

A la découverte des partitions spectrales minimales

B. Helffer (Université Paris-Sud 11)

Journée SMF-Académie à Rennes, 21 Novembre 2011

Etant donné un ouvert borné Ω dans \mathbb{R}^n (ou sur une variété riemannienne) et une partition de Ω par k ouverts disjoints D_j , nous pouvons considérer la quantité $\max_j \lambda(D_j)$ où $\lambda(D_j)$ est la plus petite valeur propre du Laplacien $-\Delta$ avec condition de Dirichlet dans D_j . Si nous notons $\mathfrak{L}_k(\Omega)$ l'infimum sur toutes les k -partitions de l'énergie : $\max_j \lambda(D_j)$, une k -partition minimale est une k -partition qui réalise l'infimum. Un résultat presque standard dit que dans le cas $k = 2$, les partitions minimales sont constituées par les domaines nodaux d'une fonction associée à la deuxième valeur propre du Laplacien. L'analyse du cas $k \geq 3$ devient non triviale et de ce fait pose des questions nouvelles.

Je cite une fois pour toute la liste des principaux contributeurs récents : V. Bonnaillie-Noël, B. Helffer, T. Hoffmann-Ostenhof, S. Terracini, G. Vial, Caffarelli, Lin, Noris, ...

Exercices en dimension un

Je regarde $-\frac{d^2}{dx^2}$ sur $]a, b[$ avec conditions au bord nulles en a et b .
Les valeurs propres sont données par

$$\lambda_j(]a, b[) = \pi^2 \frac{j^2}{(b-a)^2}, j \in \mathbb{N}^*,$$

et des fonctions propres associées par

$$x \mapsto \phi_j(x) := \sin\left(j\pi \frac{x-a}{b-a}\right).$$

Je remarque que pour j fixé la valeur propre λ_j tend vers l'infini
quand $(b-a)$ tend vers 0.

Faisons l'exercice suivant. Je découpe $]0, 1[$ en k intervalles I_ℓ et je souhaite minimiser l'énergie $\max \lambda(I_\ell)$.

On observe immédiatement (en se contentant comme ouverts d'intervalles ouverts) que les k -partitions minimales de l'intervalle $]0, 1[$ sont données par les intervalles $](\ell - 1)/k, \ell/k[$ pour $\ell = 1, \dots, k$ et que ceci correspond aux k -domaines nodaux de la fonction ϕ_k .

L'énergie correspondante est

$$\mathfrak{E}_k = k^2 \pi^2 = \lambda_k .$$

Le problème à résoudre est ramené pour $k = 2$ à calculer

$$\min_{a_1 + a_2 = 1, a_1 > 0, a_2 > 0} \max(a_1^{-2}, a_2^{-2})$$

et à montrer que le minimum est atteint pour $a_1 = a_2 = \frac{1}{2}$. Le cas général $k > 2$ n'introduit pas de difficulté supplémentaire.

Changeons un peu l'exercice. On se place maintenant sur le cercle de longueur 1 : $\mathbb{T}^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ (donc de rayon $\frac{1}{2\pi}$) et on regarde la même question. Si la réponse reste la même que précédemment pour la partition minimale, il n'est plus vrai, quand k est impair, que la k -partition minimale correspondante (qui n'est plus unique) correspond aux ensembles nodaux de la k -ème fonction propre. Et pour cause, les fonctions propres sur le cercle ont toujours un nombre pair d'ensembles nodaux. La topologie du cercle a induit un phénomène nouveau.

Par contre, elle correspond pour k impair à la projection sur le cercle de longueur 1 des domaines nodaux de la $(2k)$ -ème fonction propre sur le revêtement naturel constitué par le cercle de longueur 2 (en tournant de 4π).

Section 2 : Petit basique de théorie spectrale

On regardera principalement des Laplaciens de Dirichlet sur des domaines de \mathbb{R}^2 (ou sur des surfaces : tore, sphère,...). On veut analyser les relations entre les domaines nodaux des fonctions propres de ce Laplacien et les partitions par k ouverts D_i minimaux au sens défini plus haut.

Soit Ω un domaine régulier borné et $H(\Omega)$ le Laplacien $-\Delta$ sur $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ avec des conditions au bord de Dirichlet ($u_{\partial\Omega} = 0$). Dans le cas d'une variété riemannienne compacte on considèrera l'opérateur de Laplace Beltrami.

On désigne par $(\lambda_j(\Omega))_j$ la suite croissante de ses valeurs propres comptées avec multiplicité et par $(u_j)_j$ une base orthonormée associée de vecteurs propres.

Soit Ω un domaine régulier borné et $H(\Omega)$ le Laplacien $-\Delta$ sur $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ avec des conditions au bord de Dirichlet ($u_{\partial\Omega} = 0$). Dans le cas d'une variété riemannienne compacte on considèrera l'opérateur de Laplace Beltrami.

On désigne par $(\lambda_j(\Omega))_j$ la suite croissante de ses valeurs propres comptées avec multiplicité et par $(u_j)_j$ une base orthonormée associée de vecteurs propres.

L'état fondamental (ou première fonction propre) u_1 peut être choisi strictement positif dans Ω , mais les autres fonctions propres u_k ($k \geq 2$) qui sont orthogonales à u_1 , doivent s'annuler.

Soit Ω un domaine régulier borné et $H(\Omega)$ le Laplacien $-\Delta$ sur $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ avec des conditions au bord de Dirichlet ($u_{\partial\Omega} = 0$). Dans le cas d'une variété riemannienne compacte on considèrera l'opérateur de Laplace Beltrami.

On désigne par $(\lambda_j(\Omega))_j$ la suite croissante de ses valeurs propres comptées avec multiplicité et par $(u_j)_j$ une base orthonormée associée de vecteurs propres.

L'état fondamental (ou première fonction propre) u_1 peut être choisi strictement positif dans Ω , mais les autres fonctions propres u_k ($k \geq 2$) qui sont orthogonales à u_1 , doivent s'annuler.

Pour tout $u \in C_0^0(\bar{\Omega})$, on introduit $N(u)$ par :

$$N(u) = \overline{\{x \in \Omega \mid u(x) = 0\}} \quad (1)$$

et les composantes connexes de $\Omega \setminus N(u)$ sont appelés les domaines nodaux de u .

$k = \mu(u)$ domaines nodaux de u définissent une k -partition of Ω .

Spectre du carré

Pour le carré de côté 1, les valeurs propres sont $(m^2 + n^2)\pi^2$ ($(m, n) \in \mathbb{N}_*^2$). Une base de fonctions propres associées est donnée par : $(x, y) \mapsto \sin(m\pi x) \sin(n\pi y)$.

En les classant par ordre croissant on a donc :

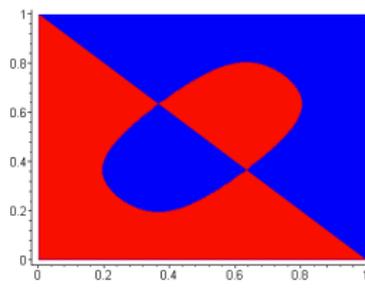
$2\pi^2, 5\pi^2, 5\pi^2, 8\pi^2, 10\pi^2, 10\pi^2, 13\pi^2, 13\pi^2, 17\pi^2, 17\pi^2, 18\pi^2, \dots$

Figure 1

FIGURE: Un exemple de partition nodale. $17\pi^2$ est donc la 9 ème valeur propre (multiplicité 2) et la fonction propre choisie a 4 domaines nodaux.

Ensemble nodal d'une fonction propre du carré correspondant à la valeur propre $17\pi^2$:

$\sin \pi x \cdot \sin 4\pi y + \sin 4\pi x \cdot \sin \pi y$



Le théorème nodal de Courant dit :

Théorème de Courant (1923)

Soit $k \geq 1$ et $E(\lambda_k)$ l'espace propre de $H(\Omega)$ associé à λ_k .

Le théorème nodal de Courant dit :

Théorème de Courant (1923)

Soit $k \geq 1$ et $E(\lambda_k)$ l'espace propre de $H(\Omega)$ associé à λ_k . Le nombre d'ensembles nodaux de u est noté $\mu(u)$. Les

Alors, pour tout $u \in E(\lambda_k) \setminus \{0\}$, on a $\mu(u) \leq k$.

Sauf en dimension **1**, l'inégalité est en général stricte :

Théorème de Pleijel (1956)

Il existe k_0 tel que, si $k \geq k_0$, alors

$$\mu(u) < k, \forall u \in E(\lambda_k) \setminus \{0\}.$$

Les deux points importants dans la preuve de ce deuxième théorème sont l'inégalité de Faber-Krahn (1923) :

$$\lambda(\omega) \geq \frac{\pi j^2}{|\omega|}, \quad (2)$$

avec $j \sim 2.4$.

(le membre de droite correspond à la plus petite valeur propre pour le problème de Dirichlet sur le disque d'aire égale à celle de ω) et la loi de Weyl (1911) pour la fonction de comptage $N(\lambda)$ des valeurs propres du Laplacien inférieures à λ :

$$N(\lambda) \sim c_2 \lambda, \quad \text{quand } \lambda \rightarrow +\infty \quad (3)$$

où c_2 est la constante semi-classique :

$$c_2 = \frac{1}{2}(2\pi)^{-1}|\Omega|.$$

Ceci implique :

$$\limsup \frac{\mu(u_k)}{k} \leq 4/j^2.$$

Partitions

Nous commençons par introduire la notion de k -partition.

Définition 1

Soit $1 \leq k \in \mathbb{N}$. On appelle k -partition de Ω une famille $\mathcal{D} = \{D_i\}_{i=1}^k$ de k ensembles ouverts D_i disjoints de Ω .

Partitions

Nous commençons par introduire la notion de k -partition.

Définition 1

Soit $1 \leq k \in \mathbb{N}$. On appelle k -partition de Ω une famille $\mathcal{D} = \{D_i\}_{i=1}^k$ de k ensembles ouverts D_i disjoints de Ω .

On dira qu'elle est **ouverte** si les D_i sont ouverts, **connexe** si les D_i le sont.

On notera \mathfrak{D}_k l'ensemble des k -partitions ouvertes connexes.

Partitions minimales

Nous introduisons la notion de suite d'énergie minimale spectrale.

Définition 2

Pour tout $k \geq 1$, et pour tout $\mathcal{D} = (D_i)$ dans \mathfrak{D}_k , on appelle énergie spectrale de \mathcal{D} la quantité :

$$\Lambda(\mathcal{D}) = \max_i \lambda(D_i). \quad (4)$$

Partitions minimales

Nous introduisons la notion de suite d'énergie minimale spectrale.

Définition 2

Pour tout $k \geq 1$, et pour tout $\mathcal{D} = (D_i)$ dans \mathfrak{D}_k , on appelle énergie spectrale de \mathcal{D} la quantité :

$$\Lambda(\mathcal{D}) = \max_i \lambda(D_i). \quad (4)$$

et énergie minimale (spectrale) de rang k la quantité

$$\mathfrak{L}_k(\Omega) = \inf_{\mathcal{D} \in \mathfrak{D}_k} \Lambda(\mathcal{D}). \quad (5)$$

$\mathcal{D} \in \mathfrak{D}_k$ est dite minimale si $\mathfrak{L}_k = \Lambda(\mathcal{D})$.

Remarque A

Si $k = 2$, $\mathfrak{L}_2 = \lambda_2$ et toute 2-partition minimale associée est nodale.

Definition 3 : partition complète

Une partition $\mathcal{D} = \{D_i\}_{i=1}^k$ de Ω dans \mathfrak{D}_k est appelée **complète** si

$$\text{Int}(\overline{\cup_i D_i}) \setminus \partial\Omega = \Omega . \quad (6)$$

On associe à cette partition son ensemble frontière dans $\overline{\Omega}$:

Definition 4 : Ensemble frontière

$$N(\mathcal{D}) = \overline{\cup_i (\partial D_i \cap \Omega)} . \quad (7)$$

$N(\mathcal{D})$ joue le rôle des lignes nodales (dans le cas d'une partition nodale) .

Partitions régulières

Ce sont celles dont l'ensemble frontière satisfait :

Definition 5 : Ensemble frontière régulier

- (i) En dehors d'un nombre fini de points $x_i \in \Omega \cap N$ au voisinage desquels N est l'union de $\nu_i(x_i)$ courbes régulières ($\nu_i \geq 2$) avec une extrémité en x_i , N est localement difféomorphe à une courbe.
- (ii) $\partial\Omega \cap N$ est un ensemble fini (éventuellement vide) de points z_i . De plus N est près de z_i l'union de ρ_i demi-courbes régulières arrivant en z_i .
- (iii) N a la propriété des croisements à angle égal.

On entend par là que les demi-arcs se croisent à angle égal à chaque point critique et dans le cas du bord on rajoute l'arc constituant le bord.

Voisins dans une partition et bicolorabilité.

Nous disons que D_i, D_j sont **voisins** (en notant $D_i \sim D_j$) , si $D_{i,j} := \text{Int}(\overline{D_i \cup D_j}) \setminus \partial\Omega$ est connexe.

Voisins dans une partition et bicolorabilité.

Nous disons que D_i, D_j sont **voisins** (en notant $D_i \sim D_j$) , si $D_{i,j} := \text{Int}(\overline{D_i \cup D_j}) \setminus \partial\Omega$ est connexe.

On dira que la partition est bicolorable si on peut la colorer par deux couleurs avec la condition que deux voisins sont de couleur différente.

Une partition nodale est toujours bicolorable.

Voisins dans une partition et bicolorabilité.

Nous disons que D_i, D_j sont **voisins** (en notant $D_i \sim D_j$) , si $D_{i,j} := \text{Int}(\overline{D_i \cup D_j}) \setminus \partial\Omega$ est connexe.

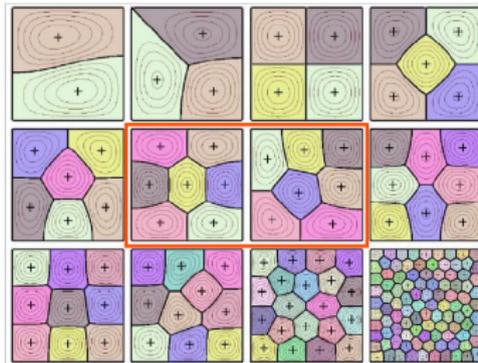
On dira que la partition est bicolorable si on peut la colorer par deux couleurs avec la condition que deux voisins sont de couleur différente.

Une partition nodale est toujours bicolorable. Voilà d'autres exemples.

Figure 2

FIGURE: Autres exemples de partitions complètes régulières pas toujours bicolorables.

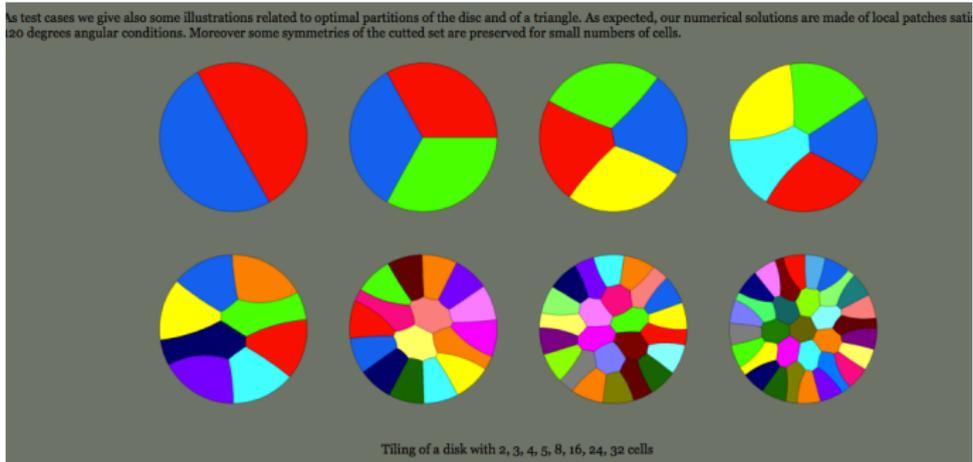
Multiple populations



"Minimization of the Renyi entropy production in the space-partitioning process"
Cybulski, Babin, and Holyst, Phys. Rev. E 71, 046130 (2005)

Figure 3

FIGURE: Autres exemples de partitions complètes régulières pas toujours bicolorables : calculs réalisés par Edouard Oudet pour un autre problème d'optimalité .



Section 3 : Principaux résultats en dimension 2

Il a été démontré par Conti-Terracini-Verzini [CTV1, CTV2, CTV3] et Helffer–Hoffmann-Ostenhof–Terracini [HHOT1] que

Theorème 1

$\forall k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, \exists une k -partition minimale régulière. De plus on peut toujours modifier une k -partition minimale par un ensemble de capacité 0 pour la rendre régulière.

Section 3 : Principaux résultats en dimension 2

Il a été démontré par Conti-Terracini-Verzini [CTV1, CTV2, CTV3] et Helffer–Hoffmann-Ostenhof–Terracini [HHOT1] que

Theorème 1

$\forall k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, \exists une k -partition minimale régulière. De plus on peut toujours modifier une k -partition minimale par un ensemble de capacité 0 pour la rendre régulière.

D'autres preuves d'une version plus faible de ce résultat ont été antérieurement obtenues par Bucur-Buttazzo-Henrot [BBH], Caffarelli- F.H. Lin [CL].

Quelques propriétés simples

Pour une partition minimale, tous les $\lambda(D_i)$ sont égaux.

Si on considère deux voisins D_i et D_j , alors l'ensemble frontière dans $D_{ij} = \text{Int}(\bar{D}_i \cup \bar{D}_j)$ correspond à l'ensemble nodal d'une deuxième fonction propre de $H(D_{ij})$.

Une question naturelle est de déterminer si une partition minimale est nodale, i.e. la famille des domaines nodaux d'une fonction propre de $H(\Omega)$.

Une question naturelle est de déterminer si une partition minimale est nodale, i.e. la famille des domaines nodaux d'une fonction propre de $H(\Omega)$. Un premier résultat dit ([HH1], [HHOT1]) :

Theorème 2

Toute partition minimale bicolore est nodale.

Autrement dit on peut recoller les états fondamentaux de chaque ouvert de la partition pour obtenir une fonction propre de $H(\Omega)$. Une question naturelle est alors d'avoir des critères plus explicites pour observer une telle situation.

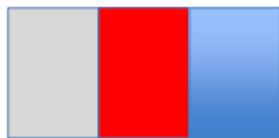
Même si ce résultat avait été pressenti par des probabilistes (C. Burdzy), le critère est étonnamment simple. Une k -partition nodale n'est minimale que si elle correspond aux k -domaines nodaux d'une k -ème fonction propre. On dit alors qu'on est dans la situation "Courant-strict" en référence au cas d'égalité dans le théorème de Courant.

Section 3 : Exemples de k -partitions minimales pour des domaines particuliers

En utilisant le théorème 3, il est maintenant plus facile d'analyser la situation pour le disque et des rectangles (dans le cas où le rapport largeur sur longueur est irrationnel). On a juste à analyser s'il y a des fonctions propres Courant strictes.

Le cas du rectangle

Dans le cas du rectangle "long" $]0, a[\times]0, 1[$ et si $k = 3$, la troisième fonction propre $\sin(3\pi x/a) \sin \pi y$ est Courant stricte avec comme famille nodale :



Dans le cas du carré et si $k = 3$, on n'a pas de fonction propre Courant stricte (deuxième valeur propre égale à la troisième). Par contre, le cas $k = 4$ est Courant strict. Si on suppose que la partition est symétrique par rapport à un axe, on peut se restreindre à un problème Dirichlet-Neumann sur un demi-carré.

Dans le cas du carré et si $k = 3$, on n'a pas de fonction propre Courant stricte (deuxième valeur propre égale à la troisième). Par contre, le cas $k = 4$ est Courant strict. Si on suppose que la partition est symétrique par rapport à un axe, on peut se restreindre à un problème Dirichlet-Neumann sur un demi-carré.

Des calculs numériques de V. Bonnaillie-Noël et G. Vial conduisent à un candidat naturel pour une 3-partition minimale symétrique.

See <http://www.bretagne.ens-cachan.fr/math/Simulations/MinimalPartitions/>

Figure 4

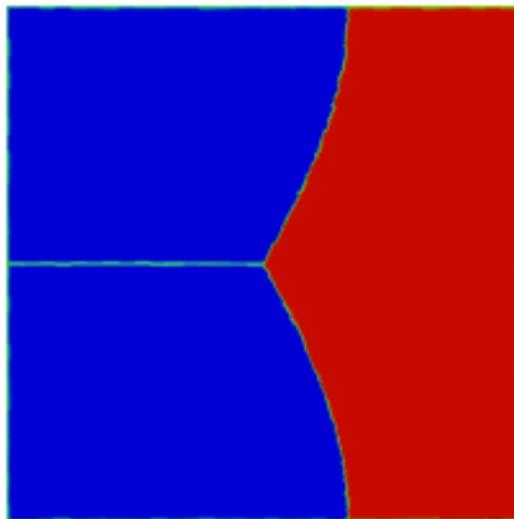
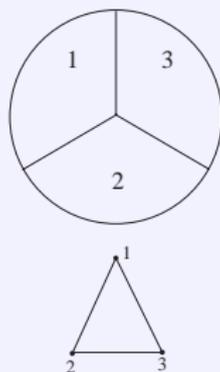


FIGURE: Un candidat de 3-partition minimale pour le carré en supposant une symétrie par rapport à l'axe horizontal.

Le cas du disque : $k = 3$

Pas de preuve que la 3-partition minimale du disque est le logo mercedes. Notre résultat partiel est que si on sait que la frontière de la partition contient l'origine alors c'est le logo mercedes. (Idée derrière : passer à un revêtement du disque).

Le logo Mercedes



Le cas du carré : $k = 3$

Nous n'avons pas de preuve (sans hypothèse supplémentaire de nature topologique ou de symétrie) que le candidat de la Figure 3 est une 3-partition minimale.

Le cas du carré : $k = 3$

Nous n'avons pas de preuve (sans hypothèse supplémentaire de nature topologique ou de symétrie) que le candidat de la Figure 3 est une 3-partition minimale.

Les calculs numériques suggèrent beaucoup plus : le point critique de la partition est au centre.

Indépendamment, on peut démontrer qu'il existe une famille continue de 3-partitions du carré de même énergie.

Le problème sur la sphère

Nous mentionnons une conjecture sur S^2 et un théorème récent.

Nous paramétrons S^2 avec les coordonnées sphériques $(\theta, \phi) \in [0, \pi] \times [-\pi, \pi]$ avec $\theta = 0$ correspondant au pôle nord, $\theta = \frac{\pi}{2}$ à l'équateur et $\theta = \pi$ au pôle sud.

On appelle Y -partition la partition de S^2 correspondant à découper S^2 par trois demi hyper-plans $\phi = 0, \frac{2\pi}{3}, -\frac{2\pi}{3}$.

Une conjecture due à C. Bishop-Friedland-Hayman est :

Conjecture 3

La Y -partition donne une 3-partition minimale de S^2 quand on minimise $\frac{1}{3} \sum_{j=1}^3 \lambda(D_j)$ sur toutes les 3-partitions de S^2 .

Une conjecture due à C. Bishop-Friedland-Hayman est :

Conjecture 3

La Y -partition donne une 3-partition minimale de S^2 quand on minimise $\frac{1}{3} \sum_{j=1}^3 \lambda(D_j)$ sur toutes les 3-partitions de S^2 .

En fait on avait la même conjecture pour $\max_j \lambda(D_j)$.
Cette conjecture est impliquée par la précédente mais pourrait être plus facile car les partitions minimales ont plus de propriétés dans ce cas.

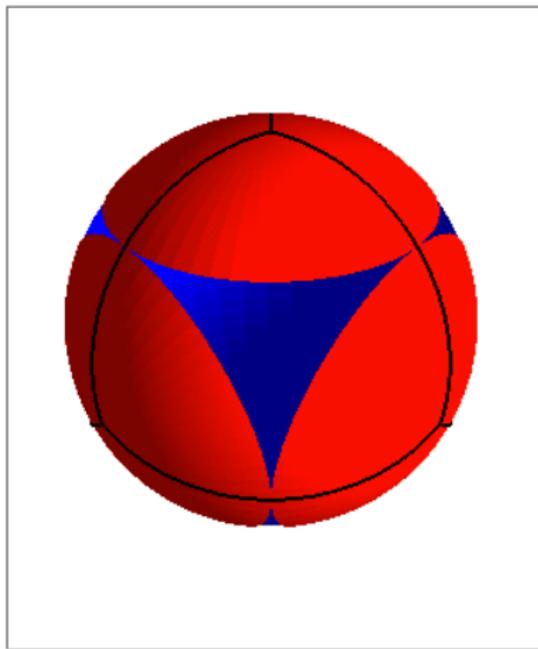
C'est en effet le cas (Helffer-T.Hoffmann-Ostenhof-Terracini).

Theorème 4

La Y -partition est une 3-partition minimale de S^2 quand on minimise $\max_j \lambda(D_j)$ sur toutes les 3-partitions de S^2 .

Il y a des similitudes entre la preuve partielle dans le cas du disque et la preuve complète pour la sphère. Un rôle spécifique est joué par le théorème de Lyusternik-Shnirelman qui permet de montrer que la frontière de la partition contient deux points antipodaux.

Contrairement au cas du carré ou du disque, la 4-partition ne peut être nodale. Un candidat naturel est le tétraèdre sphérique dont on peut calculer l'énergie (Costabel-Dauge).



Le problème pour k grand.

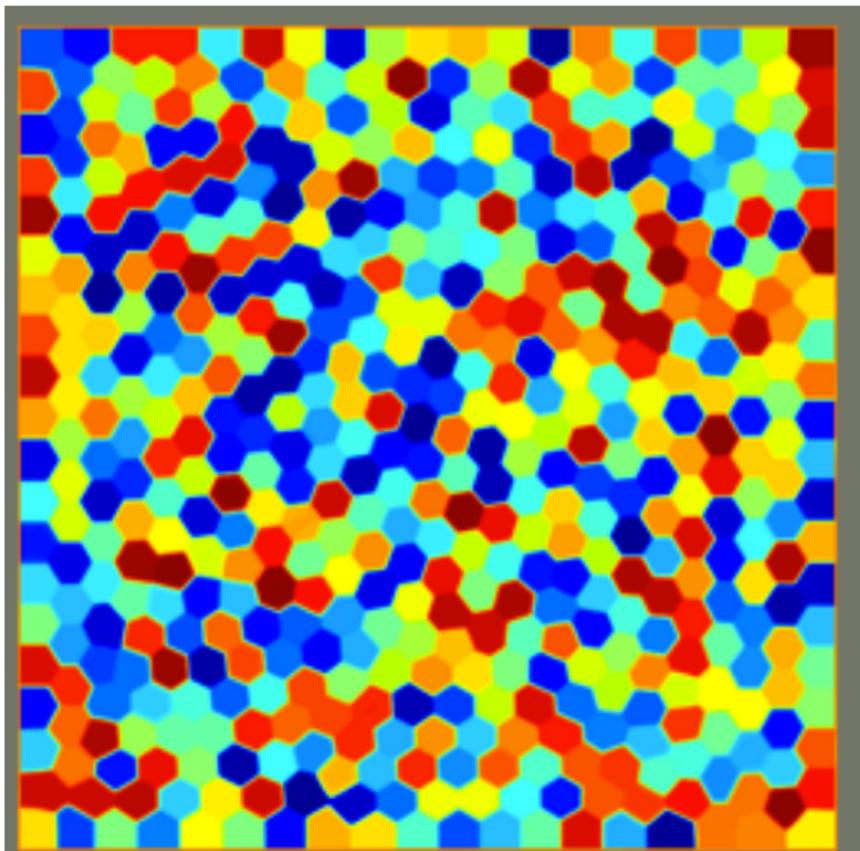
Conjecture hexa

$$|\Omega| \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{\mathfrak{L}_k(\Omega)}{k} = \lambda_1(\text{Hexa}_1).$$

Cette conjecture indique en particulier que la limite est indépendante de Ω si Ω est un domaine régulier.

Bien sûr l'optimalité du réseau hexagonal apparaît dans de nombreux contextes en physique. La borne sup n'est pas difficile à démontrer et Faber-Krahn donne une minoration avec $\lambda(Hexa_1)$ remplacé par $\lambda(Disque_1)$. Différentes simulations numériques confortent cette conjecture (Bonnaillie-Helffer-Vial [BHV], Bourdin-Bucur-Oudet [BBO]), qui apparaît aussi dans Caffarelli-Lin [CL].

FIGURE: Calculs de Bourdin-Bucur-Oudet pour le carré périodique.
(Minimisation pour la somme)



Partitions minimales et champ magnétique

Nous avons vu qu'en général les partitions minimales ne sont pas nodales. On peut montrer qu'en fait elles sont nodales pour un autre opérateur : le Laplacien magnétique, où le champ magnétique a des masses de Dirac en un nombre fini de points.



M. Abramowitz and I. A. Stegun.

Handbook of mathematical functions,

Volume 55 of Applied Math Series. National Bureau of Standards, 1964.



B. Alziary, J. Fleckinger-Pellé, P. Takáč.

Eigenfunctions and Hardy inequalities for a magnetic Schrödinger operator in \mathbb{R}^2 .

Math. Methods Appl. Sci. **26**(13), 1093–1136 (2003).



G. Alessandrini.

Critical points of solutions of elliptic equations in two variables.

Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (4), 14(2) :229–256 (1988).



G. Alessandrini.

Nodal lines of eigenfunctions of the fixed membrane problem in general convex domains.

Comment. Math. Helv., 69(1) :142–154, 1994.

-  A. Ancona, B. Helffer, and T. Hoffmann-Ostenhof.
Nodal domain theorems à la Courant.
Documenta Mathematica, Vol. 9, p. 283-299 (2004).
-  R. Band, G. Berkolaiko, H. Raz, and U. Smilansky.
On the connection between the number of nodal domains on quantum graphs and the stability of graph partitions.
ArXiv : 1103.1423v1, March 2011.
-  P. Bérard.
Transplantation et isospectralité. I.
Math. Ann. **292**(3) (1992) 547–559.
-  P. Bérard.
Transplantation et isospectralité. II.
J. London Math. Soc. (2) **48**(3) (1993) 565–576.
-  J. Berger, J. Rubinstein.
On the zero set of the wave function in superconductivity.
Comm. Math. Phys. **202**(3), 621–628 (1999).
-  V. Bonnaillie, and B. Helffer.

Numerical analysis of nodal sets for eigenvalues of Aharonov-Bohm Hamiltonians on the square and application to minimal partitions.

To appear in *Journal of experimental mathematics*.



V. Bonnaillie-Noël, B. Helffer and T. Hoffmann-Ostenhof.
spectral minimal partitions, Aharonov-Bohm hamiltonians and application the case of the rectangle.

Journal of Physics A : Math. Theor. 42 (18) (2009) 185203.



V. Bonnaillie-Noël, B. Helffer and G. Vial.

Numerical simulations for nodal domains and spectral minimal partitions.

ESAIM Control Optim. Calc.Var. DOI :10.1051/cocv :2008074 (2009).



B. Bourdin, D. Bucur, and E. Oudet.

Optimal partitions for eigenvalues.

Preprint 2009.



D. Bucur, G. Buttazzo, and A. Henrot.

Existence results for some optimal partition problems.

Adv. Math. Sci. Appl. 8 (1998), 571-579.



K. Burdzy, R. Holyst, D. Ingerman, and P. March.

Configurational transition in a Fleming-Viot-type model and probabilistic interpretation of Laplacian eigenfunctions.

J. Phys.A : Math. Gen. 29 (1996), 2633-2642.



L.A. Caffarelli and F.H. Lin.

An optimal partition problem for eigenvalues.

Journal of scientific Computing 31 (1/2) DOI :
10.1007/s10915-006-9114.8 (2007)



M. Conti, S. Terracini, and G. Verzini.

An optimal partition problem related to nonlinear eigenvalues.

Journal of Functional Analysis 198, p. 160-196 (2003).



M. Conti, S. Terracini, and G. Verzini.

A variational problem for the spatial segregation of reaction-diffusion systems.

Indiana Univ. Math. J. 54, p. 779-815 (2005).



M. Conti, S. Terracini, and G. Verzini.

On a class of optimal partition problems related to the Fučík spectrum and to the monotonicity formula.

Calc. Var. 22, p. 45-72 (2005).



O. Cybulski, V. Babin , and R. Holyst.

Minimization of the Renyi entropy production in the space-partitioning process.

Physical Review E 71 046130 (2005).



B. Helffer, M. Hoffmann-Ostenhof, T. Hoffmann-Ostenhof, M. P. Owen.

Nodal sets for groundstates of Schrödinger operators with zero magnetic field in non-simply connected domains.

Comm. Math. Phys. **202**(3) (1999) 629–649.



B. Helffer, T. Hoffmann-Ostenhof.

Converse spectral problems for nodal domains.

Mosc. Math. J. **7**(1) (2007) 67–84.



B. Helffer, T. Hoffmann-Ostenhof.

On spectral minimal partitions : the case of the disk.

CRM proceedings **52**, 119–136 (2010).



B. Helffer, T. Hoffmann-Ostenhof.

On two notions of minimal spectral partitions.

Adv. Math. Sci. Appl. 20 (2010), no. 1, 249263.



B. Helffer, T. Hoffmann-Ostenhof.

On a magnetic characterization of spectral minimal partitions.

Submitted.



B. Helffer, T. Hoffmann-Ostenhof.

Spectral minimal partitions for a thin strip on a cylinder or a thin annulus like domain with Neumann condition

Submitted.



B. Helffer, T. Hoffmann-Ostenhof.

On spectral minimal partitions : the case of the torus.

In preparation.



B. Helffer, T. Hoffmann-Ostenhof, S. Terracini.

Nodal domains and spectral minimal partitions.

Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire (2009).



B. Helffer, T. Hoffmann-Ostenhof, S. Terracini.

On spectral minimal partitions : the case of the sphere.
[Springer Volume in honor of V. Maz'ya \(2009\).](#)



B. Helffer, T. Hoffmann-Ostenhof, S. Terracini.

On minimal spectral partition in $3D$.

To appear in a [Volume in honor of L. Nirenberg.](#)



D. Jakobson, M. Levitin, N. Nadirashvili, I. Polterovic.

Spectral problems with mixed Dirichlet-Neumann boundary conditions : isospectrality and beyond.

[J. Comput. Appl. Math. 194, 141-155, 2006.](#)



M. Levitin, L. Parnovski, I. Polterovich.

Isospectral domains with mixed boundary conditions

[arXiv.math.SP/0510505b2 15 Mar2006.](#)



B. Noris and S. Terracini.

Nodal sets of magnetic Schrödinger operators of Aharonov-Bohm type and energy minimizing partitions.

[Indiana Univ. Math. J. 58\(2\), 617-676 \(2009\).](#)



A. Pleijel.

Remarks on Courant's nodal theorem.

Comm. Pure. Appl. Math., 9 : 543–550, 1956.



O. Parzanchevski and R. Band.

Linear representations and isospectrality with boundary conditions.

arXiv :0806.1042v2 [math.SP] 7 June 2008.

B. HELFFER : DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES, BAT. 425,
UNIVERSITÉ PARIS-SUD 11, 91 405 ORSAY CEDEX, FRANCE.

EMAIL : BERNARD.HELFFER@MATH.U-PSUD.FR