UNIVERSITÉ PARIS XI
U.E.R. MATHEMATIQUE
91405 ORSAY (FRANCE)

Nº 41

COURS DE C3

ALGEBRE ET GEOMETRIE

GROUPE FONDAMENTAL, REVETEMENTS

(Cours de M. CARTAN, PARIS, année 1968-69)

Retirage, ORSAY 1973/74

Nº 41

COURS DE C3

ALGEBRE ET GEOMETRIE

GROUPE FONDAMENTAL, REVETEMENTS

(Cours de M. CARTAN, PARIS, année 1968-69)

Retirage, ORSAY 1973/74

Sujet du cours : homotopie, groupe fondamental, revêtements. Homologie singulière et applications.

Bibliographie :

- Marvin K. GREENBERG, Lectures on Algebraic Topology (W.A. Benjamin 1967).
- Edwin H. SPANIER, Algebraic Topology (Mc Graw-Hill 1966) : ce livre est un ouvrage de référence; il est trop complet pour qu'il soit question d'aborder tous les sujets traités dans cet ouvrage.
- Henri CARTAN : une partie du cours polycopié de la Fac. des Sciences de Paris (C 3 , 1967-68) : Chap.IV , fascicules 12 , 15 , 16 , 17 , 18 , 19 , 20 . En outre, chap. II (généralités sur les foncteurs).

Introduction

1 - Exemples d'espaces topologiques.

B^n ; boule-unité (fermée) de $\mathbb{R}^n$, est formée des points $x = (x_1 , \ldots , x_n)$ tels que $\|x\|^2 = \sum_{i=1}^{n} (x_i)^2 \leqslant 1$. S^{n-1} : sphère-unité de $\mathbb{R}^n$, est définie par $\|x\| = 1$. Noter que $S^0 = \{-1 , +1\}$ est formée de 2 points. E^n_+ est l'hémisphère supérieur de S^n ; c'est l'ensemble des $x = (x_0 , x_1 , \ldots , x_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ tels que

$$\|x\| = 1 , \quad x_0 \geqslant 0 .$$

E^n_+ est homéomorphe à B^n (définir un tel homéomorphisme). Soit P un point de S^n ; définir un homéomorphisme de $S^n - P$ sur $\mathbb{R}^n$ (projection stéréographique), et aussi sur la boule ouverte $B^n - S^{n-1}$.

L'espace projectif réel de dimension n , noté $P^n(\mathbb{R})$, ou simplement P^n , est le quotient de $\mathbb{R}^{n+1} - \{0\}$ par la relation d'équivalence :

$(x_0 , x_1 , \ldots , x_n)$ est équivalent à $(y_0 , y_1 , \ldots , y_n)$

s'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $y_i = \lambda x_i$ $(0 \leqslant i \leqslant n)$; un tel λ est $\neq 0$.

.../...

Cours de Mr. Cartan
2.1.a - 1968/69

La topologie de P^n est la topologie-quotient de celle de $\mathbb{R}^{n+1} - \{0\}$: un sous-ensemble $U \subset P^n$ est donc ouvert si et seulement si $\pi^{-1}(U)$ est un ouvert de $\mathbb{R}^{n+1} - \{0\}$ [on note π l'application canonique $\mathbb{R}^{n+1} - \{0\} \longrightarrow P^n$] . Au point de vue ensembliste, P^n s'identifie à l'ensemble des droites de $\mathbb{R}^{n+1}$ passant par l'origine; on vient de définir une topologie sur l'ensemble de ces droites. L'application π est ouverte (l'image d'un ouvert est un ouvert) , parce que $\pi^{-1}(\pi(V))$ est ouvert dans $\mathbb{R}^{n+1} - \{0\}$ chaque fois que V est un ouvert; en effet, c'est le "saturé" de V pour la relation d'équivalence, donc c'est la réunion des transformés λV de V par toutes les homothéties de rapport $\lambda \neq 0$; chaque λV étant ouvert, leur réunion est bien ouverte.

La topologie de $P^n(\mathbb{R})$ est séparée (exercice) . [A ce sujet, voir le cours C 3 de 1967-68, chap. III] .

La relation d'équivalence précédente induit sur la sphère $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1} - \{0\}$ la relation d'équivalence ρ dont les classes sont les couples de points diamétralement opposés; on en déduit une application continue bijective

$$\varphi = S^n/\rho \longrightarrow P^n(\mathbb{R}) ,$$

ce qui montre que l'espace quotient S^n/ρ est séparé, donc compact (puisque S^n est compacte); il s'ensuit que φ est un homéomorphisme. Ainsi l'espace projectif $P^n(\mathbb{R})$ est compact, et peut être identifié au quotient S^n/ρ .

Exercice : définir l'espace projectif complexe $P^n(\mathbb{C})$; montrer qu'il est compact et s'identifie à un quotient de S^{2n+1} par une relation d'équivalence qu'on précisera.

L'inclusion naturelle $\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$, qui envoie le point $(x_1, \ldots, x_n)$ au point $(0, x_1, \ldots, x_n)$, induit une inclusion $j : \mathbb{R}^n - \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1} - \{0\}$, puis, par passage aux quotients, une inclusion

$$i : P^{n-1}(\mathbb{R}) \longrightarrow P^n(\mathbb{R})$$

[montrer que c'est un homéomorphisme de $P^{n-1}(\mathbb{R})$ sur un sous-espace fermé de $P^n(\mathbb{R})$, appelé "l'hyperplan à l'infini" de $P^n(\mathbb{R})$] . Définir un homéomorphisme

(1) $\qquad P^n(\mathbb{R}) - i\,(P^{n-1}(\mathbb{R})) \xrightarrow{\approx} \mathbb{R}^n$

.../...

par passage au quotient à partir de l'application continue

$$\mathbb{R}^{n+1} - \{0\} - j\,(\mathbb{R}^n - \{0\}) \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

qui envoie $(x_0, x_1, \ldots, x_n)$ en $\frac{x_1}{x_0}, \ldots, \frac{x_n}{x_0}$; pour montrer que (1) est un homéomorphisme, définir une application continue en sens inverse, par la formule

$$(y_1, \ldots, y_n) \longmapsto (1, y_1, \ldots, y_n) .$$

2 - Quelques problèmes d'homéomorphismes.

a) Les boules B^n et B^m sont-elles homéomorphes lorsque $m \neq n$? La réponse est non, mais la preuve ne peut être donnée ici : elle nécessite la théorie de l'homologie.

b) Soit $f : B^n \longrightarrow B^n$ un homéomorphisme; est-il vrai que f applique S^{n-1} dans S^{n-1} ? La réponse est oui, mais cela ne peut être prouvé qu'avec la théorie de l'homologie [exercice : le démontrer pour $n = 1$. Cela signifie : dans un homéomorphisme f du segment $[-1, +1]$ sur lui-même on a $f(-1) = -1$ et $f(+1) = +1$, ou bien $f(-1) = +1$ et $f(+1) = -1$. On utilisera le fait que si on enlève un point intérieur au segment, ce qui reste n'est pas connexe] .

c) La boule B^n et la sphère S^n ne sont pas homéomorphes. On le montrera au moyen de la théorie de l'homologie.

d) Montrer que la boule fermée B^n n'est pas homéomorphe à la boule ouverte $B^n - S^{n-1}$ (l'une est compacte, l'autre ne l'est pas).

Définition : on appelle variété topologique de dimension n un espace topologique X qui possède la propriété suivante : tout point $x \in X$ possède un voisinage ouvert U qui est homéomorphe à $\mathbb{R}^n$ (ou, ce qui revient au même, à une boule ouverte de dimension n). Le plus souvent, on suppose en outre que la topologie de X est séparée, mais ce n'est pas toujours indispensable. [Exercice : montrer que, de toute façon, les points d'une variété sont des ensembles fermés].

Par exemple, $\mathbb{R}^n$, S^n , $P^n(\mathbb{R})$ sont des variétés de dimension n (le démontrer).

.../...

Problème (e) : est-il possible que deux variétés de dimensions m et n distinctes soient homéomorphes ? La réponse est non; mais la preuve nécessitera la théorie de l'homologie.

Principe d'une méthode pour prouver que deux espaces donnés X et Y ne sont pas homéomorphes : en Topologie algébrique, on attache à chaque espace certains êtres algébriques (groupes, algèbres, etc...) de telle façon que les êtres algébriques attachés à deux espaces homéomorphes soient isomorphes (algébriquement). C'est ainsi qu'on définira, pour chaque espace X , et chaque entier n , un groupe abélien $H_n(X)$, appelé groupe d'homologie de X en dimension n .
Si on a deux espaces X et Y dont on sait déterminer effectivement les groupes d'homologie $H_n(X)$ et $H_n(Y)$ (pour un certain entier n), et si, pour cet n , les groupes $H_n(X)$ et $H_n(Y)$ ne sont pas isomorphes, on pourra conclure que les espaces X et Y ne sont pas homéomorphes. Exemple : pour $n \geqslant 1$, on a

$$H_n(B^n) = 0 , \qquad H_n(S^n) = \mathbb{Z} ,$$

donc B^n n'est pas isomorphe à S^n . On verra de nombreux exemples de cette méthode, plus ou moins raffinée.

3 - Autres exemples de variétés.

- Le produit $\mathbb{R} \times S^1$ (cylindre à base circulaire) peut être considéré comme quotient de $\mathbb{R} \times I$ (où I désigne le segment $[0 , 1]$ de $\mathbb{R}$) par la relation d'équivalence :

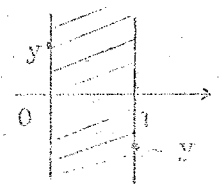
$$(y , 0) \text{ équivalent à } (y , 1) , \text{ quel que soit } y \in \mathbb{R} .$$

[Exercice : le démontrer]. C'est une variété de dimension 2 .

- Une autre relation d'équivalence dans $\mathbb{R} \times I$ est la suivante :

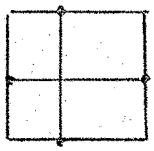
$$(y , 0) \text{ équivalent à } (-y , 1) , \text{ quel que soit } y \in \mathbb{R} ;$$

l'espace quotient s'appelle la bande de Möbius. On peut se la représenter en imaginant une bande de papier, dont on recolle



les deux bords après avoir "retourné" l'un d'eux (on recolle le bord $\mathbb{R} \times \{0\}$ au bord $\mathbb{R} \times \{1\}$ après avoir changé y en - y dans $\mathbb{R}$)

Le tore $S^1 \times S^1$, produit de deux cercles, peut être considéré comme un quotient du carré $I \times I$: on identifie les points des deux côtés verticaux qui sont sur une même horizontale, et les points des deux côtés horizontaux qui sont sur une même verticale. Les 4 sommets sont identifiés en un seul point. Pour réaliser le tore



avec un carré de papier (ou plutôt de caoutchouc !), on peut recoller d'abord les 2 côtés verticaux, ce qui donne un cylindre (tronqué à deux bases circulaires), puis on recolle les deux bases. On peut aussi considérer le tore $S^1 \times S^1$ comme quotient du plan $\mathbb{R}^2$ par la relation d'équivalence qui identifie deux points (x , y) et (x' , y') si $x - x'$ et $y - y'$ sont entiers; autrement dit, c'est le quotient de $\mathbb{R}^2$ par la relation d'équivalence définie par le sous-groupe $\mathbb{Z}^2$ opérant par translations.

Chapitre I

Homotopie, groupe fondamental

-=-=-=-

§ 1 - Homotopie.

Pour le détail, nous renvoyons au cours Cartan de C 3 (1967/68), chap IV, pp. 22-33.

On notera I le segment $[0 , 1]$.

1.1. Homotopie de deux applications continues.

Définition. Etant donnés deux espaces topologiques X et Y, et deux applications continues $f_0 : X \longrightarrow Y$ et $f_1 : X \longrightarrow Y$, on dit que f_0 est homotope à f_1 s'il existe une "homotopie F de f_0 à f_1 ", c'est-à-dire une application continue

$$F : X \times I \longrightarrow Y$$

telle que $F(x , 0) = f_0(x)$ et $F(x , 1) = f_1(x)$ pour tout $x \in X$.

On montre (cf. loc. cit.) que ceci est une relation d'équivalence entre f_0 et f_1. En particulier (symétrie) on dira que "f_0 et f_1 sont "homotopes"

.../...

(chacune d'elles est homotope à l'autre). Notons $\mathcal{C}(X , Y)$ l'ensemble de toutes les applications continues de X dans Y ; et soit H la relation d'équivalence d'homotopie. L'ensemble quotient $\mathcal{C}(X , Y) / H$ se note souvent $[X , Y]$; ses éléments sont les classes d'équivalence suivant la relation d'homotopie.

On montre (loc. cit., prop. 2.1.2) que si on a trois espaces topologiques X , Y, Z , la composition des applications continues

$$\mathcal{C}(Y, Z) \times \mathcal{C}(X , Y) \longrightarrow \mathcal{C}(X , Z)$$

(qui au couple (g,f) associe g o f) passe au quotient, et définit une composition des classes d'applications :

$$[Y , Z] \times [X , Y] \longrightarrow [X , Z] .$$

Si $\varphi \in [X , Y]$, $\psi \in [Y, Z]$, on notera $\psi \circ \varphi \in [X , Z]$ la composée des classes φ et ψ . On a la relation d'associativité

$$\lambda \circ (\psi \circ \varphi) = (\lambda \circ \psi) \circ \varphi ,$$

pour $\varphi \in [X ,Y]$, $\psi \in [Y, Z]$, $\lambda \in [Z , T]$.

Parlons un peu le langage des catégories. On a la catégorie (Top) des espaces topologiques : ses "objets" sont les espaces topologiques; ses "morphismes" sont les applications continues (de façon précise, l'ensemble des morphismes de X vers Y est, par définition, l'ensemble $\mathcal{C}(X , Y)$ des applications continues $X \longrightarrow Y$); enfin, la composition des morphismes est, par définition, la composition des applications continues. Nous venons de définir une nouvelle catégorie (Tophom) : ses objets sont encore les espaces topologiques; mais l'ensemble des morphismes de X vers Y est cette fois $[X , Y]$, ensemble quotient de $\mathcal{C}(X , Y)$. On a dit comment ces morphismes doivent être composés.

1.2. Equivalence d'homotopie; type d'homotopie.

Rappelons que, dans une catégorie, un morphisme $f : X \longrightarrow Y$ prend le nom d'isomorphisme s'il existe un morphisme $g : Y \longrightarrow X$ tel que

$$g \circ f = id_X , \qquad f \circ g = id_Y .$$

Un tel g est unique; c'est aussi un morphisme, qu'on note f^{-1} (inverse de f) . Le composé de deux isomorphismes est un isomorphisme.

.../...

Dans la catégorie (Top) , les isomorphismes s'appellent homéomorphismes. On va voir ce que sont les isomorphismes dans la catégorie (Tophom).

Soit $f : X \longrightarrow Y$ une application continue; pour que la classe d'homotopie φ de f soit un isomorphisme dans (Tophom), il faut et il suffit qu'il existe une application continue $g : Y \longrightarrow X$ telle que

$$\begin{cases} g \circ f : X \longrightarrow X \text{ soit homotope à l'application identique } id_X , \\ f \circ g : Y \longrightarrow Y \text{ soit homotope à l'application identique } id_Y . \end{cases}$$

On dit alors que f est une équivalence d'homotopie.
La composée de deux équivalences d'homotopie est une équivalence d'homotopie.

Définition : on dit que deux espaces X et Y ont le même type d'homotopie s'ils sont isomorphes dans la catégorie (Tophom), c'est-à-dire s'il existe une équivalence d'homotopie $f : X \longrightarrow Y$.

Deux espaces homéomorphes ont évidemment le même type d'homotopie. La réciproque est fausse : par exemple, on verra que le cercle S^1 et l'espace $\mathbb{R}^2 - \{0\}$ (plan privé de l'origine) ont même type d'homotopie; or ils ne sont pas homéomorphes (en effet, si on enlève 2 points à S^1 , ce qui reste n'est pas connexe; si on enlève 2 points à $\mathbb{R}^2 - \{0\}$, ce qui reste est connexe).

1.3. Espaces contractiles.

Définition : un espace X est dit contractile s'il a même type d'homotopie qu'un espace P réduit à un point.

Proposition 1.3.1. Pour un espace topologique X , les quatre conditions suivantes sont équivalentes :

(i) X est contractile;
(ii) pour tout espace Y , $[Y , X]$ a exactement un élément;
(iii) X n'est pas vide, et $[X , X]$ a un seul élément;
(iv) X n'est pas vide, et l'identité id_X est homotope à une application constante.

Démonstration : on prouvera les implications (i) $\Longrightarrow$ (ii) $\Longrightarrow$ (iii) $\Longrightarrow$ (iv) $\Longrightarrow$ (i).

.../...

Exemples d'espaces contractiles : dans un espace vectoriel normé E sur $\mathbb{R}$, tout sous-ensemble X étoilé (par rapport à l'un de ses points a) est, comme espace topologique, contractile : car la fonction continue $F : X \times I \longrightarrow X$ définie par

$$F(x , t) = a + t (x - a)$$

définit une homotopie de l'application identique id_X à l'application constante de valeur a . [Rappelons qu'un sous-ensemble X est dit étoilé par rapport à a si, pour tout $x \in X$, les points du segment joignant a à x appartiennent à X] . En particulier, tout sous-ensemble convexe non vide de E est contractile, car il est étoilé par rapport à n'importe lequel de ses points. Par exemple, dans $\mathbb{R}^n$, la boule fermée B^n est contractile; de même, la boule ouverte $B^n - S^{n-1}$ est contractile.

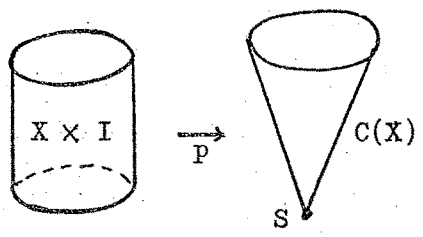
Cône d'un espace X : soit X un espace topologique; dans $X \times I$, introduisons la relation d'équivalence R que voici : tous les points de $X \times \{0\}$ sont équivalents, les autres classes d'équivalence n'ayant qu'un seul point. On note

$$C(X) = (X \times I)/R$$

l'espace quotient (muni, bien entendu, de la topologie quotient); on l'appelle le cône de X . Le point $S \in C(X)$, classe d'équivalence de $X \times \{0\}$, s'appelle le sommet du cône. L'application continue

$$b : X \longrightarrow C(X) ,$$

composée de l'application $x \longrightarrow (x , 1)$ de X dans $X \times I$ et de l'application canonique p de $X \times I$ sur son quotient C(X) , est un homéomorphisme de X sur son image (exercice : le démontrer). Au moyen de b , on peut identifier X à son image appelée la base du cône.



Proposition 1.3.2. Le cône C(X) est contractile.

Démonstration : on va définir une homotopie de l'application identique à l'application constante (qui envoie C(X) sur son sommet S). Pour chaque $\lambda \in I$, appelons homothétie de rapport λ , et notons h_λ , l'application continue $C(X) \longrightarrow C(X)$ qui se déduit, par passage aux

.../...

quotients, de l'application

$$k_\lambda : X \times I \longrightarrow X \times I \text{ définie par}$$
$$k_\lambda (x , t) = (x , \lambda t) .$$

L'application passe bien au quotient, puisque k_λ transforme $X \times \{0\}$ dans $X \times \{0\}$; l'application $h_\lambda : C(X) \longrightarrow C(X)$ ainsi obtenue est bien <u>continue</u>; en effet, la composée

$$X \times I \xrightarrow{k_\lambda} X \times I \xrightarrow{p} C(X)$$

est continue; par définition, elle est égale à la composée

$$X \times I \xrightarrow{p} C(X) \xrightarrow{h_\lambda} C(X) ,$$

qui est donc continue; et ceci prouve que h_λ est continue, d'après la définition même de la topologie quotient.

Il est clair que l'homothétie h_1 de rapport 1 est l'identité de $C(X)$; l'homothétie h_0 de rapport 0 est l'application constante qui envoie $C(X)$ sur son sommet S . Il reste à montrer que l'application $h : (y , \lambda) \longrightarrow h_\lambda (y)$ de $C(X) \times I$ dans $C(X)$ est <u>continue</u> (par rapport à l'ensemble des variables $y \in C(X)$ et $\lambda \in I$). Or elle est obtenue par passage aux quotients à partir de l'application

$$(x , t , \lambda) \longrightarrow (x , \lambda t)$$

de $X \times I \times I$ dans $X \times I$. Donc la composée

$$(X \times I) \times I \xrightarrow{p \times id_I} C(X) \times I \xrightarrow{h} C(X)$$

est continue. Il s'ensuivra bien que h est continue si on sait que la topologie de $C(X) \times I$ est la topologie-quotient pour la relation d'équivalence définie par $p \times id_I$ sur $(X \times I) \times I$. Il en est bien ainsi : c'est un exercice un peu délicat, qu'on laisse au lecteur (on utilisera la compacité de I).

<u>Exercice</u> : définir un <u>homéomorphisme</u> de $C(S^n)$ (cône de la sphère S^n) <u>sur</u> B^{n+1} (boule fermée). Pour cela, utiliser l'application continue

$$S^n \times I \longrightarrow B^{n+1}$$

qui envoie le couple (x , t) au point tx (homothétique de $x \in S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$, par rapport à l'origine, dans le rapport t).

.../...

Proposition 1.3.3. Pour qu'une application continue $f : X \longrightarrow Y$ soit homotope à une application constante, il faut et il suffit qu'elle puisse être prolongée en une application continue $g : C(X) \longrightarrow Y$ [On a identifié X à la base du cône C(X)] .

C'est un exercice très facile, laissé au lecteur.

Corollaire : pour qu'une application continue $f : S^n \longrightarrow Y$ soit homotope à une application constante, il faut et il suffit qu'elle puisse se prolonger en une application continue de la boule B^{n+1} dans Y .

1.4. Rétracte, rétracte par déformation.

Voir le n° 2.4 (Ch. IV) du cours 1967-68 pour C 3 . Bien noter que la sphère S^n n'est pas rétracte de la boule B^{n+1} ; on peut dès maintenant le prouver pour $n = 0$ [si l'ensemble $\{0 , 1\}$ était rétracte du segment $I = [0 , 1]$, au moyen d'une rétraction $r : I \longrightarrow \{0 , 1\}$, les ensembles $r^{-1}(0)$ et $r^{-1}(1)$ seraient deux ouverts non vides et disjoints de I , ayant I pour réunion; or ceci est impossible puisque I est connexe]. Le cas général sera prouvé plus tard, au moyen de la théorie de l'homologie.

Une fois qu'on sait que S^n n'est pas rétracte de B^{n+1} , on conclut que l'application identique $S^n \longrightarrow S^n$ n'est pas homotope à une application constante (cf. corollaire de la fin de 1.3); en particulier, S^n n'est pas contractile (prop. 1.3.1).

En ce qui concerne la notion de rétracte par déformation, voir des variantes et des exercices dans le livre de Spanier (pages 27 à 33).

1.5. Homotopie relative.

Soit A un sous-espace de X .

Définition : on dit que deux applications continues $f_0 , f_1 : X \longrightarrow Y$, telles que $f_0|A = f_1|A$, sont homotopes relativement à A s'il existe une homotopie

$$F : X \times I \longrightarrow Y$$

telle que

(1.5.1) $F(x , t) = f_0(x) = f_1(x)$ pour tout $x \in A$ et tout $t \in I$. Cette condition est donc à rajouter aux autres conditions pour une homotopie, à savoir :

(1.5.2) F continue, $F(x , 0) = f_0(x)$, $F(x , 1) = f_1(x)$ pour $x \in X$.

La condition (1.5.1) exprime que le transformé $f_t(x) = F(x , t)$ de chaque point x de A reste fixe au cours de la déformation.

Proposition 1.5.1 - La relation d'homotopie relativement à A est une relation d'équivalence dans l'ensemble $\mathcal{C}(X , Y)$ des applications continues de X dans Y .

Démonstration : Exercice !

Proposition 1.5.2 - Soient X , Y , Z trois espaces, et soient $A \subset X$ et $B \subset Y$; soient f_0 et f_1 deux applications continues $X \longrightarrow Y$ telles que $f_0|A = f_1|A$, $f_0(A) = f_1(A) \subset B$; soient g_0 et g_1 deux applications continues $Y \longrightarrow Z$ telles que $g_0|B = g_1|B$. Si f_0 et f_1 sont homotopes relativement à A , et si g_0 et g_1 sont

homotopes relativement à B , alors $g_0 \circ f_0$ et $g_1 \circ f_1$ sont homotopes relativement à A . (Démonstration : exercice).

Déduire de là une loi de composition :

$[X , Y , \text{rel. } A] \times [Y , Z , \text{rel. } B] \longrightarrow [X , Z , \text{rel. } A]$, en notant $[X , Y , \text{rel. } A]$ l'ensemble des classes d'équivalence d'applications continues $X \longrightarrow Y$ pour la relation d'homotopie relativement à A .

Exemple important : c'est celui où $X = I$ et $A = \{0 , 1\}$. Considérons donc deux chemins de Y :

$$f_0 : I \longrightarrow Y \quad , \quad f_1 : I \longrightarrow Y$$

ayant même origine $f_0(0) = f_1(0)$, et même extrémité $f_0(1) = f_1(1)$. On dit qu'ils sont homotopes avec origine fixe et extrémité fixe si ce sont des applications $I \longrightarrow Y$ qui sont homotopes relativement au sous-espace $\{0 , 1\}$ de I .

En particulier, si $f_0(0) = f_1(0) = f_0(1) = f_1(1)$, on a la notion de lacets homotopes avec origine fixe.

§ 2 - Le groupoïde fondamental d'un espace topologique X .

2.1 - Composition des chemins.

Soient $f : I \longrightarrow X$ et $g : I \longrightarrow X$ deux chemins de X ; supposons que l'extrémité $f(1)$ coïncide avec l'origine $g(0)$. On va définir un nouveau chemin, appelé le composé de f et g (dans cet ordre) , et noté provisoirement $f \perp g$; c'est, par définition, le chemin $h : I \longrightarrow X$, avec

$$(2.1.1) \quad h(t) = \begin{cases} f(2t) & \text{si} \quad 0 \leqslant t \leqslant \frac{1}{2} \\ g(2t - 1) & \text{si} \quad \frac{1}{2} \leqslant t \leqslant 1 . \end{cases}$$

Intuitivement, le chemin h est obtenu en parcourant d'abord le chemin f pendant la première moitié du temps (i.e. pour $0 \leqslant t \leqslant \frac{1}{2}$) , puis en parcourant le chemin g pendant la deuxième moitié du temps. Noter que $h(\frac{1}{2}) = f(1) = g(0)$.

Cette loi de composition n'est pas associative : si on a trois chemins f , g , h tels que $f(1) = g(0)$ et $g(1) = h(0)$, les deux chemins $(f \perp g) \perp h$ et $f \perp (g \perp h)$ sont bien définis, mais ils sont en général distincts : en effet, pour le premier on est au point $g(1) = h(0)$ à l'instant $t = \frac{1}{2}$, tandis que pour le second on est au point $f(1) = g(0)$ à l'instant $t = \frac{1}{2}$.

Exercice : écrire les formules explicites.

Proposition 2.1.1 - La loi de composition des chemins est compatible avec la relation d'homotopie (il s'agit d'homotopie avec origine fixe et extrémité fixe) ;

la loi de composition qu'elle induit dans les classes de chemins est associative.

Démonstration : 1) soit F une homotopie du chemin f_0 au chemin f_1 , et soit G une homotopie du chemin g_0 au chemin g_1 ; définissons, pour $0 \leq t \leq 1$, $0 \leq u \leq 1$:

$$(2.1.2) \qquad H(t , u) = \begin{cases} F(2t , u) & \text{pour } 0 \leq t \leq \tfrac{1}{2} , \\ G(2t - 1 , u) & \text{pour } \tfrac{1}{2} \leq t \leq 1 . \end{cases}$$

Il est clair que H est une homotopie du chemin $h_0 = f_0 \perp g_0$ au chemin $h_1 = f_1 \perp g_1$ (avec origine fixe et extrémité fixe).

2) il reste à montrer que si on a trois chemins

$$f : I \longrightarrow X , \quad g : I \longrightarrow X , \quad h : I \longrightarrow X$$

tels que $f(1) = g(0)$ et $g(1) = h(0)$, les deux chemins $(f \perp g) \perp h$ et $f \perp (g \perp h)$ sont homotopes. Or, notons-les k_0 et k_1 ; on vérifie que

$$k_1 = k_0 \circ \alpha ,$$

où $\alpha : I \longrightarrow I$ est l'application continue que voici : c'est l'unique application, linéaire-affine dans chacun des intervalles $[0 , \frac{1}{2}]$, $[\frac{1}{2} , \frac{3}{4}]$ et $[\frac{3}{4} , 1]$, telle que

$$\alpha(0) = 0 , \ \alpha(\tfrac{1}{2}) = \frac{1}{4} , \ \alpha(\tfrac{3}{4}) = \tfrac{1}{2} , \ \alpha(1) = 1 .$$

Tout sera donc démontré une fois que nous aurons prouvé :

Lemme 2.1.2 - Si $k : I \longrightarrow X$ est un chemin de X , tout chemin de la forme $k \circ \alpha$, où $\alpha : I \longrightarrow I$ est une application continue telle que $\alpha(0) = 0$, $\alpha(1) = 1$, est homotope à k relativement à $\{0 , 1\} \subset I$.

Démonstration du lemme : puisque le segment I est contractile, l'application α est homotope à l'identité. Par exemple, on peut poser, pour $0 \leq t \leq 1$, $0 \leq u \leq 1$:

$$\beta(t , u) = u\alpha(t) + (1 - u)\, t ,$$

ce qui donne $\beta(t , 0) = t$, $\beta(t , 1) = \alpha(t)$. Alors

$$k \circ \beta : I \times I \longrightarrow X$$

est une homotopie du chemin k au chemin $k \circ \alpha$.

C.Q.F.D.

Terminologie : on dit que le chemin $k \circ \alpha$ se déduit du chemin k par le changement de la loi du temps :

$$t \longmapsto \alpha(t) .$$

Le lemme exprime qu'un tel changement de la loi du temps ne modifie pas la classe d'homotopie du chemin. [N.B : il n'est pas nécessaire que α soit un homéomorphisme de I sur I ; en revanche, il est nécessaire que $\alpha(0) = 0$ et $\alpha(1) = 1$.

Notation : soient φ et ψ sont deux classes de chemins de X (il s'agit de classes de chemins avec origine fixe et extrémité fixe); supposons que l'on ait $\psi(1) = \psi(0)$ (ceci a un sens, bien que φ et ψ soient des classes d'équivalence, puisque l'extrémité est la même pour tous les chemins de la classe φ , et que l'origine est la même pour tous les chemins de la classe ψ) . Alors on notera $\varphi.\psi$ (dans cet ordre) la composée des classes φ et ψ , c'est-à-dire la classe du chemin $f \perp g$, où f désigne un chemin de la classe φ , et g un chemin de la classe ψ . On a (cf. prop. 2.1.1) :

(2.1.3) $(\varphi . \psi) . \mathcal{E} = \varphi . (\psi . \mathcal{E})$, lorsqu'en outre $\mathcal{E}$ est une classe telle que $\psi(1) = \mathcal{E}(0)$. On écrira alors simplement $\varphi . \psi . \mathcal{E}$.

Proposition 2.1.3 - Si $\mathcal{E}$ est la classe d'un chemin constant (c'est-à-dire d'un chemin $e : I \longrightarrow X$ tel que $e(t) = a \in X$ pour tout $t \in I$) , on a

(2.1.4) $$\begin{cases} \varphi . \mathcal{E} = \varphi \text{ pour toute classe } \varphi \text{ telle que } \varphi(1) = a , \\ \mathcal{E} . \psi = \psi \text{ pour toute classe } \psi \text{ telle que } \psi(0) = a . \end{cases}$$

Démonstration : soit $f : I \longrightarrow X$ un chemin dans la classe φ; on a donc $f(1) = a$. On va montrer que le chemin $f \perp e$ est homotope au chemin f ; or on a

$$f \perp e = f \circ \alpha , \quad \text{où } \alpha : I \longrightarrow I \text{ est définie par}$$

$$\alpha(t) = \begin{cases} 2t & \text{pour } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ 1 & \text{pour } \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \ ; \end{cases}$$

Il suffit alors d'appliquer le lemme 2.1.2. Ceci prouve la première relation (2.1.4) , et la deuxième se prouve d'une manière analogue.

2.2 - Le groupoïde fondamental de X .

Soit à nouveau X un espace topologique. On va lui associer une catégorie, notée $\pi_1(X)$. Par définition, les objets de cette catégorie sont les points de X (donc, ici, les objets de la catégorie forment un ensemble) . Si maintenant x et y sont deux points de X , on définit l'ensemble des morphismes de x vers y , noté $\pi_1(X ; x , y)$, comme suit :

Définition : un élément de $\pi_1(X ; x , y)$ est une classe de chemins d'origine x et d'extrémité y (il s'agit des classes de chemins de X pour la relation d'homotopie avec origine fixe et extrémité fixe) .

Pour achever de définir la catégorie $\pi_1(X)$, on doit se donner une loi de composition

(2.2.1) $\pi_1(X ; x , y) \times \pi_1(X ; y , z) \longrightarrow \pi_1(X ; x , z)$ qui, à une classe φ de chemins d'origine x et d'extrémité y , et à une classe ψ de chemins d'origine y et d'extrémité z , associe une classe de chemins d'origine x et

d'extrémité z . Par définition, on prendra la classe composée $\varphi.\psi$; ainsi, (2.2.1) est l'application

$$(\varphi, \psi) \longmapsto \varphi.\psi.$$

N.B. - Si on utilisait la notation o pour la composition des morphismes d'une catégorie, on aurait donc

$$\psi \circ \varphi = \varphi.\psi \quad \text{(attention à l'ordre !)}$$

Il reste à vérifier les axiomes d'une catégorie. Or l'associativité de la composition résulte de la formule (2.1.3) (qui exprime la prop. 2.1.1) , et le fait que chaque ensemble $\pi_1(X ; x , x)$ a un élément neutre ε_x résulte de la prop. 2.1.3 : ε_x est la classe du chemin constant au point x .

On a donc bien associé à l'espace X une catégorie $\pi_1(X)$. Au point de vue notation, on écrira simplement $\pi_1(X , x)$ au lieu de $\pi_1(X ; x , x)$; c'est l'ensemble des classes de lacets (de X) d'origine x , muni de sa loi de composition interne.

Théorème 2.2.1. Dans la catégorie $\pi_1(X)$, tous les morphismes sont des isomorphismes. En particulier, pour tout point x , la loi de composition fait de $\pi_1(X , x)$ un groupe, dont l'élément neutre est la classe du lacet constant au point x .

Démonstration : soit $f : I \longrightarrow X$ un chemin d'origine x et d'extrémité y , et soit $\varphi \in \pi_1(X ; x , y)$ la classe de f . On veut montrer l'existence d'un inverse de φ , c'est-à-dire d'un élément $\psi \in \pi_1(X ; y , x)$ tel que $\varphi.\psi = \varepsilon_x$ et $\psi.\varphi = \varepsilon_y$.
Or soit g le chemin défini par

(2.2.2) $\qquad g(t) = f(1-t)$

(g est le chemin f parcouru en sens inverse) . On va montrer que la classe ψ de g est inverse de φ . Montrons par exemple que $f \perp g$, qui est un lacet d'origine x , est homotope au lacet constant; il suffit d'exhiber une homotopie $H : I \times I \longrightarrow X$, à savoir

$$H(t , u) = \begin{cases} f(2tu) & \text{pour} \quad 0 \leqslant t \leqslant \frac{1}{2} , \\ f(2u - 2tu) & \text{pour} \quad \frac{1}{2} \leqslant t \leqslant 1 . \end{cases}$$

Le fait que H est continue résulte du lemme du cours 1967-68 (page IV - 23) .
Le chemin h_u défini par $h_u(t) = H(t , u)$ a bien pour origine le point $f(0) = x$ (indépendant de u) et pour extrémité le même point x ; le lacet h_0 est le lacet constant au point x ; le lacet h_1 n'est autre que $g \perp f$, car

$$f(2 - 2t) = g(2t - 1) .$$

C.Q.F.D.

Notation : on notera φ^{-1} l'inverse de φ.

On voit, en particulier, que dans le groupe $\pi_1(X , x)$, l'inverse de la classe d'un lacet f est la classe du lacet g définit par (2.2.2) .

Définition : le groupe $\pi_1(X , x)$ s'appelle le groupe fondamental de l'espace X au point x . La définition de ce groupe est due à Poincaré.

Remarque : l'ensemble $\pi_1(X ; x , y)$ peut être vide si $x \neq y$. Pour qu'il soit non vide, il faut et il suffit que le point y appartienne à la même composante connexe-par-arcs que le point x . S'il en est ainsi, soit $\alpha \in \pi_1(X ; x , y)$; l'application $\lambda \longmapsto \alpha^{-1}.\lambda.\alpha$ est un isomorphisme du groupe $\pi_1(X , x)$ sur le groupe $\pi_1(X , y)$. En effet : 1) c'est un homomorphisme de groupes, car pour λ et $\mu \in \pi_1(X , x)$, on a

$$\alpha^{-1}(\lambda.\mu).\alpha = (\alpha^{-1}.\lambda.\alpha) . (\alpha^{-1}.\mu.\alpha) ;$$

2) c'est bijectif, car l'homomorphisme

$$\lambda' \longrightarrow \alpha.\lambda'.\alpha^{-1} \quad \text{de } \pi_1(X , y) \text{ dans } \pi_1(X , x)$$

est réciproque du précédent, puisque

$$\alpha^{-1}.(\alpha.\lambda'.\alpha^{-1}).\alpha = \lambda', \quad \alpha.(\alpha^{-1}.\lambda.\alpha).\alpha^{-1} = \lambda .$$

Conséquence : les groupes fondamentaux $\pi_1(X , x)$ et $\pi_1(X , y)$ attachés à deux points x et y d'une même composante connexe-par-arcs de X sont isomorphes.

Attention ! L'isomorphisme $\pi_1(X , x) \xrightarrow{\approx} \pi_1(X , y)$ dépend en général de la classe de chemins $\alpha \in \pi_1(X ; x , y)$ qui a servi à le définir. D'une façon précise, pour que deux éléments α et β de $\pi_1(X ; x , y)$ définissent le même isomorphisme, il faut et il suffit que

$$(\beta.\alpha^{-1}) . \lambda . (\alpha.\beta^{-1}) = \lambda \quad \text{pour tout} \quad \lambda \in \pi_1(X , x) .$$

Observons que $\beta.\alpha^{-1} = \gamma \in \pi_1(X , x)$; l'application $\lambda \longrightarrow \gamma.\lambda.\gamma^{-1}$ de $\pi_1(X , x)$ dans lui-même est un automorphisme du groupe $\pi_1(X , x)$; c'est ce qu'on appelle l'automorphisme intérieur défini par l'élément γ. On voit que :

Proposition 2.2.2. - Supposons que le point y soit dans la composante connexe de x ; pour que l'isomorphisme $\pi_1(X , x) \xrightarrow{\approx} \pi_1(X , y)$ défini par un élément $\alpha \in \pi_1(X ; x , y)$ soit indépendant du choix de α, il faut et il suffit que tout automorphisme intérieur du groupe $\pi_1(X , x)$ soit l'identité, ce qui exprime que le groupe $\pi_1(X , x)$ est commutatif.

[En effet, la condition est que l'on ait $\gamma.\lambda.\gamma^{-1} = \lambda$ quels que soient λ et γ dans le groupe $\pi_1(X , x)$] .

Lorsqu'il en est ainsi, et que l'espace X est connexe par arcs, on peut identifier entre eux les groupes fondamentaux relatifs aux différents points de l'espace X ; d'une façon précise, si on note $\pi_1(X)$ le groupe fondamental d'un point particulier x , alors, pour tout point $y \in X$, on a <u>un isomorphisme bien déterminé</u> de $\pi_1(X , y)$ sur $\pi_1(X)$.

<u>Remarque</u> : toutes les considérations précédentes sont valables pour n'importe quelle catégorie dans laquelle tous les morphismes sont des isomorphismes. Une telle catégorie s'appelle souvent un <u>groupoïde</u>.

<u>Exercice</u> : soit $f : I \times I \longrightarrow X$ une application continue; posons, pour $u \in I$,

$$f_u(t) = f(t , u) ,$$

et supposons que f_u soit un <u>lacet</u> quel que soit u ; posons

$$g(u) = f_u(0) = f_u(1) .$$

Nous dirons alors que les lacets f_0 et f_1 sont librement <u>homotopes</u>.

Si g(u) était indépendant de u , les lacets f_0 et f_1 seraient homotopes avec origine fixe (et extrémité fixe) . Dans le cas général, soit $g(0) = x$, $g(1) = y$, et soit $\alpha \in \pi_1(X ; x , y)$ la classe du chemin g . Montrer que <u>l'isomorphisme</u>

$$\lambda \longmapsto \alpha^{-1}.\lambda.\alpha$$

<u>de</u> $\pi_1(X , x)$ <u>sur</u> $\pi_1(X , y)$ <u>transforme la classe du lacet</u> f_0 <u>dans la classe du lacet</u> f_1 . [Indications sur la démonstration : l'application $F : I \times I \longrightarrow X$ définie par

$$F(t , u) = \begin{cases} g(3tu) & \text{pour } 0 \leq t \leq \frac{1}{3} \\ f(3t-1 , u) & \text{pour } \frac{1}{3} \leq t \leq \frac{2}{3} \\ g((3-3t)u) & \text{pour } \frac{2}{3} \leq t \leq 1 \end{cases} ,$$

définit une homotopie (avec origine x fixe) d'un lacet de la classe de f_0 à un lacet de la classe $\alpha^{-1}.\lambda_1.\alpha$, λ_1 désignant la classe de f_1 dans $\pi_1(X , y)$] .

En particulier, lorsque X est connexe par arcs, et que le groupe fondamental de X est <u>commutatif</u>, une condition nécessaire et suffisante pour que deux lacets de X (n'ayant pas nécessairement la même origine) définissent le même élément de $\pi_1(X)$, est qu'ils soient <u>homotopes</u> au sens de l'exercice précédent.

2.3. Espaces simplement connexes.

Proposition 2.3.1 - Pour un espace X , les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) $\pi_1(X ; x , y)$ est un ensemble à un élément, quels que soient les points x et y de X ;

(ii) X est connexe par arcs, et le groupe $\pi_1(X , x)$ est réduit à l'élément neutre quel que soit le point $x \in X$;

(iii) X est connexe par arcs, et il existe un $x \in X$ tel que le groupe $\pi_1(X , x)$ soit réduit à l'élément neutre.

Démonstration : il est évident que (i) $\Longrightarrow$ (ii) $\Longrightarrow$ (iii) . Reste à montrer que (iii) entraîne (i) . Tout d'abord, (iii) entraîne (ii) , puisqu'on a vu que si un espace X est connexe par arcs, les groupes fondamentaux $\pi_1(X , x)$ et $\pi_1(X , y)$ sont isomorphes quels que soient les points x et y . De plus, $\pi_1(X ; x , y)$ n'est jamais vide, puisque X est connexe par arcs ; si α et β sont deux éléments de $\pi_1(X ; x , y)$, alors $\beta^{-1}.\alpha \in \pi_1(X , x)$, donc $\beta^{-1}.\alpha$ est l'élément neutre, et par suite $\alpha = \beta$. Ainsi l'ensemble $\pi_1(X ; x , y)$ a exactement un élément, ce qui prouve (i) .

C.Q.F.D.

Définition : on dit qu'un espace X est simplement connexe lorsqu'il satisfait aux conditions (équivalentes) de la proposition 2.3.1. Un espace simplement connexe est donc un espace connexe par arcs tel que tout lacet d'origine $x \in X$ soit homotope (avec origine fixe) ou lacet constant d'origine x .

Proposition 2.3.2. - Pour qu'un espace X soit simplement connexe, il faut et il suffit que l'ensemble $[S^1 , X]$ des classes d'applications continues du cercle S^1 dans X soit un ensemble à un élément.

Démonstration : 1) la condition est nécessaire. Supposons en effet que X soit simplement connexe ; alors X n'est pas vide, donc $[S^1 , X]$ n'est pas vide (il contient la classe d'une application constante, et d'ailleurs toutes les applications constantes $S^1 \longrightarrow X$ sont homotopes, puisque X est connexe par arcs) . Il reste à montrer que toute application continue $f : S^1 \longrightarrow X$ est homotope à une application constante. Or f provient, par passage au quotient, d'une application continue

$$g : I \longrightarrow X$$

telle que $g(0) = g(1)$ (on identifie S^1 au quotient de I par la relation d'équivalence qui identifie 0 et 1) ; g est un lacet d'origine $g(0) = g(1)$; puisque X est simplement connexe, il existe une homotopie

$$G : I \times I \longrightarrow X$$

de ce lacet à un lacet constant. Par passage au quotient, G induit une application continue

$$F : S^1 \times I \longrightarrow X$$

qui définit une homotopie de f à une application constante.

2) la condition est <u>suffisante</u>. Si $[S^1 , X]$ a un seul élément, X est non vide et connexe par arcs (car si $x \in X$ et $y \in X$ ne pouvaient pas être joints par un chemin les deux applications constantes $S^1 \longrightarrow X$ de valeur x et de valeur y ne seraient pas homotopes) . Il reste à montrer que si $x \in X$, tout lacet $g : I \longrightarrow X$ tel que $g(0) = g(1) = x$ est homotope (avec origine fixe) à un lacet constant. Or définissons une application continue h du bord du carré $I \times I$ dans X , comme suit :

$$h(t , 0) = g(t) , \ h(t , 1) = x , \ h(0 , u) = x , \ h(1 , u) = x .$$

Il existe évidemment un homéomorphisme ω de $I \times I$ sur la boule B^2 , qui transforme le bord du carré dans le cercle S^1 .

L'application continue $h \circ \omega^{-1} : S^1 \longrightarrow X$ étant, par hypothèse, homotope à une constante, se prolonge en une application continue $H : B^2 \longrightarrow X$. Alors $G = H \circ \omega : I \times I \longrightarrow X$ coïncide avec h sur le bord du carré $I \times I$; G est donc une homotopie du lacet g au lacet constant.

C.Q.F.D.

<u>Proposition 2.3.3.</u> - <u>Tout espace contractile</u> X <u>est simplement connexe</u>.

En effet, si X est contractile, l'ensemble $[Y , X]$ a un élément, quel que soit l'espace Y ; il est donc ainsi lorsque $Y = S^1$

La réciproque est fausse : on verra plus loin que, pour $n \geqslant 2$, la sphère S^n est simplement connexe, mais n'est pas contractile.

<u>2.4. Calcul du groupe fondamental de S^1</u> .

Montrons d'abord que S^1 est <u>connexe par arcs</u>. Pour le voir, on peut utiliser l'application exponentielle

exp : $\mathbb{R} \longrightarrow S^1$, définie par

$t \longmapsto e^{2\pi i t}$.

(S^1 est identifié à l'ensemble des nombres complexes de valeur absolue égale à 1)

Cette application est surjective, de période 1 ; en fait, exp est un homomorphisme du groupe additif de $\mathbb{R}$ sur le groupe multiplicatif des nombres complexes de valeur absolue égale à 1 , et son noyau est $\mathbb{Z}$, le groupe additif des entiers. L'application exp permet donc d'identifier S^1 à $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$.

Cela dit, soient x_0 et $x_1 \in S^1$; choisissons t_0 et $t_1 \in \mathbb{R}$ tels que $x_0 = e^{2\pi i t_0}$, $x_1 = e^{2\pi i t_1}$. Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ l'application linéaire-affine telle que $f(0) = t_0$, $f(1) = t_1$; alors $\exp \circ f : I \longrightarrow S^1$ est un chemin d'origine x_0 et d'extrémité x_1 Ceci prouve que S^1 est connexe par arcs.

Soit $n \in \mathbb{Z}$ un entier quelconque. L'ensemble $\pi_1(\mathbb{R} ; 0 , n)$ a un élément, puisque $\mathbb{R}$ est simplement connexe (en fait, $\mathbb{R}$ est contractile) ; cet élément est la classe du chemin affine $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ défini par $f(t) = nt$. Considérons le chemin $\exp \circ f : I \longrightarrow S^1$; c'est un <u>lacet</u> de S^1 , d'origine 1 et d'extrémité 1 . Il est clair que si on remplace f par un chemin homotope (ayant origine 0 et même extrémité n) , $\exp \circ f$ est remplacé par un lacet homotope. On définit ainsi une application :

$$\Phi : \mathbb{Z} \longrightarrow \pi_1(S^1 , 1) .$$

<u>Théorème 2.4.1</u> - <u>L'application Φ est un isomorphisme du groupe additif $\mathbb{Z}$</u> sur le groupe fondamental $\pi_1(S^1 , 1)$.

<u>Démonstration</u> du théorème : 1) Φ est un homomorphisme de groupes. En effet, soient n_1 et n_2 deux entiers; le chemin affine de $\mathbb{R}$, d'origine n_1 et d'extrémité n_1+n_2 , est transformé par exp dans le même lacet que le chemin de $\mathbb{R}$ d'origine 0 et d'extrémité n_2 . De plus, la classe du chemin affine d'origine 0 et d'extrémité n_1+n_2 est <u>composée</u> (au sens de la composition des chemins, cf. 2.1) de la classe du chemin d'origine 0 et d'extrémité n_1 , et de la classe du chemin d'origine n_1 et d'extrémité n_1+n_2 . De là il résulte que $\Phi(n_1 + n_2)$ est la classe composée de la classe $\Phi(n_1)$ et de la classe $\Phi(n_2)$, au sens de la loi de composition du groupe $\pi_1(S^1 , 1)$. Ceci exprime que Φ est un homomorphisme de groupes.

2) Il reste à montrer que l'application Φ est bijective. Or la surjectivité de Φ et son injectivité résultent respectivement des deux lemmes suivants :

<u>Lemme 2.4.2</u>. - Pour tout lacet $g : I \longrightarrow S^1$ tel que $g(0) = g(1) = 1$, il existe un chemin (et un seul) $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ tel que

$$f(0) = 0 , \quad \exp \circ f = g .$$

<u>Lemme 2.4.3</u>. - Si f_0 et f_1 sont deux chemins $I \longrightarrow \mathbb{R}$ tels que $f_0(0) = f_1(0) = 0$,

et si

$$g_0 = \exp \circ f_0 \quad \text{et} \quad g_1 = \exp \circ f_1$$

sont des lacets homotopes, alors les chemins f_0 et f_1 ont même extrémité : $f_0(1) = f_1(1) \in \mathbb{Z}$.

Ces deux lemmes sont eux-mêmes des cas particuliers de deux propositions un peu plus générales :

Lemme 2.4.2 bis - Pour tout chemin $g : I \longrightarrow S^1$ et tout $u \in \mathbb{R}$ tel que $\exp(u) = g(0)$, il existe un chemin et un seul $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ tel que

$$f(0) = u , \quad \exp \circ f = g$$

(f s'appelle le relèvement de g , d'origine u) .

Lemme 2.4.3 bis - Si deux chemins g_0 , $g_1 : I \longrightarrow S^1$ ont même origine et même extrémité, et sont homotopes (avec origine fixe et extrémité fixe) , leurs relèvements f_0 , $f_1 : I \longrightarrow \mathbb{R}$ ayant une même origine u (telle que $\exp(u) = g_0(0) = g_1(0)$) ont aussi même extrémité.

Ces deux derniers énoncés seront prouvés plus loin, dans un contexte plus général : celui des "revêtements" (cf. prop. 3.8.1 et 3.8.2 ci-dessous) . Nous les admettrons pour le moment; ils entraînent bien le théorème 2.4.1 , que nous considérons donc comme établi [sous réserve de la démonstration ultérieure des deux lemmes).

Remarque : le théorème 2.4.1 montre que S^1 n'est pas simplement connexe. De plus le groupe fondamental $\pi_1(S^1 , 1)$ étant commutatif, les groupes fondamentaux de S^1 relatifs à deux de ses points sont canoniquement isomorphes.

Définition : on appelle indice d'un lacet de S^1 en un point $v \in S^1$ l'entier $n \in \mathbb{Z}$ qui lui correspond dans l'isomorphisme

$$\pi_1(S^1 , v) \approx \pi_1(S^1 , 1) \overset{\Phi^{-1}}{\approx} \mathbb{Z} .$$

Exercice : si g est un lacet $I \longrightarrow S^1$ (d'origine v quelconque) , l'indice de g est égal à la différence

$$f(1) - f(0) \in \mathbb{Z}$$

pour n'importe quel relèvement $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ du lacet g

Application : indice d'un lacet dans le plan $\mathbb{R}^2$

Soit $h : I \longrightarrow \mathbb{R}^2$ un lacet (donc $h(0) = h(1)$) du plan, et soit $a \in \mathbb{R}^2$ un point n'appartenant pas à l'image h(I) . [N.B : on fait l'hypothèse qu'un tel point a existe; on exclut donc le cas où h est une "courbe de Peano"] . Alors h définit

un lacet $I \longrightarrow \mathbb{R}^2 - \{a\}$, qu'on notera encore h .

Considérons l'application continue

$$k : \mathbb{R}^2 - \{a\} \longrightarrow S^1$$

définie par

$$k(x) = \frac{x-a}{|x-a|} ,$$

en notant $|x-a|$ la longueur euclidienne du vecteur x-a ; l'application k est une équivalence d'homotopie (exercice : le démontrer) . Au lacet h elle associe le lacet

$$g = k \circ h : I \longrightarrow S^1 ;$$

par définition, l'indice du lacet k o h s'appelle l'indice du lacet h par rapport au point a $\notin h(I)$. Pour que deux lacets h_0 , $h_1 : I \longrightarrow \mathbb{R}^2 - \{a\}$ soient homotopes, il faut et il suffit qu'ils aient même indice : s'il s'agit de deux lacets de même origine, et d'homotopie avec origine fixe, cela résulte du théorème 2.4.1 ; le cas général résulte de l'exercice de la fin du n° 2.2.

Proposition 2.4.4. - Supposons en outre que le lacet

$$h : I \longrightarrow \mathbb{R}^2 - \{a\}$$

soit de classe C^1 par morceaux. Identifiant $\mathbb{R}^2$ à $\mathbb{C}$, on peut considérer l'intégrale curviligne

$$(2.4.1) \qquad \frac{1}{2\pi i} \int_I \frac{d\,h(t)}{h(t)-a} .$$

Alors la valeur de cette intégrale est égale à l'indice du lacet h (c'est donc un entier).

Démonstration : le lacet g = k o h de S^1 défini par h est

$$t \longmapsto \frac{h(t) - a}{|h(t) - a|} ;$$

c'est une fonction de classe C^1 par morceaux. D'après le lemme 2.4.2 bis, il se relève en un chemin f : $I \longrightarrow \mathbb{R}$ tel que

$$(2.4.2) \qquad e^{2\pi i f(t)} = \frac{h(t) - a}{|h(t) - a|} ,$$

et f est évidemment de classe C^1 par morceaux. Un calcul élémentaire montre que, dans chaque intervalle où f est continûment dérivable, sa dérivée f' satisfait à

$$(2.4.3) \qquad 2\pi i\, f'(t)\, dt = \frac{dh(t)}{h(t)-a} .$$

En intégrant on obtient

$$f(1) - f(0) = \frac{1}{2\pi i} \int_I \frac{dh(t)}{h(t)-a} ;$$

or le premier membre est égal à l'indice du lacet $g = k \circ h$.

C.Q.F.D.

Exercices. - Si $g : I \longrightarrow \mathbb{R}^2$ est un lacet, et si a et b sont deux points situés dans la même composante connexe (par arcs) du complémentaire de $g(I)$ dans $\mathbb{R}^2$, l'indice de g par rapport à a est égal à l'indice de g par rapport à b .

Si l'image $g(I)$ est contenue dans un ouvert simplement connexe $U \subset \mathbb{R}^2 - \{a\}$, l'indice de g par rapport à a est nul.

Si $g(t) = e^{2\pi i t} \in \mathbb{C}$, l'indice du lacet g par rapport à l'origine est égal à + 1 .

2.5. Cas de la sphère $S^n (n \geq 2)$

Proposition 2.5.1. - Pour $n \geq 1$, la sphère S^n est connexe par arcs.

Démonstration : on l'a vu lorsque n = 1 (début du n°2.4) . Pour $n \geq 1$, soient a et b deux points distincts de S^n ; on veut montrer qu'on peut les joindre par un chemin. Par a et b il passe un sous-espace vectoriel H de dimension 2 de R^{n+1} (unique sauf si a et b sont diamétralement opposés) ; $H \cap S^n$ est homéomorphe à S^1 , donc a et b peuvent être joints par un chemin de $H \cap S^n$.

C.Q.F.D.

Théorème 2.5.2. - Pour $n \geq 2$, la sphère S^n est simplement connexe.

Démonstration : soient P et P' deux points diamétralement opposés de S_n .

Alors

$$U = S^n - \{P\} \quad \text{et} \quad U' = S^n - \{P'\}$$

sont deux ouverts, dont la réunion est S^n ; chacun d'eux est homéomorphe à $\mathbb{R}^n$ (cf. projection stéréographique) , donc est simplement connexe.

Leur intersection

$$U \cap U' = S^n - \{P , P'\}$$

est connexe par arcs, parce que $n \geq 2$; en effet, $U \cap U'$ est homéomorphe à $\mathbb{R}^n$ privé d'un point (par exemple, l'origine) ; or si on a deux points

$$a \in \mathbb{R}^n - \{0\} \quad , b \in R^n - \{0\} ,$$

le segment de droite [a , b] qui les joint est contenu dans $\mathbb{R}^n - \{0\}$, sauf si a et b sont sur une même droite D passant par 0 ; dans ce dernier cas, il existe un $c \in \mathbb{R} - \{0\}$

non situé sur D (parce que $n \geqslant 2$) , et alors la "ligne brisée" , composée des segments $[a , c]$ et $[c , b]$, est un chemin d'origine a et d'extrémité b .

Ainsi il est prouvé que $U \cap U'$ est connexe par arcs. Le théorème 2.5.2 va alors résulter du suivant :

Théorème 2.5.3. - Soit X un espace topologique, réunion de deux ouverts simplement connexes U et U' ; si l'intersection $U \cap U'$ est connexe par arcs, X est simplement connexe.

Démonstration : d'abord, X est connexe par arcs, car si a et b sont deux points de X , et s'ils appartiennent tous deux à U (resp. à U') , on peut les joindre par un chemin de U (resp. de U') ; si $a \in U$ et $b \in U'$, choisissons $c \in U \cap U'$; on peut joindre a à c par un chemin de U , et c à b par un chemin de U' ; alors le chemin composé joint a à b .

Prenons $c \in U \cap U'$, et montrons que $\pi_1(X , c)$ est réduit à l'élément neutre. Soit $f : I \longrightarrow X$ un lacet tel que

$$f(0) = f(1) = c ;$$

on veut montrer qu'il est homotope (avec origine fixe) au lacet constant de valeur c . Les deux ouverts $f^{-1}(U)$ et $f^{-1}(U')$ recouvrent I ; chacun d'eux est une réunion d'intervalles ouverts dans I (en nombre éventuellement infini) . Comme I est compact, I est recouvert par un nombre fini de tels intervalles ; chacun d'eux est appliqué par f soit dans U soit dans U'. Il existe donc une subdivision finie

$$0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_k = 1$$

du segment $I = [0 , 1]$, telle que, pour tout entier i satisfaisant à $0 \leqslant i < K$, la restriction f_i de f à $[t_i , t_{i+1}]$ prenne ses valeurs soit dans U soit dans U'.
On peut de plus supposer que $f_0 , f_1 , \ldots , f_{k-1}$ prennent alternativement leurs valeurs dans U et dans U'(sinon, il suffit de grouper plusieurs segments consécutifs en un seul). Ceci implique que les points

$$a_i = f_{i-1}(1) = f_i(0) \qquad (\text{pour } 0 < i < k)$$

sont dans $U \cap U'$; introduisons aussi $a_0 = f_0(0)$, $a_k = f_k(1)$; en fait, $a_0 = a_k = c$.

Soit, pour $0 \leqslant i < k$, $\varphi_i \in \pi_1(X ; a_i , a_{i+1})$ la classe du chemin f_i . La classe du lacet f est évidemment égale à la composée

$$\varphi_0 \cdot \varphi_1 \cdots \varphi_{k-2} \cdot \varphi_{k-1} = \varphi ;$$

Il reste à montrer que φ est l'élément neutre du groupe $\pi_1(X , c)$.

Puisque $U \cap U'$ est connexe par arcs, il existe, pour $0 < i < k$, un chemin g_i .

d'origine a_i et d'extrémité c , contenu dans $U \cap U'$. Soit γ_i la classe de g_i dans $\pi_1(X ; a_i , c)$. On peut écrire

$$\varphi = (\varphi_0 \cdot \gamma_1) \cdot (\gamma_1^{-1} \cdot \varphi_1 \cdot \gamma_2) \cdots (\gamma_{k-2}^{-1} \cdot \varphi_{k-2} \cdot \gamma_{k-1}) \cdot (\gamma_{k-1}^{-1} \cdot \varphi_{k-1}) .$$

Donc φ est un produit d'éléments de $\pi_1(X , c)$; mais chacun d'eux provient d'un lacet contenu soit dans U , soit dans U'; un tel lacet est donc homotope au lacet constant c , puisque U et U' sont simplement connexes. Donc tous les facteurs de φ sont égaux à l'élément neutre de $\pi_1(X , c)$, et il en est de même de φ .

C.Q.F.D.

2.6. - Le groupoïde $\pi_1(X)$ comme foncteur de l'espace X :

Soient X et Y deux espaces topologiques, et $f : X \longrightarrow Y$ une application continue. Pour chaque $x \in X$, $f(x) = y$ est un point de Y . De plus, soit $u : I \longrightarrow X$ un chemin de X ; alors $f \circ u : I \longrightarrow Y$ est un chemin de Y , appellé transformé du chemin u par f . Si u_0 et u_1 sont deux chemins homotopes de X (avec origine fixe x et extrémité fixe x') , les transformés $f \circ u_0$ et $f \circ u_1$ sont des chemins homotopes de Y (avec origine fixe f(x) et extrémité fixe f(x')) : en effet, si

$$U : I \times I \longrightarrow X$$

est une homotopie de u_0 à u_1 , il est clair que

$$f \circ U : I \times I \longrightarrow Y$$

est une homotopie de $f \circ u_0$ à $f \circ u_1$. Par passage aux quotients, on obtient une application

$$\pi_1(X ; x , x') \longrightarrow \pi_1(Y ; f(x) , f(x'))$$

des classes de chemins, application que nous noterons $\pi_1(f ; x , x')$, ou plus simplement $\pi_1(f)$ s'il n'y a pas ambiguïté sur x et x' .

Soient maintenant $\varphi \in \pi_1(X ; x , x')$ et $\psi \in \pi_1(X ; x', x'')$ des classes de chemins, et soit

$$\varphi \cdot \psi \in \pi_1(X ; x , x'')$$

la classe composée. Il est clair que $\pi_1(f)$ transforme $\varphi \cdot \psi$ dans la classe composée de $\pi_1(f)(\varphi)$ et $\pi_1(f)(\psi)$; en formule:

$$\pi_1(f)(\varphi \cdot \psi) = (\pi_1(f)(\varphi)) \cdot (\pi_1(f)(\psi)) . \tag{2.6.1}$$

Nous exprimerons cette propriété en disant que $\pi_1(f)$ est un morphisme du groupoïde $\pi_1(X)$ dans le groupoïde $\pi_1(Y)$.

Pour $x' = x$, on écrira $\pi_1(f , x)$ au lieu de $\pi_1(f ; x , x)$; on voit que

$$\pi_1(f , x) : \pi_1(X , x) \longrightarrow \pi_1(Y , f(x))$$

est un homomorphisme du groupe fondamental $\pi_1(X , x)$ dans le groupe fondamental $\pi_1(Y , f(x))$.

Il va de soi que si $Y = X$, f étant l'identité , $\pi_1(f)$ est le morphisme identique du groupoïde $\pi_1(X)$. De plus, soient trois espaces X , Y , Z et deux applications continues

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z ;$$

alors le morphisme $\pi_1(g \circ f)$ du groupoïde $\pi_1(X)$ dans le groupoïde $\pi_1(Z)$ est égal au composé $\pi_1(g) \circ \pi_1(f)$: c'est évident à partir des définitions.

Nous exprimerons tous ces faits en disant que l'on a défini le groupoïde fondamental $\pi_1(X)$ comme foncteur covariant de l'espace topologique X ; c'est un foncteur défini sur la catégorie des espaces topologiques (et des applications continues) , à valeurs dans la catégorie des groupoïdes (et des morphismes de groupoïdes) .

En particulier, pour $x \in X$, l'homomorphisme

$$\pi_1(g \circ f , x) = \pi_1(X , x) \longrightarrow \pi_1(Z , g(f(x))$$

est composé des homomorphismes

$$\pi_1(X , x) \xrightarrow{\pi_1(f , x)} \pi_1(Y , f(x)) \xrightarrow{\pi_1(g , f(x))} \pi_1(Z , g(f(x)) .$$

Donc le groupe fondamental $\pi_1(X , x)$ est défini comme foncteur covariant de l'espace topologique pointé (X , x) .

Exemple : si X est un sous-espace d'un espace Y , et si $i : X \longrightarrow Y$ désigne l'injection canonique, on a, pour $x \in X$, un homomorphisme naturel

$$\pi_1(i , x) : \pi_1(X , x) \longrightarrow \pi_1(Y , x) .$$

On se gardera de croire que c'est une injection (car il se peut qu'un lacet de X , d'origine x , soit déformable dans Y en un lacet constant, mais ne le soit pas dans X) . Par exemple, pour $Y = B^2$, $X = S^1$, le groupe $\pi_1(S^1)$ n'est pas réduit à l'élément neutre, tandis que $\pi_1(B^2)$ est réduit à l'élément neutre.

2.7. - Groupoïde fondamental d'un produit d'espaces.

Soient X et Y deux espaces topologiques. On a deux applications de projection

$$p_1 : X \times Y \longrightarrow X , \quad p_2 : X \times Y \longrightarrow Y ;$$

d'où des morphismes de groupoïdes

$$\pi_1(p_1) : \pi_1(X \times Y) \longrightarrow \pi_1(X) , \ \pi_1(p_2) : \pi_1(X \times Y) \longrightarrow \pi_1(Y) .$$

Ils définissent un morphisme

(2.7.1) $$\pi_1(X \times Y) \longrightarrow \pi_1(X) \times \pi_1(Y)$$

du groupoïde fondamental de $X \times Y$ dans le "produit" des groupoïdes fondamentaux $\pi_1(X)$ et $\pi_1(Y)$. [On laisse au lecteur le soin de définir ce qu'on entend par "produit" de deux groupoïdes] . Le morphisme (2.7.1) implique notamment, pour chaque couple de points $(x,y) \in X \times Y$, un homomorphisme

(2.7.2) $$\pi_1(X \times Y , (x,y)) \longrightarrow \pi_1(X , x) \times \pi_1(Y,y)$$

du groupe fondamental de $X \times Y$ au point (x,y) , dans le <u>produit</u> des groupes fondamentaux $\pi_1(X , x)$ et $\pi_1(Y,y)$. Rappelons que le <u>produit</u> de deux groupes G et G' est défini en munissant l'ensemble produit $G \times G'$ de la loi de composition

$$(g,g') \cdot (g_1 , g'_1) = (g \cdot g_1 , g' \cdot g'_1) ,$$

où $g.g_1$ désigne le produit dans G , et $g'.g'_1$ le produit dans G' .

<u>Théorème 2.7.1</u>. - <u>L'application</u> (2.7.2) <u>est un isomorphisme de groupes</u>.

La preuve est presque évidente : en effet, se donner un lacet $f : I \longrightarrow X \times Y$, d'origine (x,y) , ce n'est pas autre chose que se donner deux lacets

$$p_1 \circ f : I \longrightarrow X \quad , \quad p_2 \circ f : I \longrightarrow Y$$

d'origines x et y respectivement. De plus, se donner une homotopie $F : I \times I \longrightarrow X \times Y$ d'un lacet f_0 à un lacet f_1 , ce n'est pas autre chose que se donner deux homotopies

$$p_1 \circ F : I \times I \longrightarrow X , \quad p_2 \circ F : I \times I \longrightarrow Y$$

du lacet $p_1 \circ f_0$ au lacet $p_1 \circ f_1$ (resp. du lacet $p_2 \circ f_0$ au lacet $p_2 \circ f_1$) .
Ceci prouve bien que l'application (2.7.2) est bijective.

Plus généralement, l'application (2.7.2) est <u>un isomorphisme du groupoïde fondamental</u> $\pi_1(X \times Y)$ <u>sur le produit des groupoïdes fondamentaux</u> $\pi_1(X)$ et $\pi_1(Y)$.

<u>Exemple</u> : le groupe fondamental $\pi_1(S^1 \times S^1)$ du tore $S^1 \times S^1$ s'identifie au produit $\pi_1(S^1) \times \pi_1(S^1) \approx \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

<u>Exercice</u> : étendre le théorème 2.7.1 au cas d'une famille quelconque d'espace X_i (finie ou infinie) .

<u>2.8. - Groupe fondamental d'un H-espace</u>.

Supposons que l'espace X soit muni d'une loi de composition continue

$$\mu : X \times X \longrightarrow X ,$$

et qu'en outre on se soit donné un point $e \in X$ tel que

(2.8.1) $$\mu(e , e) = e .$$

Alors μ induit un homomorphisme

$$\pi_1(\mu, (e,e)) : \pi_1(X \times X , (e,e)) \longrightarrow \pi_1(X , e)$$

Mais, d'après le théorème 2.7.1 , $\pi_1(X\times X , (e,e))$ est naturellement isomorphe au groupe-produit $\pi_1(X , e) \times \pi_1(X , e)$. Par conséquent, μ induit un homomorphisme de groupes

(2.8.2) $$\boxed{m : \pi_1(X , e) \times \pi_1(X , e) \longrightarrow \pi_1(X , e)}$$

que nous appellerons la "multiplication" définie par μ .

Définition : on appelle H-espace un espace topologique X muni d'une loi de composition continue $\mu : X \times X \to X$ et d'un point e tels que :

(i) la relation (2.8.1) soit satisfaite ;

(ii) chacune des deux applications $X \to X$ définies par

$$x \mapsto \mu(e , x) \quad , \quad x \to \mu(x , e)$$

soit homotope à l'identité, dans une homotopie où le point e reste fixe.

La condition (ii) exprime qu'il existe deux applications continues

$$\nu_1 : X \times I \longrightarrow X \quad , \quad \nu_2 : X \times I \longrightarrow X$$

telles que

(2.8.3) $$\begin{cases} \nu_1(x , 0) = \mu(e , x) & , \quad \nu_2(x , 0) = \mu(x , e) \quad \text{pour} \quad x \in X , \\ \nu_1(e , u) = e & , \quad \nu_2(e , u) = e \quad \text{pour} \quad u \in I , \\ \nu_1(x , 1) = x & , \quad \nu_2(x , 1) = x \quad \text{pour} \quad x \in X . \end{cases}$$

S'il en est ainsi, on a, pour tout $\alpha \in \pi_1(X , e)$:

(2.8.4) $$m(1 , \alpha) = \alpha \quad , \quad m(\alpha , 1) = \alpha ,$$

en notant $\in \pi_1(X , e)$ l'élément neutre.

Démonstration de (2.8.4) : soit $f : I \to X$ un lacet de X , d'origine e , dans la classe de α . D'après les définitions, $m(1 , \alpha)$ est la classe du lacet

(2.8.5) $$t \longmapsto \mu(e , f(t)) .$$

L'application $I \times I \to X$ définie par

$$(t , u) \to \nu_1(f(t), u)$$

est, en vertu de (2.8.3), une homotopie du lacet (2.8.5) au lacet f (avec origine fixe e) ; donc la classe $m(1 , \alpha)$ est égale à la classe α de f , ce qui prouve la première relation (2.8.4). La deuxième relation (2.8.4) se prouve de même, en utilisant ν_2 .

Théorème 2.8.1. - Si (X , e , μ) est un H-espace, l'homomorphisme m de la formule (2.8.2) n'est autre que la loi de composition du groupe fondamental $\pi_1(X , e)$

et celui-ci est commutatif.

Démonstration : Soient α et $\beta \in \pi_1(X, e)$; d'après la définition d'un groupe produit, on a

$$(\alpha, \beta) = (\alpha, 1) \cdot (1, \beta) ;$$

puisque m est un homomorphisme de groupes, on a

$$m(\alpha, \beta) = m(\alpha, 1) \cdot m(1, \beta)$$
$$= \alpha \cdot \beta \quad \text{d'après (2.8.4)} .$$

Donc m est bien la loi de composition du groupe $\pi_1(X, e)$. Pour la même raison :

$$(\alpha, \beta) = (1, \beta) \cdot (\alpha, 1) , \text{ d'où}$$
$$m(\alpha, \beta) = m(1, \beta) \cdot m(\alpha, 1) = \beta \cdot \alpha ,$$

et par suite $\alpha \cdot \beta = \beta \cdot \alpha$.

C.Q.F.D.

Exemples de H-espaces : tout groupe topologique G est un H-espace (en prenant pour e l'élément neutre, et pour μ la loi de composition de G) , car alors

$$\mu(e, x) = x \quad , \quad \mu(x, e) = x .$$

Donc le groupe fondamental $\pi_1(G, e)$ est commutatif; en particulier, si G est connexe par arcs, on peut parler de $\pi_1(G)$ sans spécifier le point-base. C'était le cas pour $G = S^1$ (groupe multiplicatif des nombres complexes de valeur absolue égale à 1) .

Remarque. - Pour la validité du théorème 2.8.1 , il n'est nullement nécessaire de supposer l'associativité de la loi de composition . Par exemple, on peut montrer que, pour tout espace topologique Y et tout point $y_0 \in Y$, l'espace des lacets de Y d'origine y_0

$$X = \Omega(Y, y_0) ,$$

peut être muni d'une topologie telle qu'il soit un H-espace lorsqu'on prend pour e le lacet constant, et pour loi de composition la loi de composition des lacets (qui n'est pas associative) . Il en résulte que le groupe fondamental

$$\pi_1(\Omega(Y, y_0), e) ,$$

qu'on appelle le deuxième groupe d'homotopie $\pi_2(Y, y_0)$, est commutatif.

Interprétation de la loi de composition de $\pi_1(X, e)$ pour un H-espace X . Le théorème 2.8.1 dit que la loi de composition du groupe fondamental $\pi_1(X, e)$ n'est autre que la "multiplication" m définie par la loi de composition μ . Si on explicite ceci en remontant aux définitions, on voit que si on a deux lacets

$$f : I \longrightarrow X \quad , \quad g : I \longrightarrow X$$

d'origine e , et qu'on introduit leur "produit" $\mu(f, g)$, qui est par définition

le lacet

$$t \longmapsto \mu(f(t)) , g(t))$$

d'origine e , la classe du produit $\mu(f , g)$ n'est autre que celle du lacet composé $g \perp f$ (et aussi que celle du composé $f \perp g$) , bien que ces lacets soient en général distincts. Ceci s'applique notamment dans le cas d'un groupe topologique. Par exemple, pour $X = S^1$, $e = 1$, le "produit" de deux lacets de S^1 (défini par la multiplication des nombres complexes) a pour indice la somme des indices de chacun des deux lacets.

2.9. - Quelques exemples de groupes fondamentaux.

Tout d'abord, il existe des espaces X dont le groupe fondamental ne soit pas commutatif. Par exemple, on verra que le groupe fondamental de $\mathbb{C}$ privé de deux points (0 et 1 par exemple) est isomorphe au "groupe libre à deux générateurs" , qui n'est pas commutatif.

Soit SO (n) le groupe orthogonal spécial à n variables, c'est-à-dire le sous-groupe du groupe linéaire GL(n , $\mathbb{R}$) formé des transformations qui laissent invariante la forme quadratique $\sum_{i=1}^{n} (x_i)^2$ et dont le déterminant est + 1 ; c'est un groupe compact, connexe par arcs. Par exemple, SO (2) = S_1 ; donc

$$\pi_1(\text{SO } (2)) \approx \mathbb{Z} .$$

L'injection naturelle $\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ induit une injection SO (n) $\longrightarrow$ SO (n+1) ; on montre que l'homomorphisme

$$\pi_1(\text{SO } (n)) \longrightarrow \pi_1(\text{ SO } (n+1))$$

induit par cette injection est un isomorphisme pour $n \geqslant 3$; de plus,

$$\mathbb{Z} = \pi_1(\text{SO } (2)) \longrightarrow \pi_1(\text{SO } (3))$$

est surjectif et a pour noyau $2\mathbb{Z}$ (sous-groupe des entiers pairs) .

D'où

$$\pi_1(\text{SO } (n)) \approx \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \quad \text{pour} \quad n \geqslant 3 .$$

Soit U (n) le groupe unitaire, c'est-à-dire le sous-groupe du groupe linéaire complexe GL(n , $\mathbb{C}$) formé des transformations laissant invariante la forme hermitienne $\sum_{i=1}^{n} z_i \bar{z}_i$. C'est un groupe compact, connexe par arcs. Par exemple, $U(1) = S^1$; donc

$$\pi_1(U(1)) \approx \mathbb{Z} .$$

Ici encore, on a une injection naturelle $U(n) \longrightarrow U(n+1)$, d'où un homomorphisme

$$\pi_1(U(n)) \longrightarrow \pi_1(U(n+1)) .$$

On démontre que, pour $n \geq 1$, c'est un isomorphisme ; d'où

$$\pi_1(U(n)) \approx \mathbb{Z} \quad \text{pour } n \geq 1 .$$

Soit $SU(n)$ le groupe unitaire spécial, formé des transformations unitaires dont le déterminant est + 1 . On montre que, pour $n \geq 1$, $SU(n)$ est simplement connexe. Lorsque $n = 1$, c'est évident, car $SU(1)$ est réduit à l'élément neutre; on va vérifier que $SU(2)$ est simplement connexe. $SU(2)$ se compose en effet des transformations $\mathbb{C}$-linéaire de la forme

$$(x , y) \longmapsto (a x - \bar{b} y , b x + \bar{a} y) ,$$

où a et b sont des nombres complexes tels que $a \bar{a} + b \bar{b} = 1$ ($\bar{a}$ désigne le nombre complexe conjugué de a) . Donc, comme espace topologique, $SU(2)$ est homéomorphe à la sphère S^3 , formée des vecteurs unitaires de $\mathbb{C}^2$, et par suite $SU(2)$ est simplement connexe (th. 2.5.2) . En fait, le groupe $SU(2)$ est isomorphe au groupe multiplicatif des quaternions de norme 1 .

§ 3 - Revêtements.

3.1. - La catégorie des applications continues.

On va introduire ici une nouvelle catégorie $\mathcal{C}$. Un objet de la catégorie $\mathcal{C}$ est une application continue $p : X \longrightarrow B$ (où X et B sont deux espaces topologiques). Un morphisme

$$(p , X , B) \longrightarrow (p' , X' , B')$$

est, par définition, un couple d'applications continues

$$f : X \longrightarrow X' , \quad g : B \longrightarrow B'$$

telles que le diagramme suivant soit commutatif :

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & X' \\ {\scriptstyle p}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle p'} \\ B & \xrightarrow{g} & B' \end{array}$$

c'est-à-dire $g \circ p = p' \circ f$. La composition des morphismes est définie d'une manière évidente : le composé d'un morphisme

$$(p , X , B) \longrightarrow (p' , X' , B')$$

défini par $f : X \longrightarrow X'$, $g : B \longrightarrow B'$ et d'un morphisme

$$(p' , X' , B') \longrightarrow (p'' , X'' , B'')$$

défini par $f' : X' \longrightarrow X''$, $g' : B' \longrightarrow B''$, est le morphisme

$$(p , X , B) \longrightarrow (p'' , X'' , B'')$$

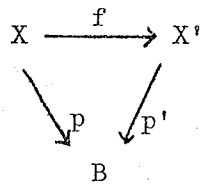
défini par

$$f' \circ f : X \longrightarrow X'' , \quad g' \circ g : B \longrightarrow B'' .$$

On vérifie facilement que les axiomes d'une catégorie sont satisfaits; en particulier, le morphisme identique $(p , X , B) \longrightarrow (p , X , B)$ est le couple

$$id_X : X \longrightarrow X , \quad id_B : B \longrightarrow B .$$

Très souvent, on considère une sous-catégorie $\mathcal{C}_B$ de la catégorie $\mathcal{C}$ précédente, comme suit. Un espace B est <u>donné</u>; les objets de $\mathcal{C}_B$ sont les couples (X , p) formés d'un espace X et d'une application continue $p : X \longrightarrow B$, de but B ; un $\mathcal{C}_B$-morphisme $(X , p) \longrightarrow (X' , p')$ est une application continue $f : X \longrightarrow X'$ rendant commutatif le triangle



[autrement dit, on se limite aux morphismes (f , g) pour lesquels $g = id_B$] .

Dans la catégorie $\mathcal{C}_B$, on vérifie qu'un tel morphisme est un <u>isomorphisme</u> si et seulement si f est un <u>homéomorphisme</u>. On dit souvent B-morphisme, et B-isomorphisme, au lieu de "morphisme dans la catégorie $\mathcal{C}_B$" et de "isomorphisme de la catégorie $\mathcal{C}_B$" .

<u>Exercice</u> : si $p : X \longrightarrow B$ est <u>surjective</u>,et si X est connexe (resp. connexe par arcs) , alors B est connexe (resp. connexe par arcs)

<u>3.2. - Revêtements triviaux</u>.

Soit $p : X \longrightarrow B$ une application continue. Pour $b \in B$, le sous-espace $p^{-1}(b)$ de X s'appelle la <u>fibre</u> de X au-dessus de B . Il est clair que si $f : X \longrightarrow X'$, $g : B \longrightarrow B'$ est un morphisme $(p , X , B) \longrightarrow (p' , X' , B')$, f envoie la fibre $p^{-1}(b)$ au-dessus de b , dans la fibre $p'^{-1}(b')$ au-dessus de $b' = g(b)$.

<u>Définition 1</u> - On dit que $p : X \longrightarrow B$ est un <u>fibré trivial</u> si l'on a $X = B \times F$ (produit de B par un espace topologique F) , p étant l'application de projection $B \times F \longrightarrow B$. Alors, pour tout b , la fibre $p^{-1}(b)$ s'identifie à F .

<u>Définition 2</u> - On dit que $p : X \longrightarrow B$ est un <u>revêtement trivial</u> si c'est un

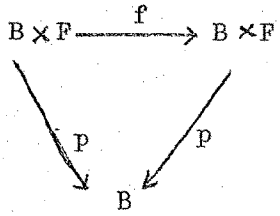
fibré trivial à fibre discrète; autrement dit, si l'on a $X = B \times F$, F étant un espace topologique discret, et si $p : B \times F \longrightarrow B$ est l'application de projection.

S'il en est ainsi, à chaque $f \in F$ correspond un sous-espace $X_f = B \times \{f\}$ de $B \times F$, qui ouvert et fermé dans $B \times F$; et $B \times F$ est réunion des sous-espaces ouverts disjoints X_f ; pour chacun d'eux, la restriction de p à X_f est un homéomorphisme $X_f \longrightarrow B$ Les X_f s'appellent les feuillets du revêtement trivial.

Problème : cherchons tous les B-automorphismes d'un revêtement trivial $B \times F$, c'est-à-dire tous les homéomorphismes

$$f : B \times F \longrightarrow B \times F$$

qui rendent commutatif le diagramme



On a nécessairement

$$f(x , y) = (x , \sigma(x , y)) \text{ pour } x \in B , \ y \in F , \text{ où } \sigma \text{ est continue;}$$

de plus, pour chaque $x \in B$, l'application

$$y \longmapsto \sigma(x , y)$$

doit être une permutation de F . Ces conditions nécessaires sont évidemment suffisantes. Si on fixe $y \in F$, l'application continue

$$x \longmapsto \sigma(x , y) \quad \text{de B dans F}$$

est localement constante, puisque F est discret. Donc si B est connexe, cette application est constante. Ainsi :

Proposition 3.2.1. - Les B-automorphismes d'un revêtement trivial $B \times F$, lorsque B est connexe, sont de la forme

$$(x , y) \longrightarrow (x , \sigma(y)) ,$$

où $\sigma : F \longrightarrow F$ est une permutation de F (indépendante de $x \in B$) .

Autrement dit, un automorphisme permute les feuillets du revêtement.

Définition 3 - On dit que $p : X \longrightarrow B$ est un revêtement trivialisable de base B s'il est B-isomorphe à un revêtement trivial $B \times F$; autrement dit, s'il existe un espace discret F et un homéomorphisme

$$f : B \times F \xrightarrow{\approx} X$$

tel que $p \circ f : B \times F \longrightarrow B$ soit l'application de projection sur le premier facteur. Un tel isomorphisme f s'appelle une trivialisation du revêtement.

Si f_1 est une autre trivialisation, alors $f^{-1} \circ f_1$ est un B-automorphisme du revêtement trivial $B \times F$; réciproquement, pour tout B-automorphisme s du revêtement trivial $B \times F$, $f \circ s$ est une trivialisation du revêtement $p : X \longrightarrow B$.
En particulier, si B est connexe, f est définie modulo le groupe des automorphismes de $B \times F$ induits par les permutations de la fibre F ; dans ce cas, les images par f des feuillets de $B \times F$ sont bien déterminées (à l'ordre près) : on les appelle les feuillets du revêtement trivialisable $p : X \longrightarrow B$ (à base B connexe) ; ce sont les composantes connexes de X .

N.B. : on observera que si la base B d'un revêtement trivialisable $p : X \longrightarrow B$ n'est pas connexe, on ne peut pas définir les feuillets de ce revêtement; pour chaque trivialisation, on peut bien définir les feuillets relatifs à cette trivialisation, mais ceux-ci dépendent du choix de la trivialisation.

3.3. - Revêtements.

Soit $p : X \longrightarrow B$ une application continue. Si A est un sous-espace de B , p induit une application continue

$$p^{-1}(A) \longrightarrow A ,$$

qui est un objet de la catégorie $\mathcal{C}_A$. On dit que A est trivialisant pour p si $p^{-1}(A) \longrightarrow A$ est un revêtement trivialisable; il revient au même de dire que $p^{-1}(A)$ est réunion d'une famille de sous-ensembles V_α ouverts dans $p^{-1}(A)$, deux à deux disjoints, et tels que la restriction de p à chaque V_α soit un homéomorphisme de V_α sur A . Alors tout sous-espace A' de A est aussi trivialisant pour p .

Définition. - On dit que $p : X \longrightarrow B$ est un revêtement de base B si tout point de B possède un voisinage U qui est trivialisant pour p . [On peut supposer U ouvert, sinon on le remplace par son intérieur] . On peut alors recouvrir B avec des ouverts trivialisants U_i .

Si U est un ouvert trivialisant, $p^{-1}(U)$ est réunion disjointe d'ouverts V_α tels que, pour chacun d'eux, p induise un homéomorphisme de V_α sur U . Si U est en outre connexe, les V_α sont nécessairement les composantes connexes de $p^{-1}(U)$ ce sont les "feuillets" du revêtement au-dessus de l'ouvert connexe U .

Remarque : si $p : X \longrightarrow B$ est un revêtement, p est un homéomorphisme local, i.e. tout point $x_0 \in X$ a un voisinage ouvert V tel que $p : V \longrightarrow p(V)$ soit un homéomorphisme. Montrer sur un exemple qu'un homéomorphisme local n'est pas toujours

un revêtement.

Proposition 3.3.1. - Soit $p : X \longrightarrow B$ un revêtement dont la base B est connexe. Alors toutes les fibres $p^{-1}(b)$ sont des espaces discrets isomorphes entre eux.

Démonstration : soit F un espace discret. Il suffit de montrer que l'ensemble B' des $b \in B$ tels que la fibre $p^{-1}(b)$ soit isomorphe à F est à la fois ouvert et fermé. Pour voir que B' est ouvert, on prend $b \in B'$ et on utilise un ouvert trivialisant U contenant b ; on constate alors que $U \subset B'$. Pour voir que B' est fermé, on prend un point b adhérent à B' , et un ouvert trivialisant U contenant b ; les fibres des points de U sont toutes isomorphes, et parmi elles il y a des fibres au-dessus de points de B' , d'où l'on conclut $U \subset B'$, et en particulier $b \in B'$.

3.4. - Exemples de revêtements.

Considérons l'application

$$\exp : \mathbb{R} \longrightarrow S^1$$

définie par $\exp(x) = e^{2\pi i x}$ (cf. 2.4) . C'est un revêtement. En effet, pour tout point $b \in S^1$, on va montrer que l'ouvert $S^1 - \{b\}$ est trivialisant pour exp. En effet l'image réciproque de $S^1 - \{b\}$ est $\mathbb{R} - \exp^{-1}(b)$: c'est la droite $\mathbb{R}$ privée de tous les translatés d'un point a par les translations entières; ses composantes sont des intervalles ouverts de longueur 1 ; l'application exp est un homéomorphisme de chacun d'eux sur $S^{-1} - \{b\}$. Ainsi S^1 peut être recouvert par des ouverts trivialisants.

C.Q.F.D.

Ce revêtement n'est pas trivialisable, sinon $\mathbb{R}$ serait homéomorphe au produit $S^1 \times \mathbb{Z}$ (car les fibres sont homéomorphes à l'espace discret $\mathbb{Z}$) , produit qui n'est pas connexe. Contradiction.

On va généraliser cet exemple.

Définition : on dit qu'un groupe discret G opère (à gauche) dans un espace topologique X si l'on s'est donné une application continue

$$\rho : G \times X \longrightarrow X$$

telle que $\begin{cases} \rho(e , x) = x & (e : \text{élément neutre de G}) , \\ \rho(g , \rho(g' , x)) = \rho(gg' , x) , \end{cases}$

où gg' désigne le produit de g et g' dans le groupe G . On note alors $\rho(g) : X \longrightarrow X$ la transformation

$$x \longrightarrow \rho(g , x) ,$$

qui est un homéomorphisme; on a

$$\rho(e) = id_X , \quad \rho(gg') = \rho(g) \circ \rho(g') .$$

Définition : étant donné un groupe discret G qui opère dans X comme ci-dessus, on dit que G opère proprement sans point fixe si tout point $x \in X$ possède un voisinage ouvert U tel que les transformés $\rho(g).U$ forment, lorsque g parcourt G, une famille d'ouverts disjoints. C'est par exemple le cas lorsque $G = \mathbb{Z}$ opère sur $X = \mathbb{R}$ par les translations entières.

Dans le cas général l'opération ρ de G sur X définit sur X une relation d'équivalence; la classe d'équivalence de $x \in X$ se compose des transformés $\rho(g).x$ (g parcourant G) . Soit X/G l'espace quotient, muni de la topologie quotient; les ouverts de X/G s'identifient aux ouverts de X stables par G . Si U est un ouvert de X qui ne rencontre aucun des ouverts $\rho(g).U$ (lorsque g parcourt G en restant $\neq e$), l'application canonique

$$p : X \longrightarrow X/G$$

induit un homéomorphisme de U sur son image $p(U)$, qui est ouverte dans X/G ; $p^{-1}(p(U))$ est la réunion des ouverts disjoints $\rho(g)U$, g parcourant G . On voit donc que $p : X \longrightarrow X/G$ est un revêtement. Lorsque $X = \mathbb{R}$, et que $G = \mathbb{Z}$ opère sur $\mathbb{R}$ par les translations entières, on retrouve le revêtement $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ (identifié à S^1) . Plus généralement :

Soit X un groupe topologique, et soit G un sous-groupe discret de X . Faisons opérer G sur X par les translations à gauche. Montrons que G opère proprement sans point fixe. Pour cela, il suffit de montrer qu'il existe un voisinage U de l'élément neutre de X, tel que U et son translaté $g.U$ par $g \in G$ soient disjoints quel que soit $g \in G$, $g \neq e$. Il revient au même de dire que si on a

$$x \in U , \quad y \in U , \quad g \in G \quad \text{et} \quad y = g x ,$$

alors $g = e$; autrement dit : les relations

$$x \in U , \quad y \in U \quad \text{et} \quad y x^{-1} \in G$$

entraînent $y x^{-1} = e$. Montrons l'existence d'un tel U : puisque G est discret, il existe un voisinage V de e dans X, tel que

$$V \cap G = \{e\} ;$$

puisque l'application $(x , y) \longrightarrow y x^{-1}$ de $G \times G$ dans G est continue au point e, il existe un voisinage U de e tel que l'image de $U \times U$ par cette application soit contenue dans V .

C.Q.F.D.

En résumé :

Si G est un sous-groupe discret d'un groupe topologique X, et si X/G désigne l'espace des classes à droite (classes d'équivalence définies par le groupe G opérant

sur X par les translations à gauche), l'application canonique $X \to X/G$ est un revêtement. Il en est de même pour l'espace des classes à gauche (classes d'équivalence définies par le groupe G opérant sur X par les translations à droite).

Cas particulier : si en outre G est un sous-groupe invariant (ou "distingué") de X (c'est-à-dire est stable par les automorphismes intérieurs de X), on sait que les classes à droite sont aussi les classes à gauche, et que X/G est muni d'une structure de groupe telle que

$$p : X \longrightarrow X/G$$

soit un homomorphisme de groupes. Montrer que, avec la topologie quotient, X/G est un groupe topologique.

Proposition 3.4.1. - Si G est un sous-groupe invariant discret du groupe topologique X, et si X est connexe, G est contenu dans le centre de X.

En effet, soit $g \in G$; l'application

$$x \longmapsto x\, g\, x^{-1}$$

de X dans G est continue. Comme $\{g\}$ est ouvert et fermé dans G, l'ensemble X' des $x \in X$ tels que $x\, g\, x^{-1} = g$ est ouvert et fermé. D'ailleurs X' n'est pas vide, puisque $e \in X'$; donc si X est connexe, on a $X' = X$. Ainsi

$$x\, g = g\, x$$

quels que soient $g \in G$ et $x \in X$: g est bien dans le centre de X.

Voici un dernier exemple : la sphère S^3 est munie d'une structure de groupe topologique, définie par la multiplication des quaternions de norme 1. Considérons le sous-groupe discret G à deux éléments, formé des quaternions $+1$ et -1 ; G opère dans S^3, par l'identité et par la symétrie par rapport à 0. Le groupe quotient S^3/G est homéomorphe à l'espace projectif réel $P_3(\mathbb{R})$. En fait, comme groupe, S^3/G est isomorphe au groupe $SO(3)$ des rotations dans l'espace $\mathbb{R}^3$. On le voit en associant à chaque quaternion z de norme 1 l'application

$$x \longmapsto z\, x\, z^{-1} \qquad \text{(multiplication des quaternions)},$$

où x désigne un quaternion $\alpha i + \beta j + \gamma k$ dont la "partie réelle" est nulle ; cette application est une rotation dans $\mathbb{R}^3$ (espace des quaternions dont la partie réelle est nulle). Pour que deux quaternions z et z' définissent la même rotation, il faut

et il suffit que $z = z'$ ou $z = -z'$, et toute rotation peut être obtenue de cette manière. On a ainsi une jolie interprétation du revêtement

$$S^3 \longrightarrow SO(3) ,$$

dont chaque fibre est constituée de deux points (diamétralement opposés dans S^3) .

3.5. - Sections continues d'un revêtement.

D'une manière générale, soit $p : X \longrightarrow B$ une application continue. On appelle section continue toute application continue

$$s : B \longrightarrow X$$

telle que $p \circ s = id_B$. Une section continue associe donc à chaque $b \in B$ un point $s(b)$ dans la fibre $p^{-1}(b)$, et ceci de manière continue.

Cette définition n'implique pas qu'il n'existe de telles sections continues (cf. ci-dessous prop. 3.5.2) . Plus généralement, une section locale, au-dessus d'un ouvert $U \subset B$, est une application continue

$$s : U \longrightarrow X$$

telle que $p \circ s = id_U$. Dans le cas où $p : X \longrightarrow B$ est un revêtement, et où U est un ouvert trivialisant, on peut supposer que $p^{-1}(U) = U \times F$, la restriction de p à $p^{-1}(U)$ étant la projection $U \times F \longrightarrow U$; dans ce cas, une section continue est une application $U \longrightarrow U \times F$ de la forme

$$b \longrightarrow (b , \sigma(b)) ,$$

où $\sigma : U \longrightarrow F$ est une application continue. Ainsi, une fois choisie une trivialisation du revêtement au-dessus de U , les sections continues au-dessus de U correspondant bijectivement aux applications continues de U dans la fibre discrète F . On en déduit que toute section continue $s : U \longrightarrow X$ est un homéomorphisme de U sur son image $s(U)$, qui est ouverte et fermée dans $p^{-1}(U)$; de plus l'ensemble des points de U où deux sections continues s_1 , $s_2 : U \longrightarrow X$ prennent la même valeur est ouvert et fermé dans U .

Ces assertions valent si $U \subset B$ est un ouvert trivialisant pour le revêtement $p : X \longrightarrow B$. On va voir qu'elles restent vraies sans cette hypothèse. En effet :

Proposition 3.5.1. - Si $s : B \longrightarrow X$ est une section continue d'un revêtement $p : X \longrightarrow B$, s est un homéomorphisme de B sur un sous-espace ouvert et fermé de X ; si s_1 et s_2 sont deux sections continues $B \longrightarrow X$, l'ensemble des points $b \in B$ tels que $s_1(b) = s_2(b)$ est ouvert et fermé.

(Démonstration immédiate, en utilisant le fait que tout point de B appartient à un ouvert trivialisant) .

Corollaire : si la base B d'un revêtement $p : X \longrightarrow B$ est connexe, deux sections continues $B \longrightarrow X$ qui prennent la même valeur en un point de B sont identiques.

Cherchons si un revêtement $p : X \longrightarrow B$ peut posséder une section continue $s : B \longrightarrow X$. Si X est connexe, l'image s(B) est nécessairement égale à X d'après la prop. 3.5.1 ; donc s est un homéomorphisme de B sur X , et p est l'homéomorphisme réciproque. On dit alors que $p : X \longrightarrow B$ est un revêtement trivial à un seul feuillet. Ainsi :

Proposition 3.5.2. - Si $p : X \longrightarrow B$ est un revêtement et si X est connexe, il n'y a pas de section continue $B \longrightarrow X$ sauf si p est un revêtement trivial à un seul feuillet.

3.6. - Image réciproque d'un revêtement.

Commençons par le cas général où l'on considère un objet $p : X \longrightarrow B$ de la catégorie $\mathfrak{C}$ (cf. 3.1) . Considérons un diagramme

(3.6.1)
$$\begin{array}{ccc} & & X \\ & & \downarrow p \\ B' & \xrightarrow{g} & B \end{array}$$

où $g : B' \longrightarrow B$ est une application continue. On va lui attacher un objet $p' : X' \longrightarrow B'$ et un morphisme de cet objet dans l'objet donné, c'est-à-dire un diagramme commutatif

(3.6.2)
$$\begin{array}{ccc} X' & \xrightarrow{f} & X \\ \downarrow p' & & \downarrow p \\ B' & \xrightarrow{g} & B \end{array}$$

qui complète le diagramme (3.6.1) [noter que l'application g du diagramme (3.6.2) est la même que celle qui figure dans le diagramme (3.6.1)] .

Voici comment on définit X' : dans le produit $B' \times X$, soit X' le sous-espace formé des couples (b' , x) tels que

(3.6.3) $$g(b') = p(x) ;$$

par définition, $p' : X' \longrightarrow B'$ est la restriction à X' de la première projection $B' \times X \longrightarrow B'$; de même, $f : X' \longrightarrow X$ est la restriction de la deuxième projection $B' \times X \longrightarrow X$. Alors la commutativité du diagramme (3.6.2) résulte de la relation (3.6.3) .

L'objet $p' : X' \longrightarrow B'$ ainsi construit, muni du morphisme (f , g) dans l'objet $p : X \longrightarrow B$, s'appelle l'image réciproque de $p : X \longrightarrow B$ par l'application continue g de B' dans la base B . Lorsque B' est un sous-espace de B , g étant l'application d'inclusion, on obtient la notion d'objet induit au-dessus du sous-espace B' .

Définition : étant donnée l'application continue $g : B' \longrightarrow B$ de B' dans la base B de l'objet $p : X \longrightarrow B$, on appelle relèvement de g toute application continue

$$h : B' \longrightarrow X$$

telle que $p \circ h = g$.

Si on a un tel relèvement, l'application

$$b' \longrightarrow (b' , h(b')) \tag{3.5.4}$$

de B' dans $B' \times X$ prend en réalité ses valeurs dans le sous-espace X' de $B \times X$; c'est donc une section continue $B' \longrightarrow X'$ de l'objet $p' : X' \longrightarrow B'$. Réciproquement, toute section continue est de ce type. Ainsi :

Proposition 3.6.1. - Les relèvements continus $h : B' \longrightarrow X$ de g sont en correspondance bijective avec les sections continues de l'objet $p' : X' \longrightarrow B'$ image réciproque de $p : X \longrightarrow B$ par l'application g . Cette correspondance associe à chaque relèvement h la section définie par (3.5.4) .

Théorème 3.6.2. - Si $p : X \longrightarrow B$ est un revêtement, alors son image réciproque $p' : X' \longrightarrow B'$ par l'application continue $g : B' \longrightarrow B$ est aussi un revêtement.

Démonstration : on doit montrer que tout point $b' \in B'$ possède un voisinage ouvert U' qui est trivialisant pour p' . Soit $b = g(b')$; par hypothèse, b possède dans B un voisinage ouvert U qui est trivialisant pour p ; on va montrer que

$$U' = g^{-1}(U) ,$$

qui est ouvert dans B' (puisque g est continue) , est trivialisant pour p' . Soit

$$\varphi : U \times F \xrightarrow{\approx} p^{-1}(U)$$

une trivialisation du revêtement $p : X \longrightarrow B$ au-dessus de l'ouvert U: on va en déduire une trivialisation

$$\varphi' : U' \times F \xrightarrow{\approx} p'^{-1}(U') ,$$

comme suit. Observons que $p'^{-1}(U')$ se compose des couples $(b' , x) \in B' \times X$

tels que

$$g(b') = p(x) \in U ;$$

pour $b' \in U'$, $y \in F$, on définit

$$\varphi'(b' , y) = (b' , \varphi(g(b') , y)) .$$

Pour voir que φ' est un homéomorphisme, on définit une application continue $\psi' : p'^{-1}(U') \longrightarrow U' \times F$, en associant au couple (b' , x) le couple (b' , y), y étant l'unique point de F tel que

$$\varphi(g(b') , y) = x .$$

Alors $\psi' \circ \varphi'$ et $\varphi' \circ \psi'$ sont les applications identiques. Ceci achève la démonstration.

3.7. - Relèvement des chemins de la base d'un revêtement.

Soit $g : I \longrightarrow B$ un chemin de la base B d'un revêtement $p : X \longrightarrow B$. Considérons le revêtement

$$p' : X' \longrightarrow I$$

image réciproque du revêtement p par l'application g (th. 3.6.2). Les relèvements $h : I \longrightarrow X$ du chemin g correspondent bijectivement aux sections continues $I \longrightarrow X'$ du revêtement $p' : X' \longrightarrow I$ (cf prop. 3.6.1). On va voir qu'un tel relèvement h existe toujours : on peut choisir arbitrairement le point h(0) dans la fibre du point g(0), et alors le relèvement h est unique. Pour le prouver, il suffit de montrer que le revêtement $p' : X' \longrightarrow I$ possède une section continue et une seule passant par un point arbitraire de la fibre $p'^{-1}(0)$. En fait, ceci est vrai pour tout revêtement de base I, en vertu du théorème suivant :

Théorème 3.7.1. - Tout revêtement de base I est trivial (ou plutôt : trivialisable).

On va prouver, plus généralement:

Théorème 3.7.2. - Si n est un entier $\geqslant 0$, tout revêtement ayant pour base le cube I^n est trivialisable.

Démonstration : par hypothèse, on peut recouvrir la base I^n du revêtement $p : X \longrightarrow I^n$ par des ouverts trivialisants ; on peut recouvrir I^n par un nombre fini de tels ouverts, puisque le cube I^n est compact. Il en résulte qu'on peut subdiviser I en une suite

$$I_1 , I_2 \ldots . I_k$$

de segments contigus, de telle manière que pour tout produit

$$I_{i_1} \times I_{i_2} \times \dots \times I_{i_n} \quad (\text{avec } 1 \leq i_j \leq k \text{ pour } 1 \leq j \leq n) ,$$

le revêtement soit trivialisable au-dessus de ce produit (qui est un cube fermé contenu dans I^n) . On a fait la figure pour $n = 2$ et $k = 6$. On va maintenant montrer, pour chaque entier p $(1 \leq p \leq n)$, que le revêtement est trivialisable au-dessus de chaque cube .

$$\underbrace{I \times I \times \dots \times I}_{p \text{ facteurs}} \times I_{i_{p+1}} \times \dots \times I_{i_n} ;$$

pour $p = n$, le théorème sera établi. On va procéder par récurrence sur p . Supposons l'assertion vraie pour $p < n$ (elle l'est pour $p = 0$) , et montrons que le revêtement est trivial au-dessus de $\underbrace{I \times \dots \times I}_{p+1 \text{ facteurs}} \times I_{i_{p+2}} \times \dots \times I_{i_n}$.

Considérons les segments

$$J_1 = I_1 , \quad J_2 = I_1 \cup I_2 , \quad J_3 = J_2 \cup I_3 , \dots , \quad I = J_k = J_{k-1} \cup I_k .$$

On va montrer, de proche en proche, que le revêtement est trivial au-dessus de

$$\underbrace{I \times \dots \times I}_{p \text{ facteurs}} \times J_1 \times I_{i_{p+2}} \times \dots \times I_{i_n} ,$$

$$\underbrace{I \times \dots \times I}_{p \text{ facteurs}} \times J_2 \times I_{i_{p+2}} \times \dots \times I_{i_n} ,$$

$$\underbrace{I \times \dots \times I}_{p \text{ facteurs}} \times J_k \times I_{i_{p+2}} \times \dots \times I_{i_n}$$

Or on passe d'un de ces cubes (disons le h-ième) au suivant en le réunissant avec le cube

$$I \times \dots \times I \times I_{h+1} \times I_{i_{p+2}} \times \dots \times I_{i_n} ;$$

l'intersection de ces deux cubes (dont on vient de prendre la réunion) est

$$I \times \dots \times I \times (J_h \cap I_{h+1}) \times I_{i_{p+2}} \times \dots \times I_{i_n} ,$$

et $J_h \cap I_{h+1}$ est réduit à un point. On est donc dans la situation suivante : on a deux fermés B' et B" dans la base de notre revêtement ; on sait que le revêtement est trivialisable au-dessus de B' et au-dessus de B" ; de plus $B' \cap B"$ est connexe. On veut en déduire que le revêtement est trivialisable au-dessus de $B' \cup B"$.

On voit donc que le théorème 3.7.2 sera entièrement démontré quand on aura prouvé le lemme suivant :

Lemme 3.7.3. - Soit $p : X \longrightarrow B$ un revêtement. Soient B' et B" deux fermés (resp. deux ouverts) de B , tels que $B' \cup B'' = B$, et que $B' \cap B'' = C$ soit connexe (non vide). Si le revêtement est trivialisable au-dessus de B' et au-dessus de B" il est trivialisable au-dessus de B .

Démonstration du lemme : soient

$$\varphi' : B' \times F' \xrightarrow{\approx} p^{-1}(B') \quad , \quad \varphi'' : B'' \times F'' \xrightarrow{\approx} p^{-1}(B'')$$

des trivialisations du revêtement au-dessus de B' et de B" respectivement. Alors

$$\varphi'^{-1} \circ \varphi'' : C \times F'' \xrightarrow{\approx} C \times F'$$

est un isomorphisme de revêtements triviaux de base C connexe. Ceci prouve déjà que les espaces discrets F' et F" sont isomorphes (puisque C n'est pas vide) ; on peut donc supposer $F' = F'' = F$, et $\varphi'^{-1} \circ \varphi''$ est alors un automorphisme du revêtement trivial $C \times F \longrightarrow C$. D'après la proposition 3.2.1 , il est de la forme

$$(x , y) \longmapsto (x , \sigma(y)) , \tag{3.7.1.}$$

où σ est une permutation de F . La transformation (3.7.1) est, en fait, définie dans $B \times F$, et en particulier dans $B' \times F$; notons-la σ' dans $B' \times F$. Alors $\varphi' \circ \sigma' : B' \times F \xrightarrow{\approx} p^{-1}(B')$ est aussi une trivialisation de $p^{-1}(B')$. De plus, dans $C \times F$, on a

$$\varphi'' = \varphi' \circ \sigma' ,$$

d'après ce qui précède; autrement dit, les deux applications continues φ'' et $\varphi' \circ \sigma'$, définies respectivement dans $B'' \times F$ et $B' \times F$, coïncident dans l'intersection $B \times F$. Soit $\varphi : B \times F \longrightarrow X$ l'application qui coïncide avec φ'' dans $B'' \times F$ et avec $\varphi' \circ \sigma'$ dans $B \times F$; elle est continue : c'est évident si B' et B" sont ouverts, et s'ils sont fermés cela résulte du lemme du cours 1967-68 (page IV-23) . Il est immédiat que φ est une trivialisation du revêtement $p : X \longrightarrow B$.

C.Q.F.D.

3.8. - Relèvement des chemins (Suite)

Le théorème 3.7.2 étant entièrement démontré, nous en tirerons deux conséquences importantes, concernant le relèvement des chemins.

Proposition 3.8.1. - Soit $p : X \longrightarrow B$ un revêtement. Pour tout chemin $g : I \longrightarrow B$ et tout point $x \in p^{-1}(g(0))$, il existe un relèvement $h : I \longrightarrow X$ de g et un seul, tel que $h(0) = x$. [En effet, un tel relèvement est défini par une section continue du revêtement $p' : X' \longrightarrow I$, image réciproque de p par g ; un tel revêtement est trivial, et par suite possède une section continue et une seule passant par un point donné de la fibre $p'^{-1}(0)$].

Proposition 3.8.2. - Soit $p : X \longrightarrow B$ un revêtement, et soient g_0, $g_1 = I \longrightarrow B$ deux chemins homotopes avec origine fixe et extrémité fixe (on a donc $g_0(0) = g_1(0)$, $g_0(1) = g_1(1)$). Soit $x \in p^{-1}(g_0(0))$, et soient h_0 et $h_1 : I \longrightarrow X$ les relèvements de ces chemins tels que $h_0(0) = h_1(0) = x$. Alors les chemins h_0 et h_1 ont même extrémité $h_0(1) = h_1(1)$, et ils sont homotopes avec origine fixe et extrémité fixe.

Démonstration : soit $G : I^2 \longrightarrow B$ une homotopie de g_0 à g_1

On a donc

$$\begin{cases} G(t\ ,\ 0) = g_0(t) & , \quad G(t\ ,\ 1) = g_1(t)\ , \\ G(0\ ,\ u) = g_0(0) & , \quad G(1\ ,\ u) = g_0(1) \end{cases}$$

Soit $p' : X' \longrightarrow I^2$ le revêtement, image réciproque du revêtement donné par l'application G. Il est trivial (th. 3.7.2), donc il possède une section continue (et une seule) passant par le point $((0\ ,\ 0)\ ,\ x) \in I^2 \times X$ de la fibre de X' au-dessus de $(0\ ,\ 0) \in I^2$. Cette section définit un relèvement

$$H : I^2 \longrightarrow X$$

de G, tel que $H(0\ ,\ 0) = x$. La restriction de H à $I \times \{0\} \approx I$ est alors un relèvement de g_0 ; c'est donc h_0 ; de même la restriction de H à $I \times \{1\} \approx I$ est un relèvement de g_1, et par suite c'est h_1. De plus $u \longrightarrow H(0\ ,\ u)$ est un relèvement du chemin constant $u \longrightarrow G(0\ ,\ u) = g_0(0)$, donc $H(0\ ,\ u) = x$ pour tout $u \in I$. De même, $u \longmapsto H(1\ ,\ u)$ est un relèvement du chemin constant $u \longmapsto G(1\ ,\ u) = g_0(1)$; c'est donc un chemin constant ; or

$$H(1\ ,\ 0) = h_0(1) \quad , \quad H(1\ ,\ 1) = h_1(1)\ ,$$

et puisque $H(1\ ,\ u)$ est indépendant de u, on a bien $h_0(1) = h_1(1)$: les relèvements h_0 et h_1 ont même extrémité. Enfin, H définit une homotopie (avec origine fixe et extrémité fixe) du chemin h_0 au chemin h_1.

C.Q.F.D.

Avant d'aller plus loin, nous observons que le lemme 2.4.2 bis, qui avait été admis sans démonstration, est un cas particulier de la prop. 3.8.1 (on l'applique au revêtement exp : $\mathbb{R} \longrightarrow S^1$). De même, le lemme 2.4.3 bis est un cas particulier de la prop. 3.8.2. Ces deux lemmes sont donc maintenant démontrés.

On peut résumer les résultats précédents dans une formule.

Soit $p : X \longrightarrow B$ un revêtement, et soient y_0 et y deux points de B . Choisissons x_0 dans la fibre $p^{-1}(y_0)$; pour tout $x \in p^{-1}(y)$, on a une application

$$\pi_1(p ; x_0 , x) : \pi_1(X ; x_0 , x) \longrightarrow \pi_1(B ; y_0 , y)$$

(cf. 2.6) . D'après la proposition 3.3.2 , ceci est une <u>injection</u> : car si deux chemins de X , d'origine x_0 et d'extrémité x , ont pour images deux chemins homotopes de B , ils sont eux-mêmes homotopes (il s'agit toujours d'homotopie avec origine fixe et extrémité fixe) . Si maintenant x parcourt la fibre $p^{-1}(y)$, on obtient une application

$$\Phi : \bigcup_{x \in p^{-1}(y)} \pi_1(X ; x_0 , x) \longrightarrow \pi_1(B ; y_0, y)$$

où le signe $\bigcup$ du premier membre désigne la somme ensembliste disjointe. Je dis que Φ <u>est une bijection</u>. C'est une <u>injection</u>, car la restriction de Φ à chacun des $\pi_1(X ; x_0 , x)$ est une injection, comme on vient de le voir; de plus, si x et $x' \in p^{-1}(y)$ sont distincts, un élément de $\pi_1(X ; x_0 , x)$ et un élément de $\pi_1(X ; x_0 , x')$ n'ont pas la même image dans $\pi_1(B ; y_0 , y)$, en vertu de la prop. 3.8.2 , qui dit que les relèvements de deux chemins homotopes de B ont <u>la même extrémité</u> dès qu'ils ont la même origine. Enfin, Φ est une surjection à cause de la prop. 3.8.1 , puisque tout chemin de B , d'origine y_0 , peut être relevé en un chemin de X , d'origine x_0 .

<u>Cas particulier</u> : supposons $y = y_0$; alors

$$\Phi : \bigcup_{x \in p^{-1}(y_0)} \pi_1(X ; x_0 , x) \longrightarrow \pi_1(B , y_0)$$

est une bijection; en particulier,

$$\pi_1(p , x_0) : \pi_1(X , x_0) \longrightarrow \pi_1(B , y_0)$$

est un homomorphisme <u>injectif</u> du groupe fondamental de X dans le groupe fondamental de B . Pour que $\pi_1(p , x_0)$ soit bijectif,

il faut et il suffit que l'ensemble $\pi_1(X ; x_0 , x)$ soit vide pour tout $x \in p^{-1}(y_0)$ autre que x_0 . Si X est en outre connexe par arcs, ceci entraîne que la fibre $p^{-1}(y_0)$ est réduite à un point. Si de plus la base B est connexe, toutes les fibres sont réduites à un point (d'après la prop. 3.3.1) ; donc $p : X \longrightarrow B$ est un homéomorphisme. On a ainsi prouvé :

Proposition 3.8.3 - Soit $p : X \longrightarrow B$ un revêtement tel que X et B soient connexes par arcs. S'il existe un point $x_0 \in X$ tel que l'homomorphisme

$$\pi_1(p , x_0) : \pi_1(X , x_0) \longrightarrow \pi_1(B , p(x_0))$$

soit surjectif (donc bijectif), alors $p : X \longrightarrow B$ est un homéomorphisme (on a un revêtement trivial à un seul feuillet).

Corollaire : si $p : X \longrightarrow B$ est un revêtement, et si X est connexe par arcs, et B simplement connexe, alors p est un homéomorphisme.

3.9 - Cas où la base est localement connexe.

Définition : on dit qu'un espace topologique B est localement connexe si tout point de B possède un système fondamental de voisinages ouverts connexes.

Proposition 3.9.1. - Soit $p : X \longrightarrow B$ un revêtement dont la base B est localement connexe; alors toute composante connexe Y de X (munie de la restriction q de p à Y) est un revêtement de base B .

Démonstration : Soit $b \in B$; b appartient à un ouvert $W \subset B$, trivialisant pour p ; puisque B est localement connexe, il existe un ouvert U connexe, tel que $b \in U \subset W$; alors U est trivialisant pour p . Il suffira de prouver que U est trivialisant pour q . Or considérons $p^{-1}(U)$; ses composantes connexes sont des ouverts V_i ; si un V_i rencontre Y , la réunion $Y \cup V_i$ est connexe, donc c'est Y , et par suite $V_i \subset Y$. Donc

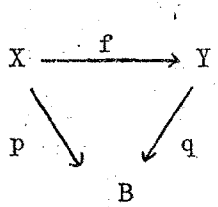
$$q^{-1}(U) = p^{-1}(U) \cap Y$$

est la réunion de ceux des V_i qui sont contenus dans Y , et q est un homéomorphisme

de chacun d'eux sur U . Donc U est trivialisant pour q .

C.Q.F.D.

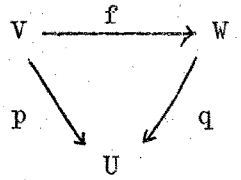
Proposition 3.9.2 - Soient $p : X \longrightarrow B$ et $q : Y \longrightarrow B$ deux revêtements dont la base B est localement connexe. Si $f : X \longrightarrow Y$ est un B-morphisme, c'est-à-dire une application continue rendant commutatif le diagramme



alors $f : X \longrightarrow Y$ est un revêtement.

Démonstration : tout point $b \in B$ possède un voisinage ouvert U qui est trivialisant à la fois pour p et pour q ; de plus, on peut supposer U connexe, puisque B est localement connexe. Cela dit, partons d'un point $y \in Y$; soit $b = q(y) \in B$, et soit U un ouvert connexe de B , contenant b , et trivialisant pour p et pour q ; soit V la composante connexe de $q^{-1}(U)$ qui contient y . On va montrer que V est trivialisant pour f , ce qui établira la proposition.

Soit W l'une quelconque des composantes connexes de $p^{-1}(U)$; p est un homéomorphisme de W sur U , et q est un homéomorphisme de V sur U . Je dis que deux cas seulement sont possibles : ou bien $f(W) \cap V = \emptyset$, ou bien f est un homéomorphisme de W sur V . En effet, si f(W) rencontre V , la réunion $V \cup f(W)$ est connexe et contenue dans $q^{-1}(U)$, donc elle est égale à V (puisque V est une composante connexe de $q^{-1}(U)$) . On a donc un diagramme commutatif



dans lequel p et q sont des homéomorphismes; il s'ensuit que $f = q^{-1} \circ p$ est un homéomorphisme.

Ceci prouve que $f^{-1}(V)$ est la réunion de certaines des composantes connexes W_i de $p^{-1}(U)$, et que pour chacune de ces W_i , f est un homéomorphisme de W_i sur V . Donc V est bien un ouvert trivialisant pour f .

C.Q.F.D.

Remarque : Il se peut que la famille des W_i soit vide. Ceci n'empêche pas que $f : X \longrightarrow Y$ soit un revêtement. En effet, dans la définition d'un ouvert V trivialisant pour f , rien n'exclut l'éventualité où $f^{-1}(V)$ serait vide (i.e : au-dessus de V , on a un revêtement à zéro feuillet). Rappelons toutefois que lorsque Y est connexe, le cardinal de la fibre $f^{-1}(y)$ est le même pour tous les points $y \in Y$; par suite, si X n'est pas vide et Y connexe, il est certain que $f^{-1}(V)$ n'est pas vide.

3.10 - Cas où la base est localement connexe par arcs; problème du relèvement.

Définition : on dit qu'un espace topologique B est localement connexe par arcs (en abrégé : L C A) si tout point de B possède un système fondamental de voisinages ouverts dont chacun est connexe par arcs.

Il est évident que tout espace L C A est localement connexe (cf.n° 3.9.) , puisque tout espace connexe par arcs est connexe.

Proposition 3.10.1 - Pour un espace topologique B , les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) B est L C A ;

(ii) pour tout $b \in B$ et tout voisinage U de b , il existe un voisinage V de b , contenu dans U , qui jouit de la propriété suivante : tout point de V peut être joint à b par un chemin contenu dans U ;

(iii) pour tout ouvert $U \subset B$, les composantes-connexes-par-arcs de U sont des ouverts.

Démonstration : on montre que (i) $\Rightarrow$ (ii) $\Rightarrow$ (iii) $\Rightarrow$ (i) ; vérification facile, laissée au lecteur.

Exemples : toute variété topologique est L C A . Plus généralement, tout espace localement contractile (c'est-à-dire dont chaque point possède un système fondamental de voisinages contractiles) est L C A .

Remarque 1 : soit B un espace L C A ; les composantes-connexes-par-arcs de B sont aussi ses "composantes connexes" (en effet, ce sont des ouverts U_i , connexes par arcs, donc connexes ; si $x \in U_i$, le plus grand sous-espace connexe de B contenant x est donc U_i , puisque le complémentaire de U_i est ouvert). En particulier, si un espace B est L C A et connexe, il est connexe par arcs.

Remarque 2 : soit $p : X \longrightarrow B$ un revêtement. Si B est LCA , il en est de même de X . En effet, tout point $x \in X$ possède un voisinage ouvert qui est homéomorphe (au moyen de p) à un voisinage ouvert de $p(x) \in B$.

On va désormais considérer la catégorie des espaces pointés. Un morphisme $f : (Y , y_0) \longrightarrow (X , x_0)$ est, par définition, une application continue $f : Y \longrightarrow X$ telle que $f(y_0) = x_0$. En particulier, $p : (X , x_0) \longrightarrow (B , b_0)$ est un revêtement pointé si $p : X \longrightarrow Y$ est un revêtement, et si $p(x_0) = b_0$.

Soit donné un revêtement pointé $p : (X , x_0) \longrightarrow (B , b_0)$, et soit donné une application continue $g : (Y , y_0) \longrightarrow (B , b_0)$.
Un relèvement de g est une application continue $h : (Y , y_0) \longrightarrow (X , x_0)$ telle que $g = p \circ h$. Si on suppose Y connexe, il existe au plus un tel relèvement; en effet, soit $q : Z \longrightarrow Y$ le revêtement, image réciproque du revêtement $p : X \longrightarrow B$ par l'application $g : Y \longrightarrow B$; on a un diagramme commutatif

(3.10.1)
$$\begin{array}{ccc} Z & \xrightarrow{f} & X \\ {\scriptstyle q}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle p} \\ Y & \xrightarrow{g} & B \end{array}$$

et l'on sait (cf. prop. 3.6.1) que les relèvements continus $h : (Y , y_0) \longrightarrow (X , x_0)$ sont en correspondance bijective avec les sections continues $s : Y \longrightarrow Z$ du revêtement q , telles que $s(y_0) = z_0$ [en notant $z_0 \in Z$ le point $(y_0 , x_0) \in Y \times X$, qui est dans le sous-espace Z des couples (y , x) tels que $g(y) = p(x)$] . Puisque Y est supposé connexe, il existe au plus une telle section (cf. coroll. de la prop. 3.5.1) .

C.Q.F.D.

On va maintenant donner une condition nécessaire et suffisante pour l'existence du relèvement h, dans le cas où l'espace Y est connexe et LCA .

Théorème fondamental 3.10.2 - Dans la situation

$$\begin{array}{ccc} & & (X , x_0) \\ & & \downarrow{\scriptstyle p} \\ (Y , y_0) & \xrightarrow[g]{} & (B , b_0) \end{array}$$

où p est un revêtement, et Y un espace connexe et LCA (donc connexe par arcs), une condition nécessaire et suffisante pour l'existence d'un relèvement continu $h : (Y , y_0) \longrightarrow (X , x_0)$ de l'application g, est que l'image de l'homomorphisme

$$\pi_1(g) : \pi_1(Y , y_0) \longrightarrow \pi_1(B , b_0)$$

soit contenue dans l'image de l'homomorphisme

$$\pi_1(p) : \pi_1(X , x_0) \longrightarrow \pi_1(B , b_0) .$$

Alors h est unique.

Démonstration : on a déjà prouvé l'unicité de h (s'il existe). Montrons que l'inclusion

$$\text{(3.10.2)} \qquad \operatorname{Im} \pi_1(g) \subset \operatorname{Im} \pi_1(p)$$

est nécessaire pour l'existence de h ; en effet, si l'on a $g = p \circ h$, l'homomorphisme $\pi_1(g)$ est égal au composé

$$\pi_1(Y , y_0) \xrightarrow{\pi_1(h)} \pi_1(X , x_0) \xrightarrow{\pi_1(p)} \pi_1(B , b_0) ,$$

donc son image est contenue dans l'image de $\pi_1(p)$.

Réciproquement, supposons que la condition (3.10.2) soit vérifiée. On va montrer l'existence du relèvement h. Considérons le diagramme commutatif (3.10.1) ; il s'agit de trouver une section continue $s : (Y , y_0) \longrightarrow (Z , z_0)$ du revêtement q. Or l'inclusion (3.10.2) exprime ceci : pour tout lacet

$$\varphi : I \longrightarrow Y \quad \text{tel que} \quad \varphi(0) = \varphi(1) = y_0 ,$$

il existe un lacet

$$\psi : I \longrightarrow X \quad \text{tel que} \quad \psi(0) = \psi(1) = x_0 ,$$

satisfaisant en outre à

$$\text{(3.10.3)} \qquad g \circ \varphi = p \circ \psi .$$

L'application $I \longrightarrow Y \times X$, définie par $t \longmapsto (\varphi(t) , \psi(t))$, prend ses valeurs dans le sous-espace Z de $Y \times X$, à cause de (3.10.3) ; elle définit donc un lacet

$$\lambda : I \longrightarrow Z , \text{ d'origine } \lambda(0) = \lambda(1) = z_0 ,$$

tel que $q \circ \lambda = \varphi$.

Ainsi tout lacet φ de Y, d'origine y_0, se relève en un lacet λ de Z, d'origine z_0 ; donc l'homomorphisme

$$\pi_1(q) : \pi_1(Z , z_0) \longrightarrow \pi_1(Y , y_0)$$

est surjectif ; il est donc bijectif (cf. 3.8) . Soit Z_0 la composante connexe de Z qui contient z_0 , et soit

$$q_0 : (Z_0 , z_0) \longrightarrow (Y , y_0)$$

la restriction de q . C'est un revêtement , parce que Yest localement connexe (puisqu'il est L C A) : appliquer la prop. 3.9.1. De plus Z_0 est L C A , puisque q_0 est un revêtement dont la base Y est L C A (cf. la remarque 2 ci-dessus) . Donc Z_0 est connexe par arcs, puisqu'il est connexe et L C A (cf. la remarque 1 ci-dessus) . Il s'ensuit que l'inclusion $Z_0 \longrightarrow Z$ induit un isomorphisme $\pi_1(Z_0 , z_0) \xrightarrow{\approx} \pi_1(Z , z_0)$, et par suite

$$\pi_1(q_0) : \pi_1(Z_0 , z_0) \longrightarrow \pi_1(Y , y_0)$$

est un isomorphisme. Appliquons la prop. 3.8.3 au revêtement $q_0 : Z_0 \longrightarrow Y$; on voit que q_0 est un homéomorphisme. Si on compose l'homéomorphisme réciproque $(Y , y_0) \longrightarrow (Z_0 , z_0)$ avec l'inclusion $(Z_0 , z_0) \longrightarrow (Z , z_0)$, on obtient la section cherchée

$$s : (Y , y_0) \longrightarrow (Z , z_0) .$$

Ceci achève la démonstration du théorème 3.10.2.

Voici des cas particuliers importants où le thorème fondamental 3.10.2 s'applique.

Corollaire 3.10.3 - Soit Y un espace L C A et simplement connexe. Pour toute application continue $g : Y \longrightarrow B$ à valeurs dans la base B d'un revêtement $p : X \longrightarrow B$ il existe toujours un relèvement continu (et un seul) $h : Y \longrightarrow X$ (tel que $p \circ h = g$) qui, en un point donné $y_0 \in Y$, prend une valeur x_0 arbitrairement choisie dans la fibre $p^{-1}(b_0)$, en notant $b_0 = g(y_0)$.

Corollaire 3.10.4 - Tout revêtement $p : X \longrightarrow B$ dont la base B est L C A et simplement connexe est trivialisable .

[En effet, prenons Y = B , g étant l'identité; le corollaire 3.10.3 montre que le revêtement donné possède une section continue $B \longrightarrow X$ dont la valeur en un $b_0 \in B$ donné est un point arbitraire de la fibre $p^{-1}(b_0)$. Les images de ces diverses sections sont des ouverts disjoints de X , dont X est la réunion; et p est un homéomorphisme de chacun d'eux sur B] .

Remarque : le théorème 3.7.2 , relatif aux revêtements dont la base est I^n , apparaît maintenant comme un cas particulier du corollaire 3.10.4 ; en effet, I^n

est L C A et simplement connexe

Voici un cas où s'applique le corollaire 3.10.4 :

Proposition 3.10.5 - Tout revêtement ayant pour base la sphère $S^n (n \geqslant 2)$ est trivialisable. (cf. théorème 2.5.2) .

Rappelons que exp : $\mathbb{R} \longrightarrow S^1$ est un revêtement non trivialisable.

3.11. La catégorie des revêtements connexes pointés; notion de revêtement universel

On considère ici uniquement des revêtements pointés

$$p : (X , x_0) \longrightarrow (B , b_0)$$

tels que B soit connexe et L C A , et X connexe (alors B et X sont connexes par arcs). L'espace pointé (B , b_0) étant supposé donné, ces revêtements sont les objets d'une catégorie; par définition un morphisme

$$(Y , y_0 , q) \longrightarrow (X , x_0 , p)$$

est une application continue $f : (Y , y_0) \longrightarrow (X , x_0)$ rendant commutatif le diagramme

$$\begin{array}{ccc} (Y , y_0) & \xrightarrow{\ f\ } & (X , x_0) \\ & {\scriptstyle q}\searrow \quad \swarrow{\scriptstyle p} & \\ & (B , b_0) & \end{array}$$

Etant donnés deux objets (Y , y_0 , q) et (X , x_0 , p) , il existe au plus un tel morphisme f (puisque Y est connexe, et que f doit être un "relèvement" de p) ; pour que f existe, il faut et il suffit que

$$\text{Im } \pi_1(q) \subset \text{Im } \pi_1(p) \qquad (3.11.1)$$

(cf. théorème fondamental 3.10.2). De plus un morphisme $f : (Y , y_0) \longrightarrow (X , x_0)$ est, en fait, une application de revêtement, d'après la prop. 3.9.2.

On peut se demander si cette catégorie admet un objet initial, c'est-à-dire si (B , b_0) possède un revêtement connexe $q : (Y , y_0) \longrightarrow (B , b_0)$ qui satisfasse à (3.11.1) quel que soit le revêtement connexe $p : (X , x_0) \longrightarrow (B , b_0)$.
Une condition suffisante pour qu'il en soit ainsi que Y soit simplement connexe, car alors $\text{Im } \pi_1(q)$ est réduit à l'élément neutre de $\pi_1 (B , b_0)$. Ainsi :

Théorème 3.11.1 - Si (B , b_0) possède un revêtement pointé $q : (Y , y_0) \to (B , b_0)$ tel que Y soit simplement connexe, ce revêtement est objet initial dans la catégorie des revêtements connexes pointés de base (B , b_0).

Un tel revêtement prend alors le nom de revêtement universel de l'espace (B , b_0) . D'après ce qui précède, tout revêtement connexe pointé $p : (X , x_0) \longrightarrow (B , b_0)$ définit une factorisation

$$(Y , y_0) \xrightarrow{f} (X , x_0) \xrightarrow{p} (B , b_0)$$

de q ; l'espace X apparaît donc comme la base d'un revêtement $f : Y \longrightarrow X$; c'est un quotient de l'espace Y du revêtement universel.

On étudiera plus loin (n° 3.15) à quelle condition un espace donné B , connexe et LCA , possède un revêtement simplement connexe.

3.12 - Groupe des automorphismes d'un revêtement connexe.

Soit $p : X \longrightarrow B$ un revêtement; on suppose que B et X sont connexes et LCA . On a la notion de B-automorphisme d'un tel revêtement : c'est un homéomorphisme $f : X \longrightarrow X$ rendant commutatif le diagramme

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & X \\ & \searrow \quad \swarrow & \\ & B & \end{array}$$

Il est clair que ces automorphismes forment un groupe; on le notera G(p) , ou simplement G (s'il n'y a pas d'ambiguïté) , et on l'appellera le groupe de Galois du revêtement.

On va choisir un point $x_0 \in X$, et son image $b_0 = p(x_0) \in B$. Il est clair que, si $f \in G(p)$, le point $f(x_0)$ est dans la fibre $p^{-1}(b_0)$

Proposition 3.12.1 - Pour $x_1 \in p^{-1}(b_0)$, il existe au plus une transformation f du groupe de Galois telle que

$$f(x_0) = x_1 \ ;$$

une telle f existe si et seulement si

(3.12.1) $\quad \operatorname{Im} \pi_1(p , x_0) = \operatorname{Im} \pi_1(p , x_1)$

[égalité de deux sous-groupes de $\pi_1(B , b_0)$] .

Démonstration : d'après le n° 3.11 (ou, si l'on préfère, d'après le théorème fondamental 3.10.2) , il existe au plus un morphisme $f : (X , x_0) \longrightarrow (X , x_1)$ de revêtements pointés de base (B , b_0) ; pour l'existence, il faut et suffit que

$$\text{Im } \pi_1(p , x_0) \subset \text{Im } \pi_1(p , x_1) .$$

Pour que f soit un isomorphisme, il faut qu'il existe un morphisme $g : (X , x_1) \longrightarrow (X , x_0)$, ce qui exige

$$\text{Im } \pi_1(p , x_1) \subset \text{Im } \pi_1(p , x_0) ,$$

d'où l'égalité (3.12.1) ; et cela suffit, car alors f o g et g o f sont égaux à l'application identique, en vertu de l'unicité.

Remarque : si $f \in G(p)$ est distincte de l'identité, f n'a pas de point fixe. On dit que le groupe de Galois G(p) opère sans point fixe dans X .

Corollaire 3.12.2 - Pour que le groupe de Galois G(p) soit transitif dans la fibre $p^{-1}(b_0)$, il faut et il suffit que l'image de

$$\pi_1(p , x) : \pi_1(X , x) \longrightarrow \pi_1 (B , b_0)$$

soit indépendante du point x de la fibre $p^{-1}(b_0)$. On dit alors que le revêtement est galoisien.

Remarque : si le groupe G(p) est transitif dans la fibre $p^{-1}(b_0)$, il est transitif dans chaque fibre $p^{-1}(b)$. En effet, si on regarde une trivialisation du revêtement au-dessus d'un ouvert U , on voit facilement que l'ensemble des points $b \in B$ tels que le groupe G(p) opère transitivement dans la fibre $p^{-1}(b)$ est à la fois ouvert et fermé dans B . Or B a été supposé connexe.

Etudions de plus près, dans le cas général, la relation qui existe entre les deux sous-groupes

$$\text{Im } \pi_1(p , x_0) \text{ et Im } \pi_1(p , x_1)$$

de $\pi_1(B , b_0)$, lorsque x_0 et x_1 sont deux points de la fibre $p^{-1}(b_0)$.

Choisissons dans X un chemin d'origine x_0 , d'extrémité x_1 , et soit $\alpha \in \pi_1(B , b_0)$ son image. Si à chaque $\lambda \in \text{Im } \pi_1(p , x_0)$ on associe

$$\alpha^{-1} . \lambda . \alpha ,$$

on obtient un isomorphisme de $\text{Im } \pi_1(p , x_0)$ sur $\text{Im } \pi_1(p , x_1)$, dont l'isomorphisme réciproque est

$$\mu \longmapsto \alpha . \mu . \alpha^{-1} .$$

Les deux sous-groupes Im $\pi_1(p , x_0)$ et Im $\pi_1(p , x_1)$ sont donc conjugués dans $\pi_1(B , b_0)$; d'une façon précise , le second est transformé du premier par l'automorphisme intérieur $\lambda \longrightarrow \alpha^{-1} \lambda . \alpha$.

Lorsque x_1 parcourt la fibre $\pi^{-1}(b_0)$, α prend toutes les valeurs possibles dans $\pi_1(B , b_0)$, puisque tout lacet de B (d'origine b_0) se relève en un chemin de X (d'origine x_0) . D'où :

Proposition 3.12.2 - Pour que le revêtement $p : X \longrightarrow B$ soit galoisien, il faut et il suffit que, si l'on choisit $x_0 \in X$ et $b_0 = p(x_0) \in B$, l'image de l'homomorphisme

$$\pi_1(p , x_0) : \pi_1(X , x_0) \longrightarrow \pi_1(B , b_0)$$

soit un sous-groupe invariant de $\pi_1(B , b_0)$.

[Rappelons que X et B sont toujours supposés connexes et L C A]

Remarque : le revêtement simplement connexe de B (s'il existe) est galoisien.

3.13- Opération du groupe $\pi_1(B , b_0)$ dans la fibre d'un revêtement de base B . Application aux revêtements galoisiens.

Soit $p : X \longrightarrow B$ un revêtement (sans autre hypothèse pour le moment). Choisissons $b_0 \in B$; on a vu (n° 3.8) que la donnée d'un $\alpha \in \pi_1(B , b_0)$ et d'un $x \in p^{-1}(b_0)$ définit un point $x' \in p^{-1}(b_0)$, obtenu comme suit : on choisit un lacet f dans la classe α , on relève f en un chemin g de X , d'origine x , et x' est alors l'extrémité du chemin g (qui ne dépend pas du choix de f) . On notera $x.\alpha$ ce point x'. Le lecteur prouvera les relations évidentes :

(3.13.1) $\quad x . \varepsilon = x \qquad$ (si ε est l'élément neutre)

(3.13.2) $\quad (x.\alpha).\beta = x.(\alpha . \beta)$ pour $\alpha \in \pi_1(B , b_0)$, $\beta \in \pi_1(B , b_0)$.

Elles expriment que le groupe fondamental $\pi_1(B , b_0)$ opère à droite dans la fibre $\pi^{-1}(b_0)$.

Supposons maintenant que X et B soient connexes et L C A , et que le revêtement $p : X \longrightarrow B$ soit galoisien. Choisissons un point x_0 dans la fibre $p^{-1}(b_0)$; on va lui associer une application $\rho : \pi_1(B , b_0) \longrightarrow G(p)$, à valeurs dans le groupe de Galois du revêtement. On définit ρ par la condition

(3.13.3) $\quad \rho(\alpha)(x_0) = x_0 . \alpha$, pour $\alpha \in \pi_1(B , b_0)$.

Ceci définit bien $\rho(\alpha) \in G(p)$, puisqu'il existe un B-automorphisme et un seul du revêtement X , transformant le point x_0 dans le point $x_0 \cdot \alpha$ de la même fibre.

Proposition 3.13.1 - ρ est un homomorphisme de groupes.

Démonstration : pour montrer que $\rho(\alpha \cdot \beta) = \rho(\alpha) \circ \rho(\beta)$, il suffit de montrer que ces deux automorphismes prennent la même valeur au point x_0 . Or

$$\rho(\alpha \cdot \beta)(x_0) = x_0 \cdot (\alpha \cdot \beta) = (x_0 \cdot \alpha) \cdot \beta = (\rho(\alpha)(x_0)) \cdot \beta ,$$

tandis que

$$\rho(\alpha) \circ \rho(\beta)(x_0) = \rho(\alpha)(\rho(\beta)(x_0)) = \rho(\alpha)(x_0 \cdot \beta) .$$

Tout revient donc à prouver que si on note σ l'automorphisme $\rho(\alpha)$, on a

(3. 13.4) $\sigma(x_0) \cdot \beta = \sigma(x_0 \cdot \beta)$ pour $\beta \in \pi_1(B , b_0)$.

Or choisissons un lacet f dans la classe de β , et relevons-le en un chemin g d'origine x_0 , d'extrémité $x_0 \cdot \beta$; si on effectue l'automorphisme σ , g est transformé en un chemin $\sigma \circ g$ d'origine $\sigma(x_0)$, d'extrémité $\sigma(x_0 \cdot \beta)$; et comme $\sigma \circ g$ relève le lacet f , la relation (3.13.4) est démontrée.

Etudions de plus près l'homomorphisme

$$\rho : \pi_1(B , b_0) \longrightarrow G(p) .$$

Il est surjectif, car pour tout $x \in p^{-1}(b_0)$ il existe un $\alpha \in \pi_1(B , b_0)$ tel que $x = x_0 \cdot \alpha$, puisque X est connexe par arcs [en d'autres termes, quand X est connexe par arcs, le groupe $\pi_1(B , b_0)$ opère transitivement dans la fibre $p^{-1}(b)$] .
Cherchons maintenant le noyau de ρ , c'est-à-dire le sous-groupe (invariant) formé des α tels que $\rho(\alpha)$ = identité; la condition est que $x_0 \cdot \alpha = x_0$, c'est-à-dire que le relèvement (d'origine x_0) d'un lacet f de la classe α soit un lacet , ou, ce qui revient au même, que α soit dans l'image de

$$\pi_1(p , x_0) : \pi_1(X , x_0) \longrightarrow \pi_1(B , b_0) .$$

On obtient ainsi une suite exacte de groupes et d'homomorphismes (le noyau de chaque homomorphisme est l'image de l'homomorphisme précédent):

$$(1) \longrightarrow \pi_1(X , x_0) \xrightarrow{\pi_1(p)} \pi_1(B , b_0) \xrightarrow{\rho} G(p) \longrightarrow (1)$$

où (1) désigne un groupe réduit à l'élément neutre. On l'appelle la suite exacte du revêtement galoisien $p : X \longrightarrow B$. Il faut prendre garde que l'homomorphisme ρ dépend non seulement du choix de b_0 , mais aussi du choix de x_0 dans la fibre $p^{-1}(b_0)$

On devrait donc parler de la suite exacte d'un revêtement galoisien pointé.

Exercice : sans supposer que le revêtement soit galoisien (mais en supposant toujours X et B connexes et L CA) , soit $N \subset \pi_1(B , b_0)$ le normalisateur de $\pi_1(X , x_0)$, c'est-à-dire le sous-groupe formé des α tels que l'automorphisme intérieur

$$\lambda \longmapsto \alpha^{-1} . \lambda . \alpha$$

transforme l'image de $\pi_1(X , x_0) \longrightarrow \pi_1(B , b_0)$ en elle-même. Définir, comme ci-dessus, un homomorphisme $\varrho : N \longrightarrow G(p)$, et en déduire une suite exacte

$$(1) \longrightarrow \pi_1(X , x_0) \longrightarrow N \xrightarrow{\varrho} G(p) \longrightarrow (1) .$$

Le cas où le revêtement est galoisien est celui où $N = \pi_1(B , b_0)$.

Cas particulier important : c'est celui où X est simplement connexe (revêtement universel). Alors

$$\varrho : \pi_1(B , b_0) \longrightarrow G(p)$$

est un isomorphisme , et permet d'identifier le groupe fondamental de la base B (au point b_0) au groupe des B-automorphismes du revêtement X , une fois choisi un point $x_0 \in p^{-1}(b_0)$. On a déjà observé ce phénomène dans le cas particulier du revêtement

$$\exp : \mathbb{R} \longrightarrow S^1 ;$$

le groupe fondamental $\mathbb{Z}$ de la base opère dans $\mathbb{R}$ par les translations $x \longmapsto x + n$ $(n \in \mathbb{Z})$

Exercice : montrer que tout revêtement connexe à deux feuillets (i.e. dont chaque fibre est un ensemble à deux éléments) est galoisien.

3.14 - Théorie de Galois.

Soit $q : Y \longrightarrow B$ un revêtement galoisien (Y et B étant toujours connexes et L C A) Le groupe G(q) opère dans Y "sans point fixe" (cf. la remarque suivant la prop. 3.12.1). On peut même préciser : G(q) opère proprement sans point fixe (cf. 3.4) , car tout point $y_0 \in Y$ possède un voisinage ouvert (connexe) V tel que les transformés $\sigma(V)$ (σ parcourant G(p)) soient deux à deux disjoints. En effet, il suffit de prendre pour V la composante connexe de $q^{-1}(U)$ concernant y_0 , où U est un ouvert connexe de B , contenant $b_0 = q(y_0)$, et trivialisant pour q .

On sait que l'application canonique

$$Y \longrightarrow Y/G(q)$$

est alors un revêtement; en fait, il s'identifie au revêtement donné. En effet, $q : Y \longrightarrow B$ passe au quotient suivant $G(q)$, c'est-à-dire se factorise en

$$Y \longrightarrow Y/G(q) \xrightarrow{\varphi} B ,$$

il est immédiat que φ est un homéomorphisme (exercice !) .

Dans la "théorie de Galois", on se donne une fois pour toutes un revêtement pointé

$$q : (Y , y_0) \longrightarrow (B , b_0)$$

qu'on suppose <u>galoisien</u> (Y et B étant connexes et LCA) . Pour tout revêtement connexe pointé

$$p : (X , x_0) \longrightarrow (B , b_0)$$

il existe au plus un morphisme de revêtements pointés

$$r : (Y , y_0) \longrightarrow (X , x_0)$$

qui donne une factorisation $q = p \circ r$. Si r existe, r est une application de revêtement (cf. 3.11); le revêtement q est alors factorisé en deux revêtements

$$(3.14.1) \qquad (Y , y_0) \xrightarrow{r} (X , x_0) \xrightarrow{p} (B , b_0).$$

Nous énoncerons, sans démonstration, les assertions suivantes (qui constituent la "théorie de Galois") ;

Le revêtement r est <u>galoisien</u>;son groupe de Galois $G(r)$ [groupe d'automorphismes de Y] est un <u>sous-groupe</u> du groupe de Galois $G(q)$; si on identifie X à $Y/G(r)$ et B à $Y/G(q)$, la suite (3.14.1) s'identifie à

$$(Y , y_0) \longrightarrow (Y/G(r) , x_0) \longrightarrow (Y/G(q) , b_0) ,$$ où

la seconde application est l'application canonique de $Y/G(r)$ sur son quotient $Y/G(q)$
Réciproquement, pour tout sous-groupe Γ de $G(q)$, la factorisation

$$(Y , y_0) \longrightarrow (Y/\Gamma , x_0) \longrightarrow (Y/G(q) , b_0)$$

(où x_0 désigne l'image de y_0) définit un revêtement $X = Y/\Gamma$ de $B = Y/G(q)$.
Pour que ce revêtement $p : X \longrightarrow B$ soit <u>galoisien</u>, il faut et il suffit que Γ soit <u>un sous-groupe invariant</u> de $G(q)$, et alors le groupe de Galois $G(p)$ s'identifie au groupe quotient $G(q)/\Gamma$ (dire comment) .

En particulier, prenons pour $q : Y \longrightarrow B$ un revêtement <u>simplement connexe</u> de B (s'il existe) . Alors une fois choisi un point $y_0 \in q^{-1}(b_0)$, $\pi_1(B , b_0) = G$ s'identifie au groupe de Galois du revêtement $q : Y \longrightarrow B$, et B s'identifie au quotient Y/G ; à chaque sous-groupe Γ de G correspond le revêtement connexe pointé

$$(Y/\Gamma , x_0) \longrightarrow (Y/G , b_0) = (B , b_0) ,$$

où x_0 est la classe de $y_0 \in Y$. Tout revêtement connexe pointé $p : (X , x_0) \longrightarrow (B , b_0)$ est isomorphe (d'une seule manière) à un tel revêtement, à savoir celui qui est défini par le groupe de Galois Γ du revêtement $r : (Y , y_0) \longrightarrow (X , x_0)$ tel que $p \circ r = q$. On obtient ainsi une <u>correspondance bijective entre les sous-groupes du groupe fondamental</u> $\pi_1 (B , b_0)$, <u>et les classes d'isomorphie de revêtements connexes pointés de base</u> (B , b_0) . Dans cette correspondance, les <u>revêtements galoisiens</u> sont les revêtements qui correspondent aux <u>sous-groupes invariants</u> de $\pi_1(B , b_0)$.

On obtient ainsi une classification des revêtements connexes pointés de base (B , b_0) , lorsque l'espace B , connexe et LCA , possède un revêtement simplement connexe (cf. ci-dessous, 3.15) .

<u>Remarque</u> : si le revêtement $p : (X , x_0) \longrightarrow (B , b_0)$ est <u>fini</u> , c'est-à-dire si le cardinal de chaque fibre est fini (il est le même pour toutes les fibres) , ce cardinal est égal au nombre des éléments de G/Γ (Γ opérant à gauche dans $G = \pi_1(B , b_0)$) , c'est-à-dire au nombre des <u>classes à droite</u> de G suivant le sous-groupe Γ dans le groupe $G = \pi_1(B , b_0)$. Cet indice est aussi (on le sait) égal au nombre des <u>classes à gauche</u> de G suivant Γ (puisque l'application $g \longrightarrow g^{-1}$ de G dans lui-même transforme chaque classe à droite dans une classe à gauche) .

<u>Exemple</u> : partons du revêtement simplement connexe

$$\exp : (\mathbb{R} , 0) \longrightarrow (S^1 , 1) ,$$

où $\exp(x) = e^{2\pi i x}$. Si n est un entier $\geqslant 1$, soit $n\mathbb{Z}$ le sous-groupe de $\mathbb{Z}$ (opérant dans $\mathbb{R}$ par les translations entières) formé des multiples entiers de n . D'où une factorisation de exp :

$$(3.14.1) \qquad \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}/n\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{R}/\mathbb{Z} = S^1 .$$

D'ailleurs $\mathbb{R}/n\mathbb{Z}$ est lui-même homéomorphe à S^1, car $x \longmapsto n\,x$ induit un homéomorphisme $\mathbb{R}/\mathbb{Z} \xrightarrow{\approx} \mathbb{R}/n\mathbb{Z}$. Ainsi la factorisation (3.14.1) est isomorphe à

$$\mathbb{R} \xrightarrow{\exp} S^1 \xrightarrow{\theta_n} S^1$$

où θ_n est induite par la multiplication par n dans $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$. On voit que tout revêtement connexe de S^1 , non simplement connexe, est isomorphe à $S_1 \xrightarrow{\theta_n} S_1$, pour un entier $n \geqslant 1$ convenable (n est alors le nombre des feuillets du revêtement). Bien entendu, tous ces revêtements sont galoisiens, puisque $\pi_1(S^1) \simeq \mathbb{Z}$ est commutatif.

Pour construire des revêtements non galoisiens, on a besoin de construire un espace B dont le groupe fondamental ne soit pas commutatif (cf. ci-dessous, § 4) .

3.15 - Existence d'un revêtement simplement connexe.

Dans tout ce qui suit, B désigne un espace connexe et LCA.

Théorème 3.15.1 - Pour qu'il existe un revêtement $p : X \longrightarrow B$ tel que X soit simplement connexe, il faut et il suffit que B possède la propriété suivante :

(ΠΠ) pour tout $b \in B$, il existe un ouvert connexe $U \ni b$ tel que l'homomorphisme $\pi_1(U , b) \longrightarrow \pi_1(B , b)$ induit par l'inclusion $U \longrightarrow B$, soit neutre [i.e : cet homomorphisme envoie $\pi_1(U , b)$ dans l'élément neutre de $\pi_1(B , b)$] .

Avant de prouver ce théorème, faisons quelques remarques.

Dire que l'homomorphisme $\pi_1(U , b) \longrightarrow \pi_1(B , b)$ est neutre, c'est dire que tout lacet de U , d'origine b , est homotope, dans l'espace ambiant B , à un lacet constant. Pour un ouvert connexe $U \subset B$, cette propriété est indépendante du point $b \in U$, car U est connexe par arcs (puisque B est LCA) ; le choix d'un chemin de U , d'origine b et d'extrémité b' , définit des isomorphismes verticaux dans le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(U , b) & \longrightarrow & \pi_1(B , b) \\ \downarrow \approx & & \downarrow \approx \\ \pi_1(U , b') & \longrightarrow & \pi_1(B , b') \end{array} ,$$

et par suite si le premier homomorphisme horizontal est neutre, il en est de même du second.

Définition : disons qu'un ouvert $U \subset B$ est privilégié s'il est connexe et si, pour $b \in U$, l'homomorphisme $\pi_1(U , b) \longrightarrow \pi_1(B , b)$ est neutre.

La condition (Π) peut se reformuler comme suit :

(Π') L'espace B peut être recouvert avec des ouverts privilégiés.

Faisons encore l'observation suivante :

Proposition 3.15.2 - Pour qu'un ouvert connexe $U \subset B$ soit privilégié , il faut et il suffit que, pour tout couple de points b et b' de U , l'image de l'application

$$\Phi : \pi_1(U ; b, b') \longrightarrow \pi_1(B ; b, b')$$

ait un seul élément. [Ceci signifie que deux chemins de U, d'origine b et d'extrémité b' , sont homotopes comme chemins de B (avec origine fixe et extrémité fixe)].

Démonstration de la prop. 3.15.2 : soient

$$\beta_0 , \ \beta_1 \in \pi_1(U ; b , b') .$$

Dans le groupoïde fondamental de U , on a

$$\beta_1 = \beta_0 . \alpha , \quad \text{où } \alpha \in \pi_1(U , b)$$

On a donc

$$\Phi(\beta_1) = \Phi(\beta_0) . \Phi(\alpha) .$$

Si U est privilégié, $\Phi(\alpha) \in \pi_1(B , b)$ est l'élément neutre, donc $\Phi(\beta_1) = \Phi(\beta_0)$. Réciproquement, si $\Phi(\beta_1) = \Phi(\beta_0)$ quels que soient β_0 et β_1 , on a

$$\Phi(\beta_0) . \Phi(\alpha) = \Phi(\beta_0) \quad \text{pour tout } \alpha \in \pi_1(U , b) ,$$

donc $\Phi(\alpha)$ est l'élément neutre.

C.Q.F.D.

Avant de commencer la démonstration du théorème 3.15.1 , donnons une condition suffisante pour que B possède la propriété (Π) : il suffit que chaque point $b \in B$ possède un voisinage simplement connexe. A fortiori, il suffit que chaque point $b \in B$ possède un système fondamental de voisinages simplement connexes. Par exemple, toute variété topologique connexe possède la propriété (Π) , et a donc un revêtement simplement connexe [si on admet le théorème, que nous allons justement démontrer maintenant] .

(1) la propriété (Π) est nécessaire pour que B possède un revêtement simplement connexe. En effet, soit

$$p : X \longrightarrow B$$

un revêtement, X étant simplement connexe. Soit U un ouvert contenant b et trivialisant pour p ; on peut supposer U connexe, puisque B est localement connexe. On va montrer que U est privilégié. Soit V une composante connexe de $p^{-1}(U)$, et $x \in V$ le point de la fibre $p^{-1}(b)$. Considérons le diagramme commutatif .

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(V , x) & \xrightarrow{\lambda} & \pi_1(X , x) \\ \downarrow \alpha & & \downarrow \beta \\ \pi_1(U , b) & \xrightarrow{\mu} & \pi_1(B , b) \end{array}$$

où les homomorphismes horizontaux sont définis par les inclusions $V \subset X$ et $U \subset B$, et les homomorphismes verticaux sont définis par la projection p . Puisque p est un homéomorphisme de V sur U , l'homomorphisme α est un <u>isomorphisme</u> ; or $\mu \circ \alpha = \beta \circ \lambda$ est l'homomorphisme neutre, puisque le groupe $\pi_1(X , x)$ est réduit à l'élément neutre. Il s'ensuit que l'homomorphisme μ est neutre. Donc U est privilégié.

C.Q.F.D.

(2) Réciproquement, supposons que B <u>puisse être recouvert par des ouverts privilégiés</u>. On va construire un revêtement simplement connexe $p : X \to B$. Définissons d'abord X comme ensemble : choisissons une fois pour toutes un point $b_0 \in B$; par définition, X sera l'ensemble $\pi_1(B ; b_0 , ?)$ des classes de chemins de B , d'origine b_0 et d'extrémité quelconque. Si à chaque chemin de B , d'origine b_0 , on associe son extrémité, on définit bien une application $p: X \to B$, puisque deux chemins de la même classe ont (par définition !) même extrémité. Il nous faut maintenant définir sur X une topologie $\mathcal{O}$ telle que l'application p soit une application de revêtement; et ensuite on devra vérifier que X , muni de cette topologie, est simplement connexe.

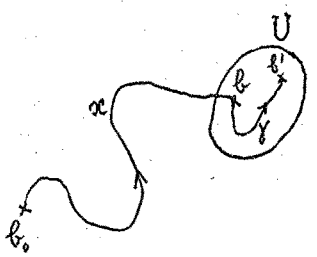
On n'a pas besoin d'avoir défini une topologie sur X pour avoir la notion de <u>section</u> au-dessus d'un ouvert $U \subset B$: c'est une application $s : U \to X$ telle que $p \circ s = id_U$. Nous allons définir de telles sections; plus précisément, pour tout ouvert privilégié $U \subset B$, et tout point $x \in p^{-1}(U)$, on va définir une section

$$s_x : U \longrightarrow X$$

telle que $x \in s_x(U)$, image de la section s_x . Qu'est-ce que x ? C'est, par définition, une classe de chemins d'origine b_0 et d'extrémité $b = p(x)$; on a $b \in U$. Pour tout $b' \in U$, on a un unique élément $\gamma \in \pi_1(B ; b , b')$, à savoir l'image de n'importe quel élément de $\pi_1(U ; b , b')$ (cf. prop. 3.15.2). Nous poserons, par définition,

(3.15.1) $\quad s_x(b') = x.\gamma$,

composé de $x \in \pi_1(B ; b_0 , b)$ et de $\gamma \in \pi_1(B ; b , b')$ dans le groupoïde fondamental de B ; on a bien



$$p(s_x(b')) = b' ,$$

et par suite la relation (3.15.1) définit bien une section $s_x : U \longrightarrow X$.

Toute section obtenue de cette manière sera appelée une section privilégiée.

Les propriétés suivantes sont évidentes :

(i) si U est un ouvert privilégié, et $x \in p^{-1}(U)$, il existe une section privilégiée $s : U \longrightarrow X$ telle que x appartienne à l'image s(U) [à savoir , la section s_x] ;

(ii) les images de deux sections privilégiées $U \longrightarrow X$ sont soit disjointes, soit égales [car si $x' \in s_x(U)$, on a $s_{x'} = s_x$] .

(iii) si $U' \subset U$ sont deux ouverts privilégiés, et si $s : U \longrightarrow X$ est une section privilégiée, sa restriction à U' est une section privilégiée.

Lemme 1 - Il existe sur X une topologie et une seule jouissant de la propriété suivante : pour tout ouvert privilégié $U \subset B$, et toute section privilégiée $s : U \longrightarrow X$, s est un homéomorphisme de U sur s(U) , qui est un ouvert de X.

Démonstration du lemme : je dis qu'il existe, sur X , une topologie $\mathcal{T}$ dont les ouverts sont les réunions d'ensembles de la forme s(U) (où U est un ouvert privilégié de B , et $s : U \longrightarrow X$ une section privilégiée).

Pour le voir, il suffit de montrer que l'intersection $s(U) \cap s'(U')$, si elle n'est pas vide, est une réunion d'ensembles dont chacun est de la forme $s''(U'')$. Or soit

$$x \in s(U) \cap s'(U')$$

et soit $b = p(x)$; on a $b \in U \cap U'$. Puisque B est localement connexe, il existe un ouvert connexe U" contenu dans $U \cap U'$ et contenant b . Les restrictions s_1 et s'_1 de s et s' à U" sont des sections privilégiées, et x appartient à chacune des images $s_1(U'')$ et $s'_1(U'')$; il s'ensuit que $s_1 = s'_1$; si on note s" cette section privilégiée, on a

$$s''(U'') \subset s(U) \cap s'(U') ,$$

ce qu'il fallait démontrer.

Ayant ainsi défini la topologie $\mathcal{T}$, considérons un ouvert privilégié U et une section privilégiée $s : U \longrightarrow X$; puisque tout ouvert contenu dans U est une réunion d'ouverts privilégiés, et que tout $\mathcal{T}$-ouvert contenu dans s(U) est une réunion de $\mathcal{T}$-ouverts de la forme s(U') (où U' est un ouvert privilégié contenu dans U) , on voit que s établit une bijection entre les ouverts contenus dans U , et les $\mathcal{T}$-ouverts contenus dans s(U) . Il s'ensuit bien que s est un homéomorphisme de U sur son image s(U) (muni de la topologie induite par $\mathcal{T}$). Autrement dit, la topologie $\mathcal{T}$ possède la propriété exigée dans le lemme; et c'est un exercice facile de montrer qu'une telle topologie est unique.

Pour achever la démonstration du théorème, il reste à prouver que $p : X \longrightarrow B$ est un revêtement (quand X est muni de la topologie $\mathcal{T}$) , et que X est simplement connexe.

Tout d'abord p est localement un homéomorphisme (si $x \in X$, si U est un ouvert privilégié contenant $b = p(x)$, et $s : U \longrightarrow X$ une section privilégiée telle que $s(b) = x$, il est clair que la restriction de p à l'ouvert s(U) est un homéomorphisme $s(U) \longrightarrow U$) .

Ceci prouve d'abord que p est une application continue. De plus, $p : X \to B$ est bien un <u>revêtement</u> : en effet, tout ouvert privilégié U est trivialisant pour p ; car les composantes connexes de $p^{-1}(U)$ sont précisément les images des sections privilégiées $s : U \longrightarrow X$, et la restriction de p à chacune d'elles est un homéomorphisme sur U .

Pour montrer que X est simplement connexe, on va étudier les chemins

$$f : I \longrightarrow X$$

d'origine $f(0) = x_0$, en notant $x_0 \in \pi_1(B ; b_0 , b_0)$ la classe du lacet constant.

<u>Lemme 2 -</u> Soit $g = p \circ f : I \longrightarrow B$ le chemin de B , image de f par la projection p . Pour tout $t \in I$, le point $f(t) \in X$ n'est autre que la classe du chemin g_t de B défini par l'application

$$u \longrightarrow g(tu) \quad \text{de I dans B .}$$

[Ce chemin à pour origine $g_t(0) = b_0$, et pour extrémité $g_t(1) = g(t)$] .

<u>Démonstration</u> du lemme : soit $[g_t] \in X$ la classe du chemin g_t . L'application

$$t \longrightarrow [g_t]$$

de I dans X est continue (pour la topologie $\mathcal{T}$ de X) : c'est immédiat, car si on se donne $t_1 \in I$, et qu'on pose $g_{t_1} = x_1$, et si on prend un ouvert privilégié U contenant $p(x_1) = g(t_1)$, on a $g(t) \in U$ pour tout t assez voisin de t_1 , et

$$[g_t] = s(g(t)),$$

où $s : U \longrightarrow X$ est la section privilégiée (continue) telle que $s(g(t_1)) = [g_{t_1}]$. Comme g et s sont continues, $s \circ g$ est continue. Ainsi $t \longrightarrow [g_t]$ est un chemin de l'espace X ; si on le compose avec p , on retrouve le chemin $t \longrightarrow g(t)$; de plus son origine est x_0 . En vertu de l'unicité du relèvement des chemins, le chemin $t \longrightarrow [g_t]$ coïncide avec le chemin $t \longrightarrow f(t)$.

C.Q.F.D.

Le lemme 2 étant acquis, nous pouvons montrer d'abord que X est connexe par arcs. En effet, soit donné $x \in X$; x est la classe $[g]$ d'un chemin $g : I \longrightarrow B$ d'origine b_0 . Le relèvement de g est, d'après le lemme, le chemin

$$t \longrightarrow [g_t] ;$$

son extrémité est $[g_1] = [g] = x$. On a ainsi trouvé, dans X , un chemin d'origine x_0 et d'extrémité x ; donc X est connexe par arcs.

Il reste à montrer que si $\alpha \in \pi_1(X , x_0)$, α est l'élément neutre. Soit $f : I \longrightarrow X$ un lacet d'origine $f(0) = f(1) = x_0$, dans la classe de α ; soit $g = p \circ f$. D'après le lemme, l'extrémité $f(1)$ n'est autre que la classe du lacet $[g]$; puisque $f(1) = x_0$, le lacet g est homotope au lacet constant (d'origine b_0) . D'après la prop. 3.8.2 , le lacet f (relèvement de g avec origine x_0) est homotope au lacet constant (d'origine x_0).

C.Q.F.D.

La démonstration du théorème 3.15.1 est enfin achevée.

3.16 - Revêtements d'un H-espace.

Soit $p : (X , x_0) \longrightarrow (B , b_0)$ un revêtement pointé; on suppose toujours que X et B sont connexes et LCA.

Supposons maintenant que (B , b_0) soit muni d'une loi de composition continue

$$(3.16.1) \qquad \mu : (B , b_0) \times (B , b_0) \longrightarrow (B , b_0)$$

qui fasse de (B , b_0) un H-espace (cf. 2.8) ; (3.16.1) implique, par définition, que $\mu(b_0 , b_0) = b_0$, et on suppose en outre que les deux applications

$$(B , b_0) \longrightarrow (B , b_0)$$

définies par $b \longrightarrow \mu(b_0 , b)$ et $b \longrightarrow \mu(b , b_0)$ sont homotopes à l'identité dans une homotopie dans laquelle le point-base b_0 ne bouge pas)

Théorème 3.16.1 - Sous les hypothèses précédentes, il existe une loi de composition continue

$$\nu : (X , x_0) \times (X , x_0) \longrightarrow (X , x_0)$$

et une seule, telle que

(3.16.2) $$p \circ \nu\,(x\,,\,x') = \mu(p(x)\,,\,p(x'))\,.$$

Cette loi ν fait de $(X\,,\,x_0)$ un H-espace, et $p : (X\,,\,x_0) \longrightarrow (B\,,\,b_0)$ est alors un morphisme de H-espaces.

Démonstration : on va seulement l'esquisser, les détails étant laissés au lecteur à titre d'exercice. Considérons le diagramme

$$\begin{array}{ccc} (X\,,\,x_0) \times (X\,,\,x_0) & \overset{\nu\,?}{\dashrightarrow} & (X\,,\,x_0) \\ \downarrow{\scriptstyle p \times p} & & \downarrow{\scriptstyle p} \\ (B\,,\,b_0) \times (B\,,\,b_0) & \xrightarrow{\mu} & (B\,,\,b_0) \end{array}$$

et soit $f = \mu \circ (p \times p) : (X\,,\,x_0) \times (X\,,\,x_0) \longrightarrow (B\,,\,b_0)$. Il s'agit de relever f en ν. On applique le théorème fondamental 3.10.2 ; la seule chose à vérifier est que l'image de

$$\pi_1(f) = \pi_1(X\,,\,x_0) \times \pi_1(X\,,\,x_0) \longrightarrow \pi_1(B\,,\,b_0)$$

est contenue dans l'image de

$$\pi_1(p) = \pi_1(X\,,\,x_0) \longrightarrow \pi_1(B\,,\,b_0).$$

Or soit $m : \pi_1(B\,,\,b_0) \times \pi_1(B\,,\,b_0) \longrightarrow \pi_1(B\,,\,b_0)$ la multiplication définie par μ ; $\pi_1(f)$ est égal au composé

$$\pi_1(X\,,\,x_0) \times \pi_1(X\,,\,x_0) \xrightarrow{\pi_1(p) \times \pi_1(p)} \pi_1(B\,,\,b_0) \times \pi_1(B\,,\,b_0) \xrightarrow{m} \pi_1(B\,,\,b_0)$$

et on sait (th. 2.8.1) que m est la loi de composition du groupe fondamental $\pi_1(B\,,\,b_0)$, qui est abélien. Si $\alpha \in \pi_1(X\,,\,x_0)$, et $\beta = \pi_1(f).\alpha$, $\pi_1(f)$ transforme le couple $(\alpha,\,1)$ dans β, donc β appartient à l'image de $\pi_1(p)$.

C.Q.F.D.

Il resterait à vérifier que la loi ν définit bien sur $(X\,,\,x_0)$ une structure d'espace de Hopf ; on laisse ce soin au lecteur.

Remarque - Puisque le groupe $\pi_1(B\,,\,b_0)$ est abélien, le revêtement $p : X \longrightarrow B$ est nécessairement galoisien.

Complément au th. 3.16.1 : si la loi μ est associative (resp. commutative) il en est de même de ν . Si b_0 est élément neutre pour μ , x_0 est élément neutre pour ν . Si μ est une loi de groupe, ν est une loi de groupe. [Démonstration : exercice] .

En particulier, si B est un groupe topologique dont l'élément neutre est b_0 , on trouve sur le revêtement X de B une structure de groupe topologique dont l'élément neutre est x_0 ; et $p : X \longrightarrow B$ est alors un homomorphisme de groupes. En particulier, si un groupe topologique B , connexe et LCA , possède un revêtement simplement connexe $p : X \longrightarrow B$ (cf. théorème 3.15.1) , X a une structure de groupe topologique.

Remarque finale : dans l'énoncé du théorème 3.16.1 , si on ne suppose plus que (B , b_0) soit un H-espace, on trouve encore sur (X , x_0) une loi de composition ν qui "relève" μ , tout au moins dans le cas où X est simplement connexe. En effet, l'image de $\pi_1(f)$ est alors contenue dans l'image de $\pi_1(p)$, car ces deux images sont réduites à l'élément neutre.

§ 4 - Calcul des groupes fondamentaux de quelques espaces.

Nous devons commencer par quelques préliminaires algébriques.

4.1 - Monoïde libre d'un ensemble E .

Soit donné un ensemble E . Un mot de E est une suite finie

$$e_1 e_2 \cdots e_n$$

d'éléments $e_i \in E$ (distincts ou non) , où n est un entier ≥ 0 ; pour $n = 0$, on a la "suite vide" . Soit M(E) l'ensemble des mots de E ; dans M(E) on définit une loi de composition

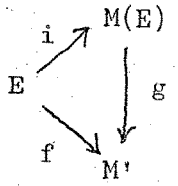
$$\mu : M(E) \times M(E) \longrightarrow M(E)$$

comme suit : si $m = e_1 e_2 \cdots e_n$ et $n = e'_1 e'_2 \cdots e'_p$, on pose

$$\mu(m , n) = e''_1 \cdots e''_{n+p} ,$$

avec $e''_i = e_i$ pour $i \leq n$, $e''_i = e'_{i-n}$ pour $i > n$. On écrit souvent m.n au lieu de $\mu(m , n)$; le mot m.n est le mot obtenu en écrivant d'abord le m , puis, à sa droite, le mot n (avec décalage des indices) .

Cette loi de composition a pour élément neutre le mot vide , noté $\emptyset$; elle est évidemment associative. Ainsi M(E) a une structure de monoïde. On a une injection canonique $i : E \longrightarrow M(E)$, qui à chaque $e \in E$ associe le mot formé de l'unique lettre e . Muni de i , le monoïde M(E) s'appelle le monoïde libre construit sur l'ensemble E , parce qu'il possède la propriété universelle suivante : pour toute application f de E dans un monoïde M' , il existe un morphisme de monoïdes $g : M(E) \longrightarrow M'$ et un seul qui rende commutatif le diagramme



[Rappelons qu'un morphisme de monoïde est une application qui envoie l'élément neutre dans l'élément neutre, et respecte la loi de composition] .

La vérification de la propriété universelle est laissée au lecteur : on a $g(e_1\, e_2 \ldots e_n) = f(e_1)\, f(e_2) \ldots f(e_n)$, produit des n éléments $f(e_1)$, $f(e_2)$,..., $f(e_n)$ du monoïde M' , pris dans cet ordre (on rappelle que la loi de composition de M' est associative) .

4.2 - Monoïde quotient.

Soit M un monoïde. Une relation d'équivalence R dans M est dite compatible avec la loi de composition si $m \underset{R}{\sim} m'$ entraîne $m_1 m m_2 \underset{R}{\sim} m_1 m' m_2$ quels que soient m_1 et m_2 . Dans l'ensemble M/R des classes d'équivalence suivant R , il existe alors une unique loi de composition telle que l'application canonique

$$p : M \longrightarrow M/R$$

satisfasse à

$$p(m_1\, m_2) = p(m_1)\, p(m_2) ;$$

pour cette loi de composition M/R est un monoïde, dont l'élément neutre est $p(1_M)$ (en notant 1_M l'élément neutre de M) . Le monoïde M/R s'appelle le monoïde quotient de M par la relation d'équivalence R , et p est un morphisme de monoïdes.

Etant donné un monoïde M , donnons-nous une famille I de couples $(m_i , m'_i)_{i \in I} \in M \times M$. Parmi les relations d'équivalence R , compatibles avec la loi de composition, et telles que

(4.2.1) $\qquad m_i \underset{R}{\sim} m_i'$ pour tout $i \in I$,

il en est une plus petite que toutes les autres. On l'obtient comme suit : disons que deux produits $m\, m_i n$ et $m\, m_i' n$ sont <u>élémentairement équivalents</u> si le couple (m_i , m_i') ou le couple (m_i' , m_i) appartient à la famille I ; alors deux éléments u et v de M seront dits R-équivalents s'il existe une suite finie d'éléments de M :

$$u = u_0 , u_1 , \ldots , u_n = v$$

telle que, pour $j = 0 , 1 , \ldots , n-1$, les éléments u_j et u_{j+1} soient "élémentairement équivalents", c'est-à-dire si l'on peut écrire, pour tout j ,

$u_j = m\, m_i\, n$, $u_{j+1} = m\, m_i'\, n$, le couple (m_i , m_i') <u>ou</u> le couple (m_i' , m_i) appartenant à I . On voit que tout élément u est équivalent à lui-même (car, pour n = 0 , la condition précédente est vide) , et que la relation "u et v sont R-équivalents" est symétrique et transitive. C'est la relation d'équivalence cherchée ; elle est bien compatible avec la loi de composition. On dit qu'elle est <u>engendrée par la famille</u> I , ou encore qu'elle est engendrée par les relations (4.2.1) .

Si R est cette relation, on lui associe le monoïde quotient M/R . Si $p : M \longrightarrow M/R$ est le morphisme canonique, on a

$$p(m_i) = p(m_i') \text{ pour tout } i \in I ;$$

alors, <u>pour tout morphisme de monoïdes</u> $q : M \longrightarrow M'$ tel que $q(m_i) = q(m_i')$ pour tout $i \in I$, il existe un unique <u>morphisme</u> $r : M/R \longrightarrow M'$ tel que $q = r \circ p$. On voit donc que M/R , muni de p , possède une <u>propriété universelle</u>.

<u>4.3. Groupe libre d'un ensemble</u> E .

Soit F l'ensemble $E \times \{\pm 1\}$, où $\{\pm 1\}$ désigne un ensemble à 2 éléments, notés + 1 et − 1 . L'ensemble F est réunion des deux ensembles disjoints $E \times \{+ 1\}$ et $E \times \{- 1\}$, dont chacun est en bijection canonique avec E . Considérons le <u>monoïde libre</u> M(F) ; introduisons-y les relations

(4.3.1) $\qquad (e , + 1) . (e , - 1) \underset{R}{\sim} \emptyset$, $\quad (e , - 1) . (e , + 1) \underset{R}{\sim} \emptyset$

[où $e \in E$, et $\emptyset$ est le mot vide, élément neutre de M(F)] . Ces relations engendrent une relation d'équivalence compatible avec la loi de composition de M(F) , relation que nous noterons précisément R . Soit

$$G = M(F)/R$$

le monoïde quotient. Munissons-le de l'application $\varphi : E \longrightarrow G$, composée de

$$E \xrightarrow{\alpha} F \xrightarrow{i} M(F) \xrightarrow{r} M(F)/R ,$$

où α est l'injection $e \longmapsto (e , + 1)$, i est l'inclusion canonique, et p la projection canonique.

Le monoïde G est un groupe : car la classe $p(f_1 f_2 \dots f_p)$, où $f_i = (e_i , \varepsilon_i) \in F$ ($\varepsilon_i = + 1$ ou $- 1$) , a pour inverse la classe $p(\overline{f_p} \dots \overline{f_2} \overline{f_1})$, où $\overline{f_i} = (e_i , - \varepsilon_i)$. En effet, les mots

$$f_1 f_2 \dots f_p \overline{f_p} \dots \overline{f_2} \overline{f_1} \quad \text{et} \quad \overline{f_p} \dots \overline{f_2} \overline{f_1} f_1 f_2 \dots f_p$$

sont équivalents à $\emptyset$ suivant la relation R . Le groupe G , muni de l'application $\varphi : E \longrightarrow G$, s'appelle le groupe libre construit sur l'ensemble E ; il sera noté L(E) . Cette terminologie est justifiée par la propriété universelle suivante : pour toute application $\psi : E \longrightarrow G'$, où G' est un groupe quelconque, il existe un homomorphisme de groupes $g : L(E) \longrightarrow G'$ et un seul, tel que

$$\psi = f \circ \varphi . \tag{4.3.2}$$

La vérification est laissée au lecteur, à titre d'exercice.

Remarque : Le groupe libre construit sur un ensemble à un élément est isomorphe au groupe additif $\mathbb{Z}$: cela résulte facilement de la construction ci-dessus; on peut aussi voir que $\mathbb{Z}$, muni de l'application φ d'un ensemble E à un élément qui envoie E sur $1 \in \mathbb{Z}$, possède la propriété universelle.

Proposition 4.3.1 - L'application $\varphi : E \longrightarrow L(E)$ est une injection . En outre, si e_1 et e_2 sont deux éléments distincts de E (ce qui suppose que E possède au moins deux éléments) , les éléments $\varphi(e_1)$ et $\varphi(e_2)$ du groupe L(E) ne commutent pas :

$$\varphi(e_1) \varphi(e_2) \neq \varphi(e_2) \varphi(e_1) \quad \text{dans } L(E) .$$

Démonstration : prenons un groupe non commutatif G , et choisissons dans G deux éléments g_1 et g_2 tels que $g_1 g_2 \neq g_2 g_1$. Il existe une application (ensembliste) $\psi : E \longrightarrow G$ telle que $\psi(e_1) = g_1$, $\psi(e_2) = g_2$. Soit $f : L(E) \longrightarrow G$ l'homomorphisme défini par ψ ; on a $g_i = f(\varphi(e_i))$ pour $i = 1 , 2$, donc

$$f(\varphi(e_1)) f(\varphi(e_2)) \neq f(\varphi(e_2)) f(\varphi(e_1)) ,$$

c'est-à-dire

$$f(\varphi(e_1)\,\varphi(e_2)) \neq f\,(\varphi(e_2)\varphi(e_1))\ ,$$

ce qui implique $\varphi(e_1)\varphi(e_2)) \neq \varphi(e_2)\varphi(e_1)$. Ceci implique a fortiori que $\varphi(e_1) \neq \varphi(e_2)$, et la proposition est démontrée.

4.4 - Coproduit d'une famille de groupes G_i .

Soit $(G_i)_{i\in I}$ une famille de groupes. Leur coproduit (ou "somme") est, par définition, la somme dans la catégorie des groupes et des homomorphismes de groupes. C'est donc un groupe G muni, pour chaque $i\in I$, d'un homomorphisme $\varphi_i : G_i \longrightarrow G$, de manière que soit vérifiée la propriété universelle que voici : chaque fois qu'on a un groupe G' muni d'homomorphismes $\psi_i : G_i \longrightarrow G'$, il existe un homomorphisme $f : G \longrightarrow G'$ et un seul, tel que

(4.4.1) $$\psi_i = f \circ \varphi_i \quad \text{pour tout} \quad i \in I\ .$$

On va montrer que ce problème universel admet effectivement une solution (cf. aussi cours C 3 de H. Cartan, 1967-68 , chap. II) . Pour cela, on va construire un groupe G et des homomorphismes $\varphi_i : G_i \longrightarrow G$.

Soit $E = \bigcup_i G_i$ l'ensemble somme des ensembles G_i (E est réunion disjointe des G_i) . Dans le monoïde libre M(E) , définissons une relation d'équivalence R , compatible avec la loi de composition, par les conditions :

(4.4.2) $e_i \underset{R}{\sim} \emptyset$ si e_i est l'élément neutre de G_i ;

(4.4.3) $u.v \underset{R}{\sim} w$ si u , v , w sont trois éléments d'un même groupe G_i et que w est égal au produit u v dans G_i ; ici, la notation u.v désigne le mot de M(E) formé avec les deux lettres u et v ; c'est le produit de u et v dans le monoïde libre M(E) .

Soit donc R la relation d'équivalence, compatible avec la loi de composition de M(E) , engendrée par les relations (4.4.2) et (4.4.3) .

Le monoïde quotient $M(E)/R = G$ est un groupe ; car si $a_1 a_2 \dots a_n$ est un mot de $M(E)$ (avec $a_j \in E$), le mot $(a_n)^{-1} \dots (a_2)^{-1} (a_1)^{-1}$, où $(a_j)^{-1}$ désigne l'inverse de a_j dans le groupe G_i auquel a_j appartient, est tel que les deux mots $a_1 a_2 \dots a_n (a_n)^{-1} \dots (a_2)^{-1} (a_1)^{-1}$ et $(a_n)^{-1} \dots (a_2)^{-1} (a_1)^{-1} a_1 a_2 \dots a_n$ sont équivalents à $\emptyset$ suivant R. [Le démontrer]. Soit

$$\psi : M(E) \longrightarrow G$$

l'homomorphisme canonique de $M(E)$ sur son quotient $M(E)/R$, et soit, pour chaque $i \in I$, $\varphi_i : G_i \longrightarrow G$ l'application composée

$$G_i \longrightarrow E \longrightarrow M(E) \xrightarrow{\psi} G \quad ,$$

où $G_i \longrightarrow E$ et $E \longrightarrow M(E)$ sont les inclusions naturelles. L'application φ_i est un homomorphisme de groupes, car si $u \in G_i$, $v \in G_i$, et si $w = uv$ dans G_i, on a

$$\varphi_i(w) = \varphi_i(u)\, \varphi_i(v)$$

en vertu de (4.4.3)

Le groupe G ainsi construit, muni des homomorphismes $\varphi_i : G_i \longrightarrow G$, possède bien la propriété universelle désirée. En effet, soit G' un groupe, et soient $\psi_i : G_i \longrightarrow G'$ des homomorphismes. Soit $\psi : E \longrightarrow G'$ l'application dont la restriction à chaque G_i est ψ_i ; ψ se prolonge d'une seule manière en un homomorphisme $g : M(E) \longrightarrow G'$, d'après la propriété universelle du monoïde libre. D'autre part, si e_i est l'élément neutre de G_i, on a

$$g(e_i) = \psi_i(e_i) = e' \quad \text{(élément neutre de } G') \quad ,$$

et e' est aussi l'image $g(\emptyset)$; donc

$$g(e_i) = g(\emptyset) \quad .$$

D'une manière analogue, si u, v, $w \in G_i$ et si $w = uv$ dans G_i, on a

$$g(u.v) = g(w) \quad .$$

Il s'ensuit que la relation d'équivalence définie par G' est plus grossière que R, et par suite g passe en quotient pour définir un homomorphisme

$$f : G = M/R \longrightarrow G' \quad .$$

On a bien $\psi_i = f \circ \varphi_i$ pour tout i ; et f est visiblement le seul homomorphisme ayant cette propriété. C. Q. F. D.

Le groupe G sera désormais noté $\coprod_{i \in I} G_i$, et appelé le coproduit des groupes G_i. Pour chaque $j \in I$, on notera toujours $\varphi_j : G_j \longrightarrow \coprod_{i \in I} G_i$ l'homomorphisme défini plus haut.

On va voir que les φ_i sont des injections (φ_i identifie donc G_i à un sous-groupe du coproduit). En effet, considérons le groupe produit $\prod_{i\in I} G_i$. Comme c'est le cas dans toute catégorie avec produits et coproduits qui possède un objet à la fois initial et final (ici, c'est le groupe (1) réduit à l'élément neutre), on a un morphisme canonique

$$h : \coprod_i G_i \longrightarrow \prod_i G_i ,$$

défini par la propriété suivante : quels que soient j et $k \in I$, l'homomorphisme composé

$$G_j \xrightarrow{\varphi_j} \coprod_i G_i \xrightarrow{h} \prod_i G_i \xrightarrow{\pi_k} G_k$$

(où π_k désigne la k-ième projection) est égal à δ_{jk}, c'est-à-dire est l'identité si $j = k$, et l'homomorphisme constant (neutre) si $j \neq k$. Puisque

$$(\pi_j \circ h) \circ \varphi_j = id_{G_j} ,$$

il s'ensuit bien que φ_j est une injection.

Remarque : lorsque l'ensemble d'indices I est fini, l'homomorphisme h est surjectif. Supposons en effet, pour fixer les idées, que $I = \{1, 2, \ldots, n\}$; pour chaque $i\in I$, soit $x_i \in G_i$; alors l'élément

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \prod_i G_i$$

est bien dans l'image de h ; d'une façon précise, il est égal à $h(x)$, où $x \in \coprod_i G_i$ est la classe d'équivalence du mot

$$x_1 x_2 \ldots x_n \in M(E) .$$

Ainsi, $\prod_i G_i$ s'identifie à un quotient de $\coprod_i G_i$, lorsque l'ensemble d'indices est fini.

Cas particulier : supposons que $G_i = \mathbb{Z}$ pour tout $i\in I$ (I étant fini ou infini) : Soit $G = \coprod_i G_i$, et soit $a_i = \varphi_i(1)$, où $\varphi_i : G_i \longrightarrow G$ est l'homomorphisme canonique. Ici, 1 désigne non pas l'élément neutre de $\mathbb{Z}$ (qui est 0), mais le générateur du groupe additif $\mathbb{Z}$. Soit d'autre part L(I) le groupe libre construit sur l'ensemble I (cf. 4.3). L'application $I \longrightarrow G$, qui envoie i en a_i, se prolonge en un homomorphisme

$$\Phi : L(I) \longrightarrow G .$$

Le lecteur montrera que Φ est un isomorphisme. Pour cela, on montrera que l'application $I \longrightarrow G$ possède la propriété universelle du groupe libre.

Ainsi tout groupe libre L(I) est canoniquement isomorphe à un coproduit de groupes, tous isomorphes à $\mathbb{Z}$, et indexés par l'ensemble d'indices I. Avec les notations précédentes, on dit souvent que L(I) est le groupe libre engendré par les $a_i (i \in I)$.

4.5 - Ecriture canonique des éléments d'un coproduit de groupes.

Soit toujours $(G_i)_{i \in I}$ une famille de groupes, et soit E la somme disjointe des ensembles G_i. Tout élément du coproduit $G = \coprod_i G_i$ peut s'écrire sous la forme $\varphi(m)$, où $m \in M(E)$ est un mot. On se propose de donner un critère permettant de reconnaître quand deux mots m et m' ont même image par φ, c'est-à-dire sont R - équivalents, en désignant toujours par R la relation d'équivalence définie au n° 4.4.

Définition : un mot $m = x_1 x_2 \dots x_n \in M(E)$, avec $x_1 \in E, \dots, x_n \in E$, est dit réduit s'il satisfait à la condition suivante : soit $(i_1, \dots, i_n)$ la suite des indices $\in I$ tels que

$$x_1 \in G_{i_1}, \dots, x_n \in G_{i_n}.$$

Par définition, le mot est réduit si

(4.5.1) $x_1 \neq e_{i_1}, \dots, x_n \neq e_{i_n}$ (éléments neutres)

(4.5.2) $i_1 \neq i_2$, $i_2 \neq i_3, \dots, i_{n-1} \neq i_n$

(deux indices consécutifs sont toujours distincts). On observera que le mot vide est réduit (car les conditions précédentes sont alors vides).

Soit X le sous-ensemble de M(E) formé des mots réduits.

Théorème 4.5.1 - La restriction de $\varphi : M(E) \longrightarrow \coprod_i G_i$ à l'ensemble X des mots réduits est une bijection $X \longrightarrow \coprod_i G_i$.

Ce théorème exprime que, dans la R-classe d'équivalence d'un mot, il y a un mot réduit et un seul. Les mots réduits fournissent donc une écriture canonique pour les éléments du coproduit $\coprod_i G_i$.

Démonstration : (1) la restriction de φ à X est surjective.
Autrement dit, tout mot $m \in M(E)$ est R - équivalent à au moins un mot réduit. C'est trivial si $m = \emptyset$; sinon, procédons par récurrence sur la longueur du mot $m = x_1 x_2 \dots x_n$, c'est-à-dire sur le nombre n des lettres de ce mot. Si m n'est

pas réduit, deux cas sont possibles : ou bien l'une des lettres $x_1, \ldots, x_n$ est élément neutre du groupe G_i auquel elle appartient ; mais alors on peut la supprimer sans changer la classe d'équivalence du mot, qui est donc équivalent à un mot de longueur n-1 ; - ou bien on a $i_k = i_{k+1}$ pour deux indices consécutifs, et alors on peut remplacer, dans le mot $x_1 \ldots x_k\, x_{k+1} \ldots x_n$, le mot partiel $x_k\, x_{k+1}$ par une seule lettre (le produit de x_k et x_{k+1} dans le groupe $G_{i_k} = G_{i_{k+1}}$) ; le mot est donc encore équivalent à un mot de longueur n-1 . D'après l'hypothèse de récurrence, le mot m est équivalent à un mot réduit.

(2) la restriction de φ à X est injective. C'est là le point délicat de la démonstration. Pour prouver cela, on va définir une application $\psi : \coprod_i G_i \longrightarrow X$, telle que la composée

$$X \xrightarrow{\varphi} \coprod_i G_i \xrightarrow{\psi} X$$

soit l'identité. Dans ce but, on va faire opérer le groupe $G = \coprod_i G_i$ sur l'ensemble X , c'est-à-dire définir un homomorphisme de groupes

$$f : G \longrightarrow \mathrm{Aut}\ X ,$$

(où Aut X désigne le groupe des permutations de X) , de telle manière que si $m \in X$, l'automorphisme $f(\varphi(m))$ transforme le mot vide dans le mot m ; il suffira alors de définir $\psi : G \longrightarrow X$ par

(4.5.3) $\qquad \psi(g) = f(g).(\emptyset)$, pour $g \in G$.

Pour définir f , on utilise la propriété universelle de $G = \coprod_i G_i$; étant donné, pour chaque $i \in I$, un homomorphisme $f_i : G_i \longrightarrow \mathrm{Aut}\ X$, il existera un homomorphisme f et un seul, tel que

$$f_i = f \circ \varphi_i \quad \text{pour tout} \quad i \in I .$$

Il reste donc à définir chaque $f_i : G_i \longrightarrow \mathrm{Aut}\ X$.

L'indice i étant provisoirement fixé, définissons une bijection

$$\lambda_i : X \longrightarrow G_i \times X_i ,$$

où X_i désigne le sous-ensemble de X formé des mots réduits $x_1\, x_2 \ldots x_n$ tels que $i_1 \neq i$ (c'est-à-dire $x_1 \notin G_i$) ; on convient que le mot vide appartient à X_i .

On va définir $\lambda_i(m)$, lorsque $m = x_1\, x_2 \ldots x_n$ est un mot réduit. Il y a deux cas possibles : si $m \in X_i$, on pose

(4.5.4) $\lambda_i(m) = (e_i , m) \in G_i \times X_i$,

où e_i est l'élément neutre de G_i . Si $m \notin X_i$, on a $m = x_1 m'$, où $m' = x_2 \ldots x_n$ (éventuellement vide) appartient à X_i ; on pose alors

(4.5.5) $\lambda_i(m) = (x_1 , m')$.

On vérifie aussitôt que λ_i est bien une bijection. Si maintenant $x \in G_i$, il est facile de définir f_i , c'est-à-dire de faire opérer G_i à gauche sur X ; il suffit de faire opérer G_i à gauche sur $G_i \times X_i$, par

(4.5.6) $x.(y , m) = (xy , m)$ pour $x \in G_i$, $y \in G_i$, $m \in X_i$,

puis d'utiliser la bijection λ_i , ce qui donne finalement

(4.5.7) $f_i(x)\,(m) = \lambda_i^{-1}\,(x.\,\lambda_i(m))$.

On voit que si $x \in G_i - \{e_i\}$, et $m \in X_i$, on a

(4.5.8) $f_i(x)\,(m) = x\,m$, mot obtenu en écrivant x à gauche du mot m . C'est aussi un mot réduit.

Nous sommes maintenant en mesure de calculer le transformé du mot vide $\emptyset$ par l'automorphisme $f(\varphi(m))$, lorsque $m = x_1\, x_2 \ldots x_n$ est un mot réduit. On a

$$\varphi(m) = \varphi_{i_1}(x_1)\, \varphi_{i_2}(x_2) \ldots \varphi_{i_n}(x_n) ,$$

d'où

$$f(\varphi(m)) = f_{i_1}(x_1) \circ f_{i_2}(x_2) \circ \ldots \circ f_{i_n}(x_n) ;$$

il résulte de (4.5.8) , appliqué n fois, que

$$\begin{aligned} f_{i_1}(x_1) \circ \ldots \circ f_{i_n}(x_n) \,.\, \emptyset &= f_{i_1}(x_1) \circ \ldots \circ f_{i_{n-1}}(x_{n-1}).\, x_n \\ &= f_{i_1}(x_1) \circ \ldots \circ f_{i_{n-2}}(x_{n-2}).(x_{n-1}\, x_n) \\ &= \ldots = x_1\, x_2 \ldots x_n \,. \end{aligned}$$

Donc l'automorphisme $f(\varphi(m))$ transforme $\emptyset$ dans m , comme annoncé ; et la démonstration est enfin achevée.

Remarque : le produit $m_1\ m_2$ de deux mots réduits n'est pas réduit, en général ; mais on a un procédé simple [expliqué dans la partie (1) de la démonstration] pour trouver un mot réduit équivalent à $m_1\ m_2$. On a donc une méthode permettant de calculer dans le groupe $\coprod_i G_i$, lorsqu'on l'identifie à l'ensemble X des mots réduits (en utilisant la bijection φ , et en transportant alors à X la loi de composition du groupe) .

Application aux groupes libres : le groupe libre L(I) construit sur un ensemble I s'identifie (on l'a vu à la fin du n° 4.4.) au coproduit $\coprod_i G_i$, avec $G_i = \mathbb{Z}$ pour tout i . Notons à nouveau a_i l'image du générateur $1 \in \mathbb{Z}$ par $\varphi_i : \mathbb{Z} \longrightarrow \coprod_i G_i$; tout élément de G_i , distinct de l'élément neutre, est donc une puissance $(a_i)^{k_i}$, où $k_i \in \mathbb{Z}$ est $\neq 0$. Les mots réduits s'écrivent donc, dans ce cas :

$$(a_{i_1})^{k_1}\ (a_{i_2})^{k_2}\ \dots\ (a_{i_n})^{k_n} \quad ,$$

où $(i_1, \dots, i_n)$ est une suite (éventuellement vide) d'éléments de I , telle que

$$i_1 \neq i_2 \quad , \quad i_2 \neq i_3 \quad , \dots , \quad i_{n-1} \neq i_n \quad ,$$

et où les exposants entiers $k_1, \dots, k_n$ (positifs ou négatifs) sont tous $\neq 0$. Telle est l'écriture canonique des éléments du groupe libre engendré par les a_i $(i \in I)$. L'élément neutre correspond à la suite vide.

Le calcul précédent met en évidence que, pour $i \neq j$, les éléments a_i et a_j ne commutent pas (cf. ci-dessus, prop. 4.3.1) : en effet $a_i\ a_j$ et $a_j\ a_i$ sont deux mots réduits distincts.

Exercice : expliciter le calcul du produit de deux mots réduits.

4.6 - Coproduit amalgamé de groupes.

On se donne non seulement une famille de groupes G_i , mais en outre un groupe H et, pour chaque i , un homomorphisme

$$\lambda_i : H \longrightarrow G_i \ .$$

On cherche un objet initial dans la catégorie suivante : un objet consiste

le coproduit amalgamé, en omettant d'indiquer les deux homomorphismes $\lambda_1 : H \to G_1$ et $\lambda_2 : H \to G_2$ qui servent à l'amalgamation.

4.7 - Théorème de van Kampen.

Ce théorème peut servir, comme on le verra, à calculer dans certains cas le groupe fondamental d'un espace.

Soit X un espace topologique, recouvert par deux ouverts U_1 et U_2. Supposons que

$$V = U_1 \cap U_2$$

soit connexe par arcs (non vide). Choisissons $x_o \in V$; on peut considérer, au point x_o, quatre groupes fondamentaux :

$$\pi_1(V , x_o) \quad , \quad \pi_1(U_1 , x_o) \quad , \quad \pi_1(U_2 , x_o) \quad , \quad \pi_1(X , x) \quad .$$

On se propose de trouver une relation entre ces groupes.

Les inclusions $V \subset U_1 \subset X$ et $V \subset U_2 \subset X$ induisent un diagramme commutatif

$$(4.7.1) \qquad \begin{array}{ccccc} & & \pi_1(U_1 , x_o) & & \\ & \overset{\lambda_1}{\nearrow} & & \overset{\mu_1}{\searrow} & \\ \pi_1(V , x_o) & & & & \pi_1(X , x_o) \\ & \underset{\lambda_2}{\searrow} & & \underset{\mu_2}{\nearrow} & \\ & & \pi_1(U_2 , x_o) & & \end{array} \quad .$$

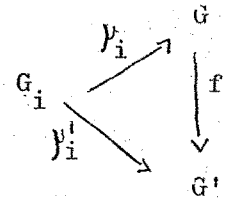
D'après la propriété universelle du coproduit amalgamé, ce diagramme définit un homomorphisme

$$\Phi : \pi_1(U_1 , x_o) \underset{\pi_1(V, x_o)}{\amalg} \pi_1(U_2 , x_o) \to \pi_1(X , x_o) \quad .$$

Théorème 4.7.1 (van Kampen) - Sous les hypothèses précédentes, Φ est un isomorphisme.

Avant de prouver ce théorème, examinons-en quelques conséquences particulières. Tout d'abord, si U_1 et U_2 sont simplement connexes (et V connexe par arcs) le coproduit amalgamé est réduit à l'élément neutre, donc $\pi_1(X , x_o)$ aussi : autrement dit, X est simplement connexe. On retrouve ainsi le théorème 2.5.3 , qui avait servi à montrer que la sphère S^n est simplement connexe pour $n \geq 2$.

en la donnée d'un groupe G, et pour chaque i, d'un homomorphisme $\mu_i : G_i \longrightarrow G$, de telle manière que $\mu_i \circ \lambda_i : H \longrightarrow G$ soit <u>indépendant de</u> i. Un morphisme $(G, \mu_i) \longrightarrow (G', \mu_i')$ est un homomorphisme $f : G \longrightarrow G'$ tel que les diagrammes



soient commutatifs. Lorsque H est réduit à l'élément neutre, on retrouve le problème universel qui conduit au coproduit des G_i. Dans le cas général, on va montrer l'existence d'un objet initial : soit $\Gamma = \coprod_i G_i$ le coproduit des groupes G_i, et soit $\varphi_i : G_i \longrightarrow \Gamma$ l'homomorphisme canonique ; le composé $\varphi_i \circ \lambda_i : H \longrightarrow \Gamma$ dépend, en général, de l'indice i. Ceci conduit à faire le quotient de Γ par un sous-groupe invariant R tel que, pour tout $h \in H$, l'élément

$$\varphi_i(\lambda_i(h)).\varphi_j(\lambda_j(h))^{-1} \tag{4.6.1}$$

soit dans R. D'une façon précise, soit R le sous-groupe <u>invariant</u> de Γ engendré par les éléments de la forme (4.6.1) [R est l'intersection de tous les sous-groupes invariants contenant les éléments (4.6.1)]. Posons $\Gamma/R = G$, et soit μ_i l'homomorphisme composé

$$G_i \xrightarrow{\varphi_i} \Gamma \xrightarrow{p} G ,$$

où p désigne l'homomorphisme canonique de Γ sur son quotient. Il est clair que $\mu_i \circ \lambda_i = \mu_j \circ \lambda_j$ pour $i \neq j$. On montre facilement que le groupe G, muni des $\mu_i : G_i \longrightarrow G$, est objet initial (Exercice !)

Le groupe G, muni des μ_i, s'appelle le coproduit des G_i <u>amalgamé</u> par les $\lambda_i : H \longrightarrow G_i$, ou simplement le <u>coproduit amalgamé</u> des G_i (s'il n'y a pas d'ambiguïté sur les λ_i).

En particulier, s'il y a <u>deux</u> groupes G_1 et G_2, on note

$$G_1 \coprod_H G_2$$

Supposons seulement que U_2 soit simplement connexe ; alors $\pi_1(U_2 , x_o)$ est réduit à l'élément neutre, et le coproduit (non amalgamé) est isomorphe à $\pi_1(U_1 , x_o)$. On passe de là au coproduit amalgamé en faisant le quotient par le sous-groupe invariant engendré par les éléments de la forme $\lambda_1(h)$, où $h \in \pi_1(V , x_o)$ [puisque $\lambda_2(h)$ est l'élément neutre]. Ainsi :

Corollaire 4.7.2 - Si U_2 est simplement connexe ($V = U_1 \cap U_2$ étant connexe par arcs), on a une suite exacte

$$(1) \longrightarrow R \longrightarrow \pi_1(U_1 , x_o) \longrightarrow \pi_1(X , x_o) \longrightarrow (1) \quad ,$$

où R désigne le sous-groupe invariant de $\pi_1(U_1 , x_o)$ engendré par l'image de $\lambda_1 : \pi_1(V , x_o) \longrightarrow \pi_1(U_1 , x_o)$.

Un autre cas particulier est celui où V est simplement connexe ; alors le coproduit amalgamé n'est autre que le coproduit ordinaire, puisque $H = \pi_1(V , x_o)$ est réduit à l'élément neutre. D'où :

Corollaire 4.7.3 - Si l'espace X est recouvert par deux ouverts U_1 et U_2 dont l'intersection V est simplement connexe, et si $x_o \in V$, le groupe fondamental $\pi_1(X , x_o)$ s'identifie au coproduit

$$\pi_1(U_1 , x_o) \amalg \pi_1(U_2 , x_o) \quad .$$

Démonstration du théorème 4.7.1 : on va montrer que le couple formé des homomorphismes μ_1 et μ_2 (tels que $\mu_1 \circ \lambda_1 = \mu_2 \circ \lambda_2$) possède la propriété universelle du coproduit amalgamé. On doit donc prouver ceci :

Proposition 4.7.4 - Sous les hypothèses du théorème 4.7.1 , si G est un groupe quelconque, et si on a deux homomorphismes

$$\nu_1 : \pi_1(U_1 , x_o) \longrightarrow G \quad , \quad \nu_2 : \pi_1(U_2 , x_o) \longrightarrow G$$

tels que $\nu_1 \circ \lambda_1 = \nu_2 \circ \lambda_2$, il existe un homomorphisme

$$\varphi : \pi_1(X , x_o) \longrightarrow G$$

et un seul, tel que

$$(4.7.2) \qquad \nu_1 = \varphi \circ \mu_1 \quad , \quad \nu_2 = \varphi \circ \mu_2 \quad .$$

4.8 - Démonstration de la proposition 4.7.4.

Pour définir φ , on définira d'abord une application

$$\psi : \Omega(X , x_0) \longrightarrow G \quad ,$$

où $\Omega(X , x_0)$ désigne l'ensemble des lacets de X , d'origine x_0 ; puis on montrera que deux lacets homotopes ont la même image par ψ , ce qui définira, par passage au quotient, une application

$$\varphi : \pi_1(X , x_0) \longrightarrow G \quad .$$

On vérifiera que φ est un homomorphisme qui satisfait à (4.7.2) , et que c'est l'unique homomorphisme satisfaisant à (4.7.2) .

Définition : Soit $f : I \longrightarrow X$ un lacet d'origine $x_0 = f(0) = f(1)$. On dira qu'une subdivision

(4.8.1) $$0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = 1$$

du segment $I = [0,1]$ est adaptée au lacet f si elle satisfait aux deux conditions suivantes :

(4.8.2) $f(t_i) \in V$ pour $0 \leq i \leq n$,

(4.8.3) pour chaque i $(0 \leq i < n)$, l'image $f([t_i , t_{i+1}])$ est contenue dans U_1 ou dans U_2 .

Lemme 1 - Pour tout lacet $f : I \longrightarrow X$ d'origine x_0 , il existe au moins une subdivision de $[0,1]$ adaptée à f .

Démonstration : $f^{-1}(U_1)$ et $f^{-1}(U_2)$ sont deux ouverts de I qui recouvrent I ; chacun d'eux est une réunion (en général infinie) d'intervalles ouverts. Puisque I est compact, on peut le recouvrir avec un nombre fini d'intervalles ouverts tels que chacun d'eux soit appliqué par f , soit dans U_1 , soit dans U_2 . On en déduit aussitôt une subdivision qui satisfait à (4.8.3) , mais pas nécessairement à (4.8.2). Considérons un t_i qui ne satisfait pas à (4.8.2) (on a alors nécessairement $0 < i < n$, puisque $f(0) = f(1) = x_0 \in V$) ; pour un tel t_i , les images $f([t_{i-1} , t_i])$ et $f([t_i , t_{i+1}])$ sont contenues dans le même ouvert (U_1 ou U_2) ,

sinon $f(t_i)$ serait dans $U_1 \cap U_2 = V$. On peut donc supprimer un tel point de subdivision t_i , sans que (4.8.3) cesse d'être satisfaite. Les points restants définissent une subdivision adaptée à f . C. Q. F. D.

Le lacet f et la subdivision σ étant donnés, soit f_i la restriction de f au segment $[t_i , t_{i+1}]$; pour $0 \leq i < n$, f_i définit un chemin de U_1 (resp. de U_2) , suivant que $f([t_i , t_{i+1}])$ est contenu dans U_1 ou dans U_2 . Soit $\varepsilon(i) = 1$ dans le premier cas, $\varepsilon(i) = 2$ dans le second ; et notons

$$[f_i]_{\varepsilon(i)}$$

la classe du chemin f_i dans le groupoïde fondamental

$$\pi_1(U_{\varepsilon(i)} ; f(t_i) , f(t_{i+1})) \ .$$

Choisissons d'autre part, pour $i = 1 , \ldots , n - 1$, un élément

$$\gamma_i \in \pi_1(V ; x_o , f(t_i)) \ ,$$

ce qui est possible puisque $f(t_i) \in V$, et que V , par hypothèse, est connexe par arcs. Soit $\lambda_{\varepsilon(i)}(\gamma_i)$ son image dans le groupoïde fondamental $\pi_1(U_{\varepsilon(i)} ; x_o , f(t_i))$. Considérons, dans ce groupoïde fondamental, le composé

$$a_i = \lambda_{\varepsilon(i)}(\gamma_i) \cdot [f_i]_{\varepsilon(i)} \cdot \lambda_{\varepsilon(i)}(\gamma_{i+1}^{-1}) \in \pi_1(U_{\varepsilon(i)} , x_o) \ .$$

[On convient que γ_o et γ_n désignent l'élément neutre de $\pi_1(V , x_o)$] .
Soit enfin

$$\alpha_i = \nu_{\varepsilon(i)}(a_i) \qquad (0 \leq i < n)$$

l'image de a_i dans le groupe G donné.

Observons que si, pour un i donné, il est possible de choisir à volonté $\varepsilon(i) = 1$ ou $\varepsilon(i) = 2$, c'est-à-dire si le chemin f_i est contenu dans $U_1 \cap U_2 = V$, l'élément α_i correspondant à cet indice i <u>ne dépend pas du choix de</u> $\varepsilon(i)$.
En effet, soit $[f_i]$ la classe du chemin f_i dans $\pi_1(V ; f(t_i) , f(t_{i+1}))$; on a

$$[f_i]_{\varepsilon(i)} = \lambda_{\varepsilon(i)}([f_i]) \ ,$$

d'où

$$a_i = \lambda_{\varepsilon(i)}(\gamma_i \cdot [f_i] \cdot \gamma_{i+1}^{-1})$$

et

$$\alpha_i = \nu_{\varepsilon(i)} \circ \lambda_{\varepsilon(i)}(\gamma_i \cdot [f_i] \cdot \gamma_{i+1}^{-1}) \ ;$$

or ceci ne dépend pas de la valeur de $\varepsilon(i) = 1$ ou 2, puisque $\nu_1 \circ \lambda_1 = \nu_2 \circ \lambda_2$.

Considérons le produit

$$\alpha_0 \alpha_1 \cdots \alpha_{n-1} \in G \ ;$$

il dépend, a priori, non seulement du lacet f et de la subdivision σ adaptée à f, mais encore du choix des γ_i $(1 \leq i \leq n-1)$.

Lemme 2 - Le produit $\alpha_0 \alpha_1 \cdots \alpha_{n-1}$ est indépendant du choix des γ_i.

Démonstration : soit i un indice tel que $1 \leq i \leq n-1$. Changer $\gamma_i \in \pi_1(V ; x_0 , f(t_i))$ revient à remplacer γ_i par un produit $\beta_i \gamma_i$, où $\beta_i \in \pi_1(V , x_0)$. Ce changement affecte α_{i-1} et α_i ; en fait, a_{i-1} est remplacé par

$$a_{i-1} \cdot \lambda_{\varepsilon(i-1)}(\beta_i^{-1})$$

et a_i est remplacé par

$$\lambda_{\varepsilon(i)}(\beta_i) \cdot a_i \ .$$

Donc α_{i-1} est remplacé par

$$\alpha_{i-1} \cdot (\nu_{\varepsilon(i-1)} \circ \lambda_{\varepsilon(i-1)}(\beta_i^{-1})) \ ,$$

et α_i est remplacé par

$$(\nu_{\varepsilon(i)} \circ \lambda_{\varepsilon(i)}(\beta_i)) \cdot \alpha_i \ .$$

Comme $\nu_1 \circ \lambda_1 = \nu_2 \circ \lambda_2$, on voit que le produit $\alpha_{i-1} \cdot \alpha_i$ n'est pas changé. Ceci démontre le lemme 2.

Nous avons maintenant le droit, étant donnés le lacet f et la subdivision σ adaptée à f, de poser

$$\psi(f , \sigma) = \alpha_0 \alpha_1 \cdots \alpha_{n-1} \in G \ . \tag{4.8.4}$$

Cet élément ne dépend en effet que de f et σ.

Lemme 3 - L'élément $\psi(f , \sigma)$ ne dépend, en fait, que de f ; il est indépendant du choix de la subdivision σ adaptée au lacet f .

Démonstration : soient σ et σ' deux subdivisions adaptées à f , et soit σ'' la subdivision obtenue en superposant σ et σ' (c'est-à-dire dont l'ensemble des points de subdivision est la réunion de ceux de σ et de σ') . Il est clair que σ'' est adaptée au lacet f . Il suffira de montrer que $\psi(f , \sigma) = \psi(f , \sigma'')$, et $\psi(f , \sigma') = \psi(f , \sigma'')$.

Montrons par exemple $\psi(f , \sigma) = \psi(f , \sigma'')$; changeons les notations, en écrivant maintenant σ' au lieu de σ'' . Ainsi σ' est obtenue en subdivisant certains des segments $[t_i , t_{i+1}]$ de la subdivision σ

Soient

$$t_i = t'_0 < t'_1 < \dots < t'_p = t_{i+1} \tag{4.8.5}$$

les points de la subdivision σ' contenus dans $[t_i , t_{i+1}]$. Soient $\alpha'_0 , \alpha'_1 , \dots , \alpha'_{p-1} \in G$ les éléments définis comme ci-dessus. Le lemme 3 sera démontré si nous prouvons que

$$\alpha_i = \alpha'_0 \alpha'_1 \dots \alpha'_{p-1} \qquad \text{(produit dans le groupe } G) \text{ .} \tag{4.8.6}$$

Supposons, pour fixer les idées, que $\varepsilon(i) = 1$: le chemin f_i , ainsi que tous les chemins partiels en lesquels il est décomposé par la subdivision (4.8.5) , est contenu dans U_1 . Introduisons, comme plus haut, des éléments

$$\gamma'_j \in \pi_1(V ; x_o , f(t'_j)) \quad , \quad 0 \leq j \leq p \quad ,$$

avec $\gamma'_0 = \gamma_i$, $\gamma'_p = \gamma_{i+1}$. On introduit, pour $0 \leq j < p$,

$$a'_j = \lambda_1(\gamma'_j) \cdot [f'_j]_1 \cdot \lambda_1(\gamma'^{-1}_{j+1}) \in \pi_1(U_1 , x_o)$$

où f'_j désigne la restriction de f à $[t'_j , t'_{j+1}]$, puis on a

$$\alpha'_j = \nu_1(a'_j) \quad .$$

Or il est clair que

$$a_i = a'_0 a'_1 \dots a'_{p-1} \qquad \text{(produit dans } \pi_1(U_1 , x_o))$$

et, en appliquant à cette relation l'homomorphisme $\vartheta_1 : \pi_1(U_1 , x_o) \to G$, on obtient la relation (4.8.6) désirée. Donc le lemme 3 est démontré.

Désormais, nous noterons $\psi(f) \in G$ l'élément $\psi(f , \sigma)$, qui est indépendant du choix de la subdivision adaptée σ . Ceci définit une application

$$\psi : \Omega(X , x_o) \to G \ .$$

Lemme 4 - Deux lacets homotopes ont la même image par ψ .

Démonstration : soient f_o et f_1 deux lacets homotopes. Une homotopie de f_o à f_1 est une application continue

$$F : I \times I \to X$$

telle que, si on pose $f_u(t) = F(t,u)$ pour $0 \leq u \leq 1$, f_u soit un lacet d'origine (et d'extrémité) x_o , qui coïncide avec f_o pour $u = 0$, et avec f_1 pour $u = 1$. Il suffit de montrer que l'application

$$u \mapsto \psi(f_u)$$

est localement constante, - ce qui impliquera qu'elle est constante puisque I est connexe.

Soit donc donné un $u \in [0,1]$; on veut montrer que, si $\varepsilon > 0$ est assez petit, on a

$$\psi(f_{u'}) = \psi(f_u) \qquad \text{dès que} \quad |u' - u| \leq \varepsilon \ .$$

Choisissons une subdivision σ adaptée au lacet f_u . Il est clair que σ est aussi adaptée à $f_{u'}$ si ε a été choisi assez petit : cela résulte du fait que $F^{-1}(U_1)$, $F^{-1}(U_2)$ et $F^{-1}(V)$ sont des ouverts de $I \times I$.

Choisissons, comme plus haut, pour chaque point t_i de la subdivision σ, (avec $0 < i < n$) , un élément

$$\gamma_i \in \pi_1(V ; x_o , f_u(t_i)) \ ;$$

soit $\tau_i \in \pi_1(V ; f_u(t_i) , f_{u'}(t_i))$ la classe du chemin défini par la restriction

de F au segment vertical $t = t_i$ (la seconde coordonnée variant de u à u') .
Prenons

$$\gamma'_i = \gamma_i . \delta_i \in \pi_1(V ; x_o , f_{u'}(t_i)) .$$

Par définition, $\psi(f_u)$ est égal au produit $\alpha_o \alpha_1 \dots \alpha_n$, avec

$$\alpha_i = \vartheta_{\varepsilon(i)}(a_i) ,$$
$$a_i = \lambda_{\varepsilon(i)}(\gamma_i) . [f_i]_{\varepsilon(i)} . \lambda_{\varepsilon(i)}(\gamma_{i+1}^{-1}) ,$$

où $[f_i]_{\varepsilon(i)} \in \pi_1(U_{\varepsilon(i)} ; f_u(t_i) , f_u(t_{i+1}))$ est la classe du chemin défini par la restriction de F à l'horizontale d'ordonnée u . De même :

$$\alpha'_i = \vartheta_{\varepsilon(i)}(a'_i) , \quad \text{avec}$$
$$a'_i = \lambda_{\varepsilon(i)}(\gamma'_i) . [f'_i]_{\varepsilon(i)} . \lambda_{\varepsilon(i)}(\gamma'^{-1}_{i+1}) ,$$

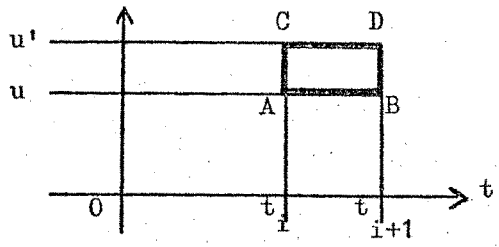
où $[f'_i]_{\varepsilon(i)} \in \pi_1(U_{\varepsilon(i)} ; f_{u'}(t_i) , f_{u'}(t_{i+1}))$ est la classe du chemin défini par la restriction de F à l'horizontale d'ordonnée u' . On a

$$a'_i = \lambda_{\varepsilon(i)}(\gamma_i) . \lambda_{\varepsilon(i)}(\delta_i) . [f'_i]_{\varepsilon(i)} . \lambda_{\varepsilon(i)}(\delta_{i+1}^{-1}) . \lambda_{\varepsilon(i)}(\gamma_{i+1}^{-1}) .$$

Or

$$\lambda_{\varepsilon(i)}(\delta_i) . [f'_i]_{\varepsilon(i)} . \lambda_{\varepsilon(i)}(\delta_{i+1}^{-1}) = [f_i]_{\varepsilon(i)} , \tag{4.8.7}$$

comme le montre la restriction de F au rectangle suivant :



F applique le rectangle (intérieur et bord) dans $U_{\varepsilon(i)}$, donc définit une homotopie du chemin défini par le segment AB avec le chemin défini par la ligne brisée $ACDB$

La relation (4.8.7) montre que $a'_i = a_i$; par suite, $\alpha'_i = \alpha_i$, et

$$\varphi(f_u) = \alpha_o \alpha_1 \cdots \alpha_{n-1} = \alpha'_o \alpha'_1 \cdots \alpha'_{n-1} = \varphi(f_{u'}) \quad .$$

Ceci achève la démonstration du lemme 4 .

L'application $\varphi : \Omega(X , x_o) \longrightarrow G$ passe donc au quotient, et définit une application

$$\varphi : \pi_1(X , x_o) \longrightarrow G \quad .$$

Regardons finalement comment l'application φ a été définie. Si un élément $\delta \in \pi_1(X_o , x)$ est un produit fini

$$a_o a_1 \cdots a_{n-1} \quad ,$$

où $a_i \in \mu_{\varepsilon(i)}(b_i)$, $b_i \in \pi_1(U_{\varepsilon(i)} , x_o)$, $\varepsilon(i) = 1$ ou 2 ,
on a

(4.8.8) $$\varphi(\delta) = \nu_{\varepsilon(o)}(a_o)\nu_{\varepsilon(1)}(a_1) \cdots \nu_{\varepsilon(n-1)}(a_{n-1}) \quad .$$

Ceci montre que φ est un homomorphisme de groupes.

Inversement, tout homomorphisme $\varphi : \pi_1(X , x_o) \longrightarrow G$ qui satisfait à (4.7.2) satisfait nécessairement à (4.8.8) . Il existe donc un homomorphisme φ et un seul satisfaisant à (4.7.2) , et la proposition 4.7.4 est enfin démontrée.

4.9. Calcul du groupe fondamental du plan privé de n points.

Théorème 4.9.1. Soient $a_1, \ldots, a_n$ des points distincts du plan $\mathbb{R}^2$. Alors $\pi_1(\mathbb{R}^2 - \{a_1, \ldots, a_n\}, x_0)$ est un groupe libre à n générateurs (donc non abélien si $n \geqslant 2$).

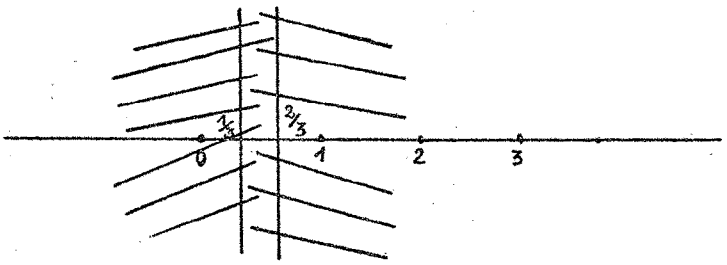
Démonstration : on peut supposer que $a_1, \ldots, a_n$ sont les points

$$(0,0), (1,0), \ldots, (n-1, 0),$$

car il existe toujours un homéomorphisme $\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ qui transforme $a_1, \ldots, a_n$ en ces points (Exercice !). On va procéder par récurrence sur n, le théorème étant vrai pour $n = 1$ (on sait que le groupe fondamental de $\mathbb{R}^2 - \{0\}$ est isomorphe à $\mathbb{Z}$, groupe libre à un générateur). Soient U_1 et U_2 les deux ouverts de $\mathbb{R}^2 - \{a_1, \ldots, a_n\}$ définis par

$$x < \frac{2}{3} \quad \text{et} \quad x > \frac{1}{3} \quad \text{respectivement.}$$

U_1 est homéomorphe au plan privé d'un point, et U_2 au plan privé de $n-1$ points ; et $U_1 \cap U_2$ est la bande $\frac{1}{3} < x < \frac{2}{3}$, qui est contractile (parce que convexe), donc simplement connexe.



Appliquons le théorème de van Kampen, en prenant par exemple pour point x_0 le point $(\frac{1}{2}, 0)$; on a $\pi_1(U_1 \cap U_2, x_0) = 0$, donc $\pi_1(X, x_0)$ s'identifie au coproduit (non amalgamé)

$$\pi_1(U_1, x_0) \amalg \pi_1(U_2, x_0)$$

Le premier est libre à un générateur ; d'après l'hypothèse de récurrence, le second est libre à $n-1$ générateurs. Donc le coproduit est libre à n générateurs.

C. Q. F. D.

4.10. Groupe fondamental d'un bouquet de cercles.

Soient $(X_1 , x_1) , \ldots , (X_n , x_n)$ n espaces pointés, tous homéomorphes au cercle pointé $(S^1,1)$. On prend leur somme dans la catégorie des espaces topologiques pointés : pour cela, on en prend d'abord la somme topologique (disjointe), puis on identifie les points $x_1 , \ldots , x_n$ en un seul point. Soit X l'espace quotient (muni de la topologie quotient), et soit $x_o \in X$ la classe d'équivalence de $x_1 , \ldots , x_n$. L'espace (X,x_o) est, par définition, un bouquet de n cercles. Pour chaque i , l'application naturelle

$$\varphi_i : (X_i , x_i) \longrightarrow (X,x_o)$$

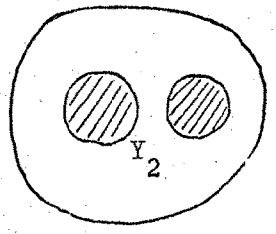
est un homéomorphisme du cercle (X_i , x_i) sur son image ; elle permet d'identifier les n cercles à n sous-espaces de X , qui n'ont en commun que le point x_o , et dont X est la réunion.

Théorème 4.10.1. Le groupe fondamental $\pi_1(X,x_o)$ d'un bouquet de n cercles est un groupe libre à n générateurs.

Démonstration : on pourrait montrer que X a même type d'homotopie que le plan privé de n points. Mais on va procéder directement, par récurrence sur n , le théorème étant vrai pour $n = 1$. Appelons Y_i l'image $\varphi_i(X_i)$, qui est un cercle contenu dans X , et contenant le point x_o . Soit V_i un arc du cercle Y_i , contenant x_o , et distinct de Y_i tout entier : V_i se rétracte par déformation sur x_o . Soit U_1 l'ouvert de X , réunion de Y_1 et des V_i pour $i \geq 2$; et soit U_2 l'ouvert de X , réunion de V_1 et des Y_i pour $i \geq 2$. Il est clair que $X = U_1 \cup U_2$, et que $U_1 \cap U_2 = \bigcup_{1 \leq i \leq n} V_i$ se rétracte par déformation sur x_o , donc est simplement connexe. D'autre part, U_1 se rétracte par déformation sur Y_1 , donc $\pi_1(U_1 , x_o)$ est un groupe libre à 1 générateur ; U_2 se rétracte par déformation sur Y_2 , donc $\pi_1(U_2 , x_o)$ est un groupe libre à $n - 1$ générateurs (par l'hypothèse de récurrence). Il suffit alors d'appliquer le théorème de van Kampen pour conclure.

4.11. Groupe fondamental du tore à p trous.

Soit p un entier ≥ 1 ; soit Y_p l'ouvert du plan qu'on obtient en enlevant d'un disque fermé n disques ouverts deux à deux disjoints. Prenons deux exemplaires Y_p et Y'_p, et recollons-les le long des cercles homologues : on obtient une variété T_p de dimension p, qu'on peut s'imaginer comme une surface de $\mathbb{R}^3$, bord de ce qu'on obtiendrait en "gonflant" ce qui est entre les deux exemplaires Y_p et Y'_p.



On peut voir que T_p peut aussi s'obtenir comme quotient du disque-unité D comme suit : on partage la circonférence S, bord de D, en $4p$ arcs égaux, qu'on nomme successivement (dans l'ordre)

$$a_1 , b_1 , a'_1 , b'_1 , a_2 , b_2 , a'_2 , b'_2 , \ldots , a_p , b_p , a'_p , b'_p .$$

Le cercle S étant orienté, affectons ces côtés des orientations suivantes :

$$+ , + , - , - , + , + , - , - , \ldots , + , + , - , - .$$

(Voir figure).

Cela fait, recollons le côté a_1 au côté a'_1, de façon à faire coïncider les orientations définies ci-dessus (donc l'origine de a_1, pour l'orientation choisie sur a_1, est identifiée à l'origine de a'_1 pour l'orientation choisie ; de même pour les extrémités). Faisons de même pour b_1 et b'_1 ; a_2 et a'_2 ; etc... On observera que les $4p$ points de subdivision du cercle S sont alors tous identifiés en un seul. Soit x_o le point correspondant de l'espace quotient. On admettra que l'espace quotient de D par la relation d'équivalence R ainsi définie est homéomorphe à T_p. [Par exemple, c'est évident pour $p = 1$: tore ordinaire comme quotient d'un carré].

Soit alors O le centre du disque D, identifié à son image dans $D/R = T_p$; et soit B l'image de S dans T_p ; le lecteur vérifiera que B est un bouquet de $2p$ cercles. On notera $\alpha_1 , \beta_1 , \alpha_2 , \beta_2 , \ldots , \alpha_p , \beta_p$

les éléments de $\pi_1(B,x_o)$, classes des lacets de B , images des arcs a_1 , b_1 , a_2 , b_2 ,..., a_p , b_p par l'application canonique de S sur son quotient $B = S/R$.

L'espace T_p est réunion des deux ouverts

$$U_1 = T_p - \{0\} \qquad , \qquad U_2 = T_p - B \quad .$$

L'ouvert U_2 est homéomorphe à l'intérieur du disque D , donc est simplement connexe. De plus l'intersection $V = U_1 \cap U_2$ est homéomorphe à ce disque ouvert privé de son centre 0 , donc V est connexe par arcs, et $\pi_1(V) \approx \mathbb{Z}$. Nous sommes donc dans un cas particulier du théorème de van Kampen (corollaire 4.7.2) : $\pi_1(X)$ s'identifie au quotient de $\pi_1(U)$ par le sous-groupe invariant engendré par l'image, dans $\pi_1(U)$, du générateur de $\pi_1(V) \approx \mathbb{Z}$. Or la rétraction par déformation de $D - \{0\}$ sur le cercle S induit, par passage au quotient par R , une rétraction par déformation de U_1 sur $B = S/R$. Donc

$$\pi_1(U_1 , x_o) = \pi_1(B,x_o)$$

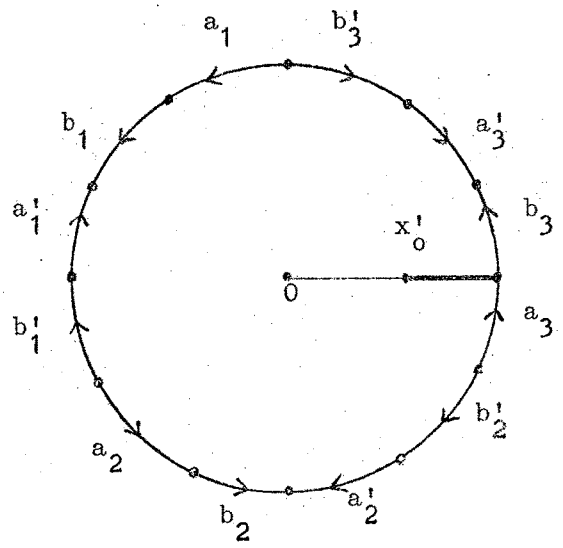
est le groupe libre ayant pour $2p$ générateurs α_1 , β_1 , α_2 , β_2 ,..., α_p , β_p .

Cela dit, prenons un point-base $x'_o \in V$, nécessairement distinct de x_o , mais sur un rayon joignant le centre 0 à l'un des $4p$ points de subdivision de S . Joignons x'_o à ce point de subdivision par un segment porté par ce rayon ; ceci définit, dans T_p , un chemin d'origine x'_o et d'extrémité x_o , qui permet d'identifier $\pi_1(U_1 , x'_o)$ à $\pi_1(U_1 , x_o)$; le générateur de $\pi_1(U_1 , x'_o)$ est représenté par le cercle de centre 0 passant par x'_o ; la rétraction par déformation de U_1 sur B le transforme dans B , et par suite le générateur de $\pi_1(V,x'_o)$ a pour image dans $\pi_1(U_1 , x'_o)$, identifié à $\pi_1(U_1 , x_o) = \pi_1(B,x_o)$, la classe du lacet d'origine x_o que l'on obtient en parcourant S dans le sens direct, puis en prenant l'image par l'application $S \longrightarrow S/R = B$. On voit que c'est

$$(*) \qquad \alpha_1 \beta_1 \alpha_1^{-1} \beta_1^{-1} \alpha_2 \beta_2 \alpha_2^{-1} \beta_2^{-1} \cdots \alpha_p \beta_p \alpha_p^{-1} \beta_p^{-1} \quad .$$

En résumé :

Théorème 4.11.1. Le groupe fondamental du tore à p trous T_p est isomorphe au quotient du groupe libre à 2p générateurs $\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2, \ldots, \alpha_p, \beta_p$ par le sous-groupe invariant engendré par l'élément (*) .



Cas particulier (p = 1) : le quotient du groupe libre à 2 générateurs α et β par le sous-groupe engendré par $\alpha\beta\alpha^{-1}\beta^{-1}$ est le groupe abélien libre à deux générateurs e_1 et e_2 (images de α et β) : c'est le $\mathbb{Z}$-module libre ayant une base formée des 2 éléments e_1 et e_2 . On retrouve le fait connu :

$$\pi_1(S^1 \times S^1) \approx \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \quad .$$

4.12. Application au théorème de Picard.

On se borne ici à des indications rapides, sans exposer une théorie en détail. Il s'agit simplement d'illustrer sur un exemple la façon dont la théorie des revêtements peut être utilisée dans l'analyse classique.

Théorème de Picard. Si une fonction holomorphe dans le plan complexe $\mathbb{C}$ ne prend pas deux valeurs (0 et 1 par exemple), elle est constante.

Ce théorème est beaucoup plus fort que le classique théorème de Liouville, qui dit qu'une fonction holomorphe dans $\mathbb{C}$ et bornée est constante.

Puisque $\mathbb{C} - \{0,1\}$ est une variété, il existe un revêtement simplement connexe

$$p : X \to \mathbb{C} - \{0,1\} \quad .$$

Puisque p est un homéomorphisme local, tout point $x \in X$ a un voisinage ouvert U que p applique homéomorphiquement sur un ouvert V de $\mathbb{C}$; par suite les points de U peuvent être repérés par un nombre complexe z variant dans V, et on a donc la notion de fonction holomorphe dans U. On sait donc ce que c'est qu'une fonction holomorphe dans X (i.e. holomorphe au voisinage de chaque point $x \in X$) . En termes savants, on peut dire que p définit sur X une structure de variété analytique complexe (de dimension complexe égale à 1) .

Le théorème fondamental de la représentation conforme, dû à Poincaré, dit ceci : si X est une variété analytique complexe (de dimension 1) , simplement connexe et non compacte, il existe un isomorphisme holomorphe φ de X sur $\mathbb{C}$, ou de X sur le disque ouvert

$$D = \{ z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1 \} \quad .$$

"Isomorphisme holomorphe" signifie que φ est holomorphe, que c'est un homéomorphisme, et que l'homéomorphisme réciproque est holomorphe. Les deux cas possibles (le cas où $\varphi : X \xrightarrow[\sim]{} \mathbb{C}$, et le cas où $\varphi : X \xrightarrow[\sim]{} D$) s'excluent mutuellement, car il n'existe pas d'isomorphisme holomorphe $\mathbb{C} \to D$, à cause du théorème de Liouville.

On va montrer que si X est le revêtement de $\mathbb{C} - \{0,1\}$ défini plus haut, X est isomorphe à D , et non à $\mathbb{C}$. En effet, si on choisit un point-base $x_o \in X$, de projection $z_o \in \mathbb{C} - \{0,1\}$, on sait (n^o 3.13) que le groupe $\pi_1(\mathbb{C} - \{0,1\} , x_o)$ opère dans X , comme groupe de B-automorphismes sans point fixe (B désignant la base $\mathbb{C} - \{0,1\}$) . Or $\pi_1(B,z_o)$ est le groupe libre à deux générateurs (th. 4.9.1) , donc n'est pas abélien. D'autre

part, les transformations de ce groupe sont des transformations holomorphes $X \longrightarrow X$, puisqu'elles induisent l'identité sur la base B . Supposons que φ soit un isomorphisme $X \xrightarrow[\approx]{} \mathbb{C}$, et montrons qu'il y a contradiction. Par φ le groupe $\pi_1(B,z_o)$ opérerait comme groupe d'automorphismes holomorphes de $\mathbb{C}$, sans point fixe. Or il est bien connu que tout automorphisme holomorphe de $\mathbb{C}$ est de la forme

$$z \longmapsto az + b \qquad (a \text{ et } b \text{ constants } \in \mathbb{C} , a \neq 0) .$$

S'il est distinct de l'identité et sans point fixe, on a forcément $a = 1$. Donc $\pi_1(B,z_o)$ opérerait comme groupe de translations de $\mathbb{C}$, et par suite serait commutatif. C'est la contradiction annoncée.

Considérons alors l'application holomorphe

$$\psi : p \circ \varphi^{-1} : D \longrightarrow \mathbb{C} - \{0,1\}$$

C'est une application de revêtement, qui fait de D un revêtement simplement connexe de $\mathbb{C} - \{0,1\}$.

On peut maintenant prouver le théorème de Picard : soit

$$f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C} - \{0,1\}$$

une application holomorphe ; elle prend ses valeurs dans la base du revêtement ψ ; comme $\mathbb{C}$ est LCA et simplement connexe, elle peut se relever en une application continue

$$g : \mathbb{C} \longrightarrow D ,$$

telle que $f = \psi \circ g$. Puisque ψ est un homéomorphisme local, et que ψ et f sont holomorphes, il s'ensuit que g est holomorphe. D'après le théorème de Liouville, g est constante ; donc $f = \psi \circ g$ est constante.

C. Q. F. D.

§ 5. Comparaison du groupe fondamental et du groupe d'homologie en dimension 1

La lecture de ce paragraphe suppose connues les définitions fondamentales relatives aux groupes d'homologie d'un espace X (Voir Cours C 3 de H. CARTAN, chap. IV, p. 35-47).

5.1. Définition de l'homomorphisme h.

On veut comparer le groupe fondamental $\pi_1(X,x_o)$ et le groupe d'homologie $H_1(X) = Z_1(X)/B_1(X)$, où $Z_1(X)$ désigne le groupe des cycles de dimension 1, et $B_1(X)$ le groupe des bords de dimension 1 (image, par d, du groupe des chaînes $C_2(X)$ de dimension 2).

Soit $\Omega(X,x_o)$ l'ensemble des lacets d'origine x_o. Un lacet $f : I \to X$, tel que $f(0) = f(1) = x_o$, est un chemin, donc un élément de la base du groupe $C_1(X)$ des 1-chaînes singulières. Le bord de $f \in C_1(X)$ est

$$df = d_o f - d_1 f = (f(1)) - (f(0)) \quad ,$$

combinaison linéaire formelle des points $f(0)$ et $f(1)$; mais comme f est ici un lacet, on a $f(0) = f(1)$, d'où

$$df = 0$$

Ainsi f est un cycle, et on a donc

$$\Omega(X,x_o) \subset Z_1(X) \tag{5.1}$$

Lemme 1. Si deux lacets f_1 et f_2 sont homotopes, alors ils sont homologues (comme cycles) ; autrement dit, $f_2 - f_1$ appartient à $B_1(X)$.

Démonstration : (a) si f est le lacet constant (au point x_o), f est un bord, à savoir le bord du 2-simplexe singulier

$$u : D_2 \to X \qquad \text{(application constante de valeur } x_o\text{)} \quad .$$

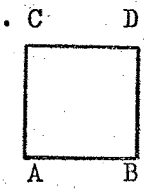
En effet, $d_o u = d_1 u = d_2 u = f$, d'où

$$du = d_o u - d_1 u + d_2 u = f \quad .$$

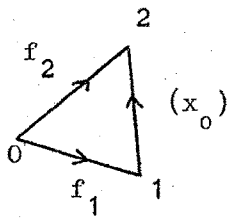
(b) soient f_1 et f_2 deux lacets homotopes, et soit

$$F : I \times I \longrightarrow X$$

une homotopie de f_1 à f_2 ; si on regarde le carré



F applique les côtés verticaux AC et BD au point x_o , la restriction de F au côté AB définit f_1 et la restriction de F à CD définit f_2 . Si on identifie entre eux les points du côté AC , le quotient du carré est homéomorphe à un triangle ; l'application F passe au quotient et définit une application continue $u : D_2 \longrightarrow X$, où D_2 désigne le 2-simplexe-type (triangle) , dont nous numérotons les sommets 0 , 1 , 2 , de telle manière que la restriction de u au côté [0,1] soit f_1 , au côté [0,2] soit f_2 , et au côté [1,2] soit constante de valeur x_o . Le bord du 2-simplexe singulier u est



$$d_o u - d_1 u + d_2 u = (x_o) - f_2 + f_1 \quad ,$$

où (x_o) désigne le lacet constant. D'après (a) , le lacet (x_o) est un cycle homologue à zéro. Donc $f_2 - f_1$ est homologue à zéro. Et ceci démontre le lemme 1 .

Le lemme 1 prouve que l'inclusion (5.1) définit, par passage aux quotients, une application

$$h : \pi_1(X,x_o) \longrightarrow Z_1(X)/B_1(X) = H_1(X) \quad .$$

Proposition 5.1.1. h est un homomorphisme de groupes.

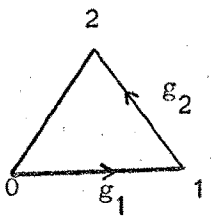
Démonstration : n'oublions pas que la loi de composition de $\pi_1(X,x_o)$ (qui n'est pas abélien en général) est notée multiplicativement, tandis que celle de $H_1(X)$ est notée additivement. Rappelons que la loi de composition, dans $\pi_1(X,x_o)$, provient, par passage au quotient, de la loi de composition (non associative) des lacets. Soient donc f_1 et f_2 deux lacets d'origine x_o, et soit

$$f = f_1 \perp f_2$$

le lacet composé. La proposition 5.1 sera démontrée si nous prouvons que le cycle f est homologue à la somme $f_1 + f_2$. Or on va voir, plus généralement :

Lemme 2. Soient f_1 et f_2 deux chemins tels que $f_1(1) = f_2(0)$, et soit $f = f_1 \perp f_2$ leur composé. Alors la chaîne singulière $f_1 + f_2 - f$ est un bord.

Montrons ce lemme. Considérons le 2-simplexe type D_2, avec ses sommets numérotés 0, 1 et 2. Définissons une application continue g_1 du côté $[0,1]$ dans X, par la condition que l'isomorphisme canonique de I sur $[0,1]$, suivi de g_1, soit l'application donnée f_1. De même, définissons g_2 sur le côté $[1,2]$, de façon que l'isomorphisme canonique (linéaire-affine) de I sur $[1,2]$, suivi de g_2, soit f_2. Alors g_1 et g_2 prennent la même valeur au sommet 1, puisque $f_1(1) = f_2(0)$. On a donc une application continue g, à valeurs dans X, de la ligne brisée L qui joint 0 à 1 puis 1 à 2. Prolongeons g en une application continue $h : D_2 \longrightarrow X$, en prenant



$$h = g \circ p \quad ,$$

où p est l'application de rétraction qui projette chaque point de D_2, parallèlement à la médiatrice du côté $[0,2]$, sur un point de L. Alors l'application composée

$$I \xrightarrow{\sigma_1} D_2 \xrightarrow{h} X$$

n'est autre que $f = f_1 \perp f_2$, d'après la définition de la composition des

chemins. Ainsi h est un 2-simplexe singulier qui satisfait aux relations :

$$d_0 h = f_2 \quad , \quad d_1 h = f \quad , \quad d_2 h = f_1 \quad ;$$

donc

$$dh = f_1 + f_2 - f \quad ,$$

ce qui démontre le lemme.

Corollaire du lemme 2 : si $f_2 = \bar{f}_1$, c'est-à-dire si

$$f_2(t) = f_1(1 - t) \quad ,$$

on sait que $f_1 \perp f_2$ est un lacet homotope au lacet constant. Il s'ensuit que le cycle $f_1 + \bar{f}_1$ est homologue à zéro.

5.2. Le groupe $\pi_1(X,x_0)$ rendu abélien.

Pour simplifier l'écriture, nous écrirons souvent π_1 au lieu de $\pi_1(X,x_0)$. Il est évident que le noyau de l'homomorphisme

$$h : \pi_1 \longrightarrow H_1(X)$$

contient les commutateurs de π_1 : si α et $\beta \in \pi_1$, leur commutateur $[\alpha,\beta]$ est, par définition, $\alpha\beta\alpha^{-1}\beta^{-1}$; puisque h prend ses valeurs dans un groupe commutatif, il est clair que

$$h(\alpha\beta\alpha^{-1}\beta^{-1}) = 0 \quad .$$

Dans un groupe quelconque Γ , l'inverse du commutateur $[\alpha,\beta]$ est $[\beta,\alpha]$; l'élément neutre est un commutateur ; donc le sous-groupe engendré par les commutateurs se compose des produits finis $[\alpha_1 , \beta_1].[\alpha_2 , \beta_2]\ldots[\alpha_p , \beta_p]$. Ce groupe se note $[\Gamma,\Gamma]$, et s'appelle le sous-groupe des commutateurs de Γ . C'est un sous-groupe invariant, car si $\gamma \in \Gamma$, on a

$$\gamma.[\alpha,\beta].\gamma^{-1} = [\gamma\alpha\gamma^{-1} , \gamma\beta\gamma^{-1}] \quad .$$

Le groupe quotient $\Gamma/[\Gamma,\Gamma]$ est évidemment abélien, car dans ce groupe tous les commutateurs sont égaux à l'élément neutre. L'homomorphisme canonique

$$\Gamma \xrightarrow{\varphi} \Gamma/[\Gamma,\Gamma]$$

possède la propriété universelle suivante (évidente !) : pour tout homomorphisme $\psi : \Gamma \longrightarrow G$, où G est abélien, il existe un homomorphisme $f : \Gamma/[\Gamma,\Gamma] \longrightarrow G$ et un seul, tel que

$$\psi = f \circ \varphi \quad .$$

Le groupe $\Gamma/[\Gamma,\Gamma]$ s'appelle "le groupe Γ rendu abélien".

Pour en revenir au groupe fondamental $\pi_1(X,x_o) = \pi_1$ et à l'homomorphisme $h : \pi_1 \longrightarrow H_1(X)$, il se factorise donc d'une seule manière en

$$\pi_1 \xrightarrow{\varphi} \pi_1/[\pi_1 , \pi_1] \xrightarrow{h'} H_1(X)$$

On va maintenant étudier l'homomorphisme h' .

5.3. Le résultat fondamental.

Théorème 5.3.1. Lorsque X est connexe par arcs, h' est un isomorphisme de $\pi_1/[\pi_1 , \pi_1]$ sur $H_1(X)$.

En d'autres termes, h' identifie le groupe d'homologie $H_1(X)$ au groupe $\pi_1(X,x_o)$ "rendu abélien".

La démonstration va nécessiter un peu de technique et prendra un certain temps. On va définir un homomorphisme

$$k : H_1(X) \longrightarrow \pi_1/[\pi_1 , \pi_1] \quad ,$$

puis on vérifiera que $k \circ h'$ est l'identité de $\pi_1/[\pi_1 , \pi_1]$, et que $h' \circ k$ est l'identité de $H_1(X)$.

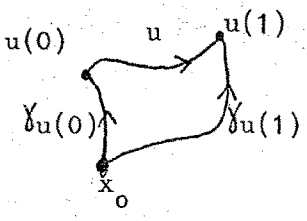
La définition de k va utiliser l'hypothèse : X est connexe par arcs. Pour chaque $x \in X$, on peut choisir (arbitrairement) une classe de chemins

$$\gamma_x \in \pi_1(X ; x_o , x)$$

d'origine x_o et d'extrémité x ; il sera commode de supposer que γ_{x_o} est la classe du chemin constant. Soit alors

$$u : I \longrightarrow X$$

un chemin quelconque ; posons



$$(5.3.1) \qquad \lambda(u) = \gamma_{u(0)} \cdot [u] \cdot \gamma_{u(1)}^{-1} \in \pi_1(X, x_o) \quad ,$$

en notant $[u] \in \pi_1(X ; u(0) , u(1))$ la classe du chemin u , et en utilisant la loi de composition (associative) du groupoïde fondamental de X . On a ainsi défini une application λ de la <u>base</u> du groupe des chaînes $C_1(X)$ dans le groupe π_1 . Soit

$$\mu = \varphi \circ \lambda \quad ,$$

application à valeurs dans $\pi_1/[\pi_1 , \pi_1]$. Par linéarité, μ se prolonge en une application linéaire, notée encore μ :

$$\mu : C_1(X) \longrightarrow \pi_1/[\pi_1 , \pi_1] \quad .$$

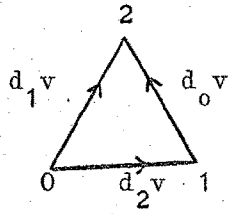
<u>Lemme 3</u>. μ <u>s'annule sur le sous-groupe</u> $B_1(X)$.

En effet, soit $v : D_2 \longrightarrow X$ un 2-simplexe singulier. On doit montrer que μ s'annule sur le bord

$$dv = d_o v - d_1 v + d_2 v \quad ,$$

c'est-à-dire que

$$(5.3.2) \qquad \mu(d_o v) - \mu(d_1 v) + \mu(d_2 v) = 0 \quad .$$



Or un calcul facile, utilisant la définition (5.3.1) , montre que

$$(5.3.3) \qquad \lambda(d_o v) \cdot (\lambda(d_1 v))^{-1} \cdot \lambda(d_2 v) = \gamma_{v(1)} \cdot [d_o v] \cdot [d_1 v]^{-1} \cdot [d_2 v] \cdot \gamma_{v(1)}^{-1} \in \pi_1$$

en notant $v(1)$ l'image par v du sommet numéroté 1 de D_2 . Le lacet $((d_o v) \perp (\overline{d_1 v})) \perp (d_2 v)$, d'origine $v(1)$, est homotope à un lacet constant (le 2-simplexe singulier $v : D_2 \longrightarrow X$ fournit la déformation). Donc les deux membres de (5.3.3) sont égaux à l'élément neutre de π_1 . Leur image dans $\pi_1/[\pi_1 , \pi_1]$ est donc 0 , ce qui prouve (5.3.2) . Ainsi le lemme 3 est démontré.

La restriction de μ à $Z_1(X)$ s'annulant sur $B_1(X)$ (d'après le lemme 3) définit, par passage au quotient, une application linéaire

$$k : H_1(X) \longrightarrow \pi_1/[\pi_1 , \pi_1]$$

C'est l'application qu'on voulait définir.

Lemme 4. $k \circ h'$ est l'identité de $\pi_1/[\pi_1 , \pi_1]$.

En d'autres termes, la composée

$$\pi_1 \xrightarrow{h} H_1(X) \xrightarrow{k} \pi_1/[\pi_1 , \pi_1]$$

n'est autre que l'application canonique φ . Montrons-le : partons de la classe d'un lacet $f \in \Omega(X,x_o)$; h lui associe la classe d'homologie du cycle f . Or on a, par définition,

$$\mu(f) = \varphi(\lambda(f))$$

et $\lambda(f) = [f]$ d'après (5.3.1) , puisque γ_{x_o} est l'élément neutre de π_1

Donc $k(f) = \varphi(\lambda(f)) = \varphi([f])$.

C. Q. F. D.

Lemme 5. $h' \circ k$ est l'identité de $H_1(X)$.

En d'autres termes, l'application composée

$$Z_1(X) \xrightarrow{\mu} \pi_1/[\pi_1 , \pi_1] \xrightarrow{h'} H_1(X)$$

est l'application canonique de $Z_1(X)$ sur son quotient $H_1(X)$. Montrons-le : soit $z = \sum_i n_i u_i$ un cycle (n_i entiers, les u_i étant des chemins). On a

$$\mu(z) = \sum_i n_i \mu(u_i) = \sum_i n_i \varphi(\lambda(u_i)) \quad , \qquad \text{avec}$$

$$\lambda(u_i) = \gamma_{u_i(0)} \cdot [u_i] \cdot \gamma_{u_i(1)}^{-1}$$

Soit $c_{u_i(0)}$ un chemin dans la classe $\gamma_{u_i(0)}$. Le lacet

$$(c_{u_i(0)} \perp u_i) \perp \overline{c_{u_i(1)}}$$

est homologue à la chaîne (qui est un cycle)

$$c_{u_i}(0) + u_i - c_{u_i}(1)$$

(d'après le lemme 2 et son corollaire). Donc

$$h' \circ \mu(u_i) = h \circ \lambda(u_i)$$

est la classe d'homologie du cycle

$$u_i + c_{u_i}(0) - c_{u_i}(1)$$

Par linéarité, $h' \circ \mu(z)$ est la classe d'homologie du cycle

$$\sum_i n_i u_i + \sum_i n_i (c_{u_i}(0) - c_{u_i}(1))$$

On a $\sum_i n_i u_i = z$. On va montrer que

$$\sum_i n_i (c_{u_i}(0) - c_{u_i}(1)) = 0 \quad , \tag{5.3.4}$$

ce qui entraînera que $h' \circ \mu(z)$ est la classe d'homologie de z et prouvera donc le lemme 5 .

Or écrivons que z est un cycle ; son bord est

$$\sum_i n_i (u_i(0) - u_i(1)) = 0 \quad .$$

Ceci est zéro dans le groupe des combinaisons linéaires formelles de points de X . Cela veut dire que si $x \in X$ est donné, et si $I(x)$ est l'ensemble des i tels que $u_i(0) = x$, et si $J(x)$ est l'ensemble des i tels que $u_i(1) = x$, on a

$$\sum_{i \in I(x)} n_i = \sum_{i \in J(x)} n_i \quad .$$

Or cette relation entraîne immédiatement la relation (5.3.4) .

C. Q. F. D.

Remarque finale : l'application $k : H_1(X) \longrightarrow \pi_1 / [\pi_1 , \pi_1]$, qui a été construite grâce au choix des $\gamma_x \in \pi_1(X ; x_o , x)$, est, en fait, indépendante de ces choix, puisque c'est l'application réciproque de h' .

5.4. Quelques applications.

1°) Soit $X = \mathbb{R}^2 - \{a_1, \ldots, a_n\}$ le plan privé de n points. D'après le théorème 4.9.1 , $\pi_1(X)$ est isomorphe au groupe libre à n générateurs. Si on le rend abélien, on trouve le groupe abélien libre à n générateurs. Ainsi le $\mathbb{Z}$-module $H_1(X)$ est libre et a une base formée de n éléments ; les éléments de cette base sont les classes des cycles représentés par n cercles, de petit rayon, centrés respectivement en $a_1, \ldots, a_n$.

2°) Soit X le "tore à p trous" T_p (cf. 4.11) . Le théorème 4.11.1 donne son groupe fondamental

$$\pi_1(X) = G/H \quad ,$$

où G est le groupe libre engendré par α_1 , β_1 ,..., α_p , β_p , et H le sous-groupe invariant engendré par l'élément

$$\gamma = \alpha_1 \beta_1 \alpha_1^{-1} \beta_1^{-1} \cdots \alpha_p \beta_p \alpha_p^{-1} \beta_p^{-1} \quad .$$

Dans l'application canonique $\varphi : G \to G/[G,G]$, l'élément γ va en zéro, donc φ s'annule sur H , et induit

$$\psi : G/H \to G/[G,G] \quad .$$

Il est immédiat que tout homomorphisme $\pi_1 \to \Gamma$ dans un groupe abélien Γ se factorise d'une seule manière en

$$\pi_1 = G/H \xrightarrow{\Psi} G/[G,G] \to \Gamma \quad ,$$

donc $G/[G,G]$ est canoniquement isomorphe à $\pi_1/[\pi_1 , \pi_1]$. Ce dernier groupe est donc un groupe abélien libre à 2p générateurs. Ainsi le groupe $H_1(X)$ du tore à p trous est un groupe abélien libre ayant une base formée de 2p éléments. [En fait, il existe une autre méthode pour obtenir ce résultat, basée sur des considérations purement homologiques, et ne faisant pas appel au calcul du groupe fondamental].

Enfin, signalons les résultats suivants :

$$H_1(S^1) \approx \mathbb{Z} \quad , \quad H_1(S^n) = 0 \quad \text{pour} \quad n \geqslant 2 \ ,$$

qui résultent du calcul du groupe fondamental de S^1 (resp. de S^n pour $n \geqslant 2$) . D'une manière générale, chaque fois que l'espace X est simplement connexe, on a $H_1(X) = 0$.

-:-:-:-