2 \|\vec{a}\|_4^2 \|\psi\|_4^2 \\ & \leq \left[\kappa^2 - \lambda_1(\kappa H)\right] \|\psi\|_2^2 \\ & \qquad + C\rho\lambda_1(\kappa H)\Delta^{\frac{1}{2}}\kappa^{-\frac{3}{2}} + C\rho^{-1}\Delta^{\frac{3}{2}}\kappa^{-1}\ . \end{aligned}$$

En choisissant $\rho = \sqrt{\Delta}\kappa^{-\frac{3}{4}}$, et en utilisant la majoration grossière $\lambda_1(\kappa H) < C\kappa^2$, nous trouvons

$$0 < \Delta \leq \left[\kappa^2 - \lambda_1(\kappa H)\right] \|\psi\|_2^2 + C\Delta\kappa^{-\frac{1}{4}}\ .$$

Ceci montre finalement que, pour κ assez grand et pour H assez voisin de "tout" troisième champ critique (rappelons qu'ils ont tous la même asymptotique)

$$0 < \Delta \leq \tilde{C}\big[\kappa^2 - \lambda_1(\kappa H)\big]\,\|\psi\|_2^2\,.$$

de sorte qu'en particulier

$$\kappa^2 - \lambda_1(\kappa H) > 0\,.$$

Si on revient à l'hypothèse de départ, on a obtenu le résultat.

Intensité de l'apparition de la supraconductivité

Nous savons que, si (ψ, A) est une paire minimisante, alors

$$||\psi||_\infty \leq 1 \; .$$

Cette estimation générale est loin d'être optimale.

Avec les techniques précédentes, nous obtenons pour

$$H < H_{C_3}(\kappa)$$

avec H suffisamment proche de $H_{C_3}(\kappa)$

$$||\psi||_\infty \leq C_\epsilon (H_{C_3}(\kappa) - H)^{\frac{1}{2}} \kappa^{\frac{3}{2}+\epsilon} \; , \; \forall \epsilon > 0 \; .$$

Cette estimation, qui n'est intéressante que pour $H_{C_3}(\kappa) - H$ petit, n'est probablement pas optimale.

Nouveaux résultats sur le diamagnétisme

Comme on l'a vu, la monotonie de $\lambda_1(B)$ joue un rôle important. Nous avons cherché une démonstration générale de cette propriété (sans autre hypothèse que la régularité du bord). C'est l'objet de [FoHe5].

Theorème E
Si Ω a un bord régulier, alors $B \mapsto \lambda_1(B)$ est croissante pour B grand.

Sur la preuve.

Le cas du disque était connu et la démonstration dans ce cas doit être faite indépendamment.

On suppose donc que Ω n'est PAS un disque.

Dans une jauge donnée, on peut trouver une fonction propre normalisée $\psi_{1,+}(B)$ de $\widehat{\mathcal{H}}(B)$ telle que pour tout $\beta > 0$,

$$
\begin{aligned}
&\lambda'_{1,+}(B) \\
&\quad = \langle \psi_{1,+}(B) ; \big(\widehat{\mathbf{A}} \cdot p_{B\widehat{\mathbf{A}}} + p_{B\widehat{\mathbf{A}}} \cdot \widehat{\mathbf{A}}\big) \psi_{1,+}(B) \rangle \\
&\quad = \langle \psi_{1,+}(B) ; \big\{ \tfrac{\tilde{\mathcal{H}}(B+\beta) - \widehat{\mathcal{H}}(B)}{\beta} - \beta (\widehat{\mathbf{A}})^2 \big\} \psi_{1,+}(B) \rangle \\
&\quad \geq \tfrac{\lambda_1(B+\beta) - \lambda_1(B)}{\beta} - \beta \int_\Omega (\widehat{\mathbf{A}})^2 |\psi_{1,+}(B)|^2 \, dx .
\end{aligned}
$$

Ici $\widehat{\mathbf{A}}$ est juste un potentiel magnétique tel que $\text{curl } \widehat{\mathbf{A}} = 1$.

Le truc est maintenant que dans une jauge convenable, nous pouvons trouver $\epsilon_0 > 0$ tel que

$$\int_\Omega (\widehat{\mathbf{A}})^2 |\psi_{1,+}(B)|^2 \, dx \leq C \int_\Omega \text{dist } (x, \partial\Omega)^2 |\psi_{1,+}(B)|^2 \, dx + \|\widehat{\mathbf{A}}\|_\infty^2 \int_{\Omega \setminus \Omega'(\epsilon_0)} |\psi_{1,+}(B)|^2 \, dx. \tag{7}$$

Utilisant une version des estimations d'Agmon, nous trouvons alors

$$\int_\Omega (\widehat{\mathbf{A}})^2 |\psi_{1,+}(B)|^2 \, dx \leq C B^{-1}. \tag{8}$$

Choisissons $\beta = \eta B$, où $\eta > 0$ est arbitraire. En utilisant une asymptotique à un terme de $\lambda_1(B)$ (avec reste contrôlé), nous trouvons alors, l'existence de $C > 0$ telle que, $\forall \eta > 0$,

$$\liminf_{B \to \infty} \lambda'_{1,+}(B) \geq \Theta_0 - \eta C. \tag{9}$$

Comme η est arbitraire, ceci implique

$$\liminf_{B\to\infty} \lambda'_{1,+}(B) \geq \Theta_0. \tag{10}$$

On peut appliquer un argument similaire pour la dérivée à gauche $\lambda'_{1,-}(B)$, et on obtient

$$\limsup_{B\to\infty} \lambda'_{1,-}(B) \leq \Theta_0. \tag{11}$$

Comme, par la théorie des perturbations,

$$\lambda'_{1,+}(B) \leq \lambda'_{1,-}(B)$$

pour tout B, nous obtenons

$$\lim_{B\to\infty} \lambda'_{1,-}(B) = \Theta_0 = \lim_{B\to\infty} \lambda'_{1,+}(B)\ , \tag{12}$$

d'où la monotonie de $\lambda_1(B)$.

Questions, autres résultats et perspectives

1. Le cas des coins a été analysé par Hadallah, Bonnaillie (dans sa thèse de doctorat) et une analyse numérique de l'effet tunnel (similaire à celui observé dans le cas de l'équation de Schrödinger à puits multiples) a donné de très beaux résultats (Dauge-Bonnaillie). L'analogue de ce que nous avons décrit ici dans le cas régulier sur l'unicité des champs critiques est en cours de rédaction (Bonnaillie-Fournais).

2. La situation dans le cas non simplement connexe présente des difficultés qui ne sont pas complètement éclaircies (travaux de Schatzman, Rubinstein, R. Frank, Alama-Bronsard)

3. La question de ce qui se passe entre $H_{C3}(\kappa)$ et $H_{C2}(\kappa)$ (et autour de $H_{C2}(\kappa)$) n'est pas encore complètement éclaircie. (Pan, Fournais-Helffer, Almog-Helffer, Sandier-Serfaty).

4. La zone entre $H_{C2}(\kappa)$ et $H_{C1}(\kappa)$ est celle qui a été étudiée principalement par Sandier et Serfaty. La question considérée est d'une certaine manière duale puisqu'on s'intéresse à l'apparition des zéros.

5. Il est intéressant (et motivé par les problèmes de supra) de considérer d'autres conditions que Neumann (voir l'analyse de Lu-Pan et plus récemment de Kachmar pour les conditions de De Gennes (Robin)). Des questions similaires apparaissent dans l'étude des jonctions de Josephson.

6. Le cas de la dimension trois est également en cours d'investigation (Pan, Helffer-Morame, Almog, Fournais-Helffer).

References

[Ag] S. Agmon : *Lectures on exponential decay of solutions of second order elliptic equations.* Math. Notes, T. 29, Princeton University Press (1982).

[Al] Y. Almog : Non-linear surface superconductivity in the large κ limit. Rev. in Math. Physics. 16(8), p. 961-976 (2004).

[BaPhTa] P. Bauman, D. Phillips, and Q. Tang : Stable nucleation for the Ginzburg-Landau system with an applied magnetic field. Arch. Rational Mech. Anal. 142, p. 1-43 (1998).

[BeSt] A. Bernoff and P. Sternberg : Onset of superconductivity in decreasing fields for general domains. J. Math. Phys. 39, p. 1272-1284 (1998).

[BoHe] C. Bolley and B. Helffer : An application of semi-classical analysis to the asymptotic study of the supercooling field of a superconducting material. Ann. Inst. H. Poincaré (Section Physique Théorique) 58 (2), p. 169-233 (1993).

[Bon1] V. Bonnaillie : Analyse mathématique de la supraconductivité dans un domaine à coins : méthodes semi-classiques et numériques. Thèse de Doctorat, Université Paris 11 (2003).

[Bon2] V. Bonnaillie : On the fundamental state for a Schrödinger operator with magnetic fields in domains with corners. Asymptotic Anal. 41 (3-4), p. 215-258, (2005).

[BonDa] V. Bonnaillie and M. Dauge : Asymptotics for the fundamental state of the Schrödinger operator with magnetic field near a corner. (2004).

[BonFo] V. Bonnaillie-Noel and S. Fournais : in preparation.

[CFKS] H.L. Cycon, R.G. Froese, W. Kirsch, and

B. Simon : *Schrödinger Operators.* Springer-Verlag, Berlin 1987.

[DaHe] M. Dauge and B. Helffer : Eigenvalues variation I, Neumann problem for Sturm-Liouville operators. J. Differential Equations 104 (2), p. 243-262 (1993).

[DiSj] M. Dimassi and J. Sjöstrand : Spectral Asymptotics in the semi-classical limit. London Mathematical Society. Lecture Note Series 268. Cambridge University Press (1999).

[FoHe1] S. Fournais and B. Helffer : Energy asymptotics for type II superconductors. Preprint 2004. Calc. Var. and PDE. 2006.

[FoHe2] S. Fournais and B. Helffer : Accurate eigenvalue asymptotics for the magnetic Neumann Laplacian. Annales de l'Institut Fourier 2006.

[FoHe3] S. Fournais and B. Helffer : On the third critical field in Ginzburg-Landau theory. Communication in Math. Physics 2006.

[FoHe4] S. Fournais and B. Helffer : On the Ginzburg-Landau critical field in three dimensions. In preparation.

[FoHe5] S. Fournais and B. Helffer : Strong diamagnetism.... Preprint 2006.

[FoHe6] S. Fournais and B. Helffer : Elliptic estimates....

[GiPh] T. Giorgi and D. Phillips : The breakdown of superconductivity due to strong fields for the Ginzburg-Landau model SIAM J. Math. Anal. 30 (1999), no. 2, 341–359 (electronic).

[Hel] B. Helffer : *Introduction to the semiclassical analysis for the Schrödinger operator and applications.* Springer lecture Notes in Math. 1336 (1988).

[HeMo1] B. Helffer and A. Mohamed : Semiclassical analysis for the ground state energy of a Schrödinger operator with magnetic wells. J. Funct. Anal. 138 (1), p. 40-81 (1996).

[HeMo2] B. Helffer and A. Morame : Magnetic bottles in connection with superconductivity. J. Funct. Anal. 185 (2), p. 604-680 (2001).

[HeMo3] B. Helffer and A. Morame : Magnetic bottles for the Neumann problem : curvature effect in the case of dimension 3 (General case). Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. 37, p. 105-170 (2004).

[HePa] B. Helffer and X. Pan : Upper critical field and location of surface nucleation of superconductivity. Ann. Inst. H. Poincaré (Section Analyse non linéaire) 20 (1), p. 145-181 (2003).

[HeSj] B. Helffer and J. Sjöstrand : Multiple wells in the semiclassical limit I. Comm. Partial Differential Equations 9 (4), p. 337-408 (1984).

[LuPa1] K. Lu and X-B. Pan : Estimates of the upper critical field for the Ginzburg-Landau equations of superconductivity. Physica D 127, p. 73-104 (1999).

[LuPa2] K. Lu and X-B. Pan : Eigenvalue problems of Ginzburg-Landau operator in bounded domains. J. Math. Phys. 40 (6), p. 2647-2670, June 1999.

[LuPa3] K. Lu and X-B. Pan : Gauge invariant eigenvalue problems on $\mathbb{R}^2$ and $\mathbb{R}^2_+$. Trans. Amer. Math. Soc. 352 (3), p. 1247-1276 (2000).

[LuPa4] K. Lu and X-B. Pan : Surface nucleation of superconductivity in 3-dimension. J. of Differential Equations 168 (2), p. 386-452 (2000).

[Pan] X-B. Pan : Surface superconductivity in applied magnetic fields above H_{C_3} Comm. Math. Phys. 228, p. 327-370 (2002).

[PiFeSt] M. del Pino, P.L. Felmer, and P. Sternberg : Boundary concentration for eigenvalue problems related to the onset of superconductivity. Comm. Math. Phys. 210, p. 413-446 (2000).

[SaSe] E. Sandier, S. Serfaty : Important series of contributions....

[S-JSaTh] D. Saint-James, G. Sarma, E.J. Thomas : *Type II Superconductivity.* Pergamon, Oxford 1969.

[St] P. Sternberg : On the Normal/Superconducting Phase Transition in the Presence of Large Magnetic Fields. In Connectivity and Superconductivity, J. Berger and J. Rubinstein Editors. Lect. Notes in Physics 63, p. 188-199 (1999).

[TiTi] D. R. Tilley and J. Tilley: *Superfluidity* *and superconductivity.* 3rd edition. Institute of Physics Publishing, Bristol and Philadelphia 1990.

[Ti] M. Tinkham, *Introduction to Superconductivity.* McGraw-Hill Inc., New York, 1975.