

# Prise en compte de la congestion dans les modèles de mouvements de foules

Bertrand Maury\*

25 mai 2012

## Résumé

Nous donnons ici un aperçu des différentes manières dont la congestion peut être prise en compte dans la modélisation de mouvements de foules, en distinguant les approches *soft*, basées sur l'introduction de forces de répulsion à courte portée, pour lesquelles une large littérature existe, et les approches *hard*, où la contrainte est prise en compte explicitement, ce qui conduit à des équations d'une nature différente.

**Mots clés.** Mouvements de foules, congestion, inclusions différentielles, transport optimal, distance de Wasserstein.

## 1 Congestion *soft*

Les premiers modèles microscopiques de mouvements de foules, basés sur une identification des personnes à des particules dont on suit les trajectoires au cours du temps, ont été introduits dans [10, 11]. Si l'on note

$$\mathbf{q} = (\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \dots, \mathbf{q}_N) \in \mathbb{R}^{2N}$$

le vecteur des positions des  $N$  individus, le modèle s'exprime comme la loi fondamentale de la dynamique appliquée aux  $N$  particules (que l'on prend de même masse unitaire, pour simplifier), supposées soumises à des forces de deux types :

1. Force liée à la réalisation d'un dessein individuel, que l'on conditionnera à la donnée d'une vitesse souhaitée par chaque individu, qui peut dépendre de sa position, et de façon générale de l'objectif qu'il cherche à atteindre. Dans l'optique d'un phénomène qui prend en compte l'inertie, ce terme implique un temps caractéristique  $\tau$ , qu'on peut voir comme le temps mis par une personne qui décide brusquement de s'arrêter pour s'arrêter effectivement.

2. Forces d'interaction, qui prennent en compte les conséquences induites sur la trajectoire d'un individu par la présence d'autres personnes ; ces interactions peuvent être de type *social* (une personne cherche à maintenir une certaine distance vis à vis de personnes qu'elle ne connaît pas), ou physique (deux personnes ne peuvent pas être au même endroit au même moment).

Dans l'hypothèse où les personnes sont identifiées à des disques de même rayon  $r$  (disques *non rigides* dans ce contexte de prise en compte douce de la congestion), ces considérations peuvent se mettre sous la forme du système différentiel suivant

$$\ddot{\mathbf{q}} = \frac{1}{\tau} (\mathbf{U} - \dot{\mathbf{q}}) + \frac{1}{\tau} \Psi(\mathbf{q}),$$

où  $\mathbf{U} = (\mathbf{U}_1, \dots, \mathbf{U}_N)$  est la collection des vitesses souhaitées par les individus, et  $\Psi(\mathbf{q})/\tau$  correspond aux forces d'interactions entre individus, ou liées à la présence d'obstacles (pour simplifier la présentation nous ne prendrons pas en compte ici ces derniers). Noter que, selon le système de notations choisi,  $\Psi$  est homogène à une vitesse, et pourra s'interpréter comme une correction à la vitesse souhaitée. Dans le cas de personnes indiscernables (i.e. se déplaçant toutes selon les mêmes principes) cherchant à évacuer une pièce, on pourra par exemple considérer que  $\mathbf{U}_i$  s'écrit  $\mathbf{U}_0(\mathbf{q}_i)$ , où  $\mathbf{U}_0$  est un champ de vitesse donné qui correspond à la stratégie qui serait suivie par une personne seule pour sortir de la pièce. On considérera dans la suite que le module de la vitesse souhaitée est proche de 1. Le terme d'interaction  $\Psi$  s'écrit de façon assez générale

$$\Psi(\mathbf{q})_i = - \sum_{j \neq i} \varphi(D_{ij}) \mathbf{e}_{ij}$$

avec

$$D_{ij} = |\mathbf{q}_j - \mathbf{q}_i| - 2r, \quad \mathbf{e}_{ij} = \frac{\mathbf{q}_j - \mathbf{q}_i}{|\mathbf{q}_j - \mathbf{q}_i|}.$$

Si l'on exclut les comportements moutonniers (qui conduisent les gens à se rapprocher les uns des autres), la fonction  $D \mapsto \varphi(D)$  prend des valeurs positives (force de répulsion), et représente la tendance des gens à s'écartier de leur voisin. Dans [11] par exemple cette fonction est construite comme somme de deux contributions. La première, *sociale*, est du type

$$\exp(-D/D_s).$$

Elle est significative à une distance de l'ordre de  $D_s$  (elle vaut 1, c'est à dire qu'elle peut modifier de façon significative la vitesse souhaitée, quand la distance vaut  $D_s$ ), qui pourra typiquement être prise égale à la distance de confort entre deux individus, qui peut varier suivant leur degré de proximité ou de façon plus générale leur culture (voir [9]). La seconde contribution prend en compte la congestion à proprement parler, elle est dans [11] du type  $-kD > 0$  pour  $D < 0$  (c'est-à-dire quand les disques de rayon  $r$  se chevauchent), et 0 sinon. Noter que, sous cette forme, on

peut difficilement garantir a priori que les personnes ne se chevauchent pas, il est même possible qu’une personne en traverse une autre. Une manière d’empêcher ce phénomène est de choisir un terme d’interaction raide, dans l’esprit de l’approche de dynamique moléculaire utilisée en chimie, en rajoutant par exemple à  $\varphi$  un terme du type  $D_c/D_{ij}$ . Ce terme tendant vers  $+\infty$  lorsque deux personnes (i.e. deux disques) se rapprochent, les contacts sont exclus. Noter que ce terme a une influence significative dans la zone  $D < D_c$ . Prendre  $D_c$  petit (i.e. égal à une fraction de la taille caractéristique des gens) permet de limiter son action à longue ou moyenne portée, concentrant son influence dans les zones de quasi contact entre personnes.

D’un point de vue mécanique, les forces introduites ci-dessus sont de deux types. Dans le premier cas (pour l’adaptation de la vitesse courante à une vitesse souhaitée, ou pour la partie sociale de la force d’interaction), il s’agit d’une force résultant de l’effort musculaire conscient de l’individu qui marche sur un sol non glissant (ce qui permet d’avoir une résultante non nulle). Le second type de forces, correspondant à la résistance à la déformation de deux individus en contact, est une force qui obéit à la loi de l’action et de la réaction, de résultante nulle, qui peut se voir comme une conséquence de principes mécaniques, purement *passive* (sans intervention consciente des individus).

Bien que l’approche suivante ait semble-t-il été peu utilisée dans la littérature, on peut aussi bâtir un modèle d’ordre 1 en temps, ce qui revient à négliger l’inertie. En terme de modélisation, cela revient à considérer que chaque personne peut atteindre instantanément sa vitesse souhaitée, à partir de l’immobilité, ou inversement s’arrêter brusquement. On peut voir ce modèle comme une limite sur-amortie (*overdamped*) du modèle précédent, en faisant tendre  $\tau$  vers 0. On obtient alors le modèle suivant

$$\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{U} + \Psi(\mathbf{q}).$$

Les principes de construction de ce terme d’interaction présentés précédemment sont directement applicables à ce modèle d’ordre 1 en temps.

### Approche macroscopique

On considère maintenant une foule décrite par une densité  $\rho = \rho(x, t)$ . Les modèles de nature inertielle (version macroscopique du premier modèle présenté ci-dessus) peuvent se décliner sous forme macroscopique. On écrit (voir [2]) que la densité  $\rho$  est transportée par un champ de vitesse  $\mathbf{u}$ , qui suit lui-même une équation d’évolution qui exprime la variation de vitesse pour chaque individu, sous l’action de facteurs similaires à ceux qui ont été présentés dans le cas microscopique. Le système suivant est alors obtenu (nous écrivons  $\rho$  et  $\mathbf{u}$  pour  $\rho(x, t)$  et  $\mathbf{u}(x, t)$ , respectivement)

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) &= 0, \\ \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} &= F(\rho, \mathbf{u}). \end{aligned}$$

Toute la modélisation porte alors sur le choix du terme de forçage  $F$ . Toujours dans [2], et de façon assez analogue au modèle de Helbing, les auteurs proposent d'exprimer  $F$  comme somme de deux contributions. La première exprime la tendance des individus à rapprocher leur vitesse d'une vitesse souhaitée  $\mathbf{U}$ , que l'on supposera ici ne dépendre que de la position  $x$  :

$$F_1 = \alpha(\beta(\rho)\mathbf{U} - \mathbf{u}).$$

Cette force tend donc à rapprocher la vitesse  $\mathbf{u}$  d'une vitesse souhaitée qui dépend de l'endroit où l'on est. Dans le cas de l'évacuation d'urgence d'une pièce par exemple, on pourra prendre pour  $\mathbf{U}$  le champ qui pointe vers la porte de sortie, avec un module égal à la vitesse que l'on estime être prise par un individu pressé. Le facteur  $\beta(\rho)$  est sans dimension, compris entre 0 et 1, et constitue une première prise en compte de la congestion. Nous reviendrons sur ce terme dans la présentation des modèles d'ordre 1 en temps ci-après. Un second terme est proposé, pour gérer la congestion, il peut par exemple être pris du type

$$-K(\rho)\nabla_{\mathbf{U}}\rho$$

où  $K(\cdot)$  est une fonction scalaire modérant l'influence de la valeur courante de la densité, et  $\nabla_{\mathbf{U}}$  le gradient de  $\rho$  dans la direction  $\mathbf{U}$  (il s'agit simplement de  $\mathbf{U}(\nabla\rho \cdot \mathbf{U})$  si  $\mathbf{U}$  est de module 1).

De façon analogue au cas microscopique, ce modèle peut s'écrire à l'ordre 1 en temps, ce qui traduit comme précédemment la faculté pour les individus d'adapter instantanément leur vitesse à leur souhait. On écrit alors simplement

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho\mathbf{u}) = 0,$$

et, dans ce cadre, modéliser les comportements consiste à se donner une expression de  $\mathbf{u}$  en fonction de différents facteurs, qui peuvent être la position (à laquelle on peut affecter une vitesse souhaitée), la densité locale (qui peut inciter à ralentir si cette densité est importante), le gradient de la densité locale (on peut avoir tendance à éviter les zones de forte densité). Le modèle le plus simple (voir par exemple [12]), directement inspiré des modèles de trafic routier, consiste à considérer que l'on cherche à avoir une vitesse dans la direction à la vitesse souhaitée (que prendrait une personne seule) locale, mais dont la norme est modulée par la densité locale :

$$\mathbf{u} = \beta(\rho)\mathbf{U}.$$

Noter que cette correction s'apparente à ce qui est proposé sous le terme de *sensitivité logistique* dans [7] (voir aussi [20]) pour des phénomènes de chemotaxie. Dans ce contexte, il s'agit de modéliser de façon macroscopique des bactéries qui nagent dans un fluide, et dont la vitesse est dirigée suivant le gradient d'une substance appelé *chemoattractant*. La correction logistique consiste à multiplier le module de cette vitesse *spontanée* des particules par une fonction de la densité, de type

$\beta(\rho) = 1 - \rho$  si la densité de saturation est fixée à 1. Dans le cas des bactéries, ce terme exprime qu’au delà d’une certaine concentration, les bactéries ne sont plus en mesure d’estimer un gradient local de chemoattractant, voire que leur nage est rendue impossible par la présence de trop nombreux congénères. Dans le cas des foules, ce terme correspond à une décision consciente prise par les individus de ralentir leur marche lorsque la densité augmente. On trouve diverses variantes de ce terme dans la littérature, par exemple le modèle dit de Kladek (voir [2]). Si ce terme peut être vu comme de nature à limiter la congestion en limitant les flux quand on s’approche d’une zone de forte densité, il n’est pas de nature à étaler les zones fortement congestionnées. Les gens s’arrêtent simplement, mais ne cherchent pas à s’écarter de la zone dense.

Une autre possibilité est d’intégrer la congestion comme une tendance à s’écarter des zones de forte densité, sous la forme d’un terme de *chemotaxie autoréulsive*, et que l’on trouve d’ailleurs décrit, comme précédemment, dans la littérature sur les mouvements de bactéries (voir par exemple [5])

$$-D(\rho)\nabla\rho.$$

Dans le cas  $D(\rho) = 1/\rho$ , on obtient un terme de diffusion linéaire, et si l’on considère une vitesse globale somme d’un terme souhaité  $\mathbf{U}$  et de ce terme de répulsion “douce”, on obtient l’équation d’advection diffusion

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho\mathbf{U}) - \Delta\rho = 0.$$

On peut raidir cette répulsion en choisissant  $D(\rho) = \rho^\alpha$ , avec  $\alpha > 1$ , de telle sorte que le terme aura peu d’effet pour les petites densités, mais un effet répulsif très important pour les grandes densités (au delà de 1). Toujours dans un contexte de chemotaxie, une approche alternative est proposée et étudiée dans [6], elle est basée sur l’expression

$$D(\rho) = \frac{1}{(1 - \rho)^\alpha},$$

avec  $\alpha > 0$ . Noter qu’un tel terme (de type *barrière*, pour reprendre la terminologie utilisée en optimisation sous contrainte) assure que la densité reste strictement inférieure à 1 pour tout temps, alors que l’approche précédente  $D(\rho) = \rho^\alpha$  (que l’on peut interpréter comme une pénalisation pour  $\alpha$  grand) autorise que la densité dépasse 1 dans certaines zones.

## 2 Congestion *hard*

Les écoulements granulaires peuvent se traiter dans un cadre de Dynamique Moléculaire (forces de répulsion à courte portée pour gérer les collisions) ou dans un cadre de Dynamique des Contacts (modèle de sphères dures, non déformables, et gestion des collisions comme des événements instantanés). De la même manière,

dans le cadre de la modélisation de mouvements de foules, la congestion peut se traiter selon une approche relaxée (congestion *soft* présentée dans la section précédente), ou de type sphères dures. Comme on va le voir, cette seconde approche conduit à des modèles dont la structure mathématique est assez différente des modèles présentés dans la première section. Pour l'approche microscopique par exemple, les modèles de congestion *soft* rentrent dans un cadre très balisé de systèmes d'équations différentielles ordinaires, auxquels le théorème de Cauchy Lipschitz donne un cadre mathématique rigoureux, et pour lesquels de nombreux schémas de discrétisation en temps existent. L'analyse mathématique des modèles que nous allons présenter dans cette section est plus délicate ; il peut donc sembler artificiel de proposer de tels modèles. Il est néanmoins important de considérer que, dans l'approche *soft*, si l'on souhaite par exemple prendre en compte la congestion physique entre individus, on doit rajouter à la force (ou à la vitesse pour les modèles d'ordre 1 en temps) un terme très raide, d'autant plus raide que l'on ne souhaite pas voir ce terme influencer sur les comportements à moyenne ou longue portée. Cette raideur est susceptible de compliquer ou d'alourdir considérablement la résolution numérique du système, en imposant notamment d'utiliser des pas de temps très petits. Par ailleurs ces forces ajoutées doivent en général être adaptées à la situation courante, ce qui nécessite concrètement un calage des différents paramètres avant d'aborder toute situation nouvelle. L'approche qui suit est basée sur une prise en compte du caractère non lisse des phénomènes de contact. Si elle nécessite de se placer dans un cadre plus général que celui des équations différentielles ordinaires (ou celui des équations aux dérivées partielles pour les modèles macroscopiques), elle permet aussi de s'affranchir des contraintes sur les pas de temps, et ne nécessite pas de réglage particulier de paramètres numériques.

Pour simplifier la présentation qui suit, nous nous concentrons sur la prise en compte de la congestion, en particulier nous excluons toute modélisation de phénomènes sociaux, ou stratégies individuelles, pour nous en tenir à une description *repitilienne* du comportement humain : chaque personne a une vitesse souhaitée qui ne dépend que de sa position (et pas de la position ou du comportement d'autres personnes). Mais les modèles ci-dessous peuvent intégrer sans difficulté particulière les principes décrits dans la première section, en particulier sous la forme de tendances sociales (évitement anticipé des autres individus pour éviter autant que possible le contact) ou de stratégies individuelles sophistiquées, dans l'esprit de ce qui est proposé dans [21].

Au niveau microscopique, l'approche est la suivante : on note toujours

$$\mathbf{q} = (\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \dots, \mathbf{q}_N) \in \mathbb{R}^{2N}$$

le vecteur des positions, on définit l'ensemble des configurations admissibles

$$K = \{ \mathbf{q} \in \mathbb{R}^{2N}, D_{ij} = |\mathbf{q}_j - \mathbf{q}_i| - 2r \geq 0 \quad \forall i \neq j \},$$

et l'on se donne comme dans la première section une collection de vitesses souhaitées  $\mathbf{U} = (\mathbf{U}_1, \dots, \mathbf{U}_N)$  (de façon générale  $\mathbf{U} = \mathbf{U}(\mathbf{q}, t)$ ). On pourrait écrire

un modèle prenant en compte l'inertie, dans l'esprit du modèle de Helbing de la première section, pour obtenir une formulation exactement semblable aux modèles d'écoulements granulaires tels que décrits par exemple dans [16]. Cette démarche conduirait à des problèmes théoriques (en particulier concernant la non unicité des solutions) qui nous paraissent très artificiels dans ce contexte de mouvements de foules, nous écrivons donc directement le modèle d'ordre 1 en temps (sans inertie).

Le modèle est essentiellement basé sur la notion de cône des vitesses admissibles, à laquelle mènent les considérations élémentaires suivantes. Si l'on considère une trajectoire  $t \mapsto \mathbf{q}(t)$ , on a

$$\frac{d}{dt}D_{ij}(\mathbf{q}(t)) = \nabla D_{ij} \cdot \dot{\mathbf{q}}.$$

Si l'on cherche à éviter les contacts, on doit imposer que la distance augmente (au sens large) lorsqu'elle est nulle (l'expression ci-dessus doit être positive en cas de contact, i.e. lorsque  $D_{ij} = 0$ ). Notons  $\mathbf{G}_{ij} = \nabla D_{ij}(\mathbf{q})$  le gradient de la fonction distance de  $i$  à  $j$ , le cône des vitesses admissibles associé à une configuration  $\mathbf{q}$  est alors

$$C_{\mathbf{q}} = \{\mathbf{v}, D_{ij}(\mathbf{q}) = |\mathbf{q}_j - \mathbf{q}_i| - 2r = 0 \Rightarrow \mathbf{G}_{ij} \cdot \mathbf{v} \geq 0\}.$$

Noter que  $\mathbf{G}_{ij} \in \mathbb{R}^{2N}$  n'a que 4 composantes non nulles, correspondant aux positions des individus  $i$  et  $j$ . Cet ensemble  $C_{\mathbf{q}}$  est un cône convexe fermé comme intersection de demi-espaces contenant 0, la projection sur  $C_{\mathbf{q}}$  est donc bien définie, et le modèle d'évolution exprime simplement le fait que la vitesse effective de la population est la plus proche au sens des moindres carrés de la vitesse souhaitée :

$$\dot{\mathbf{q}} = P_{C_{\mathbf{q}}} \mathbf{U}(\mathbf{q}),$$

où  $P_{C_{\mathbf{q}}}$  est la projection pour la norme euclidienne.

Cette équation formellement très simple est rendue délicate par le caractère non lisse de la dépendance de la vitesse effective par rapport à la configuration  $\mathbf{q}$ . Elle peut se mettre sous la forme d'une inclusion différentielle

$$\dot{\mathbf{q}} + N_{\mathbf{q}} \ni \mathbf{U},$$

où  $N_{\mathbf{q}}$  est un ensemble de vecteurs, appelé cône polaire de  $C_{\mathbf{q}}$  (ensemble des vecteurs qui ont un produit scalaire négatif avec tous les éléments de  $C_{\mathbf{q}}$ ), aussi appelé cône normal sortant à  $K$  en  $\mathbf{q}$ . L'expression ci-dessus exprime le fait que pour presque tout temps,  $\dot{\mathbf{q}}$  s'écrit  $\mathbf{U} - \mathbf{v}$ , où  $\mathbf{v}$  est un élément du cône normal sortant, ce qui est équivalent, d'après le théorème de Farkas, à l'existence de réels  $\lambda_{ij}$  positifs, tels que

$$\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{U} + \sum_{i < j} \lambda_{ij} \mathbf{G}_{ij},$$

avec  $\lambda_{ij} = 0$  dès que  $D_{ij} > 0$ . On peut interpréter  $\lambda_{ij}$  comme une pression qui quantifie la force de répulsion entre  $i$  et  $j$ .

Il peut sembler surprenant que la simple donnée d'une inclusion à chaque instant permette de définir la trajectoire de façon unique. On peut pourtant montrer (voir [8, 17]) le caractère bien posé de cette équation (existence et unicité d'une trajectoire continue) dès que l'ensemble  $K$  vérifie une propriété dite de *prox-régularité*, qui signifie qu'il existe  $\eta > 0$  tel que, pour tout  $\mathbf{q} \in \partial K$ , tout  $\mathbf{v}$  dans  $N_{\mathbf{q}}$  de norme 1, on a  $\overline{B}(\mathbf{q} + \eta\mathbf{v}, \eta) \cap K = \{\mathbf{q}\}$ . Cela signifie en particulier que la projection sur  $K$  est bien définie dans un  $\eta$ -voisinage de  $K$ .

Cette dernière condition apparaît comme extrêmement naturelle si l'on considère l'algorithme de rattrapage (*catching up*) introduit dans [19] pour montrer l'existence de solution à un problème formellement analogue. Une étape de cet algorithme, de type prédiction-corrrection, consiste simplement à faire évoluer les gens selon la vitesse souhaitée pendant un pas de temps  $\tau > 0$ , puis à projeter si besoin la configuration obtenue sur l'ensemble des configurations admissibles  $K$  :

$$\begin{cases} \tilde{\mathbf{q}}^{n+1} &= \mathbf{q}^n + \tau \mathbf{U}(\mathbf{q}^n) \\ \mathbf{q}^{n+1} &= P_K(\tilde{\mathbf{q}}^{n+1}). \end{cases}$$

Il est clair que si  $K$  est  $\eta$ -prox régulier, et  $|\mathbf{U}|$  borné, il suffit de prendre  $\tau$  suffisamment petit pour que  $d(\tilde{\mathbf{q}}^{n+1}, K) < \eta$ , de telle sorte que la projection soit bien définie. On construit ainsi pour une suite  $(\tau)$  de pas de temps tendant vers 0 une suite de trajectoires discrètes  $\mathbf{q}_\tau$  (construites par exemple affines par morceaux en interpolant les configurations discrètes), et l'on peut montrer la convergence quand  $\tau$  tend vers 0 vers une trajectoire limite solution du problème de départ.

La projection sur  $K$  n'étant pas facile à effectuer en pratique, il est possible de linéariser la contrainte. Pour  $\mathbf{q} \in K$  donné, on définit  $K_{\mathbf{q}}$  par

$$K_{\mathbf{q}} = \{\tilde{\mathbf{q}}, D_{ij}(\mathbf{q}) + \mathbf{G}_{ij} \cdot (\tilde{\mathbf{q}} - \mathbf{q}) \geq 0 \quad \forall i \neq j\}$$

qui est strictement inclus dans  $K$ , dont on peut montrer qu'il approche bien  $K$  au voisinage de  $\mathbf{q}$ . Comme il s'agit d'un polyèdre convexe, il est assez aisé d'approcher numériquement la projection sur  $K_{\mathbf{q}}$ , par exemple par un algorithme de type Uzawa. La seconde étape est ainsi en pratique remplacée par  $\mathbf{q}^{n+1} = P_{K_{\mathbf{q}^n}}(\tilde{\mathbf{q}}^{n+1})$ .

**Approche macroscopique** Sur le plan macroscopique, les principes ci-dessus prennent la forme suivante : on représente la foule par une densité  $\rho(x, t)$ , transportée par la vitesse  $\mathbf{u}$  :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0,$$

où  $\mathbf{u}$  est définie comme la projection du champ de vitesse souhaitée  $\mathbf{U}$  sur un ensemble  $C_\rho$  de vitesses admissibles. Cet ensemble peut être défini informellement comme l'ensemble des vitesses qui n'augmentent pas la densité (i.e. la divergence est positive) lorsqu'elle est déjà saturée. On peut définir précisément  $C_\rho$  par dualité :

$$C_\rho = \left\{ \mathbf{v} \in L^2(\Omega), \int_{\Omega} \mathbf{v} \cdot \nabla p \leq 0 \quad \forall p \in H_\rho^1 \quad p \geq 0 \text{ p.p.} \right\}$$

où  $\Omega$  est le domaine considéré, et  $H_\rho^1$  l'espace des fonctions de  $H^1(\Omega)$  qui sont nulles sur la zone non saturée [ $\rho < 1$ ]. Le modèle s'écrit alors, outre l'équation de transport ci-dessus,

$$\mathbf{u} = P_{C_\rho} \mathbf{U},$$

où la projection s'effectue dans un sens  $L^2$ .

La simplicité formelle du modèle, qui s'écrit finalement comme une équation de transport par une vitesse  $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\rho)$  (on considère que  $\mathbf{U}$  est une donnée du problème), cache encore ici un certain nombre de difficultés. D'une part, comme dans le cas microscopique, la dépendance  $\rho \mapsto \mathbf{u}(\rho)$  n'est pas locale (au travers de la projection,  $\mathbf{u}$  ne dépend pas que de la valeur de  $\rho$  au point considéré, mais de l'ensemble de la densité sur le domaine). Cette dépendance est par ailleurs non lisse : si la densité vaut  $1 - \varepsilon$ , la contrainte n'est pas saturée, et tous les mouvements sont permis, alors que pour la densité très proche  $\rho \equiv 1$ , seuls les champs à divergence positive sont permis. Enfin, la projection étant effectuée dans un sens  $L^2$ , la vitesse obtenue peut être peu régulière, même si la vitesse souhaitée est elle-même régulière, ce qui peut rendre délicate l'étude de l'équation de transport (il est en particulier impossible en général de définir les trajectoires individuelles). Mais une part de ces difficultés vient du caractère *Eulérien* de la formulation du modèle : on a cherché à représenter la foule par une densité définie dans un domaine, de telle sorte que la dérivée partielle en temps est verticale dans l'espace temps, alors que les dérivées en temps du modèle microscopique étaient afférentes au suivi d'un individu donné (approche *Lagrangienne*). On peut espérer appliquer l'approche menée avec succès pour le modèle microscopique en introduisant un cadre qui respecte mieux le suivi Lagrangien des individus. Ce cadre est donné par la métrique de Wasserstein, dont on va voir qu'il permet d'appliquer le principe de rattrapage introduit précédemment au modèle macroscopique. Nous présentons ce cadre de façon très informelle, dans le cas de mesures absolument continues par rapport à la mesure de Lebesgue, à support compact, et nous renvoyons à [22] pour une présentation plus complète de ces notions. Pour deux mesures de probabilité  $\mu$  et  $\nu$  sur  $\mathbb{R}^2$ , et  $\mathbf{t}$  une application mesurable de  $\mathbb{R}^2$  dans lui-même, on dira que  $\mathbf{t}$  pousse  $\mu$  vers  $\nu$ , et l'on écrira  $\mathbf{t}_\# \mu = \nu$ , si

$$\mu(\mathbf{t}^{-1}(A)) = \nu(A),$$

pour tout ensemble  $A$  mesurable. On définit alors la distance de Wasserstein quadratique  $W_2(\rho, \nu)$  par

$$W_2(\rho, \nu)^2 = \inf_{\mathbf{t}, \mathbf{t}_\# \mu = \nu} \int |\mathbf{t}(x) - x|^2 d\mu(x).$$

On peut alors écrire formellement l'algorithme de rattrapage ( $\mathbf{I}$  représente l'identité)

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{\rho}^{n+1} = (\mathbf{I} + \tau \mathbf{U})_\# \rho^n \\ \rho^{n+1} = P_K(\tilde{\rho}^{n+1}). \end{array} \right.$$

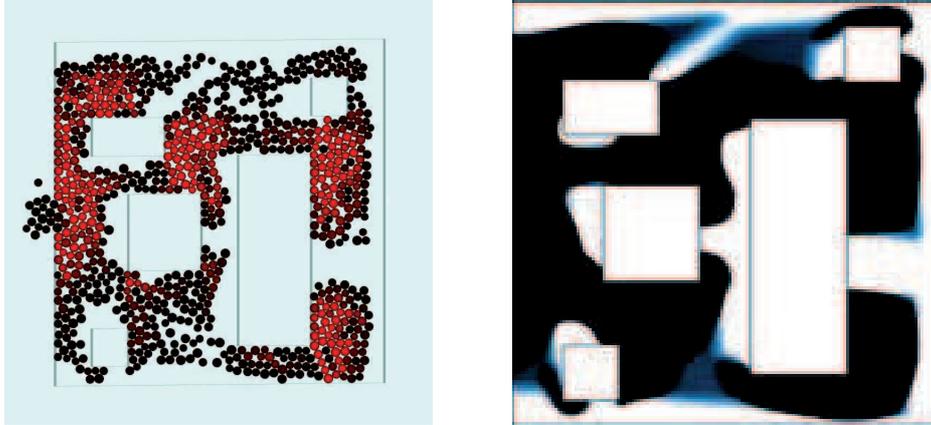


FIGURE 1 – Simulations micro (gauche) et macro (droite) d'une même situation

où la projection est effectuée au sens de la distance de Wasserstein. Il s'agit de vérifier que cette projection est bien définie. L'existence d'un point qui réalise la distance de  $\tilde{\rho}^{n+1}$  à  $K$  est élémentaire, mais l'unicité est plus délicate. Une extension directe à ce cadre métrique de la notion de prox-régularité est délicate : on peut montrer qu'en général, une mesure  $\rho$ , quand bien même elle saturerait la contrainte sur son support, n'est la projection sur  $K$  que d'elle-même, de telle sorte que  $K$  n'est  $\eta$  prox-régulier pour aucun  $\eta > 0$ . De façon surprenante, on peut néanmoins montrer que cette projection est bien définie de façon unique sans condition sur la distance à  $K$  du point de départ<sup>1</sup>, de telle sorte que le schéma ci-dessus est bien un algorithme. On peut construire ainsi des trajectoires discrètes, dont on peut montrer qu'elle convergent vers une solution du problème de départ (voir [15], où [14] pour le cas où le champ souhaité dérive d'un gradient).

### Calcul effectif de la projection

Au delà d'un résultat d'existence d'une solution, cette approche suggère des pistes pour le développement de méthodes numériques adaptées à ce type de problème. Un algorithme de splitting basé sur l'alternance d'une étape de transport par la vitesse souhaitée et d'une étape de projection sur l'espace des configurations admissibles est décrit dans [15]. Nous utilisons un algorithme stochastique inspiré par des correspondances (voir [13]) entre le problème de congestion, le problème de Hele Shaw, et le processus DLA (Diffusion Limited Aggregation). Cet algorithme

1. De façon paradoxale au premier abord, le problème macroscopique est *plus facile* de ce point de vue que le problème microscopique, puisque l'algorithme de rattrapage (pour le problème non discrétisé en espace) est bien défini sans contrainte sur le pas de temps, alors qu'on peut vérifier que la constante de proxrégularité pour le problème discret tend vers 0, c'est-à-dire dégénère, lorsque le nombre d'individus tend vers l'infini.

est basé sur les considérations heuristiques suivantes : considérons une densité non admissible  $\tilde{\rho}$  (telle que celle susceptible d'être produite par la première étape de l'algorithme). Pour simplifier, on considère ici le cas où cette densité s'écrit

$$\tilde{\rho} = (1 + \varepsilon\mu)1_\omega,$$

où  $1_\omega$  est la fonction caractéristique d'un domaine  $\omega$  et  $\mu$  une densité positive. La projection de  $\tilde{\rho}$  sur  $K$  est la fonction caractéristique d'un domaine qui contient  $\omega$ , la densité correspondante y est donc identiquement égale à 1. Le transport optimal entre  $\tilde{\rho}$  et  $\rho$  peut s'écrire  $\mathbf{t} = \mathbf{I} + \varepsilon\mathbf{v}$ , où  $\mathbf{v}$  est le champ de vecteur sur  $\omega$  qui minimise la norme  $L^2$  parmi les champs qui assurent que la densité obtenue est bien 1, ce qui s'écrit

$$1 = \rho = \frac{\tilde{\rho}}{|\mathbf{I} + \varepsilon\mathbf{v}|} = \varepsilon\mu - \varepsilon\nabla \cdot \mathbf{v} + o(\varepsilon),$$

soit, au premier ordre,  $\nabla \cdot \mathbf{v} = \mu$ . La formulation point-selle du problème de minimisation sous contrainte prend ainsi la forme d'un problème de Darcy :

$$\mathbf{v} + \nabla p = 0, \quad \nabla \cdot \mathbf{v} = \mu, \quad p = 0 \text{ sur } \partial\omega$$

qui peut s'écrire sous la forme d'un problème de Poisson  $-\Delta p = \mu$ . La vitesse du bord est alors  $-\partial p / \partial n$ , qui correspond à la densité de probabilité sur la frontière de  $\omega$  de la première sortie d'un mouvement brownien dont la position initiale suit la loi  $\mu$  (renormalisée à 1). L'algorithme (détaillé dans [15]) est basé sur cette interprétation stochastique : pour le problème discrétisé en espace, la densité  $\tilde{\rho}$  est constante par cellule. On choisit une cellule sur laquelle la contrainte est violée, et l'on fait partir une marche aléatoire symétrique de cette cellule, jusqu'à rencontrer une cellule qui ne sature pas la contrainte. On se débarrasse alors du surplus de masse, et l'on continue jusqu'à ce que tout le surplus ait été redistribué. On traite ainsi toutes les cellules sur-saturées.

### 3 Remarques générales

Nous terminons ce bref aperçu par quelques remarques sur les liens entre les différentes approches présentées ci-dessus.

#### Ordre 1 *versus* ordre 2

Nous avons déjà évoqué le fait que le choix d'un modèle d'ordre 2 en temps consiste à prendre en compte l'inertie. Si ces aspects paraissent essentiels pour le trafic routier (un conducteur qui décide de stopper son véhicule parcourt une distance significative avant de s'arrêter effectivement), ils semblent moins fondamentaux pour la modélisation du mouvement de piétons, sauf dans le cas de vitesses importantes, de changements de comportements individuels brusques, ou de sol glissant. Dans le cadre d'une approche d'ordre 2, les termes de répulsion ajoutés au modèle pour

gérer la congestion (qui s'expriment en général comme le gradient d'une fonction que l'on peut voir comme une énergie potentielle) sont par ailleurs susceptibles de générer des comportements oscillants, ou des rebonds des personnes les unes sur les autres, qu'il sera nécessaire de contrôler par des termes de friction additionnels. Sur le plan mathématique, l'ordre 2 en temps est susceptible de compliquer assez considérablement les choses, en particulier pour l'approche non-lisse. Si l'on peut écrire formellement un modèle qui étend à l'ordre 2 le modèle de foules décrit dans la section précédente, il n'existe pas à notre connaissance de cadre théorique qui permette de lui donner un sens clair (sauf en dimension 1 d'espace, où l'on retrouve le modèle des *sticky blocks* proposé dans [4]). Signalons que ces modèles d'ordre deux en temps, s'ils conduisent à des problèmes mathématiques délicats, sont très clairs d'un point de vue physique : en cas de collision, la vitesse après le choc est la projection (pour la norme  $\ell^2$  ou  $L^2$ , selon que l'approche soit micro ou macro) de la vitesse avant le choc, ce qui traduit la prise en compte d'une collision purement non élastique, avec conservation de la quantité de mouvement et perte d'une partie de l'énergie cinétique. Le fait que l'on ait privilégié la norme  $L^2$  (ou  $\ell^2$ ) dans les modèles d'ordre 1 en temps peut se justifier, ou au moins s'interpréter, comme une trace de ces collisions non élastique pour les modèles inertiels.

### Soft versus hard

Comme il a été dit précédemment les modèles *hard* peuvent se voir, au moins formellement, comme des limites de modèles *soft* lorsque l'on fait tendre un petit paramètre vers 0. Ce lien a été largement utilisé dans la littérature pour construire des solutions à des problèmes d'évolution non lisses. L'archétype de ce type d'approche remonte à la théorie des opérateurs maximaux monotones (voir par exemple [3]). Une illustration de cette approche peut être donnée par l'exemple suivant : on considère une unique personne dont la position est représentée par un réel  $q(t)$ . On le suppose enclin à suivre la vitesse souhaitée  $U(t)$ , et assujetti à rester sur l'intervalle  $[0, +\infty[$ . L'évolution peut s'écrire

$$\dot{q} + Aq \ni U,$$

où  $A = \partial I_{[0, +\infty[}$  est un opérateur multivalué, qui vaut  $\{0\}$  pour  $q > 0$ ,  $\emptyset$  pour  $q < 0$ , et  $] -\infty, 0]$  pour  $q = 0$  (ce dernier ensemble est le cône normal sortant de  $K = [0, +\infty[$  en 0). Une solution de ce problème peut être construite à l'aide de la régularisée Yosida de  $A$ , application Lipschitzienne définie sur tout  $\mathbb{R}$  par

$$A_\lambda = \frac{1}{\lambda} (I - J_\lambda)^{-1}, \quad J_\lambda = (I + \lambda A) \quad \lambda > 0.$$

Dans le cas présent, on peut vérifier que  $A_\lambda$  s'identifie à  $A$  sur  $]0, +\infty[$ , et que  $A_\lambda q = q/\lambda$  sur  $] -\infty, 0]$ . On retrouve exactement la correction proposée dans [11] (et décrite au début de la première section) pour prendre en compte la congestion. Dans ce cas, on aura donc bien convergence du modèle lisse vers le modèle non lisse en faisant tendre  $\lambda$  vers  $+\infty$ . Le problème de la convergence de modèles relaxés (i.e.

*soft*) vers des modèles raides est en général délicate, en particulier dans le contexte des EDP. A titre d'illustration, considérons les modèles de prise en compte de la congestion présentés à la fin de la première section, du type

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{U}) - \nabla \cdot D(\rho) \nabla \rho = 0.$$

Suivant l'approche barrière proposée dans [6], on peut considérer par exemple  $D_\varepsilon(\rho) = \varepsilon(1 - \rho)^{-\alpha}$ , avec  $\alpha > 0$ . Pour tout  $\varepsilon > 0$ , ce terme assure que la densité reste inférieure à 1, et pour  $\varepsilon$  décroissant, l'influence devient négligeable dans la zone non saturée, il est alors naturel de se demander quelle est la limite du modèle lorsque  $\varepsilon$  tend vers 0. La même question peut se poser pour une diffusion non linéaire du type  $D(\rho) = \rho^{1/\varepsilon}$ . Il n'existe pas à notre connaissance de résultat de comportement asymptotique pour ces modèles.

### Micro *versus* macro

En premier lieu, pour certaines situations et lorsque le nombre d'individus est important, les deux approches semblent donner lieu à des résultats comparables (à titre d'exemple, la figure 1 présente des simulations d'une même situation selon les deux niveaux de description, dans un cadre de congestion *hard*). Un examen plus attentif révèle pourtant des différences fondamentales. La plus importante est sans doute l'influence de l'arrangement local des individus dans les cas fortement congestionnés. Certaines structures cristallines sont susceptibles d'apparaître localement et de rigidifier considérablement la situation. De façon générale, les modèles micros sont beaucoup plus contraignants (et sans doute aussi plus réalistes) que les modèles macros. Ces considérations sont développées dans [15], disons simplement ici que la contrainte de non chevauchement conduit dans le cas micro à une contrainte de monotonie dans toutes les directions correspondant au contact, alors que la contrainte macroscopique n'implique une contrainte que sur la seule divergence (en moyenne, en quelque sorte). Ces différences ont des implications essentielles sur le comportement effectif des modèles : on peut en particulier vérifier que la modélisation micro de l'évacuation d'une salle peut conduire à des blocages en amont de la porte (qui sont observés dans certaines situations d'évacuation), alors que l'approche macroscopique ne peut les reproduire.

## Références

- [1] L. AMBROSIO, N. GIGLI, G. SAVARÉ, Gradient flows in metric spaces and in the space of probability measures, *Lectures in Mathematics* (ETH Zürich, 2005).
- [2] N. BELLOMO, C. DOGBE, On the modelling crowd dynamics from scaling to hyperbolic macroscopic models, *Math. Mod. Meth. Appl. Sci.* 18 Suppl. (2008).
- [3] H. BREZIS, Opérateurs Maximaux Monotones et Semi-groupes de contractions dans les espaces de Hilbert. AM, North Holland, 1973.

- [4] F. BOUCHUT, Y. BRENIER, J. CORTES AND J.-F. RIPOLL, A hierarchy of models for two-phase flows; *J. Nonlinear Sci.* 10 (2000) 639–660.
- [5] J. A. CARRILLO, S. HITTMEIR, A. JUNGEL, Cross diffusion and nonlinear diffusion preventing blow up in the Keller-Segel model, Preprint UAB.
- [6] Y.-S. CHOI AND Z.-A. WANG, Prevention of blow-up by fast diffusion in chemotaxis. *J. Math. Anal. Appl.* 362 (2010), 553-564.
- [7] Y. DOLAK, C. SCHMEISER, The Keller-Segel model with logistic sensitivity function and small diffusivity, *SIAM J. Appl. Math.*, **66**(1) (2005), 286–308.
- [8] *J.F. Edmond, L. Thibault*, BV solutions of nonconvex sweeping process differential inclusion with perturbation. *J. Differential Equations*, 226(1) :135–179, 2006.
- [9] E.T. HALL, *La dimension cachée*, Paris, Seuil 1978.
- [10] D. HELBING AND P. MOLNÁR, Social force model for pedestrian dynamics, *Physical Review E*, volume 51, number 5, may 1995.
- [11] D. HELBING, I. FARKAS, T. VICSEK, Simulating dynamical features of escape panic, *Nature*, Vol. 407, pp. 487-490, 2000.
- [12] R. L. HUGHES, A continuum theory for the flow of pedestrian, *Transport. Res. Part B* 36 (2002) 507–535.
- [13] L. LEVINE AND Y. PERES, Scaling Limits for Internal Aggregation Models with Multiple Sources, arXiv :0712.3378.
- [14] B. MAURY, A. ROUDNEFF-CHUPIN, F. SANTAMBROGIO, A macroscopic crowd motion model of gradient flow type, *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences* Vol. 20, No. 10 (2010).
- [15] B. MAURY, A. ROUDNEFF-CHUPIN, F. SANTAMBROGIO, J. VENEL, Handling Congestion in Crowd Motion Modeling, *Networks and Heterogeneous Media*, Volume 6, Number 3, September 2011, pp. 485–519.
- [16] B. MAURY, A time-stepping scheme for inelastic collisions, *Numerische Mathematik*, Volume 102, Number 4, pp. 649 - 679, 2006.
- [17] B. MAURY, J. VENEL, A discrete Contact Model for crowd Motion, *ESAIM : M2AN* 45 1 (2011) 145-168.
- [18] B. MAURY, J. VENEL, A Mathematical Framework for a Crowd Motion Model, *C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I* 346 (2008) 1245–1250.
- [19] J.J. MOREAU, Evolution problem associated with a moving convex set in a Hilbert space. *J. Differential Equations*, 26(3) :347–374, 1977.
- [20] A.L. DALIBARD, B. PERTHAME, Existence of solutions of the hyperbolic Keller-Segel model, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **361**(5) (2009), 2319–2335.
- [21] J. Venel, Integrating strategies in numerical modelling of crowd motion *Pedestrian and Evacuation Dynamics '08*, Springer (2010) 641-646 .
- [22] C. VILLANI, *Topics in optimal transportation*, Grad. Stud. Math. 58 (AMS, Providence 2003).