Analyse semi-classique et application à la supraconductivité

Bernard Helffer
Mathématiques -
Université Paris Sud- UMR CNRS 8628

19 Janvier 2005

0. Résumé

On se propose dans cet exposé de montrer comment un problème venant de la physique (apparition de la supraconductivité), modélisé par l'étude des minima d'une fonctionnelle, débouche sur des questions de théorie spectrale relevant de l'analyse semi-classique.

1. Fonctionnelle

Un modèle généralement admis (voir les ouvrages de base de De Gennes, Saint-James-Sarma-Thomas, Tinkham , Tilley et Tilley) pour la description des supraconducteurs est donné mathématiquement par la fonctionnelle de Ginzburg-Landau.

Pour un certain choix de paramètres et unités, cette fonctionnelle s'écrit comme

$$\begin{aligned}\mathcal{E}[\psi, \vec{A}] \quad &= \int_\Omega \Big\{ |\nabla_{\kappa H \vec{A}} \psi|^2 + \kappa^2 H^2 |r\vec{o}t \vec{A} - 1|^2 \\ &\qquad -\kappa^2 |\psi|^2 + \tfrac{\kappa^2}{2} |\psi|^4 \Big\}\, dx,\end{aligned} \tag{1}$$

avec
$(\psi, \vec{A}) \in W^{1,2}(\Omega; \mathbb{C}) \times W^{1,2}(\Omega; \mathbb{R}^2)$
(Les physiciens appellent parfois ψ le paramètre d'ordre)

$$\nabla_{\vec{A}} = (\nabla - i\vec{A}) = (\partial_{x_1} - iA_1\ ,\ \partial_{x_2} - iA_2),$$

$$r\vec{o}t\vec{A} = \partial A_2 / \partial x_1 - \partial A_1 / \partial x_2\ .$$

Les paramètres du problème

Après plusieurs changements d'échelle, de paramètre d'ordre..., on garde trois paramètres indépendants pour le problème.

κ est une caractéristique du milieu.

H est l'intensité du champ magnétique extèrieur, qu'on va supposer constant. On peut supposer qu'il est associé au potentiel magnétique $A_e^H = \frac{H}{2}(-x_2, x_1)$

Ω est un ouvert correspondant au matériel supraconducteur. Même si le problème est en dimension 3, nous regarderons pour faciliter l'exposition, le cas de la dimension 2.

Les résultats pourront dépendre fortement de ces trois paramètres !!

2. Sur l'origine du modèle.

Ce modèle a été introduit par Landau et Ginzburg en 1951 sur la base d'une intuition physique remarquable (modèle phénoménologique).

Ce n'est qu'ensuite (Gorkov 1959) qu'on a dérivé cette fonctionnelle comme la résultante macroscopique d'une théorie microscopique (idée de la mécanique statistique).

Au lieu de comprendre le mouvement de chaque électron, on regarde plutôt la densité de présence des électrons (en fait de paires d'électrons) qui est représenté ci-dessus par $|\psi|^2$.

Le champ H $r\vec{o}t\vec{A}$ (identifié, car nous sommes en dimension 2, à une fonction) est le champ magnétique induit. Sa "présence" (ou non) dans Ω a une grande importance physique (effet Meissner).

3. Propriétés du minimiseur

Les propriétés physiques du modèle sont retrouvées en étudiant les propriétés des minimiseurs de la fonctionnelle.

Parenthèse mathématique élémentaire en dimension finie

Dans le cas de la dimension finie, où l'on considère une fonction C^∞ définie disons sur $\mathbb{R}^k$ et qui tend vers l'infini à l'infini, on peut d'abord montrer que l'infimum est atteint (existence du minimiseur) et la recherche des minimiseurs commence par la recherche des points critiques de f, c'est à dire tels que $\nabla f = 0$. Ces points critiques étant trouvés, on se demande si le point critique correspond à un minimum. La première idée étant alors de considérer le Hessien (la matrice des dérivées secondes de f). Un bon critère est alors de montrer que ce Hessien est strictement positif.

En dimension infinie

Dans notre cas, on suit la même démarche mais notre fonctionnelle est défini sur un espace de dimension infinie (plus précisément un espace de Hilbert) (comme en calcul des variations).

D'abord on montre que la fonctionnelle admet des minimiseurs (il s'agit de faire converger une suite minimisante vers un minimiseur).

Dans un deuxième temps, on écrit la condition nécessaire déduite de la propriété que (ψ, A) est un minimiseur.

On obtient ainsi les équations de Ginzburg-Landau. Les points critiques de la fonctionnelle de Ginzburg-Landau sont les solutions des équations de Ginzburg-Landau.

On cherche donc les minimiseurs parmi ces points critiques.

Solutions particulières

Solutions normales

On remarque que $(\psi, A) = (0, A_e^1)$ est un point critique. Cette paire est appelée la solution normale.

Son énergie est nulle.

Si, pour un Ω donné et un κ donné, on démontre que, pour une certaine intensité du champ magnétique extérieur, cette paire est un minimum global de la fonctionnelle, on dira que notre matériau est non supraconducteur avec cette intensité.

On sera parfois moins gourmand et on se contentera de se demander si $(0, A_e^1)$ est un minimum local.

Solution purement supra

Quand $H = 0$, $(\psi, A) = (1, 0)$ est solution.
Son énergie est $-\kappa^2|\Omega|$ et donc plus petite que celle de la solution normale.

4. Champs critiques.

Nous allons considérer uniquement les matériaux de type II, c'est à dire pour lesquels κ est grand.

On peut montrer que si le champ magnétique extérieur est assez grand la solution normale est un minimum global. Ceci est vrai au dessus d'un certain champ critique que l'on appelle $H_{C_3}(\kappa)$.

En diminuant l'intensité du champ magnétique extérieur, on observe que la solution cesse d'être nulle en commençant par le bord. Cette propriété subsiste jusqu'à un nouveau champ critique $H_{C_2}(\kappa)$, en dessous duquel la partie "fonction" de la solution devient significativement non nulle à l'intérieur.

Reprenons le problème à partir de l'intensité 0. On a remarqué que la solution $(\psi = 1, 0)$ est un minimum global. Quand on augmente l'intensité, la solution ψ reste non nulle (on dit qu'on est en régime complètement supraconducteur) jusqu'à un certain champ critique que l'on note $H_{C_1}(\kappa)$ qui correspond à l'apparition des premiers zéros pour ψ. La solution n'est plus complètement conductrice.

5. Les questions mathématiques qui en découlent

Bien sûr, ces définitions ont un caractère vague et une partie du travail mathématique est

- de trouver des définitions plus précises (si c'est possible),
- de trouver des asymptotiques des champs critiques,
- de comprendre ce qui se passe près des champs critiques.

Entre $H_{C_1}(\kappa)$ et $H_{C_2}(\kappa)$, il faut mentionner les travaux d'E. Sandier et S. Serfaty qui décrivent le mécanisme d'apparition des vortex.

A la suite de Sternberg et coauteurs, Lu-Pan, je me suis plus intéressé, en collaboration avec A. Morame, S. Fournais (mentionnons aussi V. Bonnaillie) à ce qui se passe près de $H_{C_3(\kappa)}$, i.e. l'apparition de la supraconductivité.

6. Du Hessien de la fonctionnelle à l'opérateur de Schrödinger avec champ magnétique.

Considérons une variation autour de $(0, \vec{A}_e)$. On a

$$\begin{aligned}&\mathcal{E}(t\psi, \vec{A}_e) - \mathcal{E}(0, \vec{A}_e)\\&\quad = t^2 \left(\int_\Omega |\nabla_{\kappa H A_e} \psi|^2 dx - \kappa^2 \int_\Omega |\psi|^2 dx\right) + \mathcal{O}(t^3)\ .\end{aligned}$$

On voit ainsi qu'une condition nécessaire pour que $(0, \vec{A}_e)$ soit un minimum local est que :

$$\int_\Omega |\nabla_{\kappa H A_e} \psi|^2 dx - \kappa^2 \int_\Omega |\psi|^2 dx \geq 0\ ,\ \forall \psi \in H^1(\Omega; \mathbb{C})\ .$$

En utilisant une caractérisation de la plus petite valeur propre d'un opérateur autoadjoint semi-borné, on trouve que cette condition s'écrit :

$$\frac{1}{\kappa^2 H^2}\lambda^1_{\kappa H \vec{A}_e} \geq \frac{1}{H^2}$$

où $\lambda^1_{\vec{A}}$ est la plus petite valeur propre de la réalisation de Neumann d'un opérateur de Schrödinger avec champ magnétique, qu'on va définir ci-dessous (avec $\vec{A} = \kappa H \vec{A}_e$).

La situation critique apparaîtra pour

$$\frac{1}{\kappa^2 H^2}\lambda^1_{\kappa H \vec{A}_e} = \frac{1}{H^2}\ ,$$

qui est une équation implicite pour H.

L'analyse du problème suppose une bonne connaissance du comportement asymptotique de cette valeur propre.

7. Schrödinger avec champ magnétique

L'étude du Hessien de la fonctionnelle nous conduit donc à l'étude semi-classique de l'opérateur de Schrödinger avec champ magnétique.

Par semi-classique, on entend qu'il y a un petit paramètre qui joue le rôle d'une constante de Planck effective.

Ici
$$h = \frac{1}{\kappa H}\ .$$
Dans le cas où κ est grand, on peut voir que le H critique est de l'ordre de κ et que par conséquent h est effectivement petit.

Dans un ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, nous considérons l'opérateur avec champ magnétique :

$$\Delta_{h,A,V} = \sum_j (hD_{x_j} - A_j)^2 + V$$

où h est un petit paramètre (semi-classique),
$D_{x_j} = \frac{1}{i}\partial_{x_j}$
ω_A, appelé potentiel magnétique (qu'on peut identifier avec un vecteur $\vec{A}$), est une 1-forme

$$\omega_A = \sum_j A_j(x)dx_j \ , \ \vec{A} = (A_1, A_2)$$

et V est un potentiel C^∞.

Condition au bord :
Le problème qui apparaît ici correspond à la condition de Neumann : $(\vec{n} \cdot (h\nabla - i\vec{A})u)_{/\partial\Omega} = 0$.

Objet de base : le **champ magnétique**

$$\sigma_B = d\omega_A$$

Pour $n = 2$, identification avec la fonction :
$\sigma_B = B\ dx_1 \wedge dx_2$.

Pour l'analyse mathématique du problème, il est important de réaliser que

$$B_{jk} = \frac{1}{ih}[hD_{x_j} - A_j, hD_{x_k} - A_k]\ .$$

Un autre point important est l'invariance de Jauge :

$$(u, A) \mapsto (u \exp -i\frac{\phi}{h}, A + d\phi)\ ,$$

On notera que σ_B est inchangée. Quand Ω n'a pas de trous, les résultats ne dépendent pas du choix de la jauge.

8. Questions mathématiques sur Schrödinger

Le problème de la supraconductivité nous a ramené aux problèmes mathématiques suivants :

1. Dependance de la plus petite valeur propre par rapport à A (ou par rapport à σ_B), par rapport à h, par rapport à la géométrie de Ω (trous, points de courbure maximale, coins).

2. Localisation de la fonction propre (régime semi-classique)
3. Multiplicité de la première valeur propre

   (Lorsque $A = 0$, nous savons que cette valeur propre est simple)

Ces problèmes apparraissent dans d'autres questions de mécanique quantique !

9. Estimations de décroissance

Un problème important est de mesurer la décroissance des fonctions propres.

-Initialement Agmon, Lithner

- Dans le régime semi-classique
Helffer-Sjöstrand, Simon, Helffer-Mohamed,..., Helffer-Morame

Quand le bord est en cause et que le champ magnétique est constant, il sera utile de montrer des estimations du type :

$$|u_h(x)| \sim\leq C \exp -d(x, \partial\Omega)/\sqrt{Ch})\ .$$

On voudra aussi comprendre ce qui se passe dans le bord et mesurer la décroissance à l'intérieur du bord.

10. Une estimation clef !!

On suppose que le champ magnétique est strictement positif sur $\overline{\Omega}$.
Pour tout $u \in C_0^\infty(\Omega)$, on a

$$h \int B(x)|u(x)|^2 dx \leq \int_\Omega \sum_j |(h\partial_{x_j} - iA_j)u(x)|^2 dx$$

Preuve

$$-ihB(x) = (h\partial_{x_1} - iA_1)(h\partial_{x_2} - iA_2) - (h\partial_{x_2} - iA_2)(h\partial_{x_1} - iA_1)$$

On en déduit

$$\begin{aligned} -ihB(x)|u(x)|^2 \quad &= (h\partial_{x_1} - iA_1)(h\partial_{x_2} - iA_2)u \cdot \bar{u} \\ &\quad -(h\partial_{x_2} - iA_2)(h\partial_{x_1} - iA_1)u \cdot \bar{u} \ . \end{aligned}$$

On intègre sur Ω, on fait une intégration par parties puis on utilise l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour obtenir le résultat.

Conséquence
La plus petite valeur propre de la réalisation de Dirichlet est plus grande ou égale à $h \inf B(x)$.

Mais .... Attention
il s'agit de la condition au bord $u = 0$ sur le bord

et nous sommes intéressés par le problème plus délicat de Neumann.

Il faut comprendre ce qui se passe au bord !!

11. Modèles de références

Pour commencer à comprendre, on doit regarder des modèles simplifiés.

Le problème dans $\mathbb{R}^2$:
Etudier le spectre de l'opérateur

$$-h^2\partial_{x_1}^2 - (h\partial_{x_2} - ix_1)^2 \ .$$

Le spectre est constitué de valeurs propres de multiplicité infinie, appelées "niveaux de Landau" : $\lambda_n = (2n-1)h$, $n \geq 1$.

Le problème dans $\mathbb{R}^2_+$:
Etudier le spectre de l'opérateur

$$-h^2\partial_{x_1}^2 - (h\partial_{x_2} - ix_1)^2$$

dans $\mathbb{R}^2_+$ avec la condition aux limites

$$\partial_{x_1} u(0, x_2) = 0 \ .$$

Le spectre est $[\Theta_0 h, +\infty[$.

Remarque sur la géométrie du bord

Pour des études plus fines, il faudra étudier

le cas du disque
pour tenir compte de la courbure,

ou ce qui se passe dans des secteurs
pour comprendre par exemple le rôle des coins.

12. Exemples de problèmes spectraux et conséquences

Une partie de l'analyse est basée sur les propriétés spectrales de modèles.

- $D_t^2 + t^2$ on $\mathbb{R}$,
  qui permet l'analyse du modèle dans $\mathbb{R}^2$;
- $H^{Neu}(\rho) := D_t^2 + (t-\rho)^2$, sur $\mathbb{R}^+$,
  avec la condition de Neumann en 0,
  qui permet l'analyse du modèle dans $\mathbb{R}^2_+$;
- $D_s^2 + (D_t - s)^2$ dans un secteur infini d'angle α (Neumann).

Les questions sont :
Quel est le bas du spectre ?
Quel est l'infimum sur ρ du bas du spectre ?

Par exemple $\Theta_0 = \inf_\rho \inf \sigma(H^{Neu}(\rho))$.

Quelle est la dépendance du bas du spectre par rapport à α.

Applications :

Par exemple, le fait que $\Theta_0 < 1$ aura comme conséquence que, lorsque B est constant la première fonction propre va se localiser près du bord.

Traduction en physique:

La supraconductivité apparaît au bord.

L'étude du cas du disque, montre que le niveau est plus bas quand la courbure est plus grande : localisation aux points de courbure maximale $(n = 2)$.

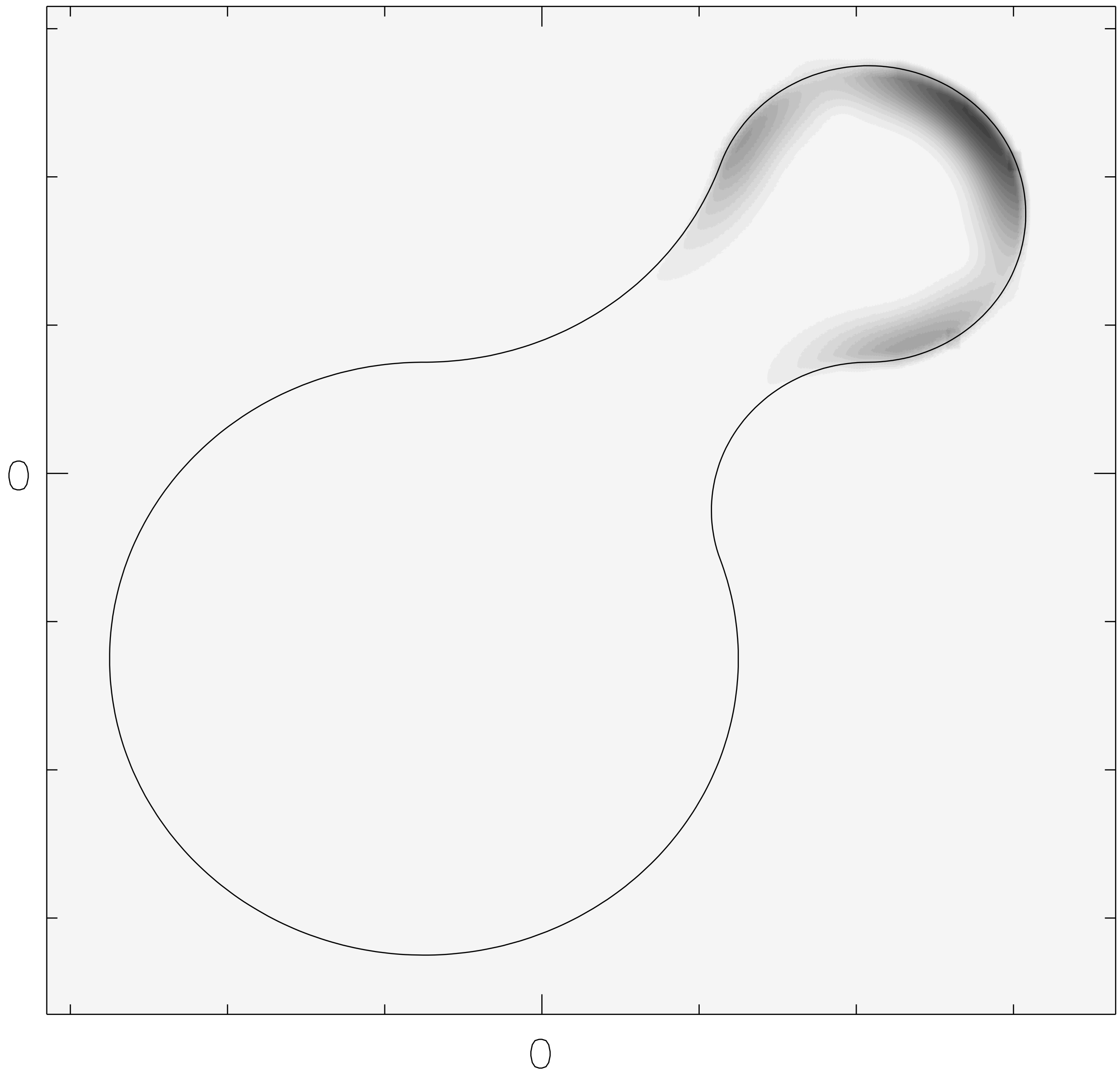
Traduction en physique:

La supraconductivité apparaît d'abord près des points de courbure maximale.

La localisation dans les coins (Jadallah, Bonnaillie), vient du fait (partiellement démontré) que l'infimum du spectre pour le troisième modèle est inférieur à Θ_0.

Traduction en physique:

La supraconductivité apparaît d'abord dans les coins.


0
0

Bibliographie

- S. Agmon : Lectures on exponential decay of solutions of second order elliptic equations. Princeton University Press (1982).
- J. Avron, I. Herbst, B. Simon: Schrödinger operators with magnetic fields I (and II, III). Duke Math. J. (1978).
- V. Bonnaillie: On the fundamental state for a Schrödinger operator with magnetic fields in a domain with corners. Note aux CRAS (2003)+ Asymptotic analysis.
- Del Pino-Felmer-Sternberg: Boundary concentration for eigenvalue problems related to the onset of superconductivity. CMP (2000).
- S. Fournais, B. Helffer: Energy asymptotics for type II superconductors. Preprint Orsay (2004).
- S. Fournais, B. Helffer: Accurate estimates for magnetic bottles in connection with superconductivity.
- B. Helffer, A. Mohamed: Semiclassical analysis for the ground state energy of a Schrödinger operator with magnetic wells, JFA (1996).
- B. Helffer, A. Morame: Magnetic bottles in connection with superconductivity. JFA (2001).

- B. Helffer, A. Morame: Magnetic bottles for the Neumann problem: curvature effect in the case of dimension 3 (General case). Annales ENS (2004).
- B. Helffer, J. Sjöstrand: Multiple wells in semi-classical analysis 1-6, (1984-1986)
- B. Helffer, J. Sjöstrand: Effet tunnel pour l'équation de Schrödinger avec champ magnétique, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (1987).
- K. Lu, X. Pan: Estimates of the upper critical field for the Ginzburg-Landau equations of superconductivity. (5 papers around 1999)
- Travaux d'E. Sandier et de S. Serfaty.
- B. Simon: Semi-classical analysis of low lying eigenvalues I,II,III,IV (1983-1985)