La clef des Champs
(d'après Fournais-Helffer)

Bernard Helffer
Mathématiques -
Université Paris Sud- UMR CNRS 8628

Septembre 2005

0. Résumé

On se propose dans cet exposé de montrer comment un problème venant de la physique (apparition de la supraconductivité), modélisé par l'étude des minima d'une fonctionnelle, débouche sur des questions de théorie spectrale relevant de l'analyse semi-classique. On définira différents champs critiques et on discutera leur pertinence. Mes résultats récents ont été obtenus en collaboration avec S. Fournais.

1. Fonctionnelle

Un modèle généralement admis (voir les ouvrages de base de De Gennes, Saint-James-Sarma-Thomas, Tinkham , Tilley et Tilley) pour la description des supraconducteurs est donné mathématiquement par la fonctionnelle de Ginzburg-Landau.

Pour un certain choix de paramètres et unités, cette fonctionnelle s'écrit comme

$$\begin{aligned}\mathcal{E}[\psi,\vec{A}] &= \int_\Omega \Big\{ |\nabla_{\kappa H \vec{A}}\psi|^2 + \kappa^2 H^2 |\vec{rot}\,\vec{A} - 1|^2 \\ &\qquad -\kappa^2|\psi|^2 + \tfrac{\kappa^2}{2}|\psi|^4 \Big\}\, dx,\end{aligned} \tag{1}$$

avec
$(\psi,\vec{A}) \in W^{1,2}(\Omega;\mathbb{C}) \times W^{1,2}(\Omega;\mathbb{R}^2)$
(Les physiciens appellent parfois ψ le paramètre d'ordre)

Ici, on a noté
$\nabla_{\vec{A}} = (\nabla - i\vec{A}) = (\partial_{x_1} - iA_1\ ,\ \partial_{x_2} - iA_2)$,

$$\vec{rot}\,\vec{A} = \partial A_2/\partial x_1 - \partial A_1/\partial x_2\ .$$

On notera aussi parfois

$p_{\vec{A}} = -i\nabla_{\vec{A}}$.

Les paramètres du problème

Après plusieurs changements d'échelle, de paramètre d'ordre..., on garde trois paramètres indépendants pour le problème.

κ est une caractéristique du milieu.

H est l'intensité du champ magnétique extérieur, qu'on va supposer constant. On peut supposer qu'il est associé au potentiel magnétique

$$A_e^H = \frac{H}{2}(-x_2, x_1)$$

Ω est un ouvert correspondant au matériel supraconducteur. Même si le problème est en dimension 3, nous regarderons pour faciliter l'exposition, le cas de la dimension 2.

Les résultats pourront dépendre fortement de ces trois paramètres !!

Remarques

- Il ne faut pas croire que le Ω considéré correspond nécessairement au materiau supra. Il y a eu des changements d'échelle.

- La température est aussi cachée dans cette renormalisation mais on est en dessous de la température critique

  (voir le signe devant $|\psi|^2$ dans la fonctionnelle).

2. Sur l'origine du modèle.

Ce modèle a été introduit par Landau et Ginzburg en 1951 sur la base d'une intuition physique remarquable (modèle phénoménologique).

Ce n'est qu'ensuite (Gorkov 1959) qu'on a dérivé cette fonctionnelle comme la résultante macroscopique d'une théorie microscopique (idée de la mécanique statistique). Mathématiquement, cette justification n'est pas achevée.

Au lieu de comprendre le mouvement de chaque électron, on regarde plutôt la densité de présence des électrons (en fait de paires d'électrons) qui est représenté ci-dessus par $|\psi|^2$.

Notons que ψ n'est pas normalisé pour la norme L^2

Le champ $H \quad \vec{rot}\,\vec{A}$ (identifié, car nous sommes en dimension 2, à une fonction) est le champ magnétique induit. Sa “présence” (ou non) dans Ω a une grande importance physique (effet Meissner). Le champ magnétique induit est “évacué” là où le paramètre d’ordre est non nul.

3. Propriétés du minimiseur

Les propriétés physiques du modèle sont retrouvées en étudiant les propriétés des minimiseurs de la fonctionnelle.

Compte-tenu de l'invariance de jauge du problème, il est parfois utile de "fixer" la jauge en ajoutant dans le choix de l'espace variationnel :

$$\text{div}\, \vec{A} = 0 \quad \text{dans } \Omega\,, \; \vec{A} \cdot \nu = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega\,.$$

Si on écrit la condition nécessaire déduite de la propriété que (ψ, A) est un minimiseur on obtient les équations de Ginzburg-Landau.

Equations de Ginzburg-Landau

Les points critiques de la fonctionnelle de Ginzburg-Landau sont les solutions des équations de Ginzburg-Landau.

$$\left.\begin{array}{c} p^2_{\kappa H\vec{A}}\psi = \kappa^2(1-|\psi|^2)\psi \\ \vec{rot}^2\vec{A} = -\frac{i}{2\kappa H}(\overline{\psi}\nabla\psi - \psi\nabla\overline{\psi}) - |\psi|^2\vec{A} \end{array}\right\} \quad \text{ds} \quad \Omega\,; \qquad \text{(2a)}$$

$$\left.\begin{array}{c} (p_{\kappa H\vec{A}}\psi)\cdot\nu = 0 \\ \vec{rot}\vec{A} - 1 = 0 \end{array}\right\} \quad \text{sur} \quad \partial\Omega\,. \qquad \text{(2b)}$$

Ici $\vec{rot}(A_1, A_2) = \partial_{x_1}A_2 - \partial_{x_2}A_1$,

$$\vec{rot}^2\vec{A} = (\partial_{x_2}(\vec{rot}\vec{A}), -\partial_{x_1}(\vec{rot}\vec{A}))\,.$$

On cherchera donc les minimiseurs parmi ces points critiques.

Solutions particulières

Solution normale

On remarque que $(\psi, A) = (0, F)$ est un point critique de la fonctionnelle. Ici $\vec{F}$ est le champ de vecteur satisfaisant

$$\left.\begin{array}{l} \text{div } \vec{F} = 0 \\ \vec{rot}\,\vec{F} = 1 \end{array}\right\} \quad \text{ds } \Omega\ ,\ \vec{F}\cdot\nu = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega\ .$$

On notera que quand Ω est simplement connexe,

$$\vec{F} = (-\frac{x_2}{2}, \frac{x_1}{2}) + \nabla\phi\ .$$

Cette paire est appelée la solution normale ou état normal.

Son énergie est nulle (par choix de normalisation).

La solution normale est-elle un minimiseur?

Si, pour un Ω donné et un κ donné, on démontre que, pour une certaine intensité du champ magnétique extérieur, cette paire est un minimum global de la fonctionnelle, on dira que notre matériau est non supraconducteur avec cette intensité.

On sera parfois moins gourmand et on se contentera de se demander si $(0, F)$ est un minimum local.

Peut-on décrire plus précisément pour κ, Ω fixés l'ensemble des H tel que $(0, F)$ est un minimum local (resp. global).

Quelle est la structure de cet ensemble ? Est-ce un intervalle ?

Solution purement supraconductrice

Quand $H = 0$, $(\psi, A) = (1, 0)$ est solution.
Son énergie est $-\kappa^2|\Omega|$ et donc plus petite que celle de la solution normale.

On appellera encore état supraconducteur un minimiseur (ψ, A) tel que ψ ne s'annule pas dans $\overline{\Omega}$.

On s'attend à ce que pour H assez petit le minimiseur global soit supraconducteur.

Peut-on décrire plus précisément pour κ, Ω fixés l'ensemble des H tel que le minimiseur global soit supraconducteur ?

Quelle est la structure de cet ensemble ? Est-ce un intervalle ?

Etats mixtes

On sait aussi que pour les matériaux de type II les minimiseurs locaux ou globaux peuvent correspondre à des états qui ne sont ni normaux ni supraconducteurs et qu'on appellera des états mixtes.

4. Champs critiques : version vague.

Nous allons considérer uniquement les matériaux de type II, c'est à dire pour lesquels κ est grand.

On peut démontrer (Giorgi-Phillips) que si le champ magnétique extérieur est assez grand la solution normale est un minimum global. Ceci est vrai au dessus d'un certain champ critique que l'on appelle $H_{C_3}(\kappa)$.

En diminuant l'intensité du champ magnétique extérieur, on observe que la solution cesse d'être nulle en commençant par le bord. Cette propriété subsiste jusqu'à un nouveau champ critique $H_{C_2}(\kappa)$, en dessous duquel la partie "fonction" de la solution devient significativement non nulle à l'intérieur.

Reprenons le problème à partir de l'intensité 0. On a remarqué que la solution $(\psi = 1, 0)$ est un minimum global. Quand on augmente l'intensité, la solution ψ reste non nulle (on dit qu'on est en régime complètement supraconducteur) jusqu'à un certain champ critique que l'on note $H_{C_1}(\kappa)$ qui correspond à l'apparition des premiers zéros pour ψ. La solution n'est plus complètement conductrice.

Ceci conduit à l'étude de l'apparition des Vortex, étude menée par exemple par E. Sandier et S. Serfaty.

Assez vaguement, nous avons été conduits à introduire trois champs critiques (ou plutôt trois zones critiques)

$$0 < H_{C_1}(\kappa) < H_{C_2}(\kappa) < H_{C_3}(\kappa) < +\infty$$

5. Les questions mathématiques qui en découlent

Bien sûr, ces définitions ont un caractère vague et une partie du travail mathématique est

- de trouver des définitions plus précises (si c'est possible),
- de trouver des asymptotiques des champs critiques,
- de comprendre ce qui se passe près des champs critiques.

A la suite de Sternberg et coauteurs, Lu-Pan, je me suis particulièrement intéressé, en collaboration avec A. Morame, S. Fournais (mentionnons aussi V. Bonnaillie pour les problèmes à coin) à ce qui se passe près de $H_{C_3(\kappa)}$, i.e. l'apparition de la supraconductivité.

6. Du Hessien de la fonctionnelle à l'opérateur de Schrödinger avec champ magnétique.

Considérons une variation autour de $(0,\vec{F})$. On a

$$\begin{aligned}\mathcal{E}(t\psi,\vec{F}) &- \mathcal{E}(0,\vec{F}) \\ &= t^2\left(\int_\Omega |\nabla_{\kappa HF}\psi|^2 dx - \kappa^2\int_\Omega |\psi|^2 dx\right) + \mathcal{O}(t^3)\ .\end{aligned} \tag{3}$$

On voit ainsi qu'une condition nécessaire pour que $(0,F)$ soit un minimum local est que :

$$\int_\Omega |\nabla_{\kappa HF}\psi|^2 dx - \kappa^2\int_\Omega |\psi|^2 dx \geq 0\ ,\ \forall\psi\in H^1(\Omega;\mathbb{C})\ .$$

En utilisant une caractérisation de la plus petite valeur propre d'un opérateur autoadjoint semi-borné, on trouve que cette condition s'écrit :

$$\frac{1}{\kappa^2 H^2}\lambda_1(\kappa H\vec{F}) \geq \frac{1}{H^2}$$

où $\lambda_1(\vec{A})$ est la plus petite valeur propre de la réalisation de Neumann d'un opérateur de Schrödinger avec potentiel magnétique $\vec{A}$, (avec $\vec{A} = \kappa H\vec{F}$).

La situation critique apparaîtra pour

$$\frac{1}{\kappa^2 H^2}\lambda_1(\kappa H\vec{F}) = \frac{1}{H^2} \, ,$$

qui est une équation implicite pour H.

L'analyse du problème suppose une bonne connaissance du comportement asymptotique de cette valeur propre.

7. Schrödinger avec champ magnétique

L'étude du Hessien de la fonctionnelle nous conduit donc à l'étude semi-classique de l'opérateur de Schrödinger avec champ magnétique.

Par semi-classique, on entend qu'il y a un petit paramètre qui joue le rôle d'une constante de Planck effective.

Ici

$$h = \frac{1}{\kappa H} \, .$$

Dans le cas où κ est grand, on peut voir que le H critique est de l'ordre de κ et que par conséquent h est effectivement petit.

L'opérateur linéarisé.

Dans un ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, nous considérons l'opérateur avec champ magnétique :

$$\Delta_{h,A,V} = \sum_j (hD_{x_j} - A_j)^2$$

où h est un petit paramètre (semi-classique),
$D_{x_j} = \frac{1}{i}\partial_{x_j}$
ω_A, appelé potentiel magnétique (qu'on peut identifier avec un vecteur $\vec{A}$), est une 1-forme

$$\omega_A = \sum_j A_j(x)dx_j \ , \ \vec{A} = (A_1, A_2).$$

Condition au bord :
Le problème qui apparaît ici correspond à la condition de Neumann : $(\vec{n} \cdot (h\nabla - i\vec{A})u)_{/\partial\Omega} = 0$.

On notera que si Dirichlet n'apparaît dans ces questions que comme cas limite, d'autres conditions naturelles apparaissent comme les conditions de De Gennes (appelées conditions de Robin en EDP) :

$$(\vec{n} \cdot (h\nabla - i\vec{A})u)_{/\partial\Omega} = \gamma u_{/\partial\Omega} \,.$$

C'est un des thèmes de la thèse d'A. Kachmar.

8. Questions mathématiques sur Schrödinger

Le problème de la supraconductivité nous a ramené aux problèmes mathématiques suivants :

1. Dépendance de la plus petite valeur propre par rapport à A (ou par rapport à σ_B), par rapport à h, par rapport à la géométrie de Ω (trous, points de courbure maximale, coins).

2. Localisation de la fonction propre (régime semi-classique)

3. Multiplicité de la première valeur propre

   (Lorsque $A = 0$, nous savons que cette valeur propre est simple)

4. Monotonie dans le cas d'un champ magnétique constant par rapport à son intensité.

Bien sûr, ces problèmes apparaissent dans d'autres questions de mécanique quantique !

Le point le plus intéressant est qu'on s'intéresse à la condition de Neumann.

Les propriétés mises en évidence et ce qui est appelé la supraconductivité de surface en dépendent.

A la recherche des champs perdus

Une première définition.

Suivant Lu and Pan [LuPa1], nous définissons

$$H_{C_3}(\kappa) = \inf\{H > 0 \ : \ (0, \vec{F}) \text{ minimiseur de } \mathcal{E}_{\kappa,H}\} \ .$$

La question centrale est d'établir le comportement asymptotique de $H_{C_3}(\kappa)$ pour κ large.

Nous allons discuter l'intérêt de cette définition et décrire comment $H_{C_3}(\kappa)$ peut se calculer à partir de l'étude d'un problème linéaire.

Même si ce n'est pas démontré, cela suggère fortement que la transition entre état normal et état mixte de surface se produit par bifurcation.

Mathématiquement, seuls les cas de la plaque (Bolley, Bolley-Helffer) et du disque (Bauman-Phillips-Tang, Sauvageot) ont été analysés.

Le premier résultat obtenu avec S. Fournais est une amélioration de [HePa].

Theorème A

Soit Ω un domaine borné régulier sans trou de $\mathbb{R}^2$. Soit $k_{\max}$ la courbure maximale de $\partial\Omega$. Alors

$$H_{C_3}(\kappa) = \frac{\kappa}{\Theta_0} + \frac{C_1}{\Theta_0^{\frac{3}{2}}} k_{\max} + \mathcal{O}(\kappa^{-\frac{1}{2}}) \,, \tag{4}$$

où C_1, Θ_0 sont des constantes universelles ($\Theta_0 \in]0,1[$).•

Lorsque Ω est un disque nous n'avons que :

$$H_{C_3}(\kappa) = \frac{\kappa}{\Theta_0} + \frac{C_1}{\Theta_0^{\frac{3}{2}}} k_{\max} + \mathcal{O}(\kappa^{-1}) \,. \tag{5}$$

Notre second résultat (avec S.F.) est une estimation précise sur la région effectivement supraconductrice lorsque H est proche, mais dessous H_{C_3}.

Coordonnées dans un voisinage tubulaire .
Soit $\gamma : \mathbb{R}/|\partial\Omega| \rightarrow \mathbb{R}^2$ une paramétrisation de $\partial\Omega$ avec $|\gamma'(s)| = 1$. Pour $s \in \mathbb{R}/|\partial\Omega|$ $k(s)$ est la courbure de$\partial\Omega$ au point $\gamma(s)$. De plus,

$$k_{\max} := \max_{s\in\mathbb{R}/|\partial\Omega|} k(s)\ ,\ K(s) := k_{\max} - k(s)\ . \quad (6)$$

La fonction $t = t(x)$ mesure la distance au bord

$$t(x) := \text{ dist } (x, \partial\Omega)\ .$$

Soit $\nu(s)$ la normale intérieure $\partial\Omega$ au point $\gamma(s)$ et soit

$$\Phi(s,t) = \gamma(s) + t\nu(s)\ .$$

On a ainsi un nouveau système de coordonnées défini dans un voisinage tubulaire du bord.

Localisation au bord

Des travaux de Helffer-Morame [HeMo2] (améliorant ceux de Del Pino-Fellmer-Sternberg et Lu-Pan) (voir aussi Helffer-Pan [HePa] pour le cas non-linéaire), nous savons que, lorsque H est suffisamment proche de $H_{C3}(\kappa)$, les minimiseurs de la fonctionnelle GL sont exponentiellement localisées près du bord. C'est de qui est appelé la supraconductivité de surface.

Il est intéressant pour la suite de noter la conséquence suivante de cette localisation :

$$||\psi||_{L^2(\Omega)} \leq C\kappa^{-\frac{1}{4}}||\psi||_{L^4(\Omega)} \,, \tag{7}$$

qui est vraie pour κ assez grand.

Le vaguement défini $H_{C2}(\kappa) < H_{C3}(\kappa)$ est le champ critique ($\sim \kappa$) correspondant à la transition "état localisé à la surface" vers "état pénétrant effectivement à l'intérieur ", qui est loin d'être complètement comprise.

Le résultat suivant est une amélioration de [HePa].

Theorem B : Estimations d'Agmon tangentielles (cas non-linéaire)
Soit $(\psi, \vec{A}) = (\psi_{\kappa,H}, \vec{A}_{\kappa,H})$ une famille de minimiseurs de la fonctionnelle GL paramétrée par κ, H. On suppose que $H = H(\kappa)$ et $\rho := H_{C_3}(\kappa) - H$ vérifient $0 < \rho = o(1)$ lorsque $\kappa \to \infty$. Alors $\exists \alpha, C > 0$ t. q. si $\kappa > C$, alors

$$\int_\Omega \chi_1^2(\kappa^{\frac{1}{4}} t) e^{2\alpha\sqrt{\kappa} K(s)} |\psi(x)|^2 \, dx \leq C e^{C\rho\sqrt{\kappa}} \int_\Omega |\psi(x)|^2 \, dx \,. \tag{8}$$

On rappelle que

$$K(s) = k_{max} - k(s) \,.$$

Discussion précisée sur les champs critiques

Pour y voir plus clair nous sommes amenés à introduire de nouveaux points critiques :

$$\underline{H_{C_3}(\kappa)} \leq \overline{H_{C_3}(\kappa)}\ ,$$

qui sont définis par

$$\overline{H_{C_3}(\kappa)} = \inf\{H > 0\ :\ \forall H' > H\,, (0, \vec{F}) \text{ un. minimis. de } \mathcal{E}_{\kappa,H'}\}\ ,$$

$$\underline{H_{C_3}(\kappa)} = H_{C_3}(\kappa)\ . \qquad (9)$$

La preuve du théorème A donne une borne inférieure de $\underline{H_{C_3}(\kappa)}$ et une borne supérieure de $\overline{H_{C_3}(\kappa)}$, qui admettent donc tous les deux ce développement asymptotique.

L'idée physique qu'il n'y a en fait qu'une unique valeur de transition va passer par l'introduction de deux nouveaux champs crtiques liés à l'étude des linéarisés. On montrera ensuite que tous ces champs coincident sous des conditions géométriques génériques.

Le champ critique local supérieur (resp inférieur) peut maintenant être défini :

$$\overline{H_{C_3}^{\mathrm{loc}}(\kappa)} = \inf\{H > 0 \ : \ \forall H' > H, \lambda_1(\kappa H'\vec{F}) \geq \kappa^2\} \ ,$$
$$\underline{H_{C_3}^{\mathrm{loc}}(\kappa)} = \inf\{H > 0 \ : \ \lambda_1(\kappa H\vec{F}) \geq \kappa^2\} \ . \tag{10}$$

On a déjà donné des indications sur la preuve du théorème de comparaison suivant.

Theorème C
On a les inégalités :

$$\overline{H_{C_3}(\kappa)} \geq \overline{H_{C_3}^{\mathrm{loc}}(\kappa)} \ , \tag{11}$$
$$\underline{H_{C_3}(\kappa)} \geq \underline{H_{C_3}^{\mathrm{loc}}(\kappa)} \ . \tag{12}$$

Pour des domaines généraux, nous ignorons si les champs locaux $\underline{H_{C_3}^{\mathrm{loc}}(\kappa)}$ et $\overline{H_{C_3}^{\mathrm{loc}}(\kappa)}$ coincident.

Le théorème suivant fournit la clef pour la comparaison fine des champs.

Théorème D
$\exists \kappa_0 > 0$ tel que, pour $\kappa > \kappa_0$, nous avons

$$\overline{H_{C_3}(\kappa)} = \overline{H_{C_3}^{\mathrm{loc}}(\kappa)}\ .$$

Autour de la preuve du Théorème D

On fait la démonstration par l'absurde.

Si il existe une suite indicée par $\kappa = \kappa_n$ telle que $\kappa_n \to +\infty$ et $\overline{H_{C3}(\kappa)} > \overline{H_{C3}^{loc}(\kappa)}$, on peut trouver H dans $]\overline{H_{C3}(\kappa)}\ ,\ \overline{H_{C3}^{loc}(\kappa)}[$ et une paire de minimiseurs $(\psi, \vec{A})$ telle qu'on ait ψ non trivial

$$\lambda_1(\kappa H \vec{F}) \geq \kappa^2\,,$$

et

$$\mathcal{E}(\psi, \vec{A}) \leq 0\ .$$

Ceci nous conduit à

$$0 < \Delta := \kappa^2 ||\psi||_2^2 - Q_{\kappa H \vec{A}}[\psi] = \kappa^2 ||\psi||_4^4\ ,$$

où $Q_{\kappa H \vec{A}}[\psi]$ est l'énergie de ψ.
La dernière égalité est une conséquence de la première équation de Ginzburg-Landau.

En combinant avec (7), ceci donne

$$||\psi||_2 \leq C\kappa^{-\frac{3}{4}}\Delta^{\frac{1}{4}} \, .$$

Par comparaison des formes quadratiques Q associées à $\vec{A}$ et $\vec{F}$, on obtient avec $\vec{a} = \vec{A} - \vec{F}$:

$$\Delta \leq \left[\kappa^2 - (1-\rho)\lambda_1(\kappa H\vec{F})\right] \|\psi\|_2^2 + \rho^{-1}(\kappa H)^2 \int_\Omega |\vec{a}\psi|^2 \, dx \, , \tag{13}$$

pour tout $0 < \rho < 1$.

Notons que par la régularité du système Rot-Div combinée avec le théorème d'injection de Sobolev, on a

$$\|\vec{a}\|_4 \leq C_1 \|\vec{a}\|_{W^{1,2}} \leq C_2 \|\vec{rot}\, \vec{a}\|_2 \, .$$

Maintenant Δ contrôle aussi $\|\vec{rot}\,\vec{a}\|_2^2$ de sorte que l'on a finalement :

$$(\kappa H)^2 \|\vec{a}\|_4^2 \leq C\,\Delta\ .$$

Une combinaison de toutes ces inégalités donne

$$\begin{aligned}
0 < \Delta \leq & \\
& \leq \left[\kappa^2 - (1-\rho)\lambda_1(\kappa H \vec{F})\right] \|\psi\|_2^2 + \rho^{-1}(\kappa H)^2 \|\vec{a}\|_4^2 \|\psi\|_4^2 \\
& \leq \left[\kappa^2 - \lambda_1(\kappa H \vec{F})\right] \|\psi\|_2^2 \\
& \qquad + C\rho\lambda_1(\kappa H)\Delta^{\frac{1}{2}}\kappa^{-\frac{3}{2}} + C\rho^{-1}\Delta^{\frac{3}{2}}\kappa^{-1}\ .
\end{aligned}$$

Choisissant $\rho = \sqrt{\Delta}\kappa^{-\frac{3}{4}}$, et utilisant la borne supérieure grossière $\lambda_1(\kappa H\,\vec{F}) < C\kappa^2$, nous trouvons

$$0 < \Delta \leq \left[\kappa^2 - \lambda_1(\kappa H)\right] \|\psi\|_2^2 + C\Delta\kappa^{-\frac{1}{4}}\ .$$

Ceci conduit à une contradiction pour $\kappa = \kappa_n$ assez grand.

L'hypothèse générique

A l'exception du disque qui se traite différemment, nous avons besoin d'une hypothèse assurant une certaine localisation dans le bord.

On supposera donc que Ω est un domaine sans trou à bord régulier tel que l'ensemble des points de courbure maximale est fini (on les note $\{s_1, \ldots, s_N\} \in \mathbb{R}/|\partial\Omega|$) et que ces points sont des maxima non dégénérés de la courbure..

Dans Fournais-Helffer [FoHe2] on a obtenu, sous l'hypothèse générique sur Ω, une asymptotique complète de $\lambda_1(B\vec{F})$, pour B large.

Le deuxième point qui ne résulte pas d'un simple argument de monotonie est de montrer que, sous l'hypothèse générique, l'application

$$[B_0, \infty) \ni B \to [\lambda_1(B_0\vec{F}), \infty)$$

est bijective pour B_0 assez grand.

Proposition E

Si Ω vérifie l'hypothèse générique, $\exists \kappa_0$ t.q., si $\kappa \geq \kappa_0$, alors l'équation pour H:

$$\lambda_1(\kappa H \vec{F}) = \kappa^2 \ , \tag{14}$$

a une unique solution $H(\kappa)$.

En d'autres termes, pour κ large, les deux champs locaux coincident.

On déduit alors assez facilement les asymptotiques de $H_{C_3}^{\mathrm{loc}}(\kappa)$ à partir de celles de $\lambda_1(B\vec{F})$ obtenue dans [FoHe2]) :

$$H_{C_3}^{\mathrm{loc}}(\kappa) = \frac{\kappa}{\Theta_0}\left(1 + \frac{C_1 k_{\max}}{\sqrt{\Theta_0}\kappa} - C_1\sqrt{\frac{3k_2}{2}}\kappa^{-\frac{3}{2}} + \kappa^{-\frac{7}{4}}\sum_{j=0}^{\infty}\eta_j\kappa^{-\frac{j}{4}}\right), \tag{15}$$

lorsque $\kappa \to +\infty$. Ici $k_2 = \max -k''(s_j)$.
Les coefficients $\eta_j \in \mathbb{R}$ sont déterminés par récurrence.

Pour récapituler on a le

Theorem F
Supposons que Ω vérifie l'hypothèse générique. Alors $\exists \kappa_0 > 0$ t.q. pour $\kappa > \kappa_0$,

$$H_{C_3}^{\mathrm{loc}}(\kappa) = \underline{H_{C_3}(\kappa)} = \overline{H_{C_3}(\kappa)}\,. \tag{16}$$

Remarque

Sous l'hypothèse générique, l'asymptotique de $H^{\mathrm{loc}}_{C_3}(\kappa)$ donne bien sûr celle de $H_{C_3}(\kappa)$ pour κ large.

Et si vous voulez d'autres champs

1. Il semble plus physique de regarder la fonctionnelle suivante :

   $$\mathcal{E}_{\kappa,H}[\psi,\vec{A}] = \int_\Omega \left\{|p_{\kappa H\vec{A}}\psi|^2 - \kappa^2|\psi|^2 + \frac{\kappa^2}{2}|\psi|^4\right\}dx + \kappa^2 H^2 \int_{\mathbb{R}^2} |r\vec{o}t\vec{A} - 1|^2\, dx\ ,$$

   La différence est que l'intégration dans le dernier terme est sur $\mathbb{R}^2$! Cette subtilité n'est finalement importante que si Ω n'est pas simplement connexe (mais nous avons évité ce cas dans l'exposé) !

2. Que se passe-t-il en dimension 3 ?
   Résultats de Pan, Helffer-Morame et tout récemment de Fournais-Helffer.

3. Y-a-t-il une bonne définition du deuxième champ critique ? La réponse est proprement NON.

   Pour une analyse de cette zone critique, voir Pan, Almog et Sandier-Serfaty.

On rappelle que c'est dans la zone entre les deux premiers champs critiques que se situent les belles études de E. Sandier and S. Serfaty.

References

[Ag] S. Agmon : *Lectures on exponential decay of solutions of second order elliptic equations.* Math. Notes, T. 29, Princeton University Press (1982).

[BaPhTa] P. Bauman, D. Phillips, and Q. Tang : Stable nucleation for the Ginzburg-Landau system with an applied magnetic field. Arch. Rational Mech. Anal. 142, p. 1-43 (1998).

[BeSt] A. Bernoff and P. Sternberg : Onset of superconductivity in decreasing fields for general domains. J. Math. Phys. 39, p. 1272-1284 (1998).

[BoHe] C. Bolley and B. Helffer : An application of semi-classical analysis to the asymptotic study of the supercooling field of a superconducting material. Ann. Inst. H. Poincaré (Section Physique Théorique) 58 (2), p. 169-233 (1993).

[Bon1] V. Bonnaillie : Analyse mathématique de la supraconductivité dans un domaine à coins : méthodes semi-classiques et numériques. Thèse de Doctorat, Université Paris 11 (2003).

[Bon2] V. Bonnaillie : On the fundamental state for a Schrödinger operator with magnetic fields in domains with corners. Asymptotic Anal. 41 (3-4), p. 215-258, (2005).

[BonDa] V. Bonnaillie and M. Dauge : Asymptotics for the fundamental state of the Schrödinger operator with magnetic field near a corner. In preparation, (2004).

[CFKS] H.L. Cycon, R.G. Froese, W. Kirsch, and B. Simon : *Schrödinger Operators.* Springer-Verlag, Berlin 1987.

[DaHe] M. Dauge and B. Helffer : Eigenvalues variation I, Neumann problem for Sturm-Liouville operators. J. Differential Equations 104 (2), p. 243-262 (1993).

[DiSj] M. Dimassi and J. Sjöstrand : Spectral Asymptotics in the semi-classical limit. London Mathematical Society. Lecture Note Series 268. Cambridge University Press (1999).

[FoHe1] S. Fournais and B. Helffer : Energy asymptotics for type II superconductors. Preprint 2004. To appear in Calc. Var. and PDE.

[FoHe2] S. Fournais and B. Helffer : Accurate eigenvalue asymptotics for the magnetic Neumann Laplacian. Preprint 2004. To appear in Annales de l'Institut Fourier.

[FoHe3] S. Fournais and B. Helffer : On the third critical field in Ginzburg-Landau thory. Preprint 2005.

[FoHe4] S. Fournais and B. Helffer : On the Ginzburg-Landau critical field in three dimensions. Preprint 2005.

[GiPh] T. Giorgi and D. Phillips : The breakdown of superconductivity due to strong fields for the Ginzburg-Landau model SIAM J. Math. Anal. 30 (1999), no. 2, 341–359 (electronic).

[Hel] B. Helffer : *Introduction to the semiclassical analysis for the Schrödinger operator and applications.* Springer lecture Notes in Math. 1336 (1988).

[HeMo1] B. Helffer and A. Mohamed : Semiclassical analysis for the ground state energy of a Schrödinger operator with magnetic wells. J. Funct. Anal. 138 (1), p. 40-81 (1996).

[HeMo2] B. Helffer and A. Morame : Magnetic bottles in connection with superconductivity. J. Funct. Anal. 185 (2), p. 604-680 (2001).

[HeMo3] B. Helffer and A. Morame : Magnetic bottles for the Neumann problem : curvature effect in the case of dimension 3 (General case).

Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. 37, p. 105-170 (2004).

[HePa] B. Helffer and X. Pan : Upper critical field and location of surface nucleation of superconductivity. Ann. Inst. H. Poincaré (Section Analyse non linéaire) 20 (1), p. 145-181 (2003).

[HeSj] B. Helffer and J. Sjöstrand : Multiple wells in the semiclassical limit I. Comm. Partial Differential Equations 9 (4), p. 337-408 (1984).

[LuPa1] K. Lu and X-B. Pan : Estimates of the upper critical field for the Ginzburg-Landau equations of superconductivity. Physica D 127, p. 73-104 (1999).

[LuPa2] K. Lu and X-B. Pan : Eigenvalue problems of Ginzburg-Landau operator in bounded domains. J. Math. Phys. 40 (6), p. 2647-2670, June 1999.

[LuPa3] K. Lu and X-B. Pan : Gauge invariant eigenvalue problems on $\mathbb{R}^2$ and $\mathbb{R}^2_+$. Trans. Amer. Math. Soc. 352 (3), p. 1247-1276 (2000).

[LuPa4] K. Lu and X-B. Pan : Surface nucleation of superconductivity in 3-dimension. J. of Differential Equations 168 (2), p. 386-452 (2000).

[Pan] X-B. Pan : Surface superconductivity in applied magnetic fields above H_{C_3} Comm. Math. Phys. 228, p. 327-370 (2002).

[PiFeSt] M. del Pino, P.L. Felmer, and P. Sternberg : Boundary concentration for eigenvalue problems related to the onset of superconductivity. Comm. Math. Phys. 210, p. 413-446 (2000).

[S-JSaTh] D. Saint-James, G. Sarma, E.J. Thomas : *Type II Superconductivity.* Pergamon, Oxford 1969.

[SaSe] E. Sandier, S. Serfaty : Nombreux articles.....

[St] P. Sternberg : On the Normal/Superconducting Phase Transition in the Presence of Large Magnetic Fields. In Connectivity and Superconductivity, J. Berger and J. Rubinstein Editors. Lect. Notes in Physics 63, p. 188-199 (1999).

[TiTi] D. R. Tilley and J. Tilley: *Superfluidity and superconductivity.* 3rd edition. Institute of Physics Publishing, Bristol and Philadelphia 1990.

[Ti] M. Tinkham, *Introduction to Superconductivity.* McGraw-Hill Inc., New York, 1975.