Estimations hypoelliptiques globales et compacité de la résolvante pour des opérateurs de Fokker-Planck ou des laplaciens de Witten

Bernard Helffer
Département de Mathématiques, UMR CNRS 8628,
Bât. 425, Université Paris-Sud,
F-91405 Orsay Cedex, France.
E.Mail: Bernard.Helffer@math.u-psud.fr

23 décembre 2003

Résumé

Ces dernières années, les estimations hypoelliptiques ont connu une nouvelle jeunesse en liaison avec des questions provenant de la théorie cinétique des gaz. Dans cette direction de nombreux auteurs ont en effet eu besoin de démontrer des estimations maximales pour en déduire la compacité de l'opérateur de Fokker-Planck et avoir des estimations sur la résolvante permettant d'aborder la question du retour à l'équilibre. Dans un article très récent, F. Hérau et F. Nier (inspirés par des calculs explicites du livre de Risken) ont mis en évidence les liens étroits entre ces questions et des questions analogues pour un laplacien de Witten. L'étude de ces liens est poursuivie et systématisée dans un livre en préparation écrit en collaboration avec F. Nier dont nous allons présenter quelques aspects ici en présentant parfois un éclairage différent sur un problème qui laisse encore beaucoup de conjectures non résolues.

1 Introduction

Les nouveaux résultats présentés ici ont été obtenus en collaboration avec F. Nier [HelNi2]. Pour un potentiel C^∞ V sur $\mathbb{R}^n$, l'opérateur de Fokker-Planck est défini [1] sur $\mathbb{R}^{2n}$ par

$$K := -\Delta_y + y^2 - n + H_\Phi \tag{1.1}$$

avec

$$\Phi(x,y) = \frac{1}{2}y^2 + V(x) \tag{1.2}$$

et où H_Φ est le champ hamiltonien associé à Φ :

$$H_\Phi = y \cdot \nabla_x - (\nabla_x V)(x) \cdot \nabla_y \,. \tag{1.3}$$

Il y a plusieurs manières d'écrire cet opérateur. Chacune reflète une attaque possible des problèmes pour l'opérateur.

La première est de le considérer comme un opérateur de Hörmander de type 2

$$K = X_0 - \sum_\ell \left((X_1^\ell)^2 + (X_2^\ell)^2 - i[X_1^\ell, X_2^\ell] \right) \,, \tag{1.4}$$

avec

$$X_0 = H_\Phi \,, ; X_1^\ell = \partial_{y_\ell} \,,\ X_2^\ell = i\, y_\ell \,. \tag{1.5}$$

Les crochets des champs de vecteurs vont jouer un rôle important. Un calcul immédiat donne :

$$[X_0, X_1^\ell] = \nabla_{x_\ell} \,,\ [X_0, X_2^\ell] = i(\nabla_{x_\ell} V)(x) \,. \tag{1.6}$$

En particulier, les champs de vecteurs X_1^ℓ et $[X_0, X_1^\ell]$ engendrend tout l'espace tangent à $\mathbb{R}^{2n}$ de sorte que l'opérateur K est hypoelliptique.

La seconde est d'écrire K en utilisant le formalisme des opérateurs de création et d'annihilation intervenant en mécanique quantique :

$$K = X_0 + b^* b \text{ où } X_0 = (b^* a - a^* b) \,. \tag{1.7}$$

1. On notera qu'en théorie cinétique des gaz la variable y est appelée v et correspond à une vitesse.

avec

$$b = \partial_y + y = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \qquad a = \partial_x + \partial_x V = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} . \tag{1.8}$$

Les adjoints de a et b sont

$$b^* = (b_1^*, \ldots , b_n^*) \quad \text{et} \quad a^* = (a_1^*, \ldots , a_n^*). \tag{1.9}$$

Les operateurs a et b peuvent aussi être compris comme des différentielles tordues $\exp -V d_x \exp V$ et $\exp -\frac{y^2}{2} d_y \exp \frac{y^2}{2}$, qui ont été introduites par Witten [Wi] pour donner une démonstration analytique des inégalités de Morse.

Deux laplaciens de Witten vont jouer un rôle important : a^*a et $a^*a + b^*b$. On notera que :

$$a^*a = \Delta_V^{(0)} := -\Delta + |\nabla V|^2 - \Delta V \ , \tag{1.10}$$

et que :

$$a^*a + b^*b = \Delta_\Phi^{(0)} \ . \tag{1.11}$$

Par séparation des variables on voit que les propriétés spectrales et les inégalités maximales pour ces deux opérateurs sont intimement liées.

La principale question qui nous vient de la théorie cinétique est d'analyser le "retour à l'équilibre".

Rappelons un peu d'analyse abstraite pour développer notre propos. Si $\mathcal{H}$ est un espace de Hilbert complexe, un opérateur non borné A sur $\mathcal{H}$ de domaine $D(A)$ est appelé accrétif si

$$\mathrm{Re}\, \langle Ax \mid x \rangle_{\mathcal{H}} \geq 0 \ , \ \forall x \in D(A) \ . \tag{1.12}$$

Un opérateur accrétif operator A est accrétif maximal s'i n'existe pas une extension accrétive $\tilde{A}$ de A à domaine strictement plus grand. On peut montrer que dans le cas considéré ici la fermeture de K défini au départ sur $C_0^\infty(\mathbb{R}^{2n})$ est un opérateur accrétif maximal. Nous renvoyons à "l'Ecole Suisse" [EckPiRe-Be, EckHai1, EckHai2, Re-BeTh1, Re-BeTh2, Re-BeTh3] pour l'étude de nombreux cas qui a initiée ce renouveau, à [HerNi] pour notre opérateur plus spécifique et surtout [HelNi2] pour une démonstration qui s'inspire à un truc près (consistant à faire une régularisation anisotrope) de la preuve [Sima, Hel] que le laplacien de Witten $\Delta_V^{(0)}$ est essentiellement autoadjoint.

A partir de maintenant, on confond au niveau des notations K et $\overline{K}$ et la question du retour à l'équilibre est de déterminer s'il existe $\alpha > 0$ tel que pour $t \geq 0$

$$|| \exp -tK - \Pi_0 || \leq \exp -\alpha t \ , \tag{1.13}$$

où Π_0 est le projecteur sur $\exp -\Phi$ lorsque cette fonction est dans L^2 et est égal à 0 sinon. Nous observons en effet qu'au sens des distributions :

$$K \exp -\Phi = 0 \ . \tag{1.14}$$

Lorsque l'inégalité (1.13) est vérifiée, nous dirons qu'on a un retour à l'équilibre (à vitesse) exponentiel(le).

La difficulté de l'étude pour Fokker-Planck operator K vient du fait qu'il n'est ni autoadjoint, ni elliptique ni sectoriel. On doit donc substituer à la théorie standard des critères plus fins que l'on donne en particularisant un peu (cf [HerNi, HelNi2, EckHai2]). Si K est accrétif maximal et à résolvante compacte, il suffit pour avoir retour à l'équilibre exponentiel de démontrer l'existence d'un opérateur autoadjoint à résolvante compacte $(\Lambda, D(\Lambda))$, $\Lambda \geq 1$, et de constantes $C > 0$, $M \geq m > 0$ telles que

$$\|\Lambda^m u\|^2 \ \ \leq C \left(\|(K - i\nu)u\|^2 + \|u\|^2 \right) \ , \ \ \forall \nu \in \mathbb{R}, \, \forall u \in D(K) \ , \tag{1.15}$$

$$\|Ku\|^2 \ \ \leq C \left\|\Lambda^M u\right\|^2 \ , \ \ \forall u \in D(\Lambda^M) \ . \tag{1.16}$$

On est donc conduit à localiser le spectre (ou plutôt le pseudo-spectre voir [Dav] and [DeSjZw] pour plus de détails) de K et la preuve de (1.15) nécessite des estimations plus fines.

Notre objectif est donc de donner des conditions suffisantes sur V pour que K soit à résolvante compacte et que les conditions ci-dessus soient satisfaites.

Plus généralement, nous discuterons certains aspects de la

Conjecture 1.1. *K est à résolvante compacte si et seulement si $\Delta_V^{(0)}$ est à résolvante compacte.*

Le plan de cet article est le suivant. A la section suivante, nous développerons le lien entre l'opérateur de Fokker-Planck et le laplacien de Witten et nous énoncerons le théorème obtenu par [HelNi2] en généralisation de [HerNi]. La troisème section présentera quelques critères de compacité pour le laplacien de Witten (nous renvoyons à l'exposé de F. Nier et à [HelNi1] pour plus de développements) et la quatrième présentera les techniques pseudo-différentielles. Les trois sections suivantes présentent une démonstration alternative originale du théorème principal démontré par Helffer-Nier [HelNi2]. A la dernière section nous esquisserons comment une approche de type nilpotent permet d'améliorer les estimations sous des hypothèses plus fortes.

Remerciements
Les travaux avec F. Nier ont été favorisés par une année sabbatique accordée par le CNU, qui a en particulier permis à l'auteur des séjours très profitables à l'Institut Mittag-Leffler, à l'université de Rennes, au MSRI de Berkeley et à l'Université de Munich. L'auteur a aussi bénéficié du soutien de réseaux européens (Programme SPECT de l'ESF et programme HPRN-CT-2002-00277 de la communauté européenne). Il souhaite également remercier F. Nier pour une très riche coopération et de nombreux collègues pour leurs remarques, en particulier C. Villani et J.-M. Bony. Enfin des remerciements chaleureux à C. Zuily et B. Dehman pour avoir organisé cette fructueuse rencontre en Tunisie.

2 De Fokker-Planck au Laplacien de Witten

2.1 Conditions nécessaires pour la compacité de la résolvante

Proposition 2.1. *On suppose que V est une fonction C^∞. Si K est à résolvante compacte alors le Laplacien de Witten est à résolvante compacte.*

La preuve est basée sur la remarque que si u_k est une suite orthonormale telle que $\langle \Delta_V^{(0)} u_k \mid u_k \rangle$ est bornée, alors

$$U_k(x,y) = u_k(x)(2\pi)^{-n/4} \exp -|y|^2/2$$

est une suite de Weyl pour K. ∎

Les résultats de la Proposition 2.1 nous indiquent qu'il n'est pas possible de dériver la compacité de la résolvante de K directement de celle de $-\Delta_x +$

$|\nabla V(x)|^2$ par un argument abstrait. On peut en effet montrer que par exemple $\Delta_V^{(0)}$ n'est pas à résolvante compacte pour $V(x_1,x_2)=x_1^2x_2^2$ alors que $-\Delta_x+|\nabla V(x)|^2$ a la propriété. Une suite de Weyl peut-être obtenue en multipliant $\exp -V(x)$ (qui dans ce cas n'est pas dans L^2 mais vérifie $\Delta_V^{(0)}\exp -V=0$ au sens des distributions) par une suite χ_n de fonctions à support contenu dans des couronnes dyadiques (see [HelNi1]). Cela nous conduit à penser qu'une transposition simple de l'argument de Kohn [Ko] va sûrement bloquer sans addition d'hypothèse spécifique.

2.2 Résultat principal

Les résultats présentés sont en collaboration avec F. Nier [HelNi2]. Pour vérifier les hypothèses du théorème abstrait garantissant le retour à l'équilibre pour K. On introduit

Hypothèse 1. *Le potentiel V vérifie les inégalités*

$$\forall\alpha\in\mathbb{N}^n, |\alpha|\geq 1, \forall x\in\mathbb{R}^n \quad |\partial_x^\alpha V(x)|\leq C_\alpha\langle\nabla V(x)\rangle\,, \tag{2.1}$$

$$\exists M, C\geq 1, \forall x\in\mathbb{R}^n, \quad \langle\nabla V(x)\rangle\leq C\,\langle x\rangle^M\,, \tag{2.2}$$

et une condition de coercivité

$$\exists M, C\geq 1, \forall x\in\mathbb{R}^n, \quad C^{-1}\,\langle x\rangle^{1/M}\leq\langle\nabla V(x)\rangle\,. \tag{2.3}$$

Une hypothèse alternative est de supposer que

Hypothèse 2. *Le potentiel V vérifie (2.1), (2.2), avec l'hypothèse de coercivité remplacée par*

$$\forall x\in\mathbb{R}^n, \ \left|\nabla^2 V\right|\leq C\langle\nabla V(x)\rangle\,\langle x\rangle^{-\rho_0}\,, \quad \rho_0>0. \tag{2.4}$$

On a alors le théorème

Théorème 2.2. *On suppose que $V(x)$ vérifie l'hypothèse 1 ou 2. Supposons de plus dans le deuxième cas que $\Delta_V^{(0)}$ est à résolvante compacte. Alors K est à résolvante compacte et on a retour à l'équilibre exponentiel.*

Preuve.

La démonstration résultera de la démonstration de l'inégalité (1.15) avec $\Lambda=a^*a+b^*b+1$, $m=\frac{1}{8}$, que nous donnerons à la section 7. ∎

Il est aussi intéressant de remarquer que $K^*=UKU^*$ où U est la transformation unitaire donnée par $Uu(x,y)=u(x,-y)$. Les résultats pour K sont ainsi immédiatement applicables à K^*.

3 Critères de compacité pour la résolvante de l'opérateur de Schrödinger et le Laplacien de Witten.

On sait bien sûr que l'opérateur de Schrödinger de la forme $-\Delta + V$, dont le potentiel V est semi-borné sur $\mathbb{R}^n$ et C^∞, est essentiellement autoadjoint. Il est moins connu mais encore vrai que c'est encore le cas si

$$S_V := -\Delta + V$$

est semi-borné sur C_0^∞ (voir par exemple [Hel]) et nous avons déjà mentionné l'application de ce résultat au Laplacien de Witten. Si de plus le potentiel V tend vers l'infini à l'infini, il est aussi classique que S_V est à résolvante compacte. Nous rappelons que cette condition est loin d'être nécessaire. Rappelons par exemple un critère dans le cas où $V(x) = \sum_{\ell=1}^{k} V_\ell(x)^2$. On introduit :

$$m_q(x) = \sum_{\ell} \sum_{|\alpha|=q} |\partial_x^\alpha V_\ell| \, . \tag{3.1}$$

Si on pose $X_j = \partial_{x_j}$ pour $j = 1, \cdots, n$ et $X_{\ell+n} = V_\ell$, il est immédiat de réinterpréter cette quantité à partie des commutateurs des X_j. On introduit ensuite

$$m^r(x) = 1 + \sum_{q=0}^{r} m_q(x) \, . \tag{3.2}$$

Le critère de [HelMo] est alors

Théorème 3.1. *Supposons qu'il existe r et C tels que*

$$m_{r+1}(x) \leq C\ m^r(x)\ ,\ \forall x \in \mathbb{R}^n\ , \tag{3.3}$$

et

$$m^r(x) \to +\infty\ , \quad \textit{quand } |x| \to +\infty\ . \tag{3.4}$$

Alors l'opérateur est à résolvante compacte.

L'exemple le plus connu dans cet esprit est $-\Delta + x_1^2 x_2^2$ en dimension 2. Il peut d'ailleurs être traité par de multiples approches (voir [Ro2], [Sim] et [HelNo], [HelMo]).

Considérons maintenant le Laplacien de Witten $\Delta_\Phi^{(0)}$. Il est bien sûr trivial de montrer que si

$$|\nabla\Phi(x)|^2 - \Delta\Phi(x) \to +\infty \ , \text{ quand } |x| \to +\infty \ , \tag{3.5}$$

alors $\Delta_\Phi^{(0)}$ est à résolvante compacte. Une combinaison avec un argument de crochet (voir [BoDaHel], [Hel]), montre que c'est encore vrai sous la condition plus faible qu'il existe $t \in [1,2[$ tel que

$$t|\nabla\Phi(x)|^2 - \Delta\Phi(x) \to +\infty \ , \text{ quand } |x| \to +\infty \ . \tag{3.6}$$

L'analyse est en fait beaucoup plus compliquée et malgré les efforts de [HelNi1, HelNi2] (voir aussi [Ni] pour une présentation des premiers résultats) on est encore très loin d'avoir une caractérisation (dans le cas polynomial de la compacité). On notera par exemple que pour $\Phi = x_1^2 x_2^2 + \varepsilon(x_1^2 + x_2^2)$, $\varepsilon \geq 0$, le Laplacien de Witten est à résolvante compacte si et seulement si $\varepsilon > 0$.

Finalement remarquons qu'il résulte directement de la comparaison :

$$0 \leq \Delta_\Phi^{(0)} \leq 2S_\Phi \ , \tag{3.7}$$

entre opérateurs symétriques sur $C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ que si $\Delta_\Phi^{(0)}$ est à résolvante compacte alors S_Φ est aussi à résolvante compacte, la réciproque étant fausse en général.

4 Une classe d'opérateurs pseudodifférentiels

Le lecteur pourra travailler avec la quantification qu'il préfère pour définir son calcul pseudodifférentiel. Pour mesurer notre "régularité" nous introduisons les deux opérateurs :

$$\Lambda_1 = \sqrt{1 - \Delta_x + |\nabla V(x)|^2 - \Delta V} \tag{4.1}$$

et

$$\Lambda_2 = \Lambda_2(\lambda) = \sqrt{\lambda - \Delta_y + y^2 - n} \ . \tag{4.2}$$

Ici $\lambda > 0$ est un paramètre que nous serons amené à choisir assez grand. Sous les hypothèses (1) ou (2), il y a un calcul attaché au problème que nous utilisons assez librement (voir [Hor2, Ro1, Be, BonChe] et des travaux plus récents que nous discutons dans [HelNi2]). Avec les notations de Beals nous prenons $\phi_1 = 1$, $\Phi_1 = \sqrt{1+\xi^2+|\nabla V(x)|^2}$, $\phi_2 = \Phi_2 = \sqrt{\lambda+\eta^2+y^2}$.
Si m est un poids, $S(m)$ est la classe des symboles sur $\mathbb{R}^{4n}$ telle que:

$$|D_x^{\alpha_1} D_\xi^{\beta_1} D_y^{\alpha_2} D_\eta^{\beta_2} a\ (x,\xi,y,\eta)| \leq C_{\alpha,\beta}\ m(x,y,\xi,\eta)\phi_1^{-|\alpha_1|}\Phi_1^{-|\beta_1|}\phi_2^{-|\alpha_2|}\Phi_2^{-|\beta_2|}\ . \tag{4.3}$$

Si on désigne par $\mathrm{Op}\, S(m)$ un opérateur pseudodifférentiel dont le symbole est dans $S(m)$, nous avons

$$\Lambda_1 \in \mathrm{Op}\, S(\Phi_1)\ ,\ \Lambda_2 \in \mathrm{Op}\, S(\Phi_2)\ , \tag{4.4}$$

$$X_0 \in \mathrm{Op}\, S(\Phi_1\Phi_2)\ ,\ X_1 \in \mathrm{Op}\, S(\Phi_2)\ ,\ X_2 \in \mathrm{Op}\, S(\Phi_2)\ , \tag{4.5}$$

Nous remarquons que Λ_1 et Λ_2 commutent. En fait nous travaillerons le plus souvent dans des classes plus petites et nous pouvons en particulier observer qu'on ne rencontrera que des élements dans l'algèbre engendré par des pseudos en x ou en y. Le calcul pseudo en y sera contrôlé soigneusement par rapport au paramètre λ. Ce contrôle se ramène à celui d'un calcul pseudodifférentiel semi-classique (voir par exemple les travaux de Helffer-Robert [Ro3] ou le calcul de Weyl de Hörmander [Hor2] avec contrôle des constantes).

5 Preuve des inégalités hypoelliptiques globales: initialisation

5.1 Préliminaires

L'existence d'estimations de ce type a déjà été obtenue dans notre travail avec F. Nier [HelNi2]. Nous présentons ici une variante qui peut conduire à d'autres développements.
Comme dans la démonstration de Kohn, nous allons essayer de contrôler successivement X_1u, X_2u (termes de rang 1), X_0u (terme de rang 2) puis les termes de la forme $[X_0, X_1]u$ et $[X_0, X_2]u$ (termes de rang 3 correspondant au crochet d'un élément de rang de nilpotence 1 et d'un élément de rang 2 X_0)

en fonction des normes de Ku et u. Contrairement au cas de Kohn [Ko] ou de [HelMo], nous ne savons pas déboucher sur un résultat avec des crochets d'ordre supérieur.

Si dans les premières estimations, le contrôle des constantes par rapport à λ est sans importance (voir toutefois [HerNi] pour l'intérêt dans un deuxième temps de les contrôler), il deviendra crucial ensuite. Aussi nous convenons de désigner par C une constante qui peut-être choisie indépendante de λ pour tout $\lambda \geq \lambda_0$, avec λ_0 assez grand.

5.2 Estimations de rang 1 et 2

La première estimation triviale est

$$n||u||^2 + \text{ Re } \langle Ku \mid u \rangle \geq \sum_j ||\partial_{y_j} u||^2 + ||y_j\, u||^2 \, . \tag{5.1}$$

En utilisant le calcul pseudo-différentiel, nous obtenons aussi

$$||\Lambda_2(\lambda) u||^2 \leq \left(\text{ Re } \langle Ku \mid u \rangle + \lambda ||u||^2 \right) \, . \tag{5.2}$$

La seconde estimation est l'existence de C telle que, $\forall \lambda \geq n+1$, $\forall u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{2n})$:

$$||\Lambda_1^{-\frac{1}{2}} \Lambda_2^{-\frac{1}{2}}(\lambda) X_0 u||^2 \leq C(||Ku||\, ||u|| + ||u||^2) \, . \tag{5.3}$$

Pour la preuve de cette dernière, on écrit :

$$||\Lambda_1^{-\frac{1}{2}} \Lambda_2^{-\frac{1}{2}} X_0 u||^2 = \langle X_0 u \mid \Lambda_1^{-1} \Lambda_2^{-1} X_0 u \rangle = \langle X_0 u \mid T_0 u \rangle$$

où $T_0(\lambda)$ est un pseudo d'ordre 0.
Nous remplaçons maintenant X_0 par $K + X_1^2 + X_2^2 - n$. Nous avons trois termes à contrôler : $\langle (K-n)u \mid T_0 u \rangle$, $\langle X_j^2 u \mid T_0 u \rangle$ $(j = 1, 2)$. Le premier est évident de par la continuité des pseudos. Pour le second terme on remarque que :

$$\langle X_1^2 u \mid T_0 u \rangle = -\langle X_1 u \mid X_1 T_0 u \rangle = -\langle X_1 u \mid [X_1, T_0] u \rangle - \langle X_1 u \mid T_0 X_1 u \rangle \, ,$$

et on vérifie que $[X_1, T_0]$ est un pseudo d'ordre 0. Le troisième terme se traite de la même manière.
Jusqu'à maintenant, on notera que la preuve est voisine de celle de Kohn et de ses variantes globales (comme celle utilisée dans [HelMo] ou par l'école suisse).

6 Inégalités hypoelliptiques de rang 3

Nous considérons maintenant les termes $[X_0, X_1]$ et $[X_0, X_2]$. Il y a une grande symétrie entre les deux. Une transformée de Fourier partielle en y fait essentiellement passer de l'un à l'autre, après échange de ∂_x et iV'.

6.1 Analyse de $[X_0, X_1]u$

On traite pour simplifier l'écriture le cas $n = 1$. Pour contrôler le terme $||\Lambda_1^{-\frac{3}{4}}\Lambda_2^{-\frac{1}{4}}[X_0, X_1]u||^2$, nous le réécrivons, après intégration par partie, comme la somme de deux termes

$$||\Lambda_1^{-\frac{3}{4}}\Lambda_2^{-\frac{1}{4}}[X_0, X_1]u||^2 := A + B \tag{6.1}$$

où

$$A = A(u) := -\langle X_1 u \mid X_0 \Lambda_1^{-\frac{3}{2}}\Lambda_2^{-\frac{1}{2}}[X_0, X_1]u\rangle \ , \tag{6.2}$$

et

$$B = B(u) := \langle X_0 u \mid X_1 \Lambda_1^{-\frac{3}{2}}\Lambda_2^{-\frac{1}{2}}[X_0, X_1]u\rangle \ . \tag{6.3}$$

La démonstration va avoir un caractère non-nilpotent en ce sens que les commutateurs feront réapparaître les termes principaux.

6.1.1 Analyse de A

Nous redécomposons $A(u)$ sous la forme $A(u) = \sum_{j=0}^{3} A_j(u)$, où le terme $A_j(u)$ est défini comme étant $-\langle X_1 u \mid \mathcal{C}_j u\rangle$ avec

$$\begin{aligned}
&\mathcal{C}_0 := \Lambda_1^{-\frac{3}{2}}\Lambda_2^{-\frac{1}{2}}[X_0, X_1]X_0 \ , && \mathcal{C}_1 := [X_0, \Lambda_1^{-\frac{3}{2}}]\Lambda_2^{-\frac{1}{2}}[X_0, X_1] \\
&\mathcal{C}_2 := \Lambda_1^{-\frac{3}{2}}\Lambda_2^{-\frac{1}{2}}[X_0, [X_0, X_1]] \ , && \mathcal{C}_3 := \Lambda_1^{-\frac{3}{2}}[X_0, \Lambda_2^{-\frac{1}{2}}][X_0, X_1] \ .
\end{aligned}$$

6.1.1.1: Analyse de $A_0(u)$

L'opérateur

$$T_0 = -\Lambda_1^{-\frac{3}{2}}\Lambda_2^{-\frac{1}{2}}[X_0, X_1]\Lambda_1^{\frac{1}{2}}\Lambda_2^{\frac{1}{2}} = \Lambda_1^{-\frac{3}{2}}\partial_x\Lambda_1^{\frac{1}{2}}$$

est un pseudo (en x) d'ordre 0 et nous avons :

$$A_0(u) = \langle X_1 u \mid T_0 \Lambda_1^{-\frac{1}{2}}\Lambda_2^{-\frac{1}{2}} X_0 u\rangle \ .$$

Ceci conduit à :

$$|A_0(u)| \leq C(||X_1u||^2 + ||\Lambda_1^{-\frac{1}{2}}\Lambda_2^{-\frac{1}{2}}X_0u||^2) .$$

Se rappelant (5.3), nous obtenons le contrôle du membre de droite par

$$|A_0(u)| \leq C(||Ku||^2 + ||u||^2). \tag{6.4}$$

6.1.1.2: Analyse de $A_1(u)$ et $A_2(u)$
Nous observons que pour $\mathcal{C}_1$, nous avons, utilisant le calcul pseudo (séparément en variables x et y)

$$||\mathcal{C}_1u|| \leq C\ ||\Lambda_2^{\frac{1}{2}}u||$$

Il est facile de contrôler ce terme via (5.2) :

$$|A_1(u)| \leq ||X_1u||\ ||\mathcal{C}_1u|| \leq C\ (||X_1u||^2 + ||Ku||\ ||u|| + \lambda||u||^2) .$$

Observant que $\mathcal{C}_2 = \Lambda_1^{-\frac{3}{2}}\Lambda_2^{-\frac{1}{2}}V''\partial_y$, nous obtenons de la même manière que

$$|A_2(u)| \leq C(||X_1u||^2 + ||Ku||\ ||u|| + \lambda||u||^2) . \tag{6.5}$$

On a ainsi obtenu :

$$|A_1(u)| + |A_2(u)| \leq C\ (||Ku||^2 + \lambda||u||^2) . \tag{6.6}$$

6.1.1.3: Terme $A_3(u)$
C'est le terme difficile qui ne se réduit pas à la simple étude de $\mathcal{C}_3$. Remarquons que :

$$[X_0, \Lambda_2^{-\frac{1}{2}}] = \partial_x[y, \Lambda_2^{-\frac{1}{2}}] - V'[\partial_y, \Lambda_2^{-\frac{1}{2}}] . \tag{6.7}$$

On note que :

$$[y, \Lambda_2^{-\frac{1}{2}}] = -\frac{1}{2}\Lambda_2^{-\frac{9}{4}}\partial_y\Lambda_2^{-\frac{1}{4}} + r_{11}\ ,\ [\partial_y, \Lambda_2^{-\frac{1}{2}}] = -\frac{1}{2}y\Lambda_2^{-\frac{5}{2}} + r_{12}\ , \tag{6.8}$$

où r_{11} et r_{12} ont la propriété que :

$$\begin{aligned} \Lambda_2^{\frac{1}{4}} \cdot y \cdot r_{1j} \cdot \Lambda_2^{\frac{1}{4}} &= \mathcal{O}(\lambda^{-1})\ , \\ \Lambda_2^{\frac{1}{4}} \cdot \partial_y \cdot r_{1j} \cdot \Lambda_2^{\frac{1}{4}} &= \mathcal{O}(\lambda^{-1})\ , \end{aligned} \tag{6.9}$$

dans $\mathcal{L}(L^2)$, ainsi que des estimations analogues pour tout terme obtenu par commutation des quatre facteurs dans (6.9).

Pour justifier ces estimations (6.9) (et d'autres estimations de commutation du même type), on peut par exemple observer que

$$\Lambda_2 = h^{-\frac{1}{2}}\lambda_2(\sqrt{h}y, \sqrt{h}D_y)\ , \partial_y = i\lambda^{\frac{1}{2}}(\sqrt{h}D_y)\ ,\ y = \lambda^{\frac{1}{2}}(\sqrt{h}y)\ ,$$

où $h = \lambda^{-1}$ et λ_2 est un symbole dans $S((\hat{y}^2 + \hat{\eta}^2 + 1)^{\frac{1}{2}})$, avec $\varphi = \Phi = (\hat{y}^2 + \hat{\eta}^2 + 1)^{\frac{1}{2}})$, puis utiliser un calcul pseudo-différentiel semi-classique (isomorphe au standard après la dilatation $y = \sqrt{h}\hat{y}$).
Ceci conduit à la décomposition :

$$A_3(u) := A_{11} + A_{12}\ ,$$

avec :

$$A_{11} = -\langle X_1 u \mid \Lambda_1^{-\frac{3}{2}} \partial_x\, [y, \Lambda_2^{-\frac{1}{2}}][X_0, X_1]u\rangle \tag{6.10}$$

et

$$A_{12} = \langle X_1 u \mid \Lambda_1^{-\frac{3}{2}}\, V'\, [\partial_y, \Lambda_2^{-\frac{1}{2}}][X_0, X_1]u\rangle\ . \tag{6.11}$$

Analyse de A_{11}
Nous avons

$$A_{11} = A_{11}^{(0)} + R_{11}\ , \tag{6.12}$$

avec

$$A_{11}^{(0)} \ = \tfrac{1}{2}||(\Lambda_2^{-1}\partial_y)\cdot \Lambda_1^{-\frac{3}{4}}\Lambda_2^{-\frac{1}{4}}[X_0, X_1]u||^2\ , \tag{6.13}$$

avec

$$R_{11} := R_{11}^{(1)} + R_{11}^{(2)} + R_{11}^{(3)} \tag{6.14}$$

où

$$\begin{aligned} R_{11}^{(1)} &:= \langle \partial_y u \mid \Lambda_1^{-\frac{3}{2}} \partial_x\, r_{11} \partial_x u\rangle \\ R_{11}^{(2)} &:= -\tfrac{1}{2}\langle \Lambda_2^{-1}\partial_y \Lambda_2^{-\frac{1}{4}} u \mid \Lambda_1^{-\frac{3}{4}}[\Lambda_1^{-\frac{3}{4}}, \partial_x]\Lambda_2^{-1}\partial_y\Lambda_2^{-\frac{1}{4}}\partial_x u\rangle \\ R_{11}^{(3)} &:= -\tfrac{1}{2}\langle [\Lambda_2^{-\frac{1}{4}}, \partial_y]u \mid \Lambda_1^{-\frac{3}{2}}\partial_x \Lambda_2^{-2}\partial_y \Lambda_2^{-\frac{1}{4}}\partial_x u\rangle\ . \end{aligned} \tag{6.15}$$

Pour estimer ces trois termes, nous utilisons (6.9) et le calcul pseudo en x. Nous obtenons ainsi :

$$|R_{11}^{(1)}| \leq \frac{C}{\lambda}(||\Lambda_1^{-\frac{3}{4}}\Lambda_2^{-\frac{1}{4}}[X_0, X_1]u||^2 + ||u||^2) , \tag{6.16}$$

$$|R_{11}^{(2)}| \leq \frac{C}{\lambda^{\frac{1}{4}}}||u||^2 , \tag{6.17}$$

et

$$|R_{11}^{(3)}| \leq \frac{C}{\sqrt{\lambda}}(||\Lambda_1^{-\frac{3}{4}}\Lambda_2^{-\frac{1}{4}}[X_0, X_1]u||^2 + ||u||^2) . \tag{6.18}$$

En conclusion, nous avons obtenu, sans chercher à optimiser :

$$|R_{11}| \leq \frac{C}{\lambda^{\frac{1}{4}}}(||\Lambda_1^{-\frac{3}{4}}\Lambda_2^{-\frac{1}{4}}[X_0, X_1]u||^2 + ||u||^2) . \tag{6.19}$$

Analyse de A_{12}
Nous mettons en évidence le terme principal et nous obtenons comme ci-dessus :

$$A_{12} := A_{12}^{(0)} + R_{12} , \tag{6.20}$$

avec

$$A_{12}^{(0)} \quad = \tfrac{1}{2}\langle(\Lambda_2^{-1}\ y)\Lambda_2^{-\frac{1}{4}}\Lambda_1^{-\frac{3}{4}}V'u \mid (\Lambda_2^{-1}\partial_y)\Lambda_2^{-\frac{1}{4}}\ \Lambda_1^{-\frac{3}{4}}[X_0, X_1]u\rangle , \tag{6.21}$$

avec

$$|R_{12}| \leq C\lambda^{-\frac{1}{4}}\left(||\Lambda_1^{-\frac{3}{4}}\Lambda_2^{-\frac{1}{4}}[X_0, X_1]u\ ||^2 + ||\Lambda_1^{-\frac{3}{4}}\Lambda_2^{-\frac{1}{4}}[X_0, X_2]u\ ||^2 + ||u||^2\right) \tag{6.22}$$

6.1.2 Analyse de B

La preuve est essentiellement la même que pour A. Nous écrivons d'abord

$$B = \langle[X_1, X_0]\Lambda_1^{-\frac{3}{2}}\Lambda_2^{-\frac{1}{2}}X_0u \mid X_1u\rangle + \tilde{B} ,$$

où $\tilde{B}$ est défini par :

$$\tilde{B} := \langle X_0u \mid [X_1, \Lambda_1^{-\frac{3}{2}}\Lambda_2^{-\frac{1}{2}}[X_0, X_1]]u\rangle .$$

Le terme principal est plus simple et traité exactement comme celui de $A_0(u)$. Finissons donc notre analyse par celle de $\tilde{B}$. Nous avons

$$\tilde{B} = \langle X_0 u \mid [\partial_y, \Lambda_2^{-\frac{1}{2}}]\Lambda_1^{-\frac{3}{2}}[X_0, X_1]u\rangle = \langle X_0 u \mid T_2^{-\frac{3}{2}} T_1^{-\frac{1}{2}} u\rangle \,.$$

Nous pouvons alors utiliser l'estimation du rang 2 (5.3) :

$$|\tilde{B}| \leq C \left(||\Lambda_2^{-\frac{3}{2}}\Lambda_1^{-\frac{3}{2}} X_0 u||\, ||u|| \right) \leq C'(||Ku||\, ||u|| + \lambda ||u||^2) \,.$$

En conclusion, nous avons montré que

$$|B| \leq C \left(||Ku||^2 + ||u||^2 \right) \,. \tag{6.23}$$

6.1.3 Conclusion de l'analyse de $[X_0, X_1]u$ et $[X_0, X_2]u$

Le bilan des estimations obtenues jusqu'à présent donne :

$$\begin{aligned} &||\Lambda_1^{-\frac{3}{4}}\Lambda_2^{-\frac{1}{4}}[X_0, X_1]u\,||^2 \\ &\leq A_{11}^{(0)} + A_{12}^{(0)} + C(||Ku||^2 + \lambda ||u||^2) + C\lambda^{-\frac{1}{4}} \left(\textstyle\sum_{j=1}^{2} ||\Lambda_1^{-\frac{3}{4}}\Lambda_2^{-\frac{1}{4}}[X_0, X_j]u\,||^2 \right) \end{aligned} \tag{6.24}$$

Ceci nous conduit à constater que l'on ne peut pas traiter les estimations de $||\Lambda_1^{-\frac{3}{4}}\Lambda_2^{-\frac{1}{4}}[X_0, X_1]u\,||^2$ et $||\Lambda_1^{-\frac{3}{4}}\Lambda_2^{-\frac{1}{4}}[X_0, X_2]u\,||^2$ indépendamment.
Mais comme mentionné dans l'introduction de cette section, le calcul est symétrique et nous obtenons de manière analogue :

$$\begin{aligned} &||\Lambda_1^{-\frac{3}{4}}\Lambda_2^{-\frac{1}{4}}[X_0, X_2]u\,||^2 \\ &\leq A_{21}^{(0)} + A_{22}^{(0)} + C(||Ku||^2 + \lambda ||u||^2) + C\lambda^{-\frac{1}{4}} \left(\textstyle\sum_{j=1}^{2} ||\Lambda_1^{-\frac{3}{4}}\Lambda_2^{-\frac{1}{4}}[X_0, X_j]u\,||^2 \right) \end{aligned} \tag{6.25}$$

avec

$$A_{21}^{(0)} = \overline{A_{12}^{(0)}} \tag{6.26}$$

et

$$A_{22}^{(0)} := \frac{1}{2} ||(\Lambda_2^{-1} y)\Lambda_1^{-\frac{3}{4}}\Lambda_2^{-\frac{1}{4}}[X_0, X_2]u||^2 \,. \tag{6.27}$$

Additionnant les deux inégalités, nous obtenons

$$\begin{aligned}&\left(\sum_{j=1}^2 ||\Lambda_1^{-\frac{3}{4}}\Lambda_2^{-\frac{1}{4}}[X_0,X_j]u\ ||^2\right)(1-C\lambda^{-\frac{1}{4}})\\ &\leq A_{11}^{(0)}+A_{12}^{(0)}+A_{21}^{(0)}+A_{22}^{(0)}+C(||Ku||^2+\lambda||u||^2)\ .\end{aligned}\tag{6.28}$$

Il ne nous reste plus qu'à étudier soigneusement $A_{11}^{(0)}+A_{12}^{(0)}+A_{21}^{(0)}+A_{22}^{(0)}$ en revenant à la définition. Nous obtenons[2] d'abord :

$$A_{11}^{(0)}+A_{12}^{(0)}+A_{21}^{(0)}+A_{22}^{(0)}=\frac{1}{2}||(\Lambda_2^{-1}y)\Lambda_1^{-\frac{3}{4}}\Lambda_2^{-\frac{1}{4}}V'(x)u-(\Lambda_2^{-1}\partial_y)\Lambda_1^{-\frac{3}{4}}\Lambda_2^{-\frac{1}{4}}\partial_x u||^2\ .$$

On obtient, via Cauchy-Schwarz, que

$$\begin{aligned}&A_{11}^{(0)}+A_{12}^{(0)}+A_{21}^{(0)}+A_{22}^{(0)}\\ &\quad\leq\frac{1}{2}\ \left(\sum_{j=1}^2 ||\Lambda_1^{-\frac{3}{4}}\Lambda_2^{-\frac{1}{4}}[X_0,X_j]u\ ||^2\right)\cdot||\Lambda_2^{-1}(-\partial_y^2+y^2)\Lambda_2^{-1}||_{\mathcal{L}(L^2(\mathbb{R}_y^n))}\ .\end{aligned}$$

On utilise enfin que

$$0\leq\Lambda_2^{-1}(-\partial_y^2+y^2)\Lambda_2^{-1}\leq 1\ ,\tag{6.29}$$

qui conduit à

$$A_{11}^{(0)}+A_{12}^{(0)}+A_{21}^{(0)}+A_{22}^{(0)}\leq\frac{1}{2}\left(\sum_{j=1}^2 ||\Lambda_1^{-\frac{3}{4}}\Lambda_2^{-\frac{1}{4}}[X_0,X_j]u\ ||^2\right)$$

On voit ici que le facteur $\frac{1}{2}$ qui apparaît à droite est crucial pour obtenir, en se souvenant de (6.28), l'existence de $C>0$ et de λ_0 tels que, pour $\lambda\geq\lambda_0$,

$$\left(\sum_{j=1}^2 ||\Lambda_1^{-\frac{3}{4}}\Lambda_2^{-\frac{1}{4}}[X_0,X_j]u\ ||^2\right)\leq C(||Ku||^2+\lambda||u||^2)\ .\tag{6.30}$$

Le cas $n\geq 1$ ne conduit pas à des difficultés nouvelles, si on interprète les notations utilisées jusqu'à présent de manière vectorielle.

2. A terme plus petit près, on reconnait aussi que cette somme s'écrit sous la forme $\frac{1}{4}||\Lambda_2^{-\frac{5}{4}}\Lambda_1^{-\frac{3}{4}}[-\partial_y^2+y^2-1,X_0]u||^2$.

7 Conclusion de la preuve

On déduit de (6.30) que

$$||\Lambda_1^{\frac{1}{4}}\Lambda_2^{-\frac{1}{4}}u||^2 \leq C\left(||Ku||^2 + \lambda||u||^2\right) . \tag{7.1}$$

Si on interpole entre (5.2) et (7.1), nous obtenons, par un choix convenable de λ qui est désormais fixé, une constante C telle que :

$$||\Lambda_1^{\frac{1}{8}}\Lambda_2^{\frac{3}{8}}u||^2 \leq C\left(||Ku||^2 + ||u||^2\right) . \tag{7.2}$$

Ceci implique la compacité de K si ∇V tend vers l'infini et l'inégalité (1.15)) avec $m = \frac{1}{8}$ pour $\nu = 0$ et Λ défini par $\Lambda^2 = \Lambda_1^2 + \Lambda_2^2$.

Pour avancer dans la justification de la conjecture 1.1, il serait intéressant d'avoir des extensions pour des cas où $|\nabla V|$ ne tend pas vers l'infini lorsque $|x| \to +\infty$. La démonstration donnée ici est conceptuellement plus naturelle que celle donnée dans [HelNi2] qui développait une jolie (mais peu intuitive) astuce de [HerNi], mais on ne voit pas bien ici le rôle joué par le laplacien de Witten et le résultat de [HelNi2] conduisait à $m = \frac{1}{4}$. L'avenir dira quelle démonstration donne le plus de flexibilité pour des généralisations.

8 Une autre approche: inégalités maximales

Dans le cas V quadratique (pour lequel il existe un calcul explicite du spectre) et plus généralement le cas où V est à dérivée seconde bornée, on peut espérer des estimations plus précises (comme nous l'a indiqué C. Villani). L'approche qui suit est inspirée par les techniques nilpotentes développées dans [HelNo]. Dans ce cas, il est naturel de remplacer d'abord $\nabla V(x)$ par un vecteur constant v, et de déterminer d'abord une estimation globale pour ce modèle partiellement figé puis d'utiliser une partition de l'unité pour contrôler les erreurs (ce qui nous conduira à des hypothèses sur la variation de ∇V).

On détaille juste le cas de la dimension 1 (cf [HelNi2]) pour le cas général). Le premier point est donc d'analyser :

$$F_v = (y\partial_x - v\partial_y) + (-\partial_y^2 + y^2 - 1) . \tag{8.1}$$

Par une transformation de Fourier partielle, nous obtenons

$$F_{v,\xi} = (iy\xi - v\partial_y) + (-\partial_y^2 + y^2 - 1) . \tag{8.2}$$

Nous voulons avoir des estimations uniformes par rapport aux paramètres v, ξ. Il y a une invariance par le groupe métaplectique qui permet de se ramener à la démonstration d'inégalités pour le modèle :

$$\hat{F}_\lambda = i\lambda t + (-\partial_t^2 + t^2 - 1) \,, \tag{8.3}$$

avec

$$\lambda = \sqrt{v^2 + \xi^2} \,. \tag{8.4}$$

Pour cet opérateur on peut démontrer, en utilisant par exemple les travaux de Dencker-Sjöstrand-Zworski et en observant qu'il s'agit après dilatation d'un problème semi-classique, ou bien en utilisant plus directement des techniques nilpotentes, l'estimation maximale suivante :

$$||u||^2 + ||\hat{F}_\lambda u||^2 \geq \frac{1}{C} \left(\lambda^{\frac{4}{3}} ||u||^2 + \sum_{k+\ell \leq 2} ||D_t^k t^\ell u||^2 \right) \tag{8.5}$$

Revenant aux variables initiales, nous obtenons :

$$||f||^2 + ||\hat{F}_v f||^2 \geq \frac{1}{C} \left(v^{\frac{4}{3}} ||f||^2 + \sum_{k+\ell \leq 2} ||D_y^k y^\ell f||^2 \right) \tag{8.6}$$

On notera aussi que par interpolation cela implique aussi

$$||f||^2 + ||\hat{F}_v f||^2 \geq \frac{1}{C} \left(v^{\frac{2}{3}} ||yf||^2 + v^{\frac{2}{3}} ||\partial_y f||^2 \right) \,. \tag{8.7}$$

On peut maintenant introduire une partition de l'unité dans la variable x correspondant à des boules $B(x_0, r(x_0))$ de rayon $r(x_0) = \delta_0 < V'(x_0) >^{-\rho}$. Cette partition de l'unité introduit deux types d'erreur. La première correspond à la comparaison dans la boule de $V'(x)$ et de $V'(x_0)$ qui conduit à une erreur en $V''(x_0) r(x_0)$ qui doit être petite par rapport au gain $|V'(x_0)|^{\frac{1}{3}}$ obtenu par l'inégalité maximale. Ceci conduit à l'hypothèse que ρ doit vérifier :

$$|V''(x_0)| \leq \frac{1}{\delta_0} < V'(x_0) >^{\rho + \frac{1}{3}}$$

la seconde erreur est due à la partition de l'unité χ_j . L'erreur typique est ici $||\chi_j' y f||^2$ qui est contrôlée si $\rho < \frac{1}{3}$. La démonstration marche donc si :

$$|V''(x)| \leq C < V'(x) >^{\frac{2}{3} - \eta} \,, \tag{8.8}$$

pour $\eta > 0$.
Le théorème démontré est donc (en toute dimension)
Théorème 8.1. *Si l'hypothèse (8.8) est vérifiée et si* $|\nabla V(x)|$ *tend vers l'infini lorsque* $|x|$ *tend vers l'infini, alors* K *est à résolvante compacte et on a l'inégalité maximale (1.15) pour* $\nu = 0$ *avec* $m = \frac{2}{3}$.

Références

[Be] R. Beals. A general calculus of pseudodifferential operators. Duke Math. J. 42, $n^0$1, p. 1-42 (1975).

[BoDaHel] P. Bolley, M. Dauge et B. Helffer. Conditions suffisantes pour l'injection compacte d'espaces de Sobolev à poids (ou autour d'une question de F. Mignot). Séminaire de l'université de Nantes 1989-90.

[BonChe] J.M. Bony, J.Y. Chemin. Espaces fonctionnels associés au calcul de Weyl-Hörmander. Bull. Soc. Math. France 122, n^0 1, p. 77-118 (1994).

[DaLi] R. Dautray, J.L. Lions. *Mathematical analysis and numerical methods for science and technology.* Springer Verlag (1992).

[Dav] E.B. Davies. Semi-classical states for non self-adjoint Schrödinger operators. Comm. Math. Phys. 200, p. 35-41 (1999).

[DeSjZw] N. Dencker, J. Sjöstrand et M. Zworski. Pseudospectra of semiclassical (pseudo)differential operators. Prépublication 2003.

[DesVi] L. Desvillettes et C. Villani. On the trend to global equilibrium in spatially inhomogeneous entropy-dissipating systems : the linear Fokker-Planck equation. Comm. Pure Appl. Math. 54 (1), p. 1-42 (2001).

[EckHai1] J.P. Eckmann, M. Hairer. Non-equilibrium statistical mechanics of strongly anharmonic chains of oscillators. Comm. Math. Physics 212 (1), p. 105-164 (2000).

[EckHai2] J.P. Eckmann, M. Hairer. Spectral properties of hypoelliptic operators. Commun. Math. Phys. 235, n^0 2, p. 233-253 (2003).

[EckPiRe-Be] J.P. Eckmann, C.A. Pillet, et L. Rey-Bellet. Non-equilibrium statistical mechanics of anharmonic chains coupled to two heat baths at different temperatures. Comm. Math. Phys. 208 (2), p. 275-281 (1999).

[Hel] B. Helffer. *Semi-classical analysis, Witten Laplacians and statistical mechanics.* World Scientific (2002).

[HelMo] B. Helffer et A. Mohamed. Sur le spectre essentiel des opérateurs de Schrödinger avec champ magnétique. Ann. Inst. Fourier 38(2), p. 95-113 (1988).

[HelNi1] B. Helffer et F. Nier. Criteria for the Poincaré inequality associated with Dirichlet forms in $\mathbb{R}^d$, $d \geq 2$. Int. Math. Res. Notices 22, p. 1199-1224 (2003).

[HelNi2] B. Helffer et F. Nier. Hypoellipticity and spectral theory for Fokker-Planck operators and Witten Laplacians. Book in preparation. Prepublication Université de Rennes, Septembre 2003.

[HelNo] B. Helffer et J. Nourrigat. *Hypoellipticité maximale pour des opérateurs polynômes de champs de vecteur.* Progress in Mathematics, Birkhäuser, vol. 58 (1985).

[HerNi] F. Hérau et F. Nier. Isotropic hypoellipticity and trend to the equilibrium for the Fokker-Planck equation with high degree potential. Prepublication 02-03 Université de Rennes (2002). A paraître dans Archive for Rational Mechanics and Analysis (2003).

[Hor1] L. Hörmander. Hypoelliptic second order differential equations. Acta Mathematica 119, p. 147-171 (1967).

[Hor2] L. Hörmander. *The analysis of linear partial differential operators.* Springer Verlag (1985).

[Ko] J. Kohn. Lectures on degenerate elliptic problems. Pseudodifferential operators with applications, C.I.M.E., Bressanone 1977, p. 89-151 (1978).

[Ni] F. Nier. Quelques critères pour l'inégalité de Poincaré dans $\mathbb{R}^d$, $d \geq 2$. Séminaire Ecole Polytechnique 2002-2003.

[No] J. Nourrigat. *Subelliptic estimates for systems of pseudo-differential operators.* Publications de l'université de Recife (1982).

[Re-BeTh1] L. Rey-Bellet, L.E. Thomas. Asymptotic behavior of thermal nonequilibrium steady states for a driven chain of anharmonic oscillators. Comm. Math. Phys. 215, p. 1-24 (2000).

[Re-BeTh2] L. Rey-Bellet, L.E. Thomas. Exponential convergence to nonequilibrium stationary states in classical statistical mechanics. Comm. Math. Physics 225, p. 305-329 (2000).

[Re-BeTh3] L. Rey-Bellet, L.E. Thomas. Fluctuations of the entropy production in anharmonic chains. Ann. Henri Poincaré 3 (2002), no. 3, p. 483-502.

[Ris] H. Risken. *The Fokker-Planck equation. Methods of solution and applications.* Springer-Verlag, Berlin, second edition, (1989).

[Ro1] D. Robert. Propriétés spectrales d'opérateurs pseudodifférentiels. Comm. in P.D.E.3(9), p. 755-826 (1978).

[Ro2] D. Robert. Comportement asymptotique des valeurs propres d'opérateurs du type de Schrödinger à potentiel dégénéré. J. Math. Pures Appl. (9) 61 (1982), no. 3, 275–300 (1983).

[Ro3] D. Robert. *Autour de l'approximation semi-classique*, Progress in Mathematics n^0 68, Birkhäuser (1987).

[Sima] C.G. Simader. Essential self-adjointness of Schrödinger operators bounded from below. Math. Z. 159, p. 47-50 (1978).

[Sim] B. Simon. Some quantum operators with discrete spectrum but classically continuous spectrum, Ann. Physics 146, p. 209-220 (1983).

[Wi] E. Witten. Supersymmetry and Morse inequalities. J. Diff. Geom. 17, p. 661-692 (1982).