A walk inside the scientific work of Didier Robert
Une promenade dans l'oeuvre scientifique de Didier Robert.

B. Helffer

26 May 2025

De la Normandie à la Bretagne en passant par l'Alsace et le Poitou.

- Cabourg (en Normandie) (libération Août 1944, naissance de Didier le 24 Mai 1945),
- Caen (Etudes Supérieures)(1966-68),
- Strasbourg (DEA)(1968-69) ,
- Poitiers (69-71) (Thèse de troisième cycle en 1971),
- Nantes 1972 (Thèse d'Etat en 1977).

De la géométrie des Banach à la théorie spectrale

Didier est recruté comme Maître-assistant à Nantes avec une thèse de troisième cycle intitulée “Invariants orthogonaux pour certaines classes d'opérateurs”. Il s'intéresse alors à la géométrie des Banach mais très vite il intègre l'équipe créée par Pham The Lai, dont il devient l'un des piliers. Il devient ainsi un analyste fin en théorie spectrale (travaux d'Agmon, travaux de Birman...)

De la théorie spectrale aux méthodes microlocales

Il prend le train microlocal en s'intéressant aux travaux de Seeley, de Hörmander et de l'école russe de Tulovskii-Shubin.
La dernière partie de sa thèse est résolument pseudo-différentielle et interagit avec les travaux de Richard Beals.
C'est ce qui est publié dans son article à CPDE.
Bien plus tard, l'arrivée de la version (presque) finale du Calcul de Weyl par Hörmander va parachever ce que l'on pouvait espérer par cette approche.

Petit message posthume d'Anne-Marie Charbonnel (1946-2025)

Un jour de surveillance d'examen de Juin 1975, Didier Robert est venu me voir la pipe à la bouche et le sourire aux lèvres, avec à la main un article de R. Seeley sur les opérateurs pseudodifférentiels en me disant que je pouvais peut-être regarder ce papier pendant les vacances. Je lui avais alors répondu que oui, et que, si çà me plaisait, je me mettrais à travailler avec eux dans ce domaine. Et çà m'a plu !... En septembre 75 je me suis intégrée à l'équipe d'analyse. Nous étions peu nombreux à l'époque. Pham the Lai en était le directeur, et Didier jouait un rôle fondamental parce que Pham habitait alors Orléans. Didier était l'élément fédérateur du groupe...

Le séminaire d'Analyse de Nantes

Comme à Rennes, l'activité scientifique en équations aux dérivées partielles ou plus généralement en analyse à Nantes s'est organisée autour d'un séminaire initialement dirigé par Pham The Lai dont les exposés donnent lieu à rédaction.
En regardant les exposés publiés entre 1976 et 1980, on comprend que se prépare le terreau "spectral" qui permettra le démarrage de l'orientation semi-classique.
Regardons par exemple le programme du séminaire 1979-80.

Dans le programme du séminaire de Nantes 1979-1980

1 A.M. Charbonnel: Comportement asymptotique des valeurs propres d'opérateurs de la forme $a(x, hD_x)$ quand h tend vers 0.

4 Didier : Comportement asymptotique des valeurs propres d'opérateurs du type Schrödinger à potentiel dégénéré.

6 Y. Meyer: Multiplication des distributions.

9 M. Dauge: Problème de Stokes sur un secteur plan

12 Y. Meyer: Intégrales singulières.

13 Didier . L'opérateur de Schrödinger avec champ magnétique (d'après divers auteurs)

17 A. Mohamed. Etudes spectrale d'opérateurs hypoelliptiques à caractéristiques multiples

Il y a aussi des exposés par P. Lévy-Bruhl, B. Helffer (qui vient d'arriver à Nantes), G. Métivier, P. Bérard, C. Merucci,...qui sont moins liés avec mon propos ici.

Le développement de l'analyse semi-classique à Nantes

C'est sans doute la lecture des articles de J. Chazarain qui a servi de déclencheur mais il faut noter l'intérêt les années précédentes pour les travaux de l'école russe..
Un groupe de travail qui devait probablement comprendre (A.M. Charbonnel, M. Dauge, B. Helffer, A. Mohamed et bien sûr Didier) a travaillé d'arrache pieds pour comprendre l'article.

Analyse microlocale ou analyse semi-classique : la spécificité du choix semi-classique.

Pendant toute une période, il y a hésitation entre

- considérer l'analyse semi-classique comme un sous-cas (avec addition du paramètre h ou ajout d'une variable) de l'analyse pseudo-différentielle initialement construite pour la théorie des équations aux dérivées partielles
- ou comme un outil à construire directement pour l'adapter aux problèmes de la mécanique quantique et beaucoup d'autres.

Le deuxième choix doit beaucoup à Didier et son livre
Autour de l'analyse semi-classique
en est un signe fort.
Ce livre a été écrit vers 1983 (c'est au départ un cours de DEA à Nantes suivi d'un cours d'été au Brésil) mais il est paru en 1986. Il reste une référence ! On y voit bien sûr les travaux obtenus à l'époque mais le choix des sujets et des têtes de chapitre annonce bien l'activité débordante sur le sujet qui suivra.
Sur ce créneau, il y eut peu de livres citons B. Helffer, A. Martinez, Dimassi-Sjöstrand, Zworski...

Champs magnétiques

Il est intéressant de voir à quel moment apparaît l'intérêt chez les mathématiciens de regarder l'opérateur de Schrödinger avec champ magnétique. Dans le séminaire de Nantes 79-80, Didier nous fait un exposé sur le sujet avec deux références: Avron–Herbst–Simon, Combes-Seiler-Schrader ....
Les résultats concernent des critères pour montrer le caractère essentiellement auto-adjoint, le diamagnétisme et les bouteilles magnétiques. Certes, il aurait pu citer T. Kato mais en cherchant dans les bibliographies de [AHS] et [CSS], je n'ai trouvé Ikebe-Kato (1962), B. Simon (1973), Schechter (1975), Lavine-O'Caroll (qui fut l'inspirateur pour moi d'une étude de l'effet d'Aharonov-Bohm) (1977). En tout cas ce nombre est très petit.

Si on pense au grand nombre de publications publiées actuellement sur le sujet (des centaines ?), c'est vraiment impressionnant.
Si on se limite à Nantes, la thématique est très présente chez Didier, ses élèves (F. Nicoleau,...), chez moi avec mes élèves nantais (A. Morame, O. Hebbar). C'est Catherine Bolley qui m'a conduit à m'intéresser aux problèmes magnétiques en supraconductivité, et rien que cette année académique on va trouver une dizaine d'articles dont le dernier est annoncé il y a une semaine sous le titre:
Longtime dynamics for the Landau Hamiltonian with a time dependent magnetic field
écrit par Dario Bambusi, Benoit Grébert, Alberto Maspero, Didier Robert, et Carlos Villegas-Blas.
Sur ce sujet "magnétique" comme sur beaucoup d'autres sujets, la curiosité scientifique de Didier l'a conduit à détecter pour l'équipe les bons problèmes.

Scattering

L'intérêt pour le scattering de Didier s'est peut-être développé lors des visites de V. Petkov et celles de H. Tamura. Certes il y avait aussi des travaux semi-classiques en scattering de Chazarain mais c'était dans un premier temps surtout les questions sur les fonctions de comptage (qui seront ensuite considérées par V. Ivrii) qui avaient attiré l'attention des nantais.
De nombreuses générations de chercheurs ont pris la suite, combinant les techniques développés dans ces premiers articles et celles développées parallèlement autour de la théorie des résonances.
Dans les premiers ayant interagi avec Didier sur ce sujet, on peut mentionner C. Gérard et A. Martinez puis de nombreux élèves de Didier à commencer par X.P. Wang puis E. Latrémolière, J.M. Bouclet.

Etats cohérents

A partir de 1994, Didier entame une collaboration avec M. Combescure. Si elle porte tout d'abord sur des sujets liés au chaos quantique, elle bifurque ensuite sur les techniques d'états cohérents dans le cadre semi-classique (voir thèse de J.M. Bily). L'ouvrage "Coherent States and Applications in Mathematical Physics" écrit avec Monique Combescure est publié en 2012.

Bien sûr cette technique n'est pas nouvelle. On la trouve dans les travaux de Ralston sur les quasi-modes et elle réapparaît sous différentes formes dans la transformation de Fourier-Bros-Iagolnitzer-Sjöstrand.

Ici, c'est sur la précision des résultats obtenus qu'il faut insister.

Dans ce domaine, l'activité de Didier reste constante jusqu'à aujourd'hui:

- Rédaction d'une deuxième édition augmentée du Livre avec Monique
- Nombreux travaux avec Clotilde Fermanian Kammerer et Caroline Lasser.

Beaucoup de responsabilités acceptées

- Sur Nantes,
  Direction du laboratoire ou du département.
  Si Pham The Lai a été le créateur de l'équipe, Didier en a été le consolideur et le développeur.
- Nouveau bâtiment de la bibliothèque de Nantes (CRDM).
- Saint-Jean de Monts
  Coorganisateur du colloque durant de nombreuses années.
- Organisateur principal de l'année semi-classique 1990-1991 ..
- Coorganisateur de nombreuses journées semi-classiques...
- Consultant, au ministère de la recherche sur la Montagne Ste-Geneviève,
  pour les mathématiques...

De nombreux collaborateurs

dans l'ordre d'apparition....

Pham the Lai, V. Petkov, B. Helffer, H. Tamura, M. Dauge, C. Gérard, A. Martinez, X.P. Wang, M. Klein, F. Nicoleau, M. Combescure, V. Bruneau, V. Sordoni, J. Ralston, S. Debièvre, A. Bouzouina, A. Laptev ...., L. Thomann, A. Maspero, F. Aboud, D. Bambusi, B. Grébert, C. Fermanian-Kammerer, C. Lasser, F. Jauberteau,...
J'en ai sûrement oublié !

Ses élèves

1. X.P. Wang (1984), Thèse de $3^{ème}$ cycle, Etude semi-classique d'observables quantiques.
2. A. Balazard-Konlein (1985), Thèse de $3^{ème}$ cycle, Approximation classique d'opérateurs à coefficients opératoriels.
3. X.P. Wang (1986), Thèse d'état (codir. avec B. Helffer), Asymptotiques semi-classiques pour les opérateurs de Schrödinger et de Dirac.
4. A.M. Charbonnel (1989), Thèse d'état (codir. avec B. Helffer), Contribution à l'étude du spectre conjoint de systèmes d'opérateurs qui commutent.
5. F. Nicoleau (1991), Thèse de doctorat, Théorie de la diffusion pour l'opérateur de Schrödinger en présence d'un champ magnétique.

6 E. Latremolière (1994), Thèse de doctorat, Théorie de la diffusion et résonances pour des métriques perturbées.

7 M. Bouloussa (1994), Thèse de doctorat (codir. avec J. Giroire), Problèmes aux limites extèrieurs pour des plaques minces et équations intégrales de frontière.

8 V. Bruneau (1995), Thèse de doctorat, Propriétés asymptotiques du spectre continu de l'opérateur de Dirac.

9 J. Barbe (1996), Thèse de doctorat (codir. avec A. Morame), Asymptotiques de valeurs propres par le principe de Birman-Schwinger.

10 J.M. Bouclet (2000), Thèse de doctorat, Distributions spectrales pour des opérateurs perturbés.

11 J.-M. Bily (2001), Thèse de doctorat, Propagation d'états cohérents et applications.

12 R. Cassanas (2005), Thèse de doctorat, Hamiltoniens quantiques et symétries.

13 F. Aboud (2009) Thèse de doctorat, Problèmes aux valeurs propres non linéaires.

Evoquer nos collaborations.

Bien sûr j'aurais pu parler de cette semaine à travailler avec A. Martinez et Didier a écrire la bonne version semi-classique du théorème de Shnirelman (relayé par les travaux de Zelditch-Colin de Verdière), version racontée dans le cours l'année dernière de Nalini Anantharaman au Collège de France) ou d'un exemple non semi-classique où l'ouverture scientifique de Didier fit merveille. Il s'agissait, après l'exemple fameux de Baouendi-Goulaouic, de montrer que

$$D_x^2 + (D_y - x^2 D_z)^2 \ ,$$

n'était pas hypoelliptique analytique. J'avais ramené cette question à la question de savoir s'il existait $\alpha \in \mathbb{C}$, tel que

$$\text{Ker } \left[D_x^2 + (x^2 - \alpha)^2\right] \cap \mathcal{S}(\mathbb{R}) \neq \{0\} \ .$$

La réponse fut donnée très rapidement dans le travail de Pham The Lai et Didier . Cet oscillateur quartique réapparaîtra dans beaucoup de travaux ultérieurs avec ou sans Didier.

Je choisis plutôt de parler du calcul fonctionnel et des inégalités de Lieb-Thirring. Bien sûr les exposés qui suivront dans cette conférence complèteront la description du large éventail des sujets que Didier a abordés.

Je passe à l'anglais ! I switch to the english !

Functional Calculus

Starting from a selfadjoint operator P, it is easy using the spectral decomposition of P to define $f(P)$ for large classes of functions f defined on the spectrum of P. The question appearing rapidly was to see if we can get more information when P is the realization of a differential operator. In the seventies, particular cases were already analyzed like $f(t) = (t-\lambda)^{-1}$ (the resolvent) or $f(t) = t^s$ and $\mathrm{Tr}\, f(P)$ was one of the interesting objects.

In the second case, when P has compact resolvent, one gets the generalized ζ function

$$\zeta(s) = \sum_j \lambda_j^s$$

a priori defined for $\Re s$ sufficiently negative and then extended by meromorphy.

This kind of analysis is already present in the "thèse d'état" of Didier who considers Beals classes of globally hypoelliptic operators.

The question is what to do for general f.
One first efficient idea was to use Dunford-Schwartz integral relating $f(P)$ and $(P-z)^{-1}$

$$f(P) = (2\pi)^{-1} \int_\Gamma f(z)(z-P)^{-1} dz\,,$$

but we need the holomorphy of f and good information on the resolvent along suitable (possibly unbounded) contours.

One could also think of using the Fourier transform

$$f(P) = \int e^{itP} \hat{f}(t) dt\,,$$

But here we need information on e^{itP} which is usually not easy.

In the case of operators with compact resolvent, one can think of an approach developed by R. Strichartz in the case of the Laplacian (1972). This is what Didier is developing in the paper: *Calcul fonctionnel sur les opérateurs admissibles et application* in 1982.

Note that to have f with compact support is only interesting in the semi-classical context or when another parameter is present.

At this time we discuss about the way to avoid this assumption of compact resolvent in the result. Strichartz's proof explicitly uses the eigenvalues and a corresponding basis of eigenfunctions to recognize $f(P)$ as a pseudo-differential operator.
The discussions were conclusive and we can propose a general statement very well adapted to the semi-classical analysis.

The proof is rather complicate: analysis of P^s and then use the Mellin transform to come back to $f(P)$.

A few years later, another proof using Dynkin formula (popularized by B. Davies under the name Helffer-Sjöstrand) leads to the same result with weaker assumptions on the resolvent.

But let us look at the applications and this is actually the main message of the papers of [R] and [HR]:
The functional calculus plays an important role in semi-classical analysis for the localization in energy.

Let us give a few details.

We consider P_h an h-pseudo-differential operator

$$(P_h u)(x) = (2\pi h)^{-n} \int e^{i(x-y)\xi/h} p((x+y)/2, \xi, h) u(y) dy d\xi\,,\ u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)\,.$$

of symbol $p(x, \xi, h)$ in a suitable class:

$$p(x, \xi, h) \sim \sum_{j=0}^{+\infty} h^j p_j(x, \xi)\,.$$

Then under suitable assumptions on f,

$$f(E,h) = \sum_{j=0}^{+\infty} f_j(E) h^j \,,$$

we show (Helffer-Robert) that $f(P_h, h)$ is an h-pseudodifferrential operator, is trace-class and that its trace is

$$\mathrm{Tr}\, f(P(x, hD_x, h)) \sim (2\pi h)^{-n} \Big(\int f_0(p_0(x,\xi)) dx d\xi + \sum_{j \geq 1} \alpha_j h^j \Big)$$

Here the formula holds under the condition that $p_0^{-1}(E_1, E_2)$ is compact (which implies that $P(x, hD_x; h)$ has discrete spectrum in (E_1, E_2)) and that f has compact support in (E_1, E_2).

A second application is that it simply permits a localization in energy. For some f with compact support, we are led to analyze $f(P)e^{-itP/h}$ which in some cases is easier after this localization.

This is sometimes an alternative to the "microlocalization" which would consist in considering $\chi(x, hD_x)e^{-itP/h}\chi(x, hD_x)$.

Semi-classical analysis in 1D

In connexion with the Bohr-Sommerfeld formula, we [HR84] (Puits de potentiel généralisés et asymptotique semi-classique) can in a non-critical zone for the Hamiltonian determine a function $t \mapsto f(\cdot, h)$ such that $f(P(h), h)$ has the same spectrum (modulo $\mathcal{O}(h^\infty)$) as the harmonic oscillator this leads to the description of the spectrum in this energy window in the form

$$\lambda_n(h) \sim g((n + \frac{1}{2})h, h)$$

with

$$g(t, h) \sim \sum_j g_j(t) h^j \,.$$

This kind of results was more or less well known for Schrödinger operators, looking at WKB expansions.

Riesz means

Given some $\lambda \in \mathbb{R}$ and $s \geq 0$, and assuming that the spectrum of P_h is discrete in $(-\infty, \lambda + \epsilon]$ we consider the h dependent expression

$$\sum_j (\lambda - \lambda_j(h))_+^s = \mathrm{Tr}\big((\lambda - P_h)_+\big)^s .$$

For $s = 0$, this is the counting function i.e. the number of eigenvalue below λ (assuming that this is finite), but the case $s = 1$ plays an important role in mathematical physics, as show by E. Lieb and W. Thirring (1975). In this context, we are outside the previous functional calculus, f is not C^∞, but with increasing s more and more terms appear to be relevant !

Using in addition a Tauberian theorem, we get [HeRo2] with $g_{\lambda,\gamma}(t) = (\lambda - t)_+^\gamma$ and assuming that $\{p_0(x,\xi) < \lambda\}$ is compact and λ is not critical.

$$\begin{aligned}&\mathrm{Tr}\, g_{\lambda,\gamma}(P(x, hD_x, h))\\ &\quad\sim (2\pi h)^{-n}\Big(\int_{p_0<\lambda} (\lambda - p_0(x,\xi))^\gamma dx d\xi + \sum_{j=1}^{[\gamma+1]} \alpha_j(\gamma) h^j + \mathcal{O}(h^{\gamma+1}\end{aligned}$$

- $\gamma = 0$ corresponds to the result for the counting function.
- α_1 appears relevant as soon as $\gamma > 0$.
- When $\gamma = 1$ we have a competition between α_2 and the oscillating term. See the work of V. Bruneau for a more complete analysis.

Around Lieb-Thirring

Considering $P := -\Delta + V$ with $\liminf_{|x|\to+\infty} V \geq 0$, Lieb-Thirring prove for $n = 3$ that

$$\sum_{\lambda_j<0} (-\lambda_j) \leq L_{1,n} \int_{V<0} (-V)^{\frac{n}{2}+1} dx$$

and conjecture (<1976) that $L_{1,n} = L^{sc}_{1,n}$.

This is a particular case of a general programme devoted to the analysis of the inequality

$$\sum_{\lambda_j<0}(-\lambda_j)^\gamma \leq L_{\gamma,n}\int_{V<0}(-V)^{\frac{n}{2}+\gamma}dx$$

the question being to determine when $L_{\gamma,n}$ exist and when $L_{\gamma,n} = L^{scl}_{\gamma,n}$.
One can show that there exists a $\gamma_c(n)$ such that $L_{\gamma,n} = L^{sc}_{\gamma,n}$ for $\gamma > \gamma_c(n)$ and $L_{\gamma,n} > L^{sc}_{\gamma,n}$ for $\gamma < \gamma_c(n)$.

We look at this problem in the nineties in two papers.
Semi-classical analysis (as mentioned below) permits to show that when $n = 1$, $\gamma_c \geq 3/2$. For $n = 3$, we explore the idea that we should test the inequality for the radial harmonic oscillator !
Strangely, this had not tried before. We have to consider the validity (or not) of

$$\sum_{j\geq 0} m(j,n)\left(1-(j+\frac{n}{2})h\right)_+^\gamma \leq (2\pi h)^{-n} \int_{\xi^2+V(x)\leq 1} (1-\xi^2-V(x))^\gamma dx d\xi\,,$$

where $m(j,n)$ is the multiplicity of the eigenvalue $(j+\frac{n}{2})$ of $(-\Delta + \frac{1}{4}|x|^2)$ (so above $V(x) = \frac{1}{4}|x|^2$).
Using that the left hand side can be analyzed by a Poisson Formula combined with a precise information using special function, we can show that when $n = 3$, this inequality does not hold for every $h > 0$ when $\gamma < 1$ this shows that $\gamma_c(3) \geq 1$.

This was new at the time.
Notice that the conjecture is still open, but estimates of the type $L_{1,3} \leq \rho L^{cl}_{1,3}$ with a ρ close to one have been obtained along the years, starting with $\rho = 2$ proven by A. Laptev and T. Weidl (2000).

The best ρ at the moment is 1.456 (see Frank-Hundertmark-Jex-Nam (2021)).

Notice also the recent book by R. Frank, A. Laptev and T. Weidl (2023) which is entirely devoted to the subject !

Recent results with R. Frank and F. Nicoleau

We realize recently, that we can have more precise results for the semi-classical harmonic oscillator

Theorem for the Harmonic oscillator

Let $\gamma \geq 0$. $\exists\ (c_{m,\gamma})_{m=0}^{\infty}$ and 1-periodic functions $(\sigma_{p,\gamma})_{p=0}^{n-1}$ with mean zero such that

$$\mathrm{Tr}(-h^2\Delta + \frac{1}{4}|x|^2 - 1)_-^\gamma = h^{-n}\sum_{m=0}^{+\infty} c_{m,\gamma}\, h^m + h^{-n+1+\gamma}\sum_{p=0}^{n-1}\sigma_{p,\gamma}(h^{-1})\, h^p + \mathcal{O}(h^{+\infty})\,.$$

$$c_{0,\gamma} = \frac{1}{(\gamma+n)(\gamma+n-1)\cdots(\gamma+1)}\ \text{(Weyl term)}\,,$$

$$\sigma_{0,\gamma}(\phi) = \frac{2\,\Gamma(\gamma+1)}{(d-1)!}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{kn}}{(2\pi k)^{1+\gamma}}\ \sin(2\pi k\phi - \tfrac{\pi}{2}\gamma)\,.$$

The Coulomb case

In this case we arrive modulo $\mathcal{O}(h^{-n+2})$ at

$$\boxed{\mathrm{Tr}(-h^2\Delta - 2|x|^{-1} + 1)_-^\gamma \sim \mathrm{Weyl} + \tilde{\sigma}_\gamma(h^{-1})h^{-n+1+\gamma} + c_\gamma h^{-2\gamma}}$$

with

$$\boxed{\tilde{\sigma}_\gamma(\phi) = \frac{2^{\gamma+2}\Gamma(\gamma+1)}{(n-1)!}\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k(n-1)}\sin(2\pi\phi k - \frac{\pi}{2}\gamma)(2\pi k)^{-1-\gamma}}$$

and

$$\boxed{c_\gamma = -\frac{4\,\Gamma(n-2\gamma)}{(n-1)!}\sin(\frac{\pi}{2}(n-1-2\gamma))\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k(n-1)}(2\pi k)^{-n+2\gamma}\,.}$$

In particular, we deduce that for $n=3$, $\gamma < 2/3$, the Weyl term is not an upper bound for the Riesz mean.

End of the walk

Sous l'apparence d'un chercheur discret se cache en fait un chercheur créatif et doté d'une grande énergie. Sa grande ouverture scientifique, que ce soit en analyse ou en physique, a permis la mise en évidence et la résolution de nombreux problèmes de physique mathématique. Il a été un grand chef d'équipe, il reste un membre fidèle et présent, un sage et un chercheur actif dans notre équipe.

BON ANNIVERSAIRE Didier.

M. Aizenman and E. Lieb.
On semiclassical bounds for eigenvalues of Schrödinger operators.
Phys. lett. A, §§(6), 427-429 (1978).

R. de la Bretèche.
Preuve de la conjecture de Lieb-Thirring dans le cas dess potentiels quadratiques strictement convexes.
Ann. Inst. H. Poincaré Phys. Théor. 70 (4), 369-380.

V. Bruneau.
Semi-classical asymptotics of Riesz means,
London Math. Soc. (2) 62 (2000) 613–624.

R.L. Frank, A. Laptev, and T. Weidl.
Schrödinger Operators: Eigenvalues and Lieb-Thirring Inequalities
Cambridge studies in advanced mathematics 200.

B. Helffer and D. Robert

Calcul fonctionnel par la transformée de Mellin et opérateurs admissibles.
J. Funct. Anal., 53(3), 246-268 (1983).

B. Helffer and D. Robert
Riesz means of bounded states and sermi-classical limit connected with a Lieb-Thirring conjecture.
Asymptotic Anal., 3(2), 91-103 (1990).

B. Helffer and D. Robert
Riesz means of bounded states and sermi-classical limit connected with a Lieb-Thirring conjecture II.
Ann. Inst. H. Poincaré Phys. Théor., 52(4), 303-375.

B. Helffer and J. Sjöstrand.
On diamagnetism and de Haas-van Alphen effect.
Ann. Inst. H. Poincaré Phys. Théor. 52(4), 303-375 (1990).

E.H. Lieb and W.E. Thirring.

Inequalities for the moments of the eigenvalues of the Schrödinger Hamiltonian and their relation to Sobolev inequalities.
Pages 269-303 of: Studies in Mathematical Physics (Essays in Honor of Valentine Bargmann). E.H. Lieb, B. Simon, and A.S. Wightman (editors). Princeton University Press, Princeton, NJ. (1976).

Lukas Schimmer.
The state of the Lieb-Thirring conjecture.
arXiv 2022.