

UNIVERSITÉ PARIS XI

U.E.R. MATHÉMATIQUE

91-ORSAY (FRANCE)

PUBLICATIONS MATHÉMATIQUES D'ORSAY

ANALYSE DIFFÉRENTIELLE (II).

notes informelles d'un cours de IIIème cycle, 1972

par

V. POENARU

INTRODUCTION.

Ce second volume (second semestre) est une suite du premier. On y expose, essentiellement, la théorie de la stabilité C^∞ (la "théorie de Mather"). Dans cette théorie on est constamment amené à résoudre des équations fonctionnelles (genre fonctions implicites, e.a.d.s) dans des espaces d'applications C^∞ . Maintenant, si on a un tel espace (disons, par exemple l'espace $\Gamma^\infty(\xi)$ des sections C^∞ d'un fibré vectoriel, ξ , de base $X = \text{variété } C^\infty$) on peut le munir d'une structure d'E.V.T., mais de cette manière on "oublie" son origine géométrique, d'espace de fonctions sur quelque chose. Le point de vue de Thom, Malgrange, Mather, ..., (qui a eu le succès qu'on sait, dans ce genre de problèmes) est de considérer systématiquement les espaces fonctionnels comme des modules sur les anneaux de fonctions appropriées ($\Gamma^\infty(\xi)$ comme $C^\infty(X)$ -module, ...). Alors on peut appliquer des raisonnements d'algèbre commutative, et grâce au théorème de préparation C^∞ , ça marche.

Enfin, on a introduit un premier chapitre, (qui est indépendant du reste) qui expose un article d'Atiyah sur la division des distributions.

BIBLIOGRAPHIE

-:-:-

- [1] M. ATIYAH : Resolution of singularities and division of distributions.
Comm. of pure and appl. Math.(1970) pp.145-150.
- [2] I.H. БЕРНШТЕЙН , С.В. ГЕРАША : МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ПЕРВОГО ПОРЯДКА . АНАЛ (3) (1969) pp. 84-85.
- [3] H. HIRONAKA . : Resolution of singularities... Ann. of Math.(79) (1964)pp.109-236.
- [4] B. MALGRANGE : Ideals of differentiable functions.Oxford Univ. Press (1966).
- [5] J. MATHER : Infinitesimal stability implies stability (II) Ann. of Math.(1969)
pp.254-291.
- [6] J. MATHER ; Finitely determined map-germs (III) Journal bleu 35 (1968)
pp.127-156.
- [7] J. MATHER : Transversality (V) . Adv. in Math. (1970) pp.301-336.
- [8] V. POENARU : Un théorème des fonctions implicites pour les espaces d'applications C^∞ . Journal bleu 38 (1970) pp.93-124.
- [9] C.T.C. WALL & ... : Proceedings of the Liverpool singularities symposium I
Springer L.N. 192 (1971).

-:-:-:-:-

CHAPITRE I.

-:-

LA DIVISION DES DISTRIBUTIONS A PARTIR DE LA RESOLUTION DES SINGULARITES

DE HIRONAKA.

1) Distributions sur les variétés (rappels).

Pour les besoins de la cause il sera utile de développer la théorie dans le cas pas nécessairement orientable.

On va considérer des fibrés vectoriels (complexes) de classe C^∞ :

$E \rightarrow X$, $F \rightarrow X$, e.a.d.s. $\Gamma^\infty(E) =$ l'espace des sections C^∞ de E .

$\mathcal{D}(E) \subset \Gamma^\infty(E)$ sera l'espace des sections à support compact.

Une application $D : \Gamma^\infty(E) \rightarrow \Gamma^\infty(F)$ est appelée un opérateur différentiel linéaire si

a) D est C -linéaire.

b) Si $s \in \Gamma^\infty(E)$:

$$\text{supp}(Ds) \subset \text{supp } s .$$

Je rappelle le :

THEOREME DE PEETRE : La condition nécessaire et suffisante pour qu'une application $D : \Gamma^\infty(E) \rightarrow \Gamma^\infty(F)$ soit un O.D.L. est que : $\forall a \in X$, $\exists$ un voisinage de coordonnées $U : a \in U \subset X$ au-dessus duquel les fibrés soient triviaux, t.q. sur U , D ait la forme :

$$\sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(x) D^\alpha$$

(où $a_\alpha(x)$ = matrice à $\dim E \times \dim F$ éléments, $a_\alpha \in C^\infty$ $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_e)$,

$e = \dim E$, $D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_e^{\alpha_e}}$, e.a.d.s.). Une partie $P \subset \mathcal{D}(E)$ est

dite bornée si :

a) $\exists K \subset X$ compact t.q.

$$s \in P \implies \text{supp } s \subset K.$$

b) Si $D : \Gamma^\infty(E) \rightarrow \Gamma^\infty(X \times R)$ = les fonctions C^∞ sur X , est un opérateur diff. linéaire alors $DP \hookrightarrow \Gamma^\infty(X \times R)$ est bornée (dans la norme $\|\dots\|_0$). Si $a_n \in \mathcal{D}(E)$ on dit que $a_n \rightarrow 0$ si $\exists$ une suite numérique $m_n \rightarrow \infty$ t.q. $\{m_n a_n\} \subset \mathcal{D}(E)$ soit une partie bornée.

Par définition $\mathcal{D}'(E)$ = l'espace des applications C -linéaires, continues $\mathcal{D}(E) \rightarrow C$. (continuité veut dire que, si $a_n \rightarrow 0$ ($a_n \in \mathcal{D}(E)$) alors : $\alpha(a_n) \rightarrow 0$).

Soit $\dim X = p$ et $\theta = \theta(X)$ le fibré vectoriel de dimension 1 des orientations sur X , défini à partir du fibré principal associé au fibré tangent de X par la représentation linéaire de dim 1 :

$$GL(p, R) \ni \alpha \longrightarrow \text{signe det } \alpha.$$

Soit $\Lambda^i(X)$ le fibré vectoriel des tenseurs antisymétriques covariants de dim i .

(c'est-à-dire que $\Gamma^\infty(\Lambda^i(X))$ = les formes extérieures d'ordre i sur X).

En particulier on a un fibré de dimension 1 : $\omega(X) = \Lambda^p(X) \otimes \theta$. Si $s \in \mathcal{D}(\omega(X))$, la formule du changement des variables dans les intégrales multiples permet de donner un sens canonique à l'expression $\int_X s$. On définit donc :

$$\int_X \in \mathcal{D}'(\omega) .$$

D'une manière plus générale, si φ est une fonction localement intégrable sur X φ définit un élément de $\mathcal{D}'(\omega)$ par :

$$\langle \varphi, s \rangle = \int_X \varphi s .$$

$\mathcal{D}'(\omega)$ = les formes "impaires".

DEFINITION : Une distribution sur X est un élément

$s \in \mathcal{D}'(\Lambda^p(X) \otimes \theta(X)) = \mathcal{D}'(\omega)$. Une distribution tordue est un élément :

$$\sigma \in \mathcal{D}'(\Lambda^p(X)) .$$

Remarques : 1) Si X est orientable, le choix d'une orientation globale permet d'identifier $\mathcal{D}'(\Lambda^p \otimes \theta)$ et $\mathcal{D}'(\Lambda^p)$ [En effet : si α est une orientation globale de X ($\forall x, \alpha(x) = \pm 1$), toute section de $\mathcal{D}'(\Lambda^p \otimes \theta)$ est de la forme $\tau \otimes \varepsilon \alpha$ où ε est une fonction numérique ...] .

2) Si $X \subset \mathbb{R}^p$ (X ouvert) et $f \in \mathcal{D}(X \times \mathbb{R}) = \mathcal{D}(X)$, la correspondance : $f(x) \rightarrow f(x) dx_1 \wedge \dots \wedge dx_p$ permet d'identifier $\mathcal{D}'(X)$ à $\mathcal{D}'(\Lambda^p(X))$.

Ces correspondances, transforment 1 en $\int_X$.

3) Soit $\varphi : X \rightarrow Y$, C^∞ , propre.

On a :

$$\varphi^* : \mathcal{D}(\Lambda^p(Y)) \rightarrow \mathcal{D}(\Lambda^p(X)),$$

donc, dualement, l'opération image directe :

$$\varphi_* : \mathcal{D}'(\Lambda^p(X)) \rightarrow \mathcal{D}'(\Lambda^p(Y)).$$

(Cette opération a donc un sens pour les distributions tordues).

FONCTIONS HOLOMORPHES A VALEURS DISTRIBUTIONS

Soit $\Omega \subset \mathbb{C}$ un ouvert et $f : \Omega \rightarrow \mathcal{D}'(E)$ une application. f est holomorphe si $\forall s \in \mathcal{D}(E)$: la fonction complexe $\Omega \rightarrow \mathbb{C}$:

$$\lambda \rightarrow \langle f(\lambda), s \rangle$$

est holomorphe. Si $\lambda_0 \in \Omega$ on peut représenter $f(\lambda)$, localement en série de Taylor :

$$f(\lambda) = \sum_0^\infty a_n (\lambda - \lambda_0)^n, \quad a_n \in \mathcal{D}'(E)$$

la convergence étant entendue dans le sens suivant : Si $v_n \in \mathcal{D}'(E)$, $v_n \rightarrow 0$

veut dire que $\forall s \in \mathcal{D}(E) : \langle v_n, s \rangle \rightarrow 0$. Autour des singularités isolées le théorème de Laurent marche ; on a des pôles, résidus, e.a.d.s.

NOTATION : Dorénavant les distributions sur X seront notées $\mathcal{D}'(X)$, les distributions tordues $\Omega(X)$.

$\mathcal{D}'(X)$ ($\Omega'(X)$) sont des $C^\infty(X)$ - modules.

1) Le théorème de prolongement analytique.

THEOREME 1 (Atiyah) : "Soit X une variété analytique réelle,

$f, g_1, \dots, g_p$ des fonctions analytiques réelles, telles que $f \neq 0$ et $f \geq 0$.

Soit Γ la fonction caractéristique de l'ensemble :

$$G = \{x \in X \quad \text{t.q.} \quad \forall i : g_i(x) \geq 0\}.$$

Considérons le domaine $\Delta \subset \mathbb{C}$, défini par : $\lambda \in \Delta \iff \operatorname{Re} \lambda > 0$.

On remarque que pour chaque $\lambda \in \Delta$, $f^\lambda \Gamma$ est une fonction localement intégrable donc :

$$\Delta \ni \lambda \rightarrow f^\lambda \Gamma \in \mathcal{D}'(X)$$

définit une fonction holomorphe à valeurs distributions. Soit $U \subset X$ un ouvert relativement compact. Par restriction, si $\operatorname{Re} \lambda > 0$, $f^\lambda \Gamma \in \mathcal{D}'(U)$.

Cette dernière fonction se prolonge analytiquement (pour chaque U donné) à une fonction méromorphe sur $\mathbb{C}$, qu'on désignera, par abus de langage :

$$\mathbb{C} \xrightarrow{f^\lambda \Gamma} \mathcal{D}'(U).$$

En plus : a) $f^0 \Gamma = \Gamma$.

b) $\exists N = N(U, f)$, entier, t.q. les pôles de $f^\lambda \Gamma$ soient de la forme $-\frac{r}{N}$ ($r = 1, 2, \dots$).

c) l'ordre des pôles est inférieur ou égal à $\dim X$.

(Remarque : on peut avoir $\varepsilon_i \equiv 1 \quad \forall_i$).

Exemple : (Hadamard) $X = \mathbb{R}$, $f(x) = x$, $G = \mathbb{R}^+$.

Dem : Considérons la fonction numérique : ($\lambda \in \mathbb{C}$)

$$x_+^\lambda = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ x^\lambda & \text{si } x > 0 \end{cases}.$$

Cette fonction est localement intégrable pour $\operatorname{Re} \lambda > -1$. Pour $\operatorname{Re} \lambda > -1$

on définit alors la distribution x_+^λ par :

$$\langle x_+^\lambda, \varphi \rangle = \int_0^\infty x^\lambda \varphi(x) dx \quad (\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})).$$

On remarque que (pour $\operatorname{Re} \lambda > -1$) :

$$\int_0^\infty x^\lambda \varphi(x) dx = \int_1^\infty x^\lambda \varphi(x) dx + \int_0^1 x^\lambda [\varphi(x) - \varphi(0)] dx + \underbrace{\varphi(0) \int_0^1 x^\lambda dx}_{(\lambda + 1)^{-1}}.$$

Le membre droit de cette formule à un sens comme fonction méromorphe, définie

pour $\operatorname{Re} \lambda > -2$, avec un pôle simple en $\lambda = -1$.

D'une manière analogue, pour $\operatorname{Re} \lambda > -n-1$ on peut prolonger analytique-

ment x_+^λ par :

$$\begin{aligned} & \int_0^1 x^\lambda [\varphi(x) - \varphi(0) - x\varphi'(0) - \dots - \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} \varphi^{(n-1)}(0)] dx + \\ & + \int_1^\infty x^\lambda \varphi(x) dx + \sum_{k=1}^n \frac{\varphi^{(k-1)}(0)}{(k-1)! (\lambda+k)} \end{aligned}$$

$\Rightarrow x_+^\lambda$ est une fonction méromorphe, avec les pôles simples $\lambda = -k$ et les résidus :

$$\frac{(-1)^{k-1} \delta^{(k-1)}(x)}{(k-1)!}$$

Remarque : Pour des raisons évidentes ceci est l'unique prolongement analytique possible.

COROLLAIRE 1. X variété analytique réelle, $\dim X = n$ $f : X \rightarrow \mathbb{C}$

f analytique, $f \neq 0$. $\exists T \in \mathcal{D}'(X)$ t.q. : $fT = 1$.

Démonstration : On peut passer de f à $f\bar{f} \geq 0$ et, clairement

$$\exists (f\bar{f})^{-1} \in \mathcal{D}'(X) \Rightarrow \exists f^{-1} \in \mathcal{D}'(X)$$

(car on, prend : $f^{-1} = \bar{f} \cdot (f\bar{f})^{-1}$ e.a.d.s.). Il suffit donc de considérer le

cas $f \geq 0$. Soit $U \subset X$ un ouvert relativement compact. Sur U on a un développement de f^λ autour de $\lambda = -1$:

$$(x) \quad f^\lambda|_U = f^\lambda = \sum_{-n}^{\infty} a_k (\lambda + 1)^k \quad a_k \in \mathcal{D}'(U), \quad |\lambda + 1| < \varepsilon.$$

$f \cdot f^\lambda = f^{\lambda+1} (*)$ devient $f^0 = 1$ pour $\lambda = -1$ donc elle n'a pas de pôle pour

$\lambda = -1$. Soit $f^\mu = \sum_0^{\infty} b_k \mu^k$ ($|\mu| < \varepsilon$) le développement de f^μ autour

de 0 . ($b_0 = 1$). Mais, si $|1 + \lambda| < \varepsilon$

$$f^{1+\lambda} = f \cdot f^\lambda = \sum_{-n}^{\infty} (f a_k) (\lambda + 1)^k.$$

*) Cette égalité est évidente pour $\operatorname{Re} \lambda > 0$. Par prolongement analytique elle est valable partout.

Donc :

$$fa_k = 0 \quad \text{si } k < 0 \quad \text{et :}$$

$$fa_0 = f^0 = 1$$

Donc $a_0 \in \mathcal{D}'(U)$ est une distribution qui représente f^{-1} (c'est-à-dire que $fa_0 = 1$). Si V est un autre ouvert relativement compact, tel que $V \supset U$ les développements $f^\lambda|_V$ et $f^\lambda|_U$ sont compatibles, c'est-à-dire que, dans un voisinage de $\lambda = -1$ (plus petit, peut être, que celui dans lequel $(\tilde{x})$ converge) on a :

$$(xx) \quad f^\lambda|_V = f^\lambda = \sum_{-n}^{\infty} \beta_k (\lambda + 1)^k$$

avec $\beta_k \in \mathcal{D}'(V)$, $\beta_k|_U = a_k$.

Donc, notre a_0 considéré ci-dessus provient d'un $T \in \mathcal{D}'(X)$ t.q.

$fT = 1$. q.e.d.

Je rappelle maintenant que, $\mathcal{S}(R_n) \subset C^\infty(R_n)$ désigne, l'espace des fonctions à décroissance rapide c'est-à-dire telles que $\forall \alpha, \beta$:

$$\sup_x |(1 + \|x\|^\alpha) D^\beta \varphi(x)| < \infty .$$

$\mathcal{D}'(R_n) \supset \mathcal{S}'(R_n) =$ le dual de $\mathcal{S}(R_n)$. Les éléments de $\mathcal{S}'(R_n)$ sont les distributions tempérées.

COROLLAIRE 2 : Soit $f \neq 0$ un polynôme sur R_n , à coefficients complexes.

$\exists$ T distribution tempérée sur R_n , t.q. :

$$fT = 1 .$$

Démonstration : Si $m = \deg f$:

$$g(x_1, \dots, x_n) = \frac{f(x)}{(1 + \sum x_i^2)^m}$$

définit une fonction analytique sur $S_n = R_n \cup (\infty)$. Donc $\exists T_1 \in \mathcal{D}'(S_n)$ t.q. :

$$gT_1 = 1 \quad .$$

Mais $T_1|_{R_n} \in \mathcal{D}'(R_n)$. (Ceci résulte du théorème suivant, qu'on laisse au lecteur comme exercice :

Soit $R_n \hookrightarrow S_n$ le plongement naturel considéré ci-dessus et $\mathcal{D}(R_n) \subset C^\infty(R^n)$.
Considérons $A \subset C^\infty(S_n)$ l'espace des fonctions C^∞ qui sont plates au point $\infty \in S_n$. Alors :

$$A|_{R_n} \equiv \mathcal{D}(R_n) \quad . \quad)$$

COROLLAIRE 3 : Soit $P \neq 0$ un opérateur aux dérivées partielles linéaire, à coefficients constants, dans R_n . $\exists T \in \mathcal{D}'(R_n)$ t.q. :

$P(T) = \delta$ = fonction de Dirac. (Un tel T s'appelle solution élémentaire).

Démonstration : Par transformation de Fourier la dernière égalité devient :

$$\underbrace{U}_{\in \mathcal{D}'} \cdot \underbrace{p = 1}_{\text{polynôme}} \quad \text{e.a.d.s.}$$

Ceci est le théorème d'existence des solutions élémentaires pour les E.D.P. linéaires à coef. constants (Malgrange).

3) La résolution des singularités (Hironaka) :

THEOREME DE RESOLUTION DES SINGULARITES (Hironaka) :

Soit $F \neq 0$ une fonction analytique réelle définie au voisinage de $0 \in \mathbb{R}_n$

$\exists$ un ouvert $0 \in U \subset \mathbb{R}_n$, une variété analytique réelle $\tilde{U}$ de la même dimension que $\mathbb{R}_n$, et un morphisme analytique propre $\varphi : \tilde{U} \rightarrow U$ t.q. :

a) Si $A = F^{-1}(0)$, $\tilde{A} = \varphi^{-1} A$, alors $\varphi : \tilde{U} - \tilde{A} \rightarrow U - A$ est un isomorphisme analytique.

b) Si $p \in \tilde{U}$, $\exists$ un système de coordonnées locales $(y_1, \dots, y_n)$ sur $\tilde{U}$, au voisinage de p ($y_i(p) = 0$) t.q. (localement, au voisinage de p) :

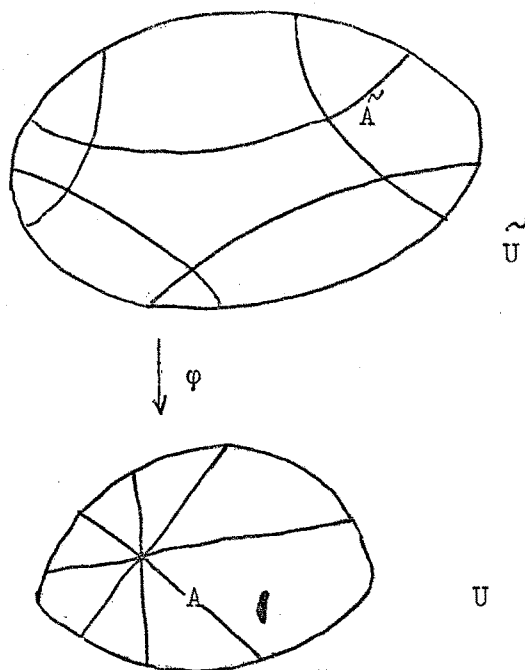
$$F \circ \varphi = \varepsilon(y) \prod_{i=1}^n y_i^{k_i}$$

où $\varepsilon(y)$ est une fonction analytique avec $\varepsilon(0) \neq 0$ et $k_i \geq 0$ sont des entiers".

ADDENDUM : Ceci passe aux complexifications : c'est-à-dire que si $\tilde{U}_c, U_c$ sont des complexifications de $\tilde{U}, U$, φ s'étend à un morphisme analytique-complexe propre φ_c

$$\varphi_c : \tilde{U}_c \rightarrow U_c$$

qui possède des propriétés analogues à φ .



Ce théorème "se lit entre les lignes" du grand travail de Hironaka...

Exemple : $F = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2$.

Considérons $\mathbb{RP}(n) = \{u_1, \dots, u_n, v\}$ ($\sum u_i^2 + v^2 \neq 0$) (avec

$(u_1, \dots, u_n, v) = (\lambda u_1, \lambda u_2, \dots, \lambda u_n, \lambda v)$) et le hyperplan à l'infini

$(v = 0)$. On a une application canonique :

$$\mathbb{RP}(n) \xrightarrow{\pi} S_n = R_n \cup (\infty)$$

telle que $\pi^{-1}(\infty) = (v = 0)$ et

$$\pi : \mathbb{RP}(n) - (v = 0) \longrightarrow R_n$$

soit bijectif. (π fait donc éclater le point $\infty \in R_n \cup (\infty) = S_n$ et le transforme en $\mathbb{RP}(n - 1)$) :

$$v \neq 0 : \quad \pi(u_1, \dots, u_n, v) = \begin{cases} X_1 = \frac{u_1}{v} \\ \vdots \\ X_n = \frac{u_n}{v} \end{cases} .$$

On ramène maintenant ∞ à l'origine par l'inversion :

$$x_i = \frac{X_i}{\sum_i X_i^2} .$$

La composition de l'inversion avec π sera le φ cherché. D'une manière plus précise, on prend $U = R_n$, $\tilde{U} = RP(n) - (\text{le point } (0,0,\dots,0,1))$ (ce qui s'identifie à l'espace total du fibré canonique de dimension 1 sur $RP(n-1)$) et $\varphi : \tilde{U} \rightarrow U$ est définie par :

$$(\varphi) : \quad x_i = \frac{u_i v}{\sum_i u_i^2} \quad (\sum u_i^2 \neq 0)$$

(Ceci est bien un morphisme analytique propre si $A = (0, \dots, 0) \in R_n$, $\varphi^{-1}(0) = \tilde{A} = \{v = 0\} = RP(n-1)$. On vérifie facilement que $\varphi|_{\tilde{U} - \tilde{A}} \xrightarrow{\sim} U - A$). Ceci donne :

$$\sum_i x_i^2 = \frac{v^2}{\sum_i u_i^2} , \text{ et}$$

et si $p \in (v = 0) \in RP(n)$, il existe un u_i (disons u_1) tel que $u_1(p) \neq 0$. On peut choisir alors un système de coordonnées locales (autour de p) :

$$y_i = \frac{u_{i+1} - u_{i+1}(p)}{u_1(p)} \quad (i < n)$$

$$y_n = \frac{v}{u_1(p)} .$$

Donc $(\varphi^{-1}(0))$ est $RP(n-1)$ et $F \circ \varphi$ est, localement, et à une unité près

de la forme y_n^2 où $(y_1, \dots, y_n)$ est le système de coordonnées locales ci-dessus (qui définit $\mathbb{RP}(n-1)$ (localement) par $y_n = 0 \dots$).

Exercice : Faire la même chose pour toutes les singularités de Morse.

4) Démonstration du théorème de prolongement analytique :

LEMME 1 : "Soit $U \subset \mathbb{R}_n$ un ouvert et $F : U \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction analytique réelle $F \neq 0$. Soit $A = F^{-1}(0)$. Alors $\text{mes}(A) = 0$ ".

Démonstration : Induction sur n . Si $n = 1$ c'est évident parceque, dans ce cas-là A est discret. Supposons le lemme vrai pour $(n-1)$. Il suffit de considérer le cas où U est de la forme $-a < x_i < a \quad (\forall i)$. Pour $-a < t < a$ définissons U_t^{n-1} comme :

$$U_t^{n-1} = \{(x_1, \dots, x_{n-1}, t) ; -a < x_i < a\}.$$

Je dis que l'ensemble des $t_0 \in (-a, a)$ t.q. $F|_{U_{t_0}^{n-1}} \equiv 0$ est discret. Autrement on déduirait facilement que $F \equiv 0$, en utilisant les fonctions d'une variable : $F|(x_1 = c_1, \dots, x_{n-1} = c_{n-1})$. Alors, A est un ensemble mesurable, tel que à l'exception d'un ensemble de mesure nulle de valeurs $t \in (-a, a)$ on ait :

$\text{mes}_{(n-1)} A \cap U_t^{n-1} = 0$. En appliquant Fubini, on a q.e.d.

LEMME 2 : "Soit $\mathcal{O}_n$ l'anneau local des germes de fonctions analytiques réelles dans $\mathbb{R}_n$ au voisinage de 0. $\mathcal{O}_n$ est un anneau factoriel (c'est-à-dire que dans $\mathcal{O}_n$ le théorème de décomposition unique en facteurs premiers est vrai)".

Démonstration : On sait que $\mathcal{O}_n$ est noethérien (en effet soit $p \subset \mathcal{O}_n$ un idéal et $0 \neq f \in p$. On peut supposer, sans perte de généralité, que

$\frac{\partial^k f(0, \dots, 0, x_n)}{\partial x_n^k} \Big|_0 \neq 0$. D'après le théorème de préparation (analytique), $\mathcal{O}_n/f$ est

$\mathcal{O}_{n-1}$ - fini. Par induction on suppose $\mathcal{O}_{n-1}$ noethérien. Soit $\bar{p} \subset \mathcal{O}_n/f$ l'image de p . $\bar{p}$ est $\mathcal{O}_{n-1}$ - fini, e.a.d.s.).

Pour prouver que $\mathcal{O}_n$ est factoriel il suffit donc de prouver que :

si $f \in \mathcal{O}_n$, f irréductible $\Rightarrow f$ est premier.

On va supposer (induction) que $\mathcal{O}_{n-1}$ est factoriel.

En appliquant le théorème de préparation, on peut ramener notre problème au suivant :

LEMME 3 : Soit $P \in \mathcal{O}_{n-1}[x_n]$ un polynôme distingué irréductible (dans $\mathcal{O}_{n-1}[x_n]$). Alors P est premier dans $\mathcal{O}_n$.

Démonstration : Soient $g, h \in \mathcal{O}_n$, t.q. $P \mid gh$. En appliquant le thm. de préparation :

$$\left. \begin{array}{l} g = Pq_1 + \bar{g} \\ h = Pq_2 + \bar{h} \end{array} \right\} g, h \in \mathcal{O}_{n-1}[x_n]$$

$\Rightarrow P \mid \bar{g}\bar{h}$ (dans $\mathcal{O}_n$), donc :

$$(x) \quad \bar{g}\bar{h} = PQ \quad (Q \in \mathcal{O}_n).$$

Par la division euclidienne (dans $\mathcal{O}_{n-1}[x_n]$)

$$(xx) \quad \bar{g}\bar{h} = PQ' + R' \quad (Q', R' \in \mathcal{O}_{n-1}[x_n]).$$

$$\deg R' < \deg P$$

On peut regarder (x) (xx) comme une application du thm. de préparation (dans $\mathcal{O}_n$). L'unicité dans le thm. de préparation analytique nous dit que

$$Q = Q', \quad R' = 0.$$

$\Rightarrow P | \bar{g}h$ dans $\mathcal{O}_{n-1}[x_n]$.

Mais on a supposé $\mathcal{O}_{n-1}$ factoriel. Donc (Gauss) $\mathcal{O}_{n-1}[x_n]$ est factoriel. Donc $P | \bar{g}$ ou $P | h$ (dans $\mathcal{O}_{n-1}[x_n]$) (car dans $\mathcal{O}_{n-1}[x_n]$ P est irréductible $\Rightarrow P$ est premier) Alors :

$$P | g \text{ ou } P | h \text{ (dans } \mathcal{O}_n)$$

donc P est premier dans $\mathcal{O}_n$. $\square$

Ceci implique (induction) notre lemme 2.

LE THM. DE PROLONGEMENT ANALYTIQUE.

On remarque que le théorème est local, c'est-à-dire qu'il suffit de le prouver quand le contexte est le suivant : X est un voisinage de $0 \in \mathbb{R}_n$ et on veut montrer qu'il existe un (petit voisinage) $0 \in U_1 \subset X$ où le prolongement analytique de $f|_{\Gamma}$ soit possible. (A partir de là, le théorème général résulte par partition de l'unité).

Par un changement de variables dans l'exemple du paragraphe 2, le théorème est vrai pour

$$X = \mathbb{R}, \quad f(x) = x^2, \quad G = \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{R}^+.$$

On n'a que des pôles (simples) : $\{\frac{-r}{2}, r = \text{entier positif}\}$. En prenant des produits directs, le théorème est vrai, aussi pour :

$$X = \mathbb{R}_n, \quad f(x) = \prod_i^{N_i} x_i, \quad N_i = \text{entier pair} \geq 0, \quad G = \prod_i G_i \quad (G_i = \mathbb{R} \text{ ou } G_i = \mathbb{R}^+).$$

Si X est voisinage de 0 dans $\mathbb{R}_n$, on pose $F = f \prod_i g_i$. On peut appliquer la résolution des singularités qui nous donne :

$$\tilde{U} \xrightarrow{\varphi} U \subset X.$$

Soient : $\tilde{f} = f \circ \varphi$, $\tilde{g}_i = g_i \circ \varphi$. Si $P \in \tilde{U}$ on a (localement) :

$$(*) \quad \underbrace{\tilde{F} = \tilde{f} \prod_{\text{définition}} \tilde{g}_i}_{\substack{n \\ 1}} = \varepsilon \prod_{\substack{n \\ 1}} y_i^{k_i} \quad (\text{autour de } P).$$

D'après le lemme 2 et la remarque que dans $\mathcal{O}_n$ les y_i sont irréductible ($\iff$ premiers), et $\varepsilon = \text{unité}$, on a des factorisations locales analogues à

$$(*) \quad \text{pour } \tilde{f}, \tilde{g}_i. \text{ Vu que } f \gg 0 \iff \tilde{f} \gg 0$$

les exposants des y_i dans la factorisation de $\tilde{f}$ sont $\gg 0$. Soit α l'orientation de U induite par R_n et $\tilde{\alpha}$ l'orientation de $\tilde{U} - \tilde{A}$ définie par :

$$\tilde{\alpha} = \varphi^* \alpha .$$

On définit $\tilde{\Gamma}$ comme la fonction caractéristique de $\{\tilde{g}_i(x) \gg 0\}$ ($\tilde{\Gamma} = \Gamma \circ \varphi$).

Dans $\tilde{U} - \tilde{A}$ on définit : (pour $\text{Re} \lambda > 0$) :

$$\tilde{f}^{\lambda} \tilde{\Gamma}^{\lambda} \tilde{\alpha} \in \Omega'(\tilde{U} - \tilde{A})$$

LEMME 3 : Soit $P \in \tilde{U}$, $V = \{(y_1, \dots, y_n)\}$ une carte locale de $\tilde{U}$ autour de P . Il existe une orientation locale β de V et un ensemble $S \subset \{1, 2, \dots, n\}$, tel que :

$$\tilde{\alpha}|_{V \cap (\tilde{U} - \tilde{A})} = \left(\prod_{j \in S} \text{sign } y_j \right) \beta .$$

Démonstration : Soit $y^0 = (y_1^0, \dots, y_{i-1}^0, y_{i+1}^0, \dots, y_n^0) \neq 0$ et

$\{t \in [-\varepsilon, \varepsilon], (y_1^0, \dots, y_{i-1}^0, t, y_{i+1}^0, \dots, y_n^0)\} = \gamma(y^0)$ un petit chemin transversal à $(y_i = 0)$. Notre lemme résulte de l'assertion:

(A) : Si pour un certain $y^0 \neq 0$, l'orientation $\tilde{\alpha}$ change quand on traverse $y_i = 0$ le long de $\gamma(y^0)$, alors, $\forall z^0 \neq 0$ (où $z^0 = (z_1^0, \dots, z_{i-1}^0, z_{i+1}^0, \dots, z_n^0)$) α change quand on traverse $y_i = 0$ le long de $\gamma(z^0)$.

Considérons maintenant :

$$V = \{(y_1, \dots, y_n)\} \xrightarrow{\varphi|V} U = \{(x_1, \dots, x_n)\},$$

$\Delta(y)$ = la matrice jacobienne de $\varphi|V$. On considère le développement Taylorien de $\Delta(y)$ autour de 0 :

$$\Delta(y) = \underbrace{\Delta_{\rho}(y)}_{\neq 0} + \Delta_{\rho+1}(y) + \dots$$

Il suffit de prouver (A) pour les orientations induites par $\Delta_{\rho}(y)$:

$$\Delta_{\rho}(y) = \sum_{m_1 + \dots + m_n = \rho} a_{m_1, \dots, m_n} y_1^{m_1} \dots y_n^{m_n}$$

($a_{m_1, \dots, m_n}$ = matrice à $n \times n$ éléments réels).

Pour y_i soit $m(y_i)$ = le plus petit exposant tel que

$\exists a_{m_1, \dots, m_{i-1}, m(y_i), m_{i+1}, \dots, m_n} \neq 0$. Alors, on voit que l'orientation $\tilde{\alpha}$ (= l'orientation induite par $\Delta_{\rho}(y)$) change quand on traverse $y_i = 0$, si et seulement si $m(y_i)$ est impair.

[Si l'on veut regarder les choses de plus près, ceci peut être détaillé comme suit : (On choisit $i = n$ pour la simplicité de l'écriture)

$$\Delta_{\rho}(y) = A_1(y_1, \dots, y_{n-1})y_n^m + A_2(y_1, \dots, y_{n-1})y_n^{m+1} + \dots \quad (A_1 \neq 0).$$

Puisque A_1 est un polynôme (homogène, de degré $\rho - m$) l'ensemble des points où il est $\neq 0$ est partout dense. Soit K une composante connexe de

$(y_n = 0) - (y_1 = 0) \cup \dots \cup (y_{n-1} = 0)$ et $y^0 = (y_1^0, \dots, y_{n-1}^0, 0) \in K$ t.q.

$A_1(y^0) \neq 0$ ($\Rightarrow \forall \lambda \neq 0 \quad A_1(\lambda y^0) = \lambda^{\rho-m} A_1(y^0) \neq 0$). y^0 est petit et on choisit

aussi un $y_n^0 \neq 0$ petit, tel que $\Delta_{\rho+1}(y^0, y_n^0) + \dots$ converge absolument, et que :

$$|A_1(y^0)| |y_n|^m \gg |A_2(y^0)| |y_n|^{m+1} + \dots \quad (\text{si } |y_n| < y_n^0)$$

(une fois y^0 donné, c'est clair qu'on peut trouver un tel y_n^0).

On a :

$$|\Delta_{\rho+1}(\lambda y^0, \lambda y_n) + \dots| < C(\max(|\lambda y^0|, |\lambda y_n|))^{\rho+1}$$

où C est une constante indépendante de λ . Puisque $A_1(y^0)$ est homogène de degré $\rho-m$ on peut choisir $\lambda > 0$ tel que :

$$|A_1(\lambda y^0)| |\lambda y_n|^m \gg |\Delta_{\rho+1}(\lambda y^0, \lambda y_n) + \dots|$$

Par homogénéité :

$$|A_1(\lambda y^0)| |\lambda y_n|^m \gg |A_2(\lambda y^0)| \cdot |\lambda y_n|^{m+1} + \dots$$

Il en résulte que :

$$\text{signe } \Delta(\lambda y^0, \pm \lambda y_n) = \text{signe } A_1(\lambda y^0) (\pm \lambda y_n)^m$$

$A_1(\lambda y^0) (\lambda y_n)^m$ change de signe quand on remplace y_n par $-y_n$ si et seulement si m est impair ...] q.e.d.

Le lemme 3 implique que localement (c'est-à-dire sur V)

$f^{\lambda \tilde{\nu}} \tilde{\alpha} \in \Omega'(\tilde{U} - \tilde{A})$ provient d'un élément de $\Omega'(\tilde{U})$:

$$f^{\lambda \tilde{\nu}} \tilde{\Gamma} \left(\prod_j \text{signe } y_j \right) \beta \quad (\text{sur } V) .$$

Si Γ_j est (dans V) la fonction caractéristique de $y_j > 0$:

$$\text{sign } y_j = 2 \Gamma_j - 1 .$$

On remarque d'autre part que, puisque

$$\tilde{g}_i|_V = \underbrace{\varepsilon_1(y)}_{\text{unité}} \cdot \prod y_i^{\alpha_i}$$

la fonction caractéristique de $V \cap (\tilde{g}_i > 0)$ est de la forme

$$\sum_k \left(\pm \prod_{j \in S_1^k} \Gamma_j \right)$$

où $S_1^k \subset \{1, \dots, n\}$. De même, évidemment, pour $V \cap \Pi(\tilde{g}_i > 0)$, donc, toujours localement $f^{\lambda} \tilde{\Gamma}^{\alpha}$ est une somme d'expressions de la forme : $(\text{Re } \lambda > 0)$

$$(\theta_\lambda) = \left(\varepsilon \prod y_i^{2\lambda M_i} \right) \cdot \left(\prod_{j \in \tilde{S}} \Gamma_j^{\beta'} \right)$$

où $\varepsilon(0) \neq 0$ et β' est l'orientation standard de $(y_1, \dots, y_n)$. D'après une remarque faite au début de la démonstration (θ_λ) se prolonge analytiquement, dans V , à une fonction méromorphe, avec les pôles de la forme : $-r/N(V, f)$ e.a.d.s.

Si $\tilde{V} \Subset \tilde{U}$ est un ouvert précompact de $\tilde{U}$ on peut donc définir la fonction méromorphe $f^{\lambda} \tilde{\Gamma}^{\alpha} \in \Omega'(\tilde{V})$ avec des pôles comme dans notre théorème. Si $U_1 \Subset U$ alors $\varphi^{-1}U_1$ est un ouvert précompact de $\tilde{U}$ (car φ est propre...).

En prenant l'image directe, on définit :

$$\varphi_* (f^{\lambda} \tilde{\Gamma}^{\alpha}) \in \Omega'(U_1) .$$

$$\exists \mid T(\lambda) \in \mathcal{D}'(U_1) \quad \text{t.q.} :$$

$$\varphi_* (f^{\lambda} \tilde{\Gamma}^{\alpha}) = T(\lambda) \alpha$$

où $T(\lambda)$ est une fonction méromorphe avec les pôles comme ci-dessus.

Pour finir la démonstration, il faut montrer que, si $\text{Re } \lambda > 0$:

$$T(\lambda) = f^{\lambda}_{\Gamma} \alpha.$$

Mais, pour $\operatorname{Re} \lambda > 0$, $f^{\lambda}_{\Gamma} \alpha$ et $f^{\lambda}_{\Gamma} \alpha$ sont, en fait, des fonctions localement intégrables, et donc, en tant que distributions, complètement définies par leurs restrictions à $\tilde{U} - \tilde{A}$, $U - A$ (car $\operatorname{mes} A = \operatorname{mes} \tilde{A} = 0$). On sait que

$$\varphi : \tilde{U} - \tilde{A} \xrightarrow{\sim} U - A$$

est un isomorphisme d'où :

$$\varphi_* (f^{\lambda}_{\Gamma} \alpha | \tilde{U} - \tilde{A}) = f^{\lambda}_{\Gamma} \alpha | U - A$$

($\operatorname{Re} \lambda > 0$) e.a.d.s.

Problèmes : 1) Essayer de comprendre "géométriquement" ce qui se passe dans le théorème de Hironaka...

2) Essayer de démontrer le théorème de Hironaka par des méthodes d'analyse différentielle.....

3) C'est un bon exercice de considérer différents cas où la résolution des singularités se fait "à la main" et de calculer explicitement les solutions élémentaires des E.D.P. correspondantes.

4) Exercice : Montrer, par les mêmes méthodes, qu'une distribution T peut être divisée par une fonction analytique réelle f . (Łojasiewicz) [Indication On peut "remonter" T sur $\tilde{U}$, où la division par f est possible élémentairement. Ensuite on redescend...].

CHAPITRE II.

-:-:-

SUR LA STABILITE DES APPLICATIONS DIFFERENTIABLES.

(STABILITE INFINITESIMALE $\implies$ STABILITE).

1) Définitions et énoncé du théorème principal.

Soient X, Y deux variétés C^∞ , compactes, et $\text{Diff}(X) = \text{Diff}^\infty(X)$
 $(\text{Diff}(Y) = \text{Diff}^\infty(Y))$ le groupe des difféomorphismes de $X(Y)$. On a une action
 de groupe :

$$\begin{array}{ccccccc} (\text{Diff}(X) \times \text{Diff}(Y)) \times C^\infty(X, Y) & \xrightarrow{\Phi} & C^\infty(X, Y) & . \\ \psi & & \psi & & \psi & & \psi \\ h & & g & & f & \longmapsto & g \circ g \circ h^{-1} \end{array}$$

Cette action est continue (pour la topologie C^∞) et différentiable, (dans ce sens que : si h_t, g_t, f_t dépendent différentiablement du paramètre $t \in Z = \text{variété } C^\infty$, alors $\Phi(h_t, g_t, f_t)$ dépend, aussi, différentiablement de t); dans ces leçons si $P \subset C^\infty(X, Y)$, $P' \subset C^\infty(X', Y')$ sont deux parties quelconques des espaces fonctionnels considérés, une application $\Phi : P \rightarrow P'$ sera dite différentiable (C^∞), si elle satisfait à la condition qu'on vient de décrire.

D'autre part $Z \longrightarrow C^\infty(X, Y)$ est "différentiable" si l'application associée, $Z \times X \rightarrow Y$ est différentiable. On identifie donc :

$$C^\infty(Z, C^\infty(X, Y)) = C^\infty(Z \times X, Y) .$$

Si $f \in C^\infty(X, Y)$ est fixé, on a l'orbite de f :

$$(\text{Diff } X) \times (\text{Diff } Y) \xrightarrow{\Phi_f} C^\infty(X, Y)$$

définie par : $\Phi_f(h,g) = \Phi(h,g,f)$

DEFINITION : $f \in C^\infty(X,Y)$ est dite (différentiablement) stable s'il existe un voisinage $f \in N \subset C^\infty(X,Y)$ et une application (continue et différentiable) :

$$\phi : (N,f) \longrightarrow ((\text{Diff } X) \times (\text{Diff } Y), \text{id}(X) \times \text{id}(Y))$$

telle que le diagramme suivant soit commutatif :

$$\begin{array}{ccc} & (\text{Diff } X) \times (\text{Diff } Y) & \\ \nearrow \Psi & \downarrow \Phi_f & \\ N & \xrightarrow{\quad} & C^\infty(X,Y) \end{array}$$

Soient $TX(TY)$ les fibrés tangents de $X(Y)$. $\Gamma(TX) = \Gamma^\infty(TX)$ = l'ensemble des sections C^∞ de TX . Si $f \in C^\infty(X,Y)$ on définit de fibré induit (sur X) : f^*TY .

$\Gamma^\infty(f^*TY)$ s'identifie à l'ensemble des applications $C^\infty : \eta : X \rightarrow TY$ qui rendent commutatif le triangle inférieur du diagramme :

$$\begin{array}{ccc} TX & \xrightarrow{Tf} & TY \\ \downarrow & \nearrow \eta & \downarrow \\ X & \xrightarrow{f} & Y \end{array}$$

On a des structures naturelles de module sur les anneaux $C^\infty(X)$, $C^\infty(Y)$:

$\Gamma^\infty(TX)$ est un $C^\infty(X)$ - module

$\Gamma^\infty(TY)$ est un $C^\infty(Y)$ - module

$\Gamma^\infty(f^*TY)$ est un $C^\infty(X)$ -module.

On a aussi un morphisme de R -algèbres :

$$f^* : C^\infty(Y) \rightarrow C^\infty(X)$$

qui induit, par restriction des scalaires, une structure de $C^\infty(Y)$ -module, sur tout $C^\infty(X)$ -module.

On a un morphisme $C^\infty(Y)$ -linéaire :

$$\alpha_f : \Gamma^\infty(TY) \longrightarrow \Gamma^\infty(f^*TY)$$

défini par : $\alpha_f(\xi) = \xi \circ f$ ($\xi \in TY$), et un morphisme $C^\infty(X)$ -linéaire :

$$\beta_f : \Gamma^\infty(TX) \longrightarrow \Gamma^\infty(f^*TY),$$

défini par :

$$\beta_f(\eta) = Tf \circ \eta \quad (\eta \in TX) :$$

$$\begin{array}{ccc}
 TX & \xrightarrow{Tf} & TY \\
 \eta \updownarrow & \nearrow \beta_f(\eta) & \updownarrow \xi \\
 X & \xrightarrow{\alpha_f(\xi)} & Y \\
 & f &
 \end{array}$$

DEFINITION : $f \in C^\infty(X,Y)$ est dite infinitésimalement stable si

$$\alpha_f(\Gamma^\infty(TY)) + \beta_f(\Gamma^\infty(TX)) = \Gamma^\infty(f^*TY)$$

(C'est-à-dire, si pour toute $s \in \Gamma^\infty(f^*TY)$, $\exists \xi, \eta$ t.q : $\alpha_f(\xi) + \beta_f(\eta) = s$).

THEOREME DE STABILITE DE MATHER :

"Si X, Y sont compactes, $f \in C^\infty(X,Y)$ alors :
 f infinitésimalement stable $\implies f$ stable".

Remarques : Heuristiquement, des éléments de $\Gamma^\infty(f^*TY)$ sont les "déformations infinitésimales" de f , donc $\Gamma^\infty(f^*TY) =$ "l'espace tangent à $C^\infty(X,Y)$ au point f ". De même $\Gamma^\infty(TX)$ est "l'espace tangent à $\text{Diff } X$ au point $\text{id}(X)$ " (et de même pour Y). Donc $\Gamma^\infty(TX) \oplus \Gamma^\infty(TY)$ est l'espace tangent de $\text{Diff}^\infty(X) \times \text{Diff}^\infty(Y)$ au point $(\text{id}(X), \text{id}(Y))$ et $\alpha_f + \beta_f$ est l'application "tangente" :

$$T_f \Phi_f : T_{(\text{id}X, \text{id}Y)}(\text{Diff}X \times \text{Diff}Y) \rightarrow T_f C^\infty(X,Y).$$

Le théorème de stabilité devient alors un analogue ∞ -dimensionnel du "théorème des fonctions implicites", suivant :

"Soit M une variété C^∞ compacte, G un groupe de Lie, et

$$\Phi : G \times M \rightarrow M$$

une action C^∞ . Soit $m \in M$ et

$$\Phi_m : G \rightarrow M$$

l'orbite de m . Si

$$\begin{array}{ccc} T_e G & \xrightarrow{\quad} & T_m M \rightarrow 0 \\ & T_e \Phi_m \searrow & \\ & & \end{array}$$

il existe un voisinage $m \in V \subset M$ et un relèvement :

$$\begin{array}{ccc} & G & \\ \phi \nearrow & & \searrow \Phi_m \\ V & \xrightarrow{\quad} & M \end{array}.$$

Exemple : Considérons les immersions $\varphi_1, \varphi_2 : S_1 \rightarrow R_2$ dont les images sont :


 $\varphi_1(S_1)$

(croisement transversal)


 $\varphi_2(S_2)$

(point de contact tangent).

φ_1 est infinitésimalement stable et φ_2 ne l'est pas.

Exercice : Soit $f \in \text{Imm}(X, Y)$. Montrer que f est infinitésimalement stable

$\Leftrightarrow f$ est générique. [Je rappelle qu'une immersion $f : X \rightarrow Y$ est dite générique, si chaque fois que $x_1, \dots, x_k \in X (x_i \neq x_j)$ sont tels que $f(x_i) = f(x_j) = y \in Y$, les sous variétés linéaires :

$$\text{Tf}(T_{x_1} X), \dots, \text{Tf}(T_{x_k} X) \subset T_y Y$$

sont en position générale, c'est-à-dire :

$$\text{cod}(\text{Tf}(T_{x_1} X) \cap \dots \cap \text{Tf}(T_{x_k} X)) = \sum_i \text{cod}(\text{Tf}(T_{x_i} X)).$$

2) Rappels sur les systèmes dynamiques :

Soit X une variété C^∞ fermée et

$$\pi : X \times \mathbb{R} \rightarrow X$$

la projection naturelle. On a le fibré induit :

$$\pi^* TX \rightarrow X \times \mathbb{R}$$

et un élément $s \in \Gamma^\infty(\pi^* TX)$ est un système dynamique (= équation différentielle) dépendant du temps. Le théorème suivant est classique. :

LEMME 0 : Le théorème fondamental sur les systèmes dynamiques :

"Si $\xi \in \Gamma^\infty(\pi^* TX)$ est un système dynamique dépendant du temps et X est fermée, il

existe un difféomorphisme unique $H \in \text{Diff}^\infty(X \times R)$ tel que :

a) Le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccc} X \times R & \xrightarrow{H} & X \times R \\ & \searrow & \swarrow \\ & R & \end{array}$$

b) $H|_{X \times 0} \equiv \text{id}(X)$.

c) $(\frac{\partial H}{\partial t})_0 H^{-1} = \xi$.

[Cette formule veut dire la chose suivante : Si $f \in C^\infty(X \times R, Y \times R)$ est tel que le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} X \times R & \xrightarrow{f} & Y \times R \\ & \searrow & \swarrow \\ & R & \end{array}$$

(c'est-à-dire si f préserve les niveaux), on peut attacher à f une application évidente :

$$\begin{array}{ccc} & \nearrow \frac{\partial f}{\partial t} & \pi^{*TY} \\ & & \uparrow \xi \\ X \times R & \xrightarrow{f} & Y \times R \end{array}$$

La formule c) signifie que le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccc} & \nearrow \frac{\partial H}{\partial t} & \pi^{*TX} \\ & & \uparrow \xi \\ X \times R & \xrightarrow{H} & X \times R \end{array}$$

Sous une forme plus classique, ceci veut dire, aussi, la chose suivante :

$$\frac{\partial H(x,t)}{\partial t} = \xi(H(x,t))$$

(Ceci est la manière "usuelle" d'écrire une équation différentielle)].

Réciproquement, chaque $H \in \text{Diff}^\infty(X \times \mathbb{R})$ qui préserve les niveaux provient d'un $\xi \in \Gamma^\infty(\pi^*TX)$. La correspondance $\xi \leftrightarrow H$ est continue (et différentiable)".

LEMME 1 : "Soit $I = [0,1]$ et soient aussi :

$$F \in C^\infty(X \times I, Y \times I)$$

$$H \in \text{Diff}(X \times I)$$

$$G \in \text{Diff}(Y \times I)$$

trois applications qui préservent les niveaux. Pour chaque $t \in I$, on va désigner par $F_t \in C^\infty(X, Y)$ la "valeur de F au point t". On va supposer que $H_0 = \text{id}_X$, $G_0 = \text{id}_Y$.

On se donne aussi $\xi \in \Gamma^\infty(\pi^*TX)$, $\eta \in \Gamma^\infty(\pi^*TY)$ tels que :

$$\frac{\partial H}{\partial t} \circ H^{-1} = -\xi, \quad \frac{\partial G}{\partial t} \circ G^{-1} = \eta \quad (t \in I).$$

On considère le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \pi^*TX & \xrightarrow{TF|_{\pi^*TX}} & \pi^*TY \\ \downarrow & & \downarrow \\ T(X \times I) & \xrightarrow{TF} & T(Y \times I) \\ \downarrow & & \downarrow \\ X \times I & \xrightarrow{F} & Y \times I \end{array}.$$

On a le $C^\infty(X \times I)$ -module $\Gamma^\infty(F^*(\pi^*TY))$, dont les éléments s'identifient aux relèvements ψ :

$$\begin{array}{ccc}
 & & \pi^*TY \\
 & \nearrow \phi & \downarrow \\
 X \times I & \xrightarrow{F} & Y \times I
 \end{array}$$

Comme au paragraphe précédent, on définit un morphisme $C^\infty(Y \times I)$ -linéaire α_F^1 ,
et un morphisme $C^\infty(X \times I)$ -linéaire β_F^1 :

$$\begin{array}{ccc}
 \Gamma^\infty(\pi^*TY) & \xrightarrow{\beta_F^1} & \Gamma^\infty(F^*(\pi^*TY)) \\
 \searrow \alpha_F^1 & & \nearrow
 \end{array}$$

La condition nécessaire et suffisante pour que :

$$(\bar{x}) \quad F_t = G_t \circ F_0 \circ H_t^{-1} \quad (\forall t \in I)$$

est que :

$$\frac{\partial F}{\partial t} = \alpha_F^1(\eta) + \beta_F^1(\xi) \quad .$$

(égalité entre éléments de $\Gamma^\infty(F^*(\pi^*TY))$).

Démonstration : (x) est équivalent à :

$$(xx) \quad \frac{\partial}{\partial t}(G_t^{-1} \circ F_t \circ H_t) = 0 \quad .$$

(On considère ici :

$$\begin{array}{ccc}
 \frac{\partial}{\partial t}(G^{-1}_{FH}) & & \pi^*TY \\
 & \nearrow & \downarrow \\
 X \times I & \xrightarrow{G^{-1} \circ F \circ H} & Y \times I
 \end{array}$$

On a :

$$\frac{\partial}{\partial t}(G^{-1} \circ F \circ H) = \frac{\partial G^{-1}}{\partial t} \circ F \circ H + TG^{-1} \circ \frac{\partial F}{\partial t} \circ H + TG^{-1} \circ TF \circ \frac{\partial H}{\partial t} .$$

D'autre part :

$$G_t^{-1} \circ G_t = \text{id } Y ,$$

donc :

$$\frac{\partial}{\partial t}(G^{-1} \circ G) = TG^{-1} \circ \frac{\partial G}{\partial t} + \frac{\partial G^{-1}}{\partial t} \circ G = 0 .$$

Donc :

$$\frac{\partial G^{-1}}{\partial t} = - TG^{-1} \circ \frac{\partial G}{\partial t} \circ G^{-1} .$$

En remplaçant ceci dans le calcul ci-dessus :

$$(xxx) \frac{\partial}{\partial t}(G^{-1} \circ F \circ H) = TG^{-1} \circ \left(- \frac{\partial G}{\partial t} \circ G^{-1} \circ F + \frac{\partial F}{\partial t} + TF \circ \frac{\partial H}{\partial t} \circ H^{-1} \right) \circ H .$$

On a :

$$- \frac{\partial G}{\partial t} \circ G^{-1} \circ F = -\eta \circ F = - \alpha_F^1(\eta)$$

$$TF \circ \frac{\partial H}{\partial t} \circ H^{-1} = - TF \circ \xi = - \beta_F^1(\xi) .$$

Puisque TG^{-1} est un isomorphisme et H un difféomorphisme, le membre droit de (xxx) s'annule si et seulement si :

$$- \alpha_F^1(\eta) + \frac{\partial F}{\partial t} - \beta_F^1(\xi) = 0 , \quad \text{e.a.d.s.}$$

Remarques (heuristiques) sur la démonstration du théorème de stabilité : Soit

$G = (\text{Diff } X) \times (\text{Diff } Y)$, $e = \text{id}(X) \times \text{id}(Y)$. Soit $f \in Z \subset C^\infty(X, Y)$ un petit voisinage de f . Chaque $g \in Z$ peut être joint à f par un petit arc

$C^\infty : F_g : I \rightarrow C^\infty(X, Y)$. En considérant $\frac{\partial}{\partial t} F_g$ on obtient une section $C^{0, \infty}$ du fibré

$[F_g]^*TY \rightarrow X \times I \times Z$. $\beta_F + \alpha_F$ définit une application naturelle $A :$

$$C^{0,\infty}(Z \times I, T_e G) \xrightarrow{A} \Gamma^{0,\infty}([F_g]^*TY).$$

D'après ce qu'on vient de voir, construire des difféomorphismes G_t, H_t revient à construire des éléments appropriés de $C^{0,\infty}(Z \times I, T_e G)$ et notre problème c'est de montrer que

(x) $A(f,0)$ surjective $\implies$ le germe de A au point $(f,0)$ est surjectif.

($A(f,0)$ surjective $\iff f$ est infinitésimalement stable). Mais le théorème de préparation est un énoncé (algébrique) qui donne (si on le traduit en langage "géométrique") un énoncé du même type que (x).

[On a : $\varphi \in C_{0,0}^\infty(X,Y)$ et des $C_0^\infty(x), C_0^\infty(y)$ - modules finis M,N et une application $C_0^\infty(y)$ -linéaire : $N \xrightarrow{\alpha} M$. On pense à M,N comme des sections de deux germes de fibrés (au-dessus de $(X,0), (Y,0)$) ; α est le "pull-back" des sections). On a :

$$\underbrace{\alpha(N) + \varphi^*_{m_y} M = M}_{\text{si l'on prend les valeurs au point } y=0, \alpha(0) \text{ est surjective.}} \implies \underbrace{\alpha(N) = M}_{\text{le germe de } \alpha \text{ est surjectif.}} \quad \left. \begin{array}{l} \text{interprétation} \\ \text{heuristique} \end{array} \right\} \cdot]$$

Le théorème de préparation était la conséquence d'un théorème de division. On va se servir du même théorème de division pour prouver (x) ...

3) Une reformulation du théorème de préparation :

Soient (Z_1, z_1^0) un germe d'espace topologique et (Z_2, z_2^0) un germe de variété C^∞ (de dimension finie). On désigne par :

$$C_{z_1^0, z_2^0}^{0,\infty}(Z_1 \times Z_2, C^\infty(X,Y)) = C_{z_1^0}^0(Z_1, C_{z_2^0}^\infty(Z_2 \times X,Y)) ,$$

les germes d'applications $Z_1 \times Z_2 \rightarrow C^\infty(X,Y)$ qui sont C^∞ en Z_2 , et continues

(avec toutes les dérivées), en $Z_1 \times Z_2$.

De même, on considère :

$$C_{z_1^0, z_2^0}^{0, \infty}(Z_1 \times Z_2, C^\infty(X)).$$

On a une inclusion naturelle :

$$C^\infty(X) \hookrightarrow C_{z_1^0, z_2^0}^{0, \infty}(Z_1 \times Z_2, C^\infty(X)),$$

donnée par les applications constantes $Z_1 \times Z_2 \rightarrow f \in C^\infty(X)$, et l'application d'évaluation :

$$\text{ev}(z_1^0, z_2^0) : C_{z_1^0, z_2^0}^{0, \infty}(Z_1 \times Z_2, C^\infty(X)) \rightarrow C^\infty(X).$$

Si $F \in C_{z_1^0, z_2^0}^{0, \infty}(Z_1 \times Z_2, C^\infty(X, Y))$ on définit un homomorphisme de

R-algèbres :

$$F_*^* : C_{z_1^0, z_2^0}^{0, \infty}(Z_1 \times Z_2, C^\infty(Y)) \rightarrow C_{z_1^0, z_2^0}^{0, \infty}(Z_1 \times Z_2, C^\infty(X)),$$

comme suit :

$$\text{Si } z \in Z_1 \times Z_2, \quad \Phi \in C_{z_1^0, z_2^0}^{0, \infty}(Z_1 \times Z_2, C^\infty(Y)),$$

alors :

$$z \xrightarrow{F_*^*(\Phi)} (X \xrightarrow{F(z)} Y \xrightarrow{\Phi(z)} R).$$

LEMME 2 : "Considérons le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} C_{z_1^0, z_2^0}^{0, \infty}(Z_1 \times Z_2, C^\infty(Y)) & \xrightarrow{F_*^*} & C_{z_1^0, z_2^0}^{0, \infty}(Z_1 \times Z_2, C^\infty(X)) \\ \downarrow \text{ev}(z_1^0, z_2^0) & & \downarrow \text{ev}(z_1^0, z_2^0) \\ C^\infty(Y) & \xrightarrow{F(z_1^0, z_2^0)^*} & C^\infty(X) \end{array}$$

Soient C un $C^{0,\infty}_{z_1^0, z_2^0}(Z_1 \times Z_2, C^\infty(X))$ -module fini et A un

$C^{0,\infty}_{z_1^0, z_2^0}(Z_1 \times Z_2, C^\infty(Y))$ -module fini. Soit, aussi :

$$\alpha : A \longrightarrow C$$

un homomorphisme $C^{0,\infty}_{z_1^0, z_2^0}(Z_1 \times Z_2, C^\infty(Y))$ -linéaire.

On a l'implication :

$$\alpha(A) + (\text{Ker}(C^{0,\infty}_{z_1^0, z_2^0}(Z_1 \times Z_2, C^\infty(X)) \xrightarrow{\text{ev}(z_1^0, z_2^0)} C^\infty(X)))C = C \implies \alpha(A) = C."$$

Démonstration du lemme 2 : On commence par le lemme suivant :

LEMME 2.1 :

$$F_*^*(\text{Ker}(C^{0,\infty}_{z_1^0, z_2^0}(Z_1 \times Z_2, C^\infty(Y)) \xrightarrow{\text{ev}} C^\infty(Y))). C^{0,\infty}_{z_1^0, z_2^0}(Z_1 \times Z_2, C^\infty(X)) =$$

$$= \text{Ker}(C^{0,\infty}_{z_1^0, z_2^0}(Z_1 \times Z_2, C^\infty(X)) \xrightarrow{\text{ev}} C^\infty(X)) .$$

Démonstration : Désignons par z_i ($i = 1, 2$) le point "courant" de Z_i . Soit aussi $z_2^1, \dots, z_2^r$ un système de coordonnées locales de Z_2 , autour de z_2^0 , telles que $z_2^i(z_2^0) = 0$ ($i = 1, \dots, r$).

Un élément de $C^{0,\infty}_{z_1^0, z_2^0}(Z_1 \times Z_2, C^\infty(X))$ est représentable par une fonction

$\phi(z_1, z_2, x)$, C^∞ en (z_2, x) et continue (ainsi que toutes ses dérivées partielles) en (z_1, z_2, x) , et puisque X est compacte, inversement, toute telle fonction représente un élément de $C^{0,\infty}_{z_1^0, z_2^0}(Z_1 \times Z_2, C^\infty(X))$.

On a :

$$\psi \in \text{Ker}(\text{ev}) \iff \psi(z_1^0, z_2^0, x) = 0.$$

Soit $\psi \in \text{Ker}(\text{ev})$ comme ci-dessus et

$$\varphi(z_1, x) = \psi(z_1, z_2^0, x) \in C_{z_1^0}^0(Z_1, C^\infty(X)).$$

On a une inclusion naturelle :

$$C_{z_1^0}^0(Z_1, C^\infty(X)) \subset C_{z_1^0, z_2^0}^{0, \infty}(Z_1 \times Z_2, C^\infty(X)),$$

et $\Psi(z_1, z_2, x) = \psi(z_1, z_2, x) - \varphi(z_1, x) \in C_{z_1^0, z_2^0}^{0, \infty}(Z_1 \times Z_2, C^\infty(X))$, a la

propriété :

$$\Psi(z_1, z_2^0, x) = 0.$$

Soit $\Psi(z_1, z_2, x) = \Psi(z_1; z_2^1, \dots, z_2^r; x)$ (donc $\Psi(z_1; 0, \dots, 0, x) = 0$)

On a :

$$\Psi(z_1; z_2^1, \dots, z_2^r, x) = \int_0^1 \sum_{i=1}^r z_2^i \frac{\partial \Psi(z_1; tz_2^1, \dots, tz_2^r, x)}{\partial z_2^i} dt.$$

Donc :

$$\psi(z_1, z_2, x) = \varphi(z_1, x) + \sum_i z_2^i \psi_i(z_1, z_2, x)$$

où $\varphi(z_1, x) \in \text{Ker}(\text{ev}(z_1^0, z_2^0))$ (c'est-à-dire que $\varphi(z_1^0, x) = 0$) et

$$\psi_i \in C_{z_1^0, z_2^0}^{0, \infty}(Z_1 \times Z_2, C^\infty(X)).$$

Considérons maintenant une fonction continue $\rho : Z_1 \rightarrow \mathbb{R}$ ^{définie} comme suit :

$$\rho(z_1) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} \min(1, \sqrt{\|D_x^n \varphi\|}).$$

C'est clair que $\rho(z_1^0) = 0$. (En général, si $\varphi(z', x) \equiv 0 \rightarrow \rho(z') = 0$).

L'expression

$$\rho(z_1)^{-1} \varphi(z_1, x)$$

a donc un sens. Je dis que ça représente un élément de $C^0(z_1^0, C^\infty(X))$.

On vérifie par exemple que $D_x^n(\rho^{-1}\varphi) = \rho^{-1}D_x^n\varphi$ est continue au point z_1^0 :

$$|\rho(z_1)^{-1} D_x^n \varphi(z_1, x)| \leq 2^n (\min(1, \sqrt{\|D_x^n \varphi\|}))^{-1} \|D_x^n \varphi\|(z_1) .$$

Si z_1 est proche de z_1^0 , $\min(1, \sqrt{\|D_x^n \varphi\|}) = \sqrt{\|D_x^n \varphi(z_1, x)\|} \rightarrow 0$

(quand $z_1 \rightarrow z_1^0$). Donc

$$|\rho(z_1)^{-1} D_x^n \varphi(z_1, x)| \leq 2^n \|D_x^n \varphi(z_1, x)\| , \quad \text{e.a.d.s.}$$

On considère, aussi, les projections-coordonnées :

$$z_2^i : Z_2 \rightarrow R .$$

On définit des éléments de

$$C^{0,\infty}_{z_1^0, z_2^0}(Z_1 \times Z_2, C^\infty(Y)) :$$

$$\rho : Z_1 \times Z_2 \times Y \longrightarrow Z_1 \xrightarrow{\rho} R$$

$$z_2^i : Z_1 \times Z_2 \times Y \rightarrow Z_2 \xrightarrow{z_2^i} R$$

Clairement : $\rho, z_2^i \in \text{Ker}(C^{0,\infty}_{z_1^0, z_2^0}(Z_1 \times Z_2, C^\infty(Y)) \xrightarrow{\text{ev}} C^\infty(Y))$. Puisque

$\rho^{-1}(0) = z_1^0$ et $\varphi(z_1^0, x) = 0$, on définit sans ambiguïté :

$$\rho^{-1}(z_1) \varphi(z_1, x) \in C^{0, \infty}_{z_1^0, z_2^0}(Z_1 \times Z_2, C^\infty(X)) .$$

On a :

$$\psi(z_1, z_2, x) = \rho(z_1) \cdot (\rho^{-1}(z_1) \varphi(z_1, x)) + \sum_i z_2^i \psi_i(z_1, z_2, x) ,$$

où :

$$\rho(z_1), z_2^i \in F_*^*(\text{Ker}(C^{0, \infty}_{z_1^0, z_2^0}(Z_1 \times Z_2, C^\infty(Y)) \xrightarrow{\text{ev}} C^\infty(Y)))$$

et :

$$\rho^{-1} \varphi, \psi_i \in C^{0, \infty}_{z_1^0, z_2^0}(Z_1 \times Z_2, C^\infty(X)) .$$

[Dorénavant, on va utiliser les notations :

$$\text{ev}(x) : C^{0, \infty}_{z_1^0, z_2^0}(Z_1 \times Z_2, C^\infty(X)) \xrightarrow{\text{ev}(z_1^0, z_2^0)} C^\infty(X)$$

$$\text{ev}(y) : C^{0, \infty}_{z_1^0, z_2^0}(Z_1 \times Z_2, C^\infty(Y)) \xrightarrow{\text{ev}(z_1^0, z_2^0)} C^\infty(Y) .]$$

Ceci finit la démonstration du lemme 2.1.

LEMME 2.2 : "Soit C un $C^{0, \infty}_{z_1^0, z_2^0}(Z_1 \times Z_2, C^\infty(X))$ - module fini. Si :

$C/F_*^*(\text{Ker ev}(y)) C$ et $C^{0, \infty}_{z_1^0, z_2^0}(Z_1 \times Z_2, C^\infty(Y))$ -fini, alors C est

$C^{0, \infty}_{z_1^0, z_2^0}(Z_1 \times Z_2, C^\infty(Y))$ - fini".

[Par définition, l'énoncé précédant exprime le fait que le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc}
 C_{z_1^0, z_2^0}^{0, \infty}(Z_1 \times Z_2, C^\infty(Y)) & \xrightarrow{F_*^*} & C_{z_1^0, z_2^0}^{0, \infty}(Z_1 \times Z_2, C^\infty(X)) \\
 \downarrow \text{ev}(y) & & \downarrow \text{ev}(x) \\
 C^\infty(Y) & \xrightarrow{F(z_1^0, z_2^0)^*} & C^\infty(X)
 \end{array}$$

possède la "propriété de Weierstrass".

Remarque : Le lemme 2.2 $\Rightarrow$ lemme 2.

En effet, soient A, C comme dans le lemme 2. On a :

$$\alpha(A) + \text{Ker } \text{ev}(x).C = C,$$

et, d'après le lemme 2.1 :

$$(x) \quad \alpha(A) + F_*^* \text{Ker } \text{ev}(y)C = C.$$

Vu que A est $C_{z_1^0, z_2^0}^{0, \infty}(Z_1 \times Z_2, C^\infty(Y))$ - fini on a que

$$C/F_*^* \text{Ker } \text{ev}(y)C \text{ est } C_{z_1^0, z_2^0}^{0, \infty}(Z_1 \times Z_2, C^\infty(Y)) \text{ - fini.}$$

Donc, d'après le lemme 2.2 :

$$(xx) \quad C \text{ est } C_{z_1^0, z_2^0}^{0, \infty}(Z_1 \times Z_2, C^\infty(Y)) \text{ - fini.}$$

Avec (x), (xx) on peut appliquer le lemme de Nakayama et on conclut que $\alpha(A) = C$.

[La forme du lemme de Nakayama utilisée ici est la suivante : "Soit N un anneau et $I \subset N$ un idéal tel que $1 + I \subset \{\text{unités de } N\}$. Soient M_1, M_2 deux N -modules, M_2 étant N -fini et $\alpha : M_1 \rightarrow M_2$ un N -homomorphisme. Alors :

$$\alpha(M_1) + I.M_2 = M_2 \implies \alpha(M_1) = M_2 \cdot "].$$

Démonstration du lemme 2.2. :

LEMME 2.2.1. : "Soit Y' une variété quelconque et $X' \subset Y'$ une sous-variété à bord non nécessairement $\emptyset$. On va supposer que X' est un fermé de Y' .

Il existe une application linéaire continue, C^∞ :

$$E : C^\infty(X') \rightarrow C^\infty(Y')$$

telle que si $f \in C^\infty(X') : Ef \mid X' \equiv f$."

(Remarque : Même si $\dim X' = \dim Y'$, ceci n'est par une conséquence du théorème d'extension de Whitney, dans le cas C^∞ , car, dans le cas C^∞ , l'extension de Whitney n'est pas nécessairement linéaire. D'autre part comme partout dans ces leçons, linéaire veut dire $\mathbb{R}$ -linéaire ; le fait que E est continue et C^∞ veut dire que si Z_1 est un espace topologique, Z_2 une variété C^∞ , $f_{Z_1, Z_2}(x) \in C^\infty(X')$ telle que

$$f_{Z_1, Z_2}(x) \in C^{0, \infty}(Z_1 \times (Z_2 \times X'))$$

alors

$$Ef_{Z_1, Z_2}(x) \in C^{0, \infty}(Z_1 \times (Z_2 \times Y')) .)$$

Démonstration : On commence par démontrer (d'après Seeley) que le lemme est vrai si $Y' = (-\infty, +\infty)$, $X' = [0, \infty)$.

Je dis qu'ils existent deux suites $\{a_k\}$, $\{b_k\}$, telles que :

($k = 0, 1, 2, \dots$)

$$(i) \quad b_k < 0 .$$

$$(ii) \quad \sum_k |a_k| \cdot |b_k|^n < \infty . \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

$$(iii) \sum_k a_k (b_k)^n = 1 \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

$$(iv) \quad b_k \rightarrow -\infty.$$

Démonstration : prenons $b_k = -2^k$ et soient a_{kN} les solutions du système :

$$\sum_{k=0}^N X_{kN} (b_k)^n = 1 \quad (n = 0, \dots, N)$$

On a :

$$a_{kN} = \underbrace{\frac{1+2^0}{2^0+2^k} \cdot \frac{1+2^1}{2^1-2^k} \cdots \frac{1+2^{k-1}}{2^{k-1}-2^k}}_{A_k} \cdot \underbrace{\frac{1+2^{k+1}}{2^{k+1}-2^k} \cdots \frac{1+2^N}{2^N-2^k}}_{B_{kN}},$$

et :

$$|A_k| \leq \prod_{i=0}^{k-1} \left| \frac{1+2^i}{2^k-2^i} \right| \leq \prod_{i=0}^{k-1} 2^{i+2-k} = 2^{-(k^2+3k)/2}$$

(on utilise la remarque suivante :

$$2^k = 2^{k-1} + 2^{k-1} = 2^{k-1} + 2^{k-2} + 2^{k-2} \geq 2^i + 2^{k-2} + 2^{k-i-2},$$

ce qui implique :

$$\left| \frac{1+2^i}{2^k-2^i} \right| \leq 2^{-k+i+2}.$$

D'autre part

$$\log B_{kN} \leq \sum_{j=k+1}^N \log \left(1 + \frac{1+2^k}{2^j-2^k} \right) < \sum_{j=k+1}^N \frac{1+2^k}{2^j-2^k} = \sum_{j=k+1}^N \frac{2^{\frac{1}{k}+1}}{2^{j-k}-1} < \frac{3}{2} \sum_{j=k+1}^N \frac{1}{2^{j-k-1}} < 4.$$

Dans les B_{kN} (pour k fixé) forment une série bornée croissante. Soit

$$B_k = \lim_{N \rightarrow \infty} B_{kN} \leq e^4,$$

$$a_k = A_k B_k .$$

On a : $|a_k| < e^{4-(k^2-3k)/2} \Rightarrow (ii) .$

Enfin :

$$\sum_k a_k (b_k)^n = \lim_N \sum_k a_{kN} (b_k)^n = 1$$

(On n'a pas de problèmes de convergence à cause de (ii) et de :

$$|a_{kN}| |b_k|^n < |a_k| |b_k|^n).$$

Choisissons maintenant $\Phi \in C^\infty(R)$ telle que

$$\Phi(t) = 1 \quad \text{si } t \leq 1$$

$$\Phi(t) = 0 \quad \text{si } t \geq 2 .$$

Je vais définir une application :

$$C^\infty([0, \infty)) \xrightarrow{E} C_*^\infty(-\infty, \infty) = \text{fonctions } C^\infty \text{ à support dans } (-R, \infty),$$

$R < \infty .$

$$Ef(t) = f(t) \quad \text{si } t > 0$$

$$Ef(t) = \sum_k a_k \Phi(b_k t) f(b_k t) \quad \text{si } t < 0$$

(On remarque qu'il n'y a, pour chaque t , qu'un nombre fini de $\Phi(b_k t)$ qui soient $\neq 0$).

$Ef(t) \in C^\infty$ pour $(-\infty, +\infty) - \{0\}$. Tout est fini si l'on montre que,

$$\forall n \geq 0 : \lim_{t \nearrow 0} D^n Ef(t) = D^n f(0) .$$

On a : $(t < 0)$

$$D^n Ef(t) = \sum_i a_i b_i^n \Phi(b_i t) D^n f(b_i t) + T_1 + \dots + T_n ,$$

$$\text{où } T_j = k_j \sum_i a_i b_i^n D^j \Phi(b_i t) D^{n-j} f(b_i t) .$$

On remarque que : $D^j \Phi(b_i t) \neq 0 \implies b_i t \leq 2$ (et en fait $1 < b_i t \leq 2$ puisque $j \geq 1$).

Soit $M_n = \sup_k_j |D^j \Phi(\theta)| |D^{n-j} f(\theta)|$ pour $j \leq n$, $1 \leq \theta \leq 2$.

Alors :

$$|T_j| \leq M_n \sum_{b_i t \geq 1} |a_i| |b_i|^n \longrightarrow 0 \quad (t \rightarrow 0).$$

D'autre part (et ceci prouve aussi, quand $n = 0$, la continuité de $Ef(t)$ au point $t = 0$) :

On va fixer $\rho > 0$, tel que, si $0 < x < \rho$: $|D^n f(x) - D^n f(0)| < \varepsilon$.

$$|D^n f(0) - \sum a_i b_i^n \Phi(b_i t) D^n f(b_i t)| \leq |D^n f(0) - \sum_{i=0}^{b_i t < \rho < 1} a_i b_i^n D^n f(b_i t)| +$$

$$+ \underbrace{\left| \sum_{b_i t > \rho} a_i b_i^n \Phi(b_i t) D^n f(b_i t) \right|}$$

$$\leq M_n \sum_{b_i t > \rho} |a_i| |b_i|^n \longrightarrow 0 \quad (t \rightarrow 0).$$

D'autre part :

$$|D^n f(0) - \sum_{b_i t < \rho} a_i b_i^n D^n f(b_i t)| = \left| \sum a_i b_i^n D^n f(0) - \right.$$

$$\left. - \sum_{b_i t < \rho} a_i b_i^n D^n f(b_i t) \right| < \sum_{b_i t < \rho} |a_i| |b_i|^n |D^n f(0) - D^n f(b_i t)| +$$

$$+ \sum_{b_i t > \rho} |D^n f(0)| |a_i| |b_i|^n.$$

En faisant $t \rightarrow 0$ on a c.q.f. à d. (car, avec ρ fixé, $t \rightarrow 0 \implies i \rightarrow \infty$).

Ceci finit la démonstration dans le cas $X' = [0, \infty)$, $Y' = (-\infty, \infty)$. A partir de là, le cas général se démontre très facilement.

Remarque : La démonstration précédente est suggérée par la démarche suivante :

Si $f \in C^0([0, \infty))$ on peut l'étendre à une fonction continue sur $(-\infty, \infty)$, par réflexion :

$$Ef(t) = f(-t) \quad (t < 0) \quad .$$

Si $f \in C^1([0, \infty))$ on peut l'étendre à une fonction de classe C^1 sur $(-\infty, \infty)$ par une somme pondérée de (deux) réflexions :

$$Ef(t) = a_1 f(b_1 t) + a_2 f(b_2 t) \quad (t < 0) \quad (b_i < 0)$$

où a_i, b_i sont des constantes telles que :

$$a_1 + a_2 = 1$$

$$a_1 b_1 + a_2 b_2 = 1 \quad , \text{ e.a.d.s. }] .$$

On revient maintenant au lemme 2.2. Choisissons une fois pour toutes un entier $N > 0$ suffisamment grand et un plongement C^∞ :

$$e : X \hookrightarrow \mathbb{R}^N$$

Ceci nous donne un plongement C^∞ :

$$F(z_1^0, z_2^0) \times e : X \rightarrow Y \times \mathbb{R}^N .$$

Soit $Q = Q_N \subset Y \times \mathbb{R}^N$ une sous-variété compacte, à bord $\neq \emptyset$, voisinage de

$(F(z_1^0, z_2^0) \times e)(X)$. Soit

$$Pl^\infty(X, Q_N) \subset C^\infty(X, Q_N)$$

l'ensemble des plongements $C^\infty : X \rightarrow Q$. C'est un ouvert de $C^\infty(X, Q_N)$. Il existe

un

$$F_1 \in C^{0,\infty}_{z_1^0, z_2^0}(Z_1 \times Z_2, \text{Pl}^\infty(X, Q_N)),$$

unique, tel que le diagramme suivant soit commutatif :

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{F(z_1, z_2) \times e} & Y \times \mathbb{R}^N \\ & \searrow F_1(z_1, z_2) & \nearrow \\ & Q_N & \end{array}$$

On va considérer aussi des sous-variétés compactes à bord $\neq \emptyset : Q_i$:

$$\begin{array}{ccccccc} Y \times \mathbb{R}^N & \xrightarrow{\pi} & Y \times \mathbb{R}^{N-1} & \xrightarrow{\pi} & Y \times \mathbb{R}^{N-2} & \xrightarrow{\pi} & \dots & Y \times \mathbb{R} & \xrightarrow{\pi} & Y \\ \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & & \uparrow & & \nearrow \pi \\ Q_N & \xrightarrow{\pi} & Q_{N-1} & \xrightarrow{\pi} & Q_{N-2} & \xrightarrow{\pi} & \dots & Q_1 & & \end{array}$$

telles que : a) $\dim Q_j = \dim(Y \times \mathbb{R}^j)$.

b) $\pi Q_j \subset \text{int } Q_{j-1}$.

On remarque qu'il existe un plongement :

$e(j) : Q_j \hookrightarrow Q_{j-1} \times \mathbb{R}$ tel que le diagramme suivant soit commutatif :

$$\begin{array}{ccc}
 Q_j & \xrightarrow{e(j)} & Q_{j-1} \times R \\
 \searrow \pi|_{Q_j} & & \swarrow \pi \\
 & Q_{j-1} &
 \end{array}$$

On a aussi :

$$\begin{array}{ccccccc}
 X & \xrightarrow{F_1(z_1, z_2)} & Q_N & \xrightarrow{\pi} & Q_{N-1} & \xrightarrow{\pi} & \dots \xrightarrow{\pi} Q_1 \xrightarrow{\pi} Y \\
 \downarrow & & & & & & \uparrow \\
 & & & & & & F(z_1, z_2)
 \end{array}$$

Vu que la propriété de Weierstrass est associative, le lemme 2.2 est démontré, une fois qu'on réussit à prouver que la propriété de Weierstrass est vraie pour les diagrammes suivants :

$$\begin{array}{ccc}
 c_{z_1^0, z_2^0}^{0, \infty}(Z_1 \times Z_2, c^\infty(Q_N)) & \xrightarrow{(F_1)_*^*} & c_{z_1^0, z_2^0}^{0, \infty}(Z_1 \times Z_2, c^\infty(X)) \\
 \downarrow \text{ev} & & \downarrow \text{ev}(x) \\
 c^\infty(Q_N) & \xrightarrow{F_1(z_1^0, z_2^0)^*} & c^\infty(X)
 \end{array}
 \quad (A)$$

$$\begin{array}{ccc}
 c_{z_1^0, z_2^0}^{0, \infty}(Z_1 \times Z_2, c^\infty(Q_j)) & \xrightarrow{\pi_*^*} & c_{z_1^0, z_2^0}^{0, \infty}(Z_1 \times Z_2, c^\infty(Q_{j+1})) \\
 \downarrow \text{ev} & & \downarrow \text{ev} \\
 c^\infty(Q_j) & \xrightarrow{\pi^*} & c^\infty(Q_{j+1})
 \end{array}
 \quad (B)$$

$$(C) \quad \begin{array}{ccc} C_{z_1^0, z_2^0}^{0, \infty}(Z_1 \times Z_2, C^\infty(Y)) & \xrightarrow{\pi_*^*} & C_{z_1^0, z_2^0}^{0, \infty}(Z_1 \times Z_2, C^\infty(Q_1)) \\ \downarrow \text{ev}(Y) & & \downarrow \text{ev} \\ C^\infty(Y) & \xrightarrow{\pi^*} & C^\infty(Q_1) \end{array}$$

$[\pi_*^*$ est défini comme suit : On considère le germe constant de valeur π :

$$\pi \in C_{z_1^0, z_2^0}^{0, \infty}(Z_1 \times Z_2, C^\infty(Q_{j+1}, Q_j))$$

et on lui fait jouer le même rôle qu'à $F \dots$]

LEMME 2.2.2 : "(A) possède la propriété de Weierstrass".

Démonstration : Vu que chaque $F_1(z_1, z_2)$ est un plongement le lemme 2.2.1 nous dit que

$(F_1)_*^*$ est surjective. Donc tout module

$C_{z_1^0, z_2^0}^{0, \infty}(Z_1 \times Z_2, C^\infty(X))$ -fini est automatiquement

$C_{z_1^0, z_2^0}^{0, \infty}(Z_1 \times Z_2, C^\infty(Q_N))$ -fini q.e.d.

Le fait que (B) et (C) possèdent la propriété de Weierstrass résulte du lemme suivant :

LEMME 2.2.3 : "Soit $X \hookrightarrow Y \times R$ une variété compacte, à bord pas nécessairement vide, et considérons :

$$\begin{array}{ccc} X & \hookrightarrow & Y \times R \\ \pi|_X \searrow & & \swarrow \pi \\ & Y & \end{array}$$

Le diagramme :

$$\begin{array}{ccc}
 C_{z_1^0, z_2^0}^{0, \infty}(Z_1 \times Z_2, C^\infty(Y)) & \xrightarrow{(\pi|X)_*^*} & C_{z_1^0, z_2^0}^{0, \infty}(Z_1 \times Z_2, C^\infty(X)) \\
 \downarrow \text{ev}(y) & & \downarrow \text{ev}(x) \\
 C^\infty(Y) & \xrightarrow{(\pi|X)_*^*} & C^\infty(X) ,
 \end{array}$$

possède la propriété de Weierstrass".

Démonstration : On remarque^{que} notre $(\pi|X)_*^*$ est égal à la composition d'applications :

$$C_{z_1^0, z_2^0}^{0, \infty}(Z_1 \times Z_2, C^\infty(Y)) \xrightarrow{\alpha} C_{z_1^0, z_2^0}^{0, \infty}(Z_1 \times Z_2, C^\infty(Y \times R)) \xrightarrow{\beta} C_{z_1^0, z_2^0}^{0, \infty}(Z_1 \times Z_2, C^\infty(X))$$

où la flèche α consiste à partir d'un $\phi(z_1, z_2, y)$ qu'on considère comme fonction en (z_1, z_2, y, t) (t "muet") et β consiste à faire une restriction : $\phi(z_1, z_2, y, t)|_{(Z_1 \times Z_2 \times X)}$. D'après le lemme 2.2.1, β est surjective.

Soit Θ un $C_{z_1^0, z_2^0}^{0, \infty}(Z_1 \times Z_2, C^\infty(X))$ -module fini (donc Θ est automatiquement $C_{z_1^0, z_2^0}^{0, \infty}(Z_1 \times Z_2, C^\infty(Y \times R))$ -fini).

On suppose que :

$\Theta/\pi_*^*(\text{Ker ev}(y))$ Θ est $C_{z_1^0, z_2^0}^{0, \infty}(Z_1 \times Z_2, C^\infty(Y))$ -fini et on veut en déduire que Θ lui-même est $C_{z_1^0, z_2^0}^{0, \infty}(Z_1 \times Z_2, C^\infty(Y))$ - fini.

Soit $t \in C_{z_1^0, z_2^0}^{0, \infty}(Z_1 \times Z_2, C^\infty(Y \times R))$ le germe dont la valeur est constamment égale à la projection canonique :

$$Y \times R \xrightarrow{t} R \quad (t(y, t) = t) .$$

Soit $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in \Theta$ un système d'éléments qui engendrent Θ en tant que $C_{z_1^0, z_2^0}^{0, \infty}(Z_1 \times Z_2, C^\infty(X))$ -module, et $\Theta/\pi_*^*(\ker \text{ev}(y)) \in \Theta$, en tant que $C_{z_1^0, z_2^0}^{0, \infty}(Z_1 \times Z_2, C^\infty(Y))$ -module.

Désignons, par abus de langage,

$$\beta(t) \in C_{z_1^0, z_2^0}^{0, \infty}(Z_1 \times Z_2, C^\infty(X)),$$

par t .

Il existe des :

$$c_{ij} \in \pi_*^* C_{z_1^0, z_2^0}^{0, \infty}(Z_1 \times Z_2, C^\infty(Y)),$$

$$\gamma_{ij} \in \pi_*^*(\ker \text{ev}(y)) \cdot C_{z_1^0, z_2^0}^{0, \infty}(Z_1 \times Z_2, C^\infty(X)).$$

tels que :

$$(L) \quad t\alpha_i = \sum_j c_{ij} \alpha_j + \sum_j \gamma_{ij} \alpha_j.$$

Soient $y(x), t(x)$ les coordonnées de $x \in X \hookrightarrow Y \times \mathbb{R}$. On a :

$$\gamma_{ij} = \gamma_{ij}(z_1, z_2, x) \quad \text{où} \quad \gamma_{ij}(z_1^0, z_2^0, x) \equiv 0.$$

D'après le lemme 2.2.1, $\exists \eta_{ij}(z_1, z_2, y, t) \in C^{0, \infty}$, tel que :

$$a) \quad \eta_{ij}|_{Z_1 \times Z_2 \times X} = \gamma_{ij} \quad (\text{c'est-à-dire que}$$

$$\eta_{ij}(z_1, z_2, y(x), t(x)) = \gamma_{ij}(z_1, z_2, x).$$

b) $\eta_{ij}(z_1^0, z_2^0, y, t) \equiv 0$. (ici on utilise le fait que l'extension E du lemme 2.2.1 est linéaire, différentiable, continue).

Soit :

$$\Gamma(z_1, z_2, y, t) = \det(\delta_{ij}t - c_{ij}(z, y) - \eta_{ij}(z, y, t)) \in$$

$$\in C_{z_1^0, z_2^0}^{0, \infty}(Z_1 \times Z_2, C^\infty(Y \times R)) .$$

On a :

$$\Gamma(z, y, t) = t^k + \sum_{i=0}^{k-1} \lambda_i(z, y) t^i + \rho(z_1, z_2, y, t) , \quad \text{où :}$$

$$\rho(z_1^0, z_2^0, y, t) = 0 \quad (\rho \text{ provient de tous les termes qui contiennent des } \eta_{ij}) .$$

On introduit des variables auxiliaires $(u_0, \dots, u_{k-1})$, et le polynôme générique :

$$t^k + \sum_{i=0}^{k-1} u_i t^i .$$

Introduisons, aussi, le polynôme en t :

$$\Gamma_1(y, u, t) = t^k + \sum_{i=0}^{k-1} (u_i + \lambda_i(z_1^0, z_2^0, y)) t^i .$$

D'après el théorème de division de Mather, toute fonction $\psi \in C^\infty$, en (y, u, t) peut être divisée (avec reste) par Γ_1 . En plus, cette division peut être effectuée de telle façon que le quotient et le reste dépendent linéairement de ψ et que, si ψ dépend d'une manière $C^{0, \infty}$ de certains paramètres, il en est de même pour le quotient et le reste.

En germifiant autour de (z_1^0, z_2^0) , on peut donc écrire :

$$\rho(z, y, t) = \Gamma_1(y, u, t) q(z, y, u, t) + \sum_{i=0}^{k-1} H_i(z, y, u) t^i ,$$

où : $q, H_i \in C_{z_1^0, z_2^0}^{0, \infty}(Z_1 \times Z_2, \dots)$ (conséquence du caractère $C^{0, \infty}$ de la division)

et :

$$q(z_1^0, z_2^0, y, u, t) = 0 = H_i(z_1^0, z_2^0, u, y) \quad (\text{conséquence de la linéarité de la division}).$$

On a :

$$\begin{aligned}
\Gamma(z, y, t) &= t^k + \sum_{i=0}^{k-1} \lambda_i(z, y) t^i + \rho = \\
&= t^k + \sum_{i=0}^{k-1} \lambda_i(z, y) t^i + \Gamma_1 q + \sum_{i=0}^{k-1} H_i t^i + \sum_{i=0}^{k-1} (u_i + \lambda_i(z^0)) t^i - \sum_{i=0}^{k-1} (u_i + \lambda_i(z^0)) t^i = \\
&= \underbrace{\left(t^k + \sum_{i=0}^{k-1} (u_i + \lambda_i(z^0)) t^i \right)}_{\Gamma_1} (1 + q) + \sum_{i=0}^{k-1} \underbrace{(\lambda_i(z, y) - \lambda_i(z^0, y) - u_i + H_i(z, y, u))}_{E_i(z, y, u)} t^i .
\end{aligned}$$

Remarquons que :

(a) $E_i(z^0, y, 0) \equiv 0$ (c'est pour ça qu'on a introduit $\lambda_i(z^0, y)$).

$$(b) \quad \frac{\partial E_i(z^0, y, u)}{\partial u_j} = -\delta_{ij} + \frac{\partial H_i(z^0, y, u)}{\partial u_j} = \delta_{ij} .$$

(puisque $H_i(z^0, \dots) = 0$) .

Je rappelle la version paramétrée suivante du théorème classique des fonctions implicites :

THEOREME des fonctions implicites : " Soient (Z_1, z_1^0) un germe d'espace topologique, (Z_2, z_2^0) un germe de variété C^∞ , Y une variété C^∞ compacte et R_k l'espace euclidien de dimension k .

Soit $\Phi \in C_{z_1^0, z_2^0}^{0, \infty}(Z_1 \times Z_2, C^\infty(Y \times R_k, R_k))$ tel que :

(i) $\Phi(z_1^0, z_2^0, y, 0) = 0$. ($\forall y$)

(ii) Pour $y \in Y$ fixé considérons

$$\Phi_y(u) = \Phi(z_1^0, z_2^0, y, u) \in C^\infty(R_k, R_k) .$$

On suppose que

$$D\Phi_y(0) \in L(R_k, R_k) \text{ est invertible.}$$

Dans ces conditions, il existe un :

$$\phi \in C_{z_1^0, z_2^0}^{0, \infty}(Z_1 \times Z_2, C^\infty(Y, R_k)),$$

tel que :

$R_k \ni 0 \equiv \Phi(z_1, z_2, y, \phi(z_1, z_2, y))$ " . (Ici Φ est représenté par une fonction $\Phi(z_1, z_2, y, u) \in R_k, u \in R_k$).

On peut donc résoudre (en u) les équations :

$$E_i(z, y, u) \equiv 0,$$

c'est-à-dire trouver $\phi \in C_{z_1^0, z_2^0}^{0, \infty}(Z_1 \times Z_2, C^\infty(Y, R_k))$ tel que

$$E_i(z, y, \phi(z, y)) \equiv 0.$$

On a, alors :

$$\Gamma(z, y, t) = (t^k + \sum_i (\phi_i(z, y) + \lambda_i(z^0, y)) t^i) \cdot U$$

où U est une unité de l'anneau $C_{z_1^0, z_2^0}^{0, \infty}(Z_1 \times Z_2, C^\infty(Y \times R))$.

D'après Cramer, appliqué au système linéaire (L) : $\Gamma \cdot \alpha_i = 0 \in \Theta$.

Donc Θ est en fait un

$$C_{z_1^0, z_2^0}^{0, \infty}(Z_1 \times Z_2, C^\infty(Y \times R)) / \Gamma C_{z_1^0, z_2^0}^{0, \infty}(Z_1 \times Z_2, C^\infty(Y \times R)).$$

- module (fini) (la multiplication scalaire avec des éléments de

$C_{z_1^0, z_2^0}^{0, \infty}(Z_1 \times Z_2, C^\infty(Y \times R))$ se factorise pour

$$C_{z_1^0, z_2^0}^{0, \infty}(Z_1 \times Z_2, C^\infty(Y \times R)) / \Gamma \dots).$$

Considérons aussi :

$$C_{z_1^0, z_2^0}^{0, \infty}(Z_1 \times Z_2, C^\infty(Y)) \longrightarrow C_{z_1^0, z_2^0}^{0, \infty}(Z_1 \times Z_2, C^\infty(Y \times R)) \rightarrow C_{z_1^0, z_2^0}^{0, \infty}(Z_1 \times Z_2,$$

$C^\infty(Y \times R) / \Gamma$, qui munit $C_{z_1^0, z_2^0}^{0, \infty}(Z_1 \times Z_2, C^\infty(Y \times R) / \Gamma)$,

d'une structure de $C_{z_1^0, z_2^0}^{0, \infty}(Z_1 \times Z_2, C^\infty(Y))$ -module. Mais, puisque U est une uni-té, on a un isomorphisme canonique :

$$\begin{aligned} C_{z_1^0, z_2^0}^{0, \infty}(Z_1 \times Z_2, C^\infty(Y \times R) / \Gamma) &= \\ &= C_{z_1^0, z_2^0}^{0, \infty}(Z_1 \times Z_2, C^\infty(Y \times R) / (t^k + \sum_i (\phi_i(z, y) + \lambda_i(z^0, y)) t^i)). \end{aligned}$$

Le théorème de division de Mather nous dit que ce dernier anneau est un

$C_{z_1^0, z_2^0}^{0, \infty}(Z_1 \times Z_2, C^\infty(Y))$ - module fini.

Donc, Θ est aussi $C_{z_1^0, z_2^0}^{0, \infty}(Z_1 \times Z_2, C^\infty(Y))$ - fini.

4) Démonstration du théorème de stabilité : (Applications du théorème de préparation) : Soit P une variété C^∞ compacte et :

$$F \in C_{z_1^0, z_2^0}^{0, \infty}(Z_1 \times Z_2, C^\infty(X \times P, Y)) = C_{z_1^0, z_2^0}^{0, \infty}(Z_1 \times Z_2, C_P^\infty(X \times P, Y \times P))$$

(où $C_P^\infty(X \times P, Y \times P) \subset C^\infty(X \times P, Y \times P)$ désignera dorénavant l'ensemble des applications compatibles avec la projection sur P).

On considère le "fibré" vectoriel : (il s'agit d'un germe ...)

$$F^*TY \rightarrow Z_1 \times Z_2 \times X \times P$$

et l'ensemble de ses sections $C^{0, \infty}$:

$$\Gamma_{z_1^0, z_2^0}^{0, \infty}(F^*TY) \subset C_{z_1^0, z_2^0}^{0, \infty}(Z_1 \times Z_2, C^\infty(X \times P, TY))$$

(où $\eta \in \Gamma_{z_1^0, z_2^0}^{0, \infty}(F^*TY)$ est un relèvement $C^{0, \infty}$:

$$\begin{array}{ccc}
 & & Z_1 \times Z_2 \times TY \\
 & \nearrow \eta & \downarrow \\
 Z_1 \times Z_2 \times P \times X & \xrightarrow{F} & Z_1 \times Z_2 \times Y.
 \end{array}$$

$\Gamma_{z_1^0, z_2^0}^{0, \infty}(F^*TY)$ possède une structure naturelle de $C_{z_1^0, z_2^0}^{0, \infty}(Z_1 \times Z_2, C^\infty(X \times P))$ - module, fini. (pour tout $x \in X \times P$ il existe un voisinage $x \in U \subset X \times P$ tel que :

$\Gamma_{z_1^0, z_2^0}^{0, \infty}(F^*TY|U) = [C_{z_1^0, z_2^0}^{0, \infty}(Z_1 \times Z_2, C^\infty(U))]^n$ avec $n < \infty$, e.a.d.s. Ceci implique la finitude...)

On va considérer

$$B = C_{z_1^0, z_2^0}^{0, \infty}(Z_1 \times Z_2, C^\infty(P, \Gamma^\infty(TX))) = \Gamma_{z_1^0, z_2^0}^{0, \infty}(\pi^* TX),$$

qui est un $C_{z_1^0, z_2^0}^{0, \infty}(Z_1 \times Z_2, C^\infty(P \times X))$ - module (fini) (dont les éléments ^{sont} des ξ :

$$\begin{array}{ccc}
 Z_1 \times Z_2 \times P \times TX & & \\
 \pi \downarrow & \uparrow \xi & \\
 Z_1 \times Z_2 \times P \times X & & , \text{ et}
 \end{array}$$

$$A = C_{z_1^0, z_2^0}^{0, \infty}(Z_1 \times Z_2, C^\infty(P, \Gamma^\infty(TY))) = \Gamma_{z_1^0, z_2^0}^{0, \infty}(\pi^* TY),$$

qui est un $C_{z_1^0, z_2^0}^{0, \infty}(Z_1 \times Z_2, C^\infty(P \times Y))$ - module fini.

On a un morphisme $C_{z_1^0, z_2^0}^{0, \infty}(Z_1 \times Z_2, C^\infty(P \times Y))$ - linéaire :

$$\alpha_F : \Gamma_{z_1^0, z_2^0}^{0, \infty}(\pi^* TX) \longrightarrow \Gamma_{z_1^0, z_2^0}^{0, \infty}(F^* TY),$$

défini par : $\alpha_F(\xi) = \xi \circ F$

(où :

$$\begin{array}{ccc}
 & & Z_1 \times Z_2 \times P \times TY \\
 & \nearrow \alpha_F(\xi) & \downarrow \pi \\
 Z_1 \times Z_2 \times P \times X & \xrightarrow{F} & Z_1 \times Z_2 \times P \times Y \quad .) \quad , \\
 & & \uparrow \xi
 \end{array}$$

et un morphisme $C_{z_1^0, z_2^0}^{0, \infty}(Z_1 \times Z_2, C^\infty(P \times X))$ - linéaire

$$\beta_F : \Gamma_{z_1^0, z_2^0}^{0, \infty}(\pi^*TX) \longrightarrow \Gamma_{z_1^0, z_2^0}^{0, \infty}(F^*TY) ,$$

défini par : $\beta_F(\eta) = TF \circ \eta$.

(où :

$$\begin{array}{ccc} Z_1 \times Z_2 \times P \times TX & \xrightarrow{TF} & Z_1 \times Z_2 \times P \times TY \\ \pi \downarrow \quad \uparrow \eta & & \nearrow \beta_F(\eta) \\ Z_1 \times Z_2 \times P \times X & & \end{array} .)$$

Considérons le $C_{z_1^0, z_2^0}^{0, \infty}(Z_1 \times Z_2, C^\infty(P \times X))$ - module fini :

$$C = \Gamma_{z_1^0, z_2^0}^{0, \infty}(F^* TY) / \text{Image } \beta_F$$

et l'application :

$$\begin{array}{ccccc} A & \xrightarrow{\alpha_F} & \Gamma_{z_1^0, z_2^0}^{0, \infty}(F^* TY) & \longrightarrow & C \\ & & & & \uparrow \\ & & & & \alpha_F \end{array}$$

Remarquons que l'évaluation $ev(z^0)$ induit une application :

$$\bar{\alpha}_F(z^0) : C^\infty(P, \Gamma^\infty(TY)) \rightarrow \Gamma^\infty(F(z^0)^* TY) / \text{Im } \beta_F(z^0)$$

où $F(z^0)^* TY$ désigne le fibré induit :

$$F(z^0)^* TY \rightarrow X \times P ;$$

et $\beta_F(z^0)$ est l'application évidente :

$$\beta_{F(z^0)} : C^\infty(P, \Gamma^\infty(TX)) \rightarrow \Gamma^\infty(F(z^0)^* TY) .$$

LEMME 2.3. : " $\alpha_{F(z^0)} + \beta_{F(z^0)}$ surjective $\implies \alpha_F + \beta_F$ surjective".

[Remarque : Heuristiquement :

$$\Gamma_{z_1^0, z_2^0}^{0, \infty}(F^*TY) = T_F C_{z_1^0, z_2^0}^{0, \infty}(Z_1 \times Z_2, C_P^\infty(X \times P, Y \times P)) =$$

= "l'espace tangent au point F , de la "variété"" On a une "action différentiable" :

$$\Phi : [C_{z_1^0, z_2^0}^{0, \infty}(Z_1 \times Z_2, C^\infty(P, \text{Diff } X)) \oplus C_{z_1^0, z_2^0}^{0, \infty}(Z_1 \times Z_2, C^\infty(P, \text{Diff } Y))] \times \\ \times C_{z_1^0, z_2^0}^{0, \infty}(Z_1 \times Z_2, C_P^\infty(X \times P, Y \times P)) \rightarrow C_{z_1^0, z_2^0}^{0, \infty}(Z_1 \times Z_2, C_P^\infty(X \times P, Y \times P)),$$

et son orbite Φ_F . Alors :

$$\Gamma_{z_1^0, z_2^0}^{0, \infty}(\pi^*TX) = T_{\text{id}X}(C_{z_1^0, z_2^0}^{0, \infty}(Z_1 \times Z_2, C^\infty(P, \text{Diff } X))) \text{ et de même pour } Y.$$

Enfin : $\beta_F \oplus \alpha_F = T_{\text{id}X + \text{id}Y} \Phi_F$. Notre lemme dit que :

$$T_{\text{id}X + \text{id}Y} \Phi_{F(z^0)} \text{ surjectif} \implies T_{\text{id}X + \text{id}Y} \Phi_F \text{ surjectif},$$

donc une "surjection ponctuelle" $\implies$ "surjection dans un petit voisinage". Ceci est "l'essence même" du théorème de préparation de Weierstrass].

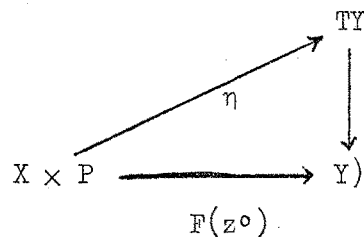
Démonstration : Comme dans le lemme 2.2 on considère le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} C_{z_1^0, z_2^0}^{0, \infty}(Z_1 \times Z_2, C^\infty(Y \times P)) & \xrightarrow{\quad F_*^* \quad} & C_{z_1^0, z_2^0}^{0, \infty}(Z_1 \times Z_2, C^\infty(X \times P)) \\ \downarrow \text{ev}(y) & & \downarrow \text{ev}(x) \\ C^\infty(Y \times P) & \xrightarrow{\quad F(z^0)_* \quad} & C^\infty(X \times P) \end{array} .$$

On peut définir :

$$\text{Ev}(z^0) : \Gamma^\infty(F^*TY) \rightarrow \Gamma^\infty(F(z^0)^*TY)$$

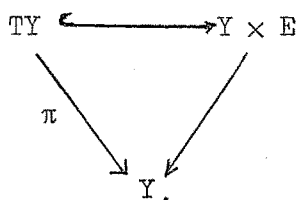
(où l'on rappelle que $\eta \in \Gamma^\infty(F(z^0)^*TY)$ est un relèvement C^∞ :



Je dis que :

$$\boxed{\text{Ker Ev}(z^0) = \text{Ker ev}(x) \cdot \Gamma^\infty(F^*TY)} .$$

(En effet, prenons $P = \text{pt}$, pour simplifier les notations. Il existe un espace vectoriel E (de dimension suffisamment grande) et un monomorphisme (de fibrés vectoriels), C^∞ en TY :

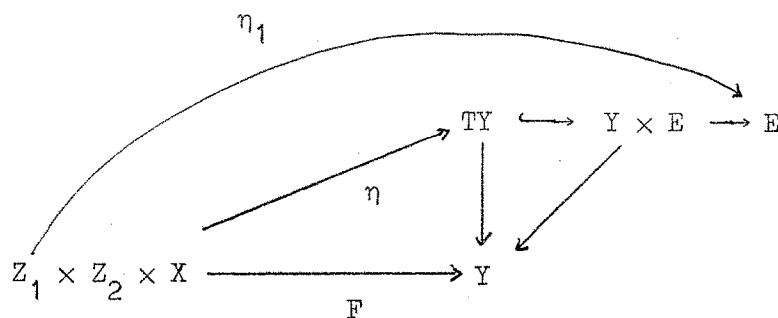


E étant muni de sa structure euclidienne, on considère pour chaque fibre $y \times E \cong E$ la projection

$$p(y): y \times E \longrightarrow \pi^{-1}(y) .$$

$p(y)$ dépend d'une manière C^∞ de $y \in Y$.

On considère $\eta \in \Gamma^\infty(F^*TY)$ et :



On a : $\eta(z_1, z_2, x) = [F(z, x), \eta_1(z, x)]$.

Si $\eta \in \text{Ker Ev}(z^0) \implies \eta_1(z^0, x) \equiv 0$.

En procédant comme dans le lemme 2.1, on trouve des

$\phi_1, \dots, \phi_m \in \text{Ker ev}(x) \subset C_{z_1^0, z_2^0}^{0, \infty}(Z_1 \times Z_2, C^\infty(X))$; $\eta^1, \dots, \eta^m \in C_{z_1^0, z_2^0}^{0, \infty}(Z_1 \times Z_2, C^\infty(X, E))$, tels que $\eta_1(z, x) = \sum_i \phi_i(z, x) \cdot \eta_i^1(z, x)$. On a :

$$\eta(z, x) = \sum_i \underbrace{[F(z, x), \phi_i(z, x) \cdot \eta_i^1(z, x)]}$$

ceci est dans $C_{z_1^0, z_2^0}^{0, \infty}(Z_1 \times Z_2, C^\infty(X, Y \times E))$,

ϕ_i est un scalaire, η_i^1 un vecteur (de E).

Considérons :

$$p(F(z, x)) [F(z, x), \phi_i(z, x) \cdot \eta_i^1(z, x)] \in \Gamma^\infty(F^*TY), \text{ et}$$

$$p(F(z, x)) [F(z, x), \eta_i^1(z, x)] \in \Gamma^\infty(F^*TY).$$

Puisque ϕ_i est un scalaire et $p(\dots)$ est $\mathbb{R}$ -linéaire :

$$p(F(z, x)) [F(z, x), \phi_i(z, x) \eta_i^1(z, x)] = \phi_i(z, x) \cdot [p(F(z, x)) [F(z, x), \eta_i^1(z, x)]], \text{ e.a.d.s.}$$

On remarque que : $\alpha_{F(z^0)} \oplus \beta_{F(z^0)}$ surjective

$$\iff \text{Image } (\alpha_F \oplus \beta_F) + \text{Ker Ev}(z^0) = \Gamma^\infty(F^*TY).$$

$$\iff \text{Image } \alpha_F + \text{Image } \beta_F + \text{Ker ev}(x) \cdot \Gamma^\infty(F^*TY) = \Gamma^\infty(F^*TY).$$

Ceci veut dire que chaque classe $\Gamma^\infty(F^*TY) \bmod \text{Image } \beta_F$ peut être atteinte à partir de $\text{Image } \alpha_F + \text{Ker ev}(x) \cdot \Gamma^\infty(F^*TY)$ donc :

$$\bar{\alpha}_F(A) + \text{Ker ev}(x) \cdot C = C.$$

D'après le lemme 2 : $\bar{\alpha}_F(A) = C$. e.a.d.s.

COROLLAIRE 2.3.1. : "Soit $f \in C^\infty(X, Y)$ une application infinitésimalement stable. Soit P' une variété compacte et pour chaque

$$\phi \in C^\infty(P', \Gamma^\infty(TX) \oplus \Gamma^\infty(TY)),$$

définissons l'application suivante (désignée par $\tau(\phi)$):

$$\begin{array}{c} P' \xrightarrow{\phi} \Gamma^\infty(TX) \oplus \Gamma^\infty(TY) \xrightarrow{\beta_F + \alpha_f} \Gamma^\infty(f^*TY) \\ \downarrow \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \uparrow \\ \tau(\phi) \end{array}$$

Alors : $\tau : C^\infty(P', \Gamma^\infty(TX) \oplus \Gamma^\infty(TY)) \rightarrow C^\infty(P', \Gamma^\infty(f^*TY))$ est surjective.

(On remarque ici, que si $P' \times X \xrightarrow{\pi} X$ est la projection naturelle :

$$C^\infty(P, \Gamma^\infty(TX)) = \Gamma^\infty(\pi^*TX), \text{ e.a.d.s.}).$$

Démonstration : Dans le lemme 2.3 prenons $Z_1 = \text{pt}$, $P = \text{pt}$, $(Z_2, z_2^0) \hookrightarrow P' \ni z_2^0$
($Z_2 =$ le germe de P' au point z_2^0), $F(z) \equiv f$.

La stabilité infinitésimale veut dire que $\alpha_f \oplus \beta_f = \alpha_{F(z^0)} \oplus \beta_{F(z^0)}$ est surjective, donc

$$C_{z^0}^\infty(Z_2, \Gamma^\infty(TX) \oplus \Gamma^\infty(TY)) \rightarrow C_{z^0}^\infty(Z_2, \Gamma^\infty(f^*TY))$$

est surjective. Ensuite on utilise une partition C^∞ de l'unité, sur P' , e.a.d.s.

COROLLAIRE 2.3.2. : "Soit $f \in C^\infty(X, Y)$ une application infinitésimalement stable, (Z, z^0) un germe d'espace topologique et

$$F \in C_{z^0}^0(Z, C^\infty(X \times I, Y))$$

telle que $F(z^0)(x, t) = f(x) \in Y$ ($\forall x \in X, t \in I$).

Alors :

$$\beta_F \oplus \alpha_F : \Gamma_{Z^0}^{0,\infty}(\pi^* TX) \oplus \Gamma_{Z^0}^{0,\infty}(\pi^* TY) \rightarrow \Gamma_{Z^0}^{0,\infty}(F^* TY)$$

est surjective".

[Remarque : $\eta \in \Gamma_{Z^0}^{0,\infty}(F^* TY)$ est une flèche :

$$\begin{array}{ccc} & & Z \times TY \\ & \nearrow \eta & \downarrow \\ Z \times I \times X & \xrightarrow{F} & Z \times Y \end{array}] .$$

Démonstration : D'après le lemme précédant :

$$\tau : C^\infty(I, \Gamma^\infty(TX)) \oplus C^\infty(I, \Gamma^\infty(TY)) \longrightarrow C^\infty(I, \Gamma^\infty(F^*TY))$$

est surjective. Mais, puisque $F(Z^0)$ est l'application :

$$X \times I \longrightarrow X \xrightarrow{f} Y ,$$

on a que $\alpha_{F(Z^0)}$

$$C^\infty(I, \Gamma^\infty(TY)) = \Gamma^\infty(\pi^* TY) \xrightarrow{\alpha_{F(Z^0)}} \Gamma^\infty(\pi^* f^* TY) = C^\infty(I, \Gamma^\infty(f^* TY)) ,$$

s'identifie à :

$$I \xrightarrow{\psi} \Gamma^\infty(TY) \xrightarrow{\alpha_f} \Gamma^\infty(f^* TY) .$$

Ceci veut dire que : $\tau = \alpha_{F(Z^0)} \oplus \beta_{F(Z^0)}$, donc on peut réappliquer le lemme 2.3.

LEMME 2.4 : "Soit $f \in C^\infty(X, Y)$. Il existe un voisinage $f \in Z \subset C^\infty(X, Y)$ et une application continue : $F : Z \longrightarrow C_I^\infty(X \times I, Y \times I)$ telle que :

a) $F(g) \in C_I^\infty(X \times I, Y \times I) = C^\infty(I, C^\infty(X, Y))$ a la propriété $F(g)(0) \equiv f$,

$$F(g)(1) = g.$$

$$b) F(f)(t) \equiv f.$$

La démonstration est un exercice facile.

5) Fin de la démonstration.

Définition. "Soit $f \in C^\infty(X, Y)$. Par définition f est homotopiquement stable si chaque fois qu'on se donne un germe d'espace topologique (Z, z^0) et un :

$$F \in C_{z^0}^{0, \infty}(Z, C^\infty(I, C^\infty(X, Y)))$$

(où l'on remarque que :

$$C^\infty(I, C^\infty(X, Y)) = C_I^\infty(X \times I, Y \times I)$$

tel que $F(z^0)(t) = F(z)(0) = f \quad (\forall t \in I)$, il existe des

$$H \in C_{z^0}^{0, \infty}(Z, C^\infty(I, \text{Diff}^\infty(X)))$$

$$G \in C_{z^0}^{0, \infty}(Z, C^\infty(I, \text{Diff}^\infty(Y)))$$

tels que a) $H(z^0)(t) \equiv H(z)(0) = \text{id } X$

$$b) G(z^0)(t) \equiv G(z)(0) = \text{id } Y$$

$$c) F(z, t) = G(z, t) \circ F(z, 0) \circ H^{-1}(z, t) = G(z, t) \circ f \circ H^{-1}(z, t) "$$

Le lemme 2.4 nous dit que f homotopiquement stable $\implies f$ stable.

Notre théorème du premier chapitre est donc impliqué par le :

THEOREME (Mather) : " Si X, Y sont compactes, $f \in C^\infty(X, Y)$, les deux conditions suivantes sont équivalentes :

I. f est infinitésimalement stable.

II. f est homotopiquement stable."

Démonstration du II $\implies$ I : Si $\eta \in \Gamma^{\infty}(f^*TY)$, il existe un $\phi \in C^\infty(X, Y)$, tel que $\phi(0) = f$, $\left. \frac{\partial \phi}{\partial t} \right|_{t=0} = \eta$. Soit λ_u l'application linéaire unique :

$$[0, \mu] \longrightarrow [0, 1] \quad .$$

Prenons $(Z, z^0) = \text{le germe } (I, 0)$ et

$$F \in C_0^\infty(I, C^\infty(I, C^\infty(X, Y)))$$

défini par :

$$F(z)(t, x) = \phi(\lambda_z(t), x) \quad .$$

On remarque que :

$$\left. \frac{\partial F(z)}{\partial t} \right|_{t=0} = k(z) \cdot \eta \quad (k(z) \in R-(0))$$

En appliquant la définition de la stabilité homotopique et en transformant H, G en "champs de vecteurs" on trouve que $\exists z > 0$ t.q. :

$$k(z) \cdot \eta \in \text{Image } \alpha_f + \text{Image } \beta_f$$

ce qui implique $\eta \in \text{Image } \alpha_f + \text{Image } \beta_j$.

Démonstration de II $\Leftarrow$ I : Soit F comme dans la définition de f homotopiquement stable. On considère :

$$\begin{array}{ccc} & \xrightarrow{\frac{\partial F}{\partial t}} & \pi^*TY \\ & & \downarrow \\ Z \times I \times X & \xrightarrow{F} & I \times Y , \end{array}$$

avec $\frac{\partial F}{\partial t} \in \Gamma_{z^0}^{0, \infty}(F^*TY)$.

Vu que f est infinitésimalement stable, le corollaire 2.3.2 nous fournit des

$$\xi \in \Gamma_{z^0}^{0, \infty}(\pi^*TX) , \quad \eta \in \Gamma_{z^0}^{0, \infty}(\pi^*TY)$$

tels que $\alpha_F(\eta) + \beta_F(\xi) = \frac{\partial F}{\partial t}$. ($\times \times$)

(Il faut penser au diagramme :

$$\begin{array}{ccc}
 Z \times I \times TX & \xrightarrow{TF} & Z \times I \times TY \\
 \downarrow \pi & \nearrow \beta_F(\xi) = TF \circ \xi & \downarrow \pi \\
 Z \times I \times X & \xrightarrow[\beta_F]{\eta \circ F = \alpha_F(\eta)} & Z \times I \times Y
 \end{array}$$

Le théorème fondamental sur les systèmes dynamiques nous fournit des H, G , satisfaisant aux conditions a), b) de la définition de la stabilité homotopique, et tels que :

$$\frac{\partial H}{\partial t} \circ H^{-1} = -\xi, \quad \frac{\partial G}{\partial t} \circ G^{-1} = \eta$$

La condition (xx) et le lemme 1 impliquent c) (de la définition de la stabilité homotopique) q.e.d.

Remarques finales :

1) On a prouvé jusqu'à présent : stabilité infinitésimale $\iff$ stab. homotopique $\implies$ stabilité. On va prouver plus tard que :

$$\text{stabilité} \implies \text{stab. inf.}$$

2) Le résultat qu'on a prouvé implique le corollaire suivant :

"Soient X, Y des variétés compactes, $f \in C^\infty(X, Y)$ une application infinitésimalement stable et

$$\Phi_f : \text{Diff } X \times \text{Diff } Y \rightarrow C^\infty(X, Y)$$

(l'application) l'orbite de f .

Alors : a) Image $\Phi_f \subset C^\infty(X, Y)$ est un ouvert.

b) $\Phi_f : \text{Diff } X \times \text{Diff } Y \longrightarrow \text{Image } \Phi_f$ est une fibration localement triviale".

En effet, soit $\text{Diff } X \times \text{Diff } Y \supset G$ le groupe d'intertie de f , qui est clairement fermé. $\text{Image } \Phi_f$, s'identifie à l'espace-quotient $\text{Diff } X \times \text{Diff } Y/G$ et le théorème de stabilité nous assure que :

$$\text{Diff } X \times \text{Diff } Y \xrightarrow{p} \text{Diff } X \times \text{Diff } Y/G$$

possède des sections locales, Il s'ensuit que p est une fibration localement triviale [v. Steenrod, Fibre bundles, Ch.I, par.7].

Exercice : Soient X, Y des variétés pas nécessairement compactes et $f \in C^\infty(X, Y)$ propre. Montrer que f inf. stable $\implies f$ stable.

-:-:-:-:-

CHAPITRE III.

-:-:-

GERMES D'APPLICATIONS C^∞ . (STABILITE, JETS k -SUFFISANTS, e.a.d.s.)

1) Stabilité des germes.

Soit $f \in C^\infty(X, Y)$ et $x \in X$; $C_x^\infty(X, Y)$ = l'espace des germes d'applications C^∞ , $X \rightarrow Y$, au point x ; f_x = le germe de f au point x : $f_x \in C_x^\infty(X, Y)$; $C_{x,y}^\infty(X, Y)$ = l'espace des germes tels que $f(x) = y$.

Soient $f_x \in C_{x,y}^\infty(X, Y)$, $f'_{x'} \in C_{x',y'}^\infty(X', Y')$.

Par définition f_x et $f'_{x'}$ sont équivalents, s'il existe des germes de difféomorphismes (locaux)

$$h_x \in \text{Diff}_{x,x'}^\infty(U, U')$$

$$g_y \in \text{Diff}_{y,y'}^\infty(V, V')$$

(où U, U', V, V' sont des voisinages ouverts :

$x \in U \subset X$, $x' \in U' \subset X'$, $y \in V \subset Y$, $y' \in V' \subset Y'$), tels que :

$$g_y \circ f_x = f'_{x'} \circ h_x.$$

(On pense ici au diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} (U, x) & \xrightarrow{\quad f_x \quad} & (V, y) \\ \downarrow h_x & & \downarrow g_y \\ (U', x') & \xrightarrow{\quad f'_{x'} \quad} & (V', y') \end{array}$$

où les flèches brisées désignent des germes d'applications).

DEFINITION : Le germe f_x est stable (ou, $f \in C^\infty(X,Y)$ est stable au point x) si $\forall$ voisinage ouvert (assez petit) $x \in U \subset X$, il existe un voisinage $N : f|_U \in N \subset C^\infty(U,Y)$ tel que $\forall g \in N \quad \exists x'(g) = x' \in U$ avec la propriété $g_{x'}$ équivalent à f_x .

On remarquera que ceci est une propriété intrinsèque du germe f_x . (c'est-à-dire que, si g est une autre application... telle que $g_x = f_x$ et si f est stable au point $x \implies g$ est stable au point x).

[On a besoin d'une définition relativement compliquée, comme celle qu'on vient de donner, parce que en déformant un peu une singularité qu'on a envie d'appeler "stable" (comme par exemple $y = x^2$), le "type" de la singularité ne change pas, mais la source et le but se trouvent, en général, un peu déplacés. On pourrait donner une définition moins compliquée si on imposait tout le temps la condition $g(x) = y$. Mais ceci serait trop restrictif pour les applications de la théorie].

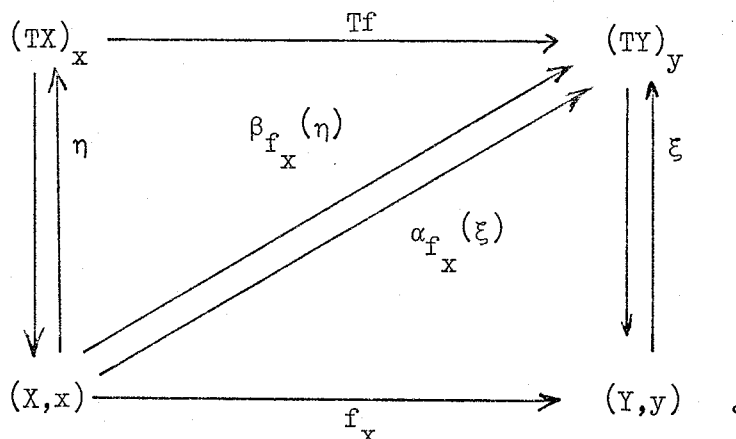
Soit f_x le germe de $f \in C^\infty(X,Y)$ au point $x \in X$ et $y = f(x) \in Y$. Soient $C_x^\infty(X)$, $(C_y^\infty(Y))$ les germes de fonctions C^∞ en $x(y)$ et

$$f_x^* : C_y^\infty(Y) \longrightarrow C_x^\infty(X)$$

le morphisme de R -algèbres locales induit par f . $\Gamma_x^\infty(TX)$ désignera l'ensemble des germes de sections C^∞ de TX au point x . Alors on a des structures naturelles de module :

$$\Gamma_x^\infty(TX), \quad \Gamma_x^\infty(f_x^* TY), \quad \text{sont des } C_x^\infty(X)\text{-modules et } \Gamma_y^\infty(TY) \text{ est un } C_y^\infty(Y)\text{-module.}$$

Comme au chapitre précédent on définit une application $C_y^\infty(Y)$ -linéaire α_{f_x} et une application $C_x^\infty(X)$ -linéaire β_{f_x} , par le diagramme suivant :



(Toutes les flèches représentent des germes d'applications, mais pour la commodité de l'écriture on ne les brise plus).

(flèche brisée = germe d'application).

f_x sera dit infinitésimalement stable si

$$\alpha_{f_x}(\Gamma_y^\infty(TY)) + \beta_{f_x}(\Gamma_x^\infty(TX)) = \Gamma_x^\infty(f_x^*TY)$$

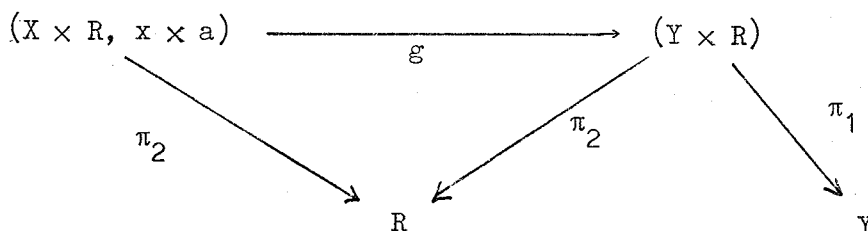
THEOREME DE STABILITE LOCALE (Mather) : "Soit $f_x \in C_{x,y}^\infty(X,Y)$. Alors :

f_x infinitésimalement stable $\implies f_x$ stable".

Ce théorème est en réalité (beaucoup) plus facile que le théorème de stabilité (globale) du chapitre précédent. Mais puisqu'on a de toute façon, déjà, ce-dernier, on va s'en servir pour en déduire le cas germifié.

On commence par germifier (et paramétrer) le paragraphe 2 du chapitre précédent :

Considérons un germe qui préserve la paramétrisation :



(donc $g(x,t) = (g_1(x,t) \in Y, t)$.)

Comme au chapitre précédent, g induit un autre germe, $\frac{\partial g}{\partial t}$:

$$\begin{array}{ccc}
 & \nearrow \frac{\partial g}{\partial t} & \pi_1^{*TY} \\
 (X \times R, x \times a) & \xrightarrow{g} & Y \times R \\
 & & \downarrow
 \end{array}$$

(donc $\frac{\partial g}{\partial t} \in \Gamma_{x \times a}^\infty (g^*(\pi_1^{*TY}))$).

LEMME 1 : (Le théorème d'existence pour les équations différentielles ordinaires) : "Soit (X, x) un germe de variété C^∞ , $\pi_1 : X \times R \rightarrow X$, $a \in R$. Soit $\xi \in \Gamma_{x \times a}^\infty (\pi_1^{*TX})$. Il existe un germe de difféomorphisme, compatible avec la projection sur R :

$$\begin{array}{ccc}
 (X \times R, x \times a) & \xrightarrow{H_\xi = H} & (X \times R, x \times a) \\
 \searrow \pi_2 & & \swarrow \pi_2 \\
 & R, &
 \end{array}$$

tel que :

- 1) $H|_{X \times a} = \text{id}_X$.
- 2) $\frac{\partial H}{\partial t} \circ H^{-1} = \xi$, c'est-à-dire que le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc}
 & \nearrow \frac{\partial H}{\partial t} & \pi_1^{*TX} \\
 (X \times R, x \times a) & \xrightarrow{H} & (X \times R, x \times a) \\
 & & \uparrow \xi
 \end{array}$$

La correspondance $\{\xi\} \rightarrow \{H\}$ est biunivoque, continue, différentiable.

En particulier soit (Z, z^0) un germe d'espace topologique; considérons

$\pi : Z \times X \times R \rightarrow X$ et $\xi \in \Gamma_{Z^0 \times X \times a}^{0, \infty}(\pi^*TX)$. Pour $z \in Z$ on va considérer la valeur de ξ au point $z : \xi_z \in \Gamma_{x \times a}^{\infty}(\pi_1^*TX)$. Dans ce cas, il existe un germe d'application $C^{0, \infty}$

$$\begin{array}{ccc} (Z \times X \times R, z^0 \times x \times a) & \xrightarrow{H^1} & (Z \times X \times R, z^0 \times x \times a) \\ & \searrow & \swarrow \\ & Z \times R & \end{array}$$

tel que chaque H_z^1 soit un germe de difféomorphisme : $(X \times R, x \times a) \rightarrow (X \times R, x \times a)$

et que :

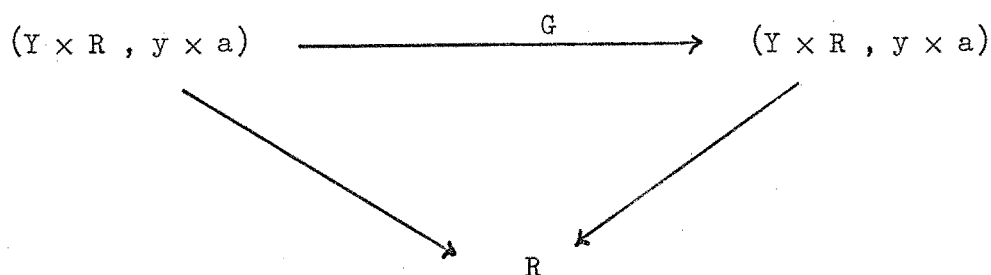
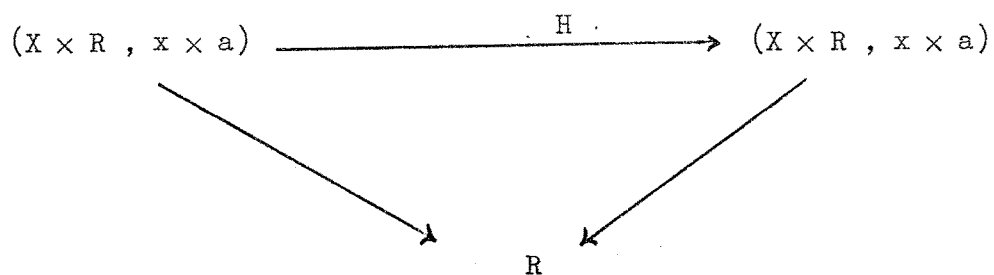
$$H_z^1 = H_{\xi_z}.$$

Remarque : Ceci va remplacer, dans le cas germifié, le lemme 0 du chapitre précédent. Ce lemme 0 était le seul endroit où on avait besoin de l'hypothèse :

$\partial X = \partial Y = \emptyset$. Le reste de la théorie (du chapitre précédent) marche aussi bien pour le cas où X, Y sont compacts à bord. On va utiliser ce fait, dans la suite.

LEMME 2 : Soient :

$$\begin{array}{ccc} (X \times R, x \times a) & \xrightarrow{F} & (Y \times R, y \times a), \\ & \searrow & \swarrow \\ & R & \end{array}$$



où H, G sont des germes de difféomorphisme.

Soient :

$$-\frac{\partial H}{\partial t} \circ H^{-1} = \xi \in \Gamma_{xxa}^{\infty}(\pi_1^*TX)$$

$$\frac{\partial G}{\partial t} \circ G^{-1} = \eta \in \Gamma_{yxa}^{\infty}(\pi_1^*TY) .$$

On définit comme ci-dessus les applications $C_{xxa}^{\infty}(X \times R) (C_{yxa}^{\infty}(Y \times R))$ - linéaires :

$$\begin{array}{ccc}
 \Gamma_{yxa}^{\infty}(\pi_1^*TY) & \Gamma_{xxa}^{\infty}(\pi_1^*TX) & \xrightarrow[\beta_F^1]{} \Gamma_{xxa}^{\infty}(F^*(\pi_1^*TY)) . \\
 & \searrow \alpha_F^1 & \nearrow
 \end{array}$$

La condition nécessaire et suffisante pour que :

$$(*) \quad F_t = G_t \circ F_0 \circ H_t^{-1}$$

(pour tous les t suffisamment proches de a) est que :

$$(**) \quad \frac{\partial F}{\partial t} = \alpha_F^1(\eta) + \beta_F^1(\xi)$$

(pour tous les t suffisamment proches de a).

En plus, si (X, x) reste un germe, si Y est un vrai espace avec $y \in Y$, si F, G, H sont définies pour $[a_1, b_1] \subset \mathbb{R}$ ($a \in [a_1, b_1]$), et si $(**)$ est vraie pour $\forall t \in [a_1, b_1]$, alors $(*)$ est, aussi, vraie pour $\forall t \in [a_1, b_1]$."

Démonstration du théorème de stabilité locale :

Soit $f_x \in C_{x,y}^{\infty}(X, Y)$ infinitésimalement stable. On peut choisir des voisinages compacts $x \in U_1 \subset X$, $y \in V_1 \subset Y$, et un représentant : $f \in C^{\infty}(U_1, \hat{V}_1)$, tel que :

- 1) Le germe de f au point x soit f_x .
- 2) f soit infinitésimalement stable.

LEMME 3 : "Il existe un espace topologique (Z, z^0) et une application $C^{0,\infty}$

$\Phi \in C^0(Z, C^{\infty}(U_1 \times I, V_1)) = C^{0,\infty}(Z \times I, C^{\infty}(U_1 \times V_1))$ telle que :

a) $\Phi(z^0)$ est le chemin constant :

$$I \rightarrow C^{\infty}(U_1, V_1) \text{ de valeur } f.$$

b) $\Phi(z)(0) = f$ (quel que soit $z \in Z$).

c) Quel que soit l'ouvert $z^0 \in Z' \subset Z$ et le nombre $0 < \varepsilon \leq 1$,

$\Phi(Z' \times [0, \varepsilon]) \subset C^{\infty}(U_1, V_1)$ est un voisinage de f (En d'autres mots, les germes d'espaces topologiques :

$$(\text{Image } \Phi, f) \text{ et } (C^{\infty}(U_1, V_1), f)$$

sont identiques)."

La démonstration est laissée comme exercice au lecteur (on choisira $Z =$ un voisinage (petit) de $f \in C^{\infty}(U_1, V_1)$, $z^0 = f$).

D'après le corollaire 2.3.2 du chapitre précédant l'application :

$$\beta_{\Phi} \oplus \alpha_{\Phi} : \Gamma_{z^0}^{0,\infty}(\pi^* TU_1) \oplus \Gamma_{z^0}^{0,\infty}(\pi^* TV_1) \longrightarrow \Gamma_{z^0}^{0,\infty}(\Phi^* TV_1)$$

est surjective. (Ici $\eta \in \Gamma_{z^0}^{0,\infty}(\Phi^*TV_1)$ est un relèvement :

$$\begin{array}{ccc}
 & & Z \times I \times TV_1 \\
 & \nearrow \eta & \downarrow \\
 Z \times I \times U_1 & \xrightarrow{\quad \Phi \quad} & Z \times I \times V_1. \\
 & \searrow & \swarrow \\
 & Z \times I &
 \end{array}$$

Exprimée en termes plus détaillées, la surjectivité de $\beta_\Phi \oplus \alpha_\Phi$ veut dire que : $\exists$ un voisinage ouvert Z' : $z^0 \in Z' \subset Z$ t.q. $\forall z \in Z'$, il existe des chemins C^∞ (dépendant d'une manière $C^{0,\infty}$ de z) :

$$B(z)(t) \in \Gamma^\infty(TU_1) \quad (t \in I)$$

$$A(z)(t) \in \Gamma^\infty(TV_1) \quad (t \in I)$$

ayant la propriété :

$$(\Gamma) \quad \alpha_{\Phi(z,t)}(A(z,t)) + \beta_{\Phi(z,t)}(B(z,t)) = \frac{\partial}{\partial t} \Phi(z,t)$$

(où je rappelle que, pour $z \in Z'$ fixé, $\Phi(z,t)$ ($t \in I$) est un chemin C^∞ de $C^\infty(U_1, V_1)$ d'origine f).

D'après le lemme 1, il existe des voisinages Z'', U'_1, V'_1 ;

$$z^0 \in Z'' \subset Z' \subset Z, \quad x \in U'_1 \subset U_1, \quad y \in V'_1 \subset V_1,$$

un $\varepsilon > 0$, et des applications $C^{0,\infty}$:

$$\begin{array}{ccc}
 Z'' \times U'_1 \times [0, \varepsilon] & \xrightarrow{\quad H \quad} & Z'' \times U_1 \times [0, \varepsilon] \\
 & \searrow & \swarrow \\
 & Z'' \times [0, \varepsilon] &
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc}
 Z'' \times V_1' \times [0, \varepsilon] & \xrightarrow{G} & Z'' \times V_1 \times [0, \varepsilon] \\
 & \searrow & \swarrow \\
 & Z'' \times [0, \varepsilon] &
 \end{array}$$

tels que : 1) $A(z, t) = -\frac{\partial H}{\partial t} \circ H^{-1}$

2) $B(z, t) = \frac{\partial G}{\partial t} \circ G^{-1}$

3) $H_{z, t}$ et $G_{z, t}$ sont des plongements C^∞ .

4) $H_{z, 0}$ et $G_{z, 0}$ sont les plongements standard.

5) U_1' , ε sont "très petits" par rapport à V_1' dans le sens que :

$$f(U_1') \subset V_1' \quad \text{et} \quad \Phi(z, t) \circ H(z, t)(U_1') \subset G(z, t) V_1'$$

(de telle façon que le diagramme suivant puisse avoir un sens :

$$\begin{array}{ccc}
 U_1' & \xrightarrow{H(z, t)} & U_1 \\
 f = \Phi(z, 0) \downarrow & & \downarrow \Phi(z, t) \\
 V_1' & \xrightarrow{G(z, t)} & V_1
 \end{array} \quad (\Delta)$$

La condition (I) et le lemme 2, impliquent que le diagramme (Δ) est commutatif. D'après le lemme 3, $\Phi(Z' \times [0, \varepsilon]) \subset C^\infty(U_1, V_1)$ est un voisinage de f . Soit $g = \Phi(z, \eta) \in \text{Image } \Phi|_{Z' \times [0, \varepsilon]}$.

On voit que les germes :

$$f_x \in C_{x, y}^\infty(U_1, V_1)$$

$$\text{et} \quad g_{H(z, \eta)} \in C_{H(z, \eta), G(z, \eta)}^\infty(U_1, V_1)$$

sont équivalents. Donc f_x est stable q.e.d.

Exercice : La théorie précédente marche encore, si dans la définition de la sta-

bilité on exige que $x'(g)$ dépende continuellement de g .

Remarques finales : Soit $f \in C^\infty(X, Y)$. Il est évident que :

f inf. stable $\implies \forall x, f_x$ est infinitésimalement stable (donc, une fois qu'on aura montré que stabilité $\implies$ stab. infinitésimale, il en résultera que : f stable $\implies \forall x, f_x$ est stable).

Il serait tentant de croire la réciproque, mais elle est FAUSSE. En effet, soit $Y = R, f \in C^\infty(X, R) = C^\infty(X)$. Il est évident que si $df_x \neq 0 \implies f_x$ est stable. D'autre part, si $df_x = 0$ alors f_x est (infinitésimalement) stable si et seulement si x est un point critique non-dégénéré.

[En effet choisissons $X = R_n = (x_1, \dots, x_n)$, $x = 0$, $y = 0 \in R$. Alors :

$$\phi \in \Gamma_x^\infty(f^*TY) = C_0^\infty(R_n)$$

$$\eta \in \Gamma_y^\infty(TY) = C_0^\infty(R)$$

$$\xi \in \Gamma_x^\infty(TX) = C_0^\infty(R_n, R_n)$$

$$Tf = C_0^\infty(R_n, L(R_n, R))$$

$$\alpha(\eta) = \eta(f(x))$$

$$\beta(\xi) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right) \begin{pmatrix} \xi_1(x) \\ \xi_2(x) \\ \vdots \\ \xi_n(x) \end{pmatrix}$$

Soient : $\beta_i = \frac{\partial \phi}{\partial x_i}(0)$. Vu que $df_0 = 0$: on est obligé d'avoir :

$$\sum_i \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(0) \xi_i(0) = \beta_j.$$

Pour que f_x soit inf. stable il faut que ce système soit toujours résoluble $\implies \det\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(0)\right) \neq 0$.

On laisse au lecteur le soin de vérifier l'implication dans l'autre sens.]

D'autre part, si f n'admet que des points critiques non dégénérés, mais s'il existe deux points critiques distincts : $c_1 \neq c_2$ tels que $f(c_1) = f(c_2)$ il

est facile de voir que f n'est pas stable. (Je rappelle qu'une fonction C^∞ à points critiques non dégénérés et séparés, s'appelle f , de Morse).

Ceci suggère la définition suivante : On peut considérer des ensembles finis $S \subset X$ et considérer des germes d'applications

$$(X, S) \longrightarrow (Y, y).$$

Par définition (si $S = \{x_1, \dots, x_s\}$ et $fS = y$), le germe f_S est stable, si pour tout voisinage assez petit : $U = U_{x_1} + \dots + U_{x_s}$, (réunion disjointe), il existe un voisinage N de $f|U \in C^\infty(U, Y)$ tel que :

Pour tout $g \in N$, il existe $x'_i \in U_{x_i}$, $y' \in Y$, avec $g(x'_i) = y$ tel que

$$f_S \in C^\infty_{S, y}(X, Y) \text{ et } g_{S'} \in C^\infty_{S', y'}(X, Y)$$

soient équivalents.

Toute la théorie précédente marche pour les germes f_S au lieu des germes f_x (qui correspond au cas où $\text{card } S = 1$). [Exercice laissé au lecteur].

C'est un exercice facile de montrer que : f est fonct. de Morse $\iff (\forall (x_1, x_2) \in X \times X - \text{diag } X, f|_{(x_1, x_2)} \text{ inf. stable}) \implies f \text{ stable}$. Ceci est un phénomène général..

2) k-Suffisance : La "philosophie générale" du problème de la stabilité est la suivante :

On considère un espace topologique E muni d'une topologie T et une relation d'équivalence ε sur E (En principe elle proviendra de l'action d'un groupe topologique $G \times E \longrightarrow E$).

$$\Phi$$

Un élément $x \in E$ sera dit stable (ou générique) si sa classe d'équivalence est un voisinage (si l'orbite $\Phi_x(G) \subset E$ est un voisinage de x).

Exemple : $E = C^\infty(X, Y)$, $G = \text{Diff } X \times \text{Diff } Y$, Φ l'action définie au chapitre II. On verra plus tard que

$\Phi_f(\text{Diff } X \times \text{Diff } Y)$ est un voisinage de f ($\iff \Phi_f(\text{Diff } X \times \text{Diff } Y)$ est un ouvert) $\iff (\text{Diff } X \times \text{Diff } Y \rightarrow \Phi_f(\text{Diff } X \times \text{Diff } Y))$ est une fibration localement triviale et $\Phi_f(\text{Diff } X \times \text{Diff } Y)$ est un ouvert).

Donc la notion de stabilité du chapitre II et celle qu'on vient de définir est la même.

Si $C_{x,y}^{\infty}(X,Y) = E$, la seule topologie "naturelle" pour E est la suivante :

Pour $f_x \in C_{x,y}^{\infty}(X,Y)$ et $r > 0$ soit

$$V_r(f_x) = \{ \text{l'ensemble des } g_x \in C_{x,y}^{\infty}(X,Y), \text{ tels que } j_{x,x}^r f_x = j_{x,x}^r g_x \}.$$

On peut prendre ceci comme une base de voisinages de f_x . (Si $Y = \mathbb{R}$, $y = 0$, $C_{x,0}^{\infty}(X) = \mathfrak{m}_x C_x^{\infty}(X)$, et la topologie qu'on vient de définir est la topologie induite sur $\mathfrak{m}_x C_x^{\infty}(X) \subset C_x^{\infty}(X)$ par la topologie de Krull).

Si ε est une relation d'équivalence sur $C_{x,y}^{\infty}(X,Y)$ et f_x est stable (pour ε) ceci équivaut à dire qu'il existe un $k > 0$ tel que tout g_x avec $j_{x,x}^k g_x = j_{x,x}^k f_x$ est ε -équivalent à f_x . On dira aussi que $j_{x,x}^k f_x$ est (un jet) suffisant, et que f_x est k-suffisant (pour ε). S'il existe un k tel que f_x soit k -suffisant (pour ε), on dira que f_x est de détermination finie (pour ε), ou qu'il est ε -suffisant.

Dorénavant $R_n = X$, $R_p = Y$, $o = x$, $o = y$. On va utiliser la notation :

$$\mathcal{J} = C_{o,o}^{\infty}(R_n, R_p) = C_{o,o}^{\infty}(X,Y).$$

On finira ce paragraphe par quelques remarques utiles, (plus tard).

LEMME : "Soient $f, g \in C_o^{\infty}(R_n)$. Alors :

$$j_o^k f = j_o^k g \iff f - g \in \mathfrak{m}_o^{k+1} C_o^{\infty}(R_n) "$$

La démonstration est laissée en exercice.

COROLLAIRE : "Soit $f \in \mathcal{J}$ et

$$f^* : C_o^{\infty}(R_p) = C^{\infty}(y) \rightarrow C^{\infty}(x) = C_o^{\infty}(R_n).$$

L'application induite :

$$f^* : C^\infty(y)/\mathfrak{m}^{k+1} C^\infty(y) \rightarrow C^\infty(x)/\mathfrak{m}^{k+1} C^\infty(x)$$

dépend seulement de $j_0^k f$ ".

Démonstration : Si $g \in \mathcal{J}$ et $j_0^k f = j_0^k g$ il s'ensuit que pour chaque coordonnée :

$$f_i - g_i \in \mathfrak{m}^{k+1} C^\infty(x) .$$

Donc, si $\phi \in C^\infty(y)$:

$f^*(\phi) = \phi(f(x)) = \phi(g(x) + (\text{des termes d'ordres } \geq k+1)) = \phi(g(x)) +$
 (des termes d'ordre $\geq k+1$) (la dernière égalité résulte, par exemple, en prenant des développements Tayloriens limités). Donc :

$$f^*(\phi) - g^*(\phi) \in \mathfrak{m}^{k+1} C^\infty(x) , \text{ e.a.d.s.}$$

Considérons l'algèbre locale :

$$Q_k(f) = C^\infty(x)/f^* \mathfrak{m} C^\infty(y) + \mathfrak{m}^{k+1} C^\infty(x) .$$

(d'après ce qu'on vient de dire, cette algèbre ne dépend que de $j_x^k f$).

On peut considérer aussi l'algèbre locale :

$$Q(f) = C^\infty(x)/f^* \mathfrak{m} C^\infty(y)$$

qui est "moralement " "l'algèbre des fonctions C^∞ sur $f^{-1}(0)$ " . On a :

$$Q_r(f) = Q(f) / \mathfrak{m}^{r+1} Q(f) ,$$

donc $\hat{Q}(f) = \varprojlim_r Q_r(f)$.

Je donne, sans démonstration, le théorème suivant dû à J. Mather :

THEOREME : "Soient $f_x, g_x \in C_{x,y}^\infty(X,Y)$, ($\dim Y = p$) , deux germes stables.
 f_x et g_x sont équivalents (voir la définition du paragraphe précédent) si et
 seulement si :

$$Q_{p+1}(f_x) = Q_{p+1}(g_x) \quad (\text{isomorphisme de } R\text{-algèbres}).$$

3) Groupes opérant sur $\mathcal{F}$ (d'après J. Mather).

(Dans tout ce qui suit il s'agira de germes d'applications. On va oublier la notation $\rightarrow$).

Si $f \in \mathcal{F}$ on lui associe le germe de sous-variété :

$$(0,0) \in \{(x, f(y)) \subset X \times Y, \text{ appelée } \underline{\text{graph}}(f).\}$$

Je rappelle qu'on a défini le groupe $\mathcal{E}$:

$$\mathcal{E} \subset \text{Diff}_{0,0}(X \times Y)$$

par la condition : $H \in \mathcal{E}$ si et seulement si le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccccc}
 & & (X \times Y, 0 \times 0) & & \\
 & \nearrow i & \downarrow H & \searrow \pi & \\
 (X, 0) & & & & (X, 0) \\
 & \searrow i & \uparrow & \nearrow \pi & \\
 & & (X \times Y, 0 \times 0) & &
 \end{array}$$

(où $i(x) = (x, 0) \in X \times Y$; donc i est "la section nulle"). $\mathcal{E}$ agit sur $\mathcal{F}$ par :

$$\text{graph}(H.f) = H(\text{graph } f).$$

(D'une manière plus détaillée, soit $1 = \text{id}(X)$. Alors :

$$(1, H.f) = H \circ (1, f) \text{).}$$

Si $f \in \mathcal{F}$ on définit l'anneau des coordonnées de f :

$$I(f) = f^* \mathfrak{m}_Y^{\infty} \subset C^{\infty}(x)$$

(C'est un idéal de $C^{\infty}(x)$). Je rappelle que $g \in \mathcal{E}f \iff I(f) = I(g)$ (égalité entre sous-ensembles de $C^{\infty}(x)$).

En fait on a prouvé le : (Chapitre 0, vol.I) .

THEOREME : "Les quatre conditions suivantes sont équivalentes :

(i) $f \in \mathcal{E}.g.$

(ii) $I(f) = I(g)$ (égalité entre sous-ensembles de $C^\infty(x)$).

(iii) Si $(y_1, \dots, y_p)$ est un système de coordonnées locales sur Y , $\exists$ une matrice invertible $(p \times p)$:

$$(u_{ij}(x)) \text{ t.q. : } f^*(y_i) = \sum u_{ij}(x) g^*(y_j) .$$

(iv) Il existe un germe de difféomorphisme :

$$H \in \text{Diff}_{o \times o} (X \times Y) \quad (H(o,o) = (o \times o))$$

$$\text{t.q. } H|_{X \times o} = \text{id}_X$$

$$H(\text{graph} f) = \text{graph} g \text{ " .}$$

On va introduire quatre autres sous groupes de $\text{Diff}_{o,o}(X \times Y)$ qui agissent sur $\mathcal{F}$.

Le groupe $\mathcal{K}$: par définition $H \in \mathcal{K}$ s'il existe un $h \in \text{Diff}_o(X)$, tel que le diagramme suivant soit commutatif :

$$\begin{array}{ccccc} (X,o) & \xrightarrow{i} & (X \times Y, o \times o) & \xrightarrow{\pi} & (X,o) \\ \downarrow h & & \downarrow H & & \downarrow h \\ (X,o) & \xrightarrow{i} & (X \times Y, o \times o) & \xrightarrow{\pi} & (X,o) . \end{array}$$

On définit une action de $\mathcal{K}$ sur $\mathcal{F}$ par :

$$H(\text{graph} f) = \text{graph}(H.f)$$

(ou, d'une manière plus détaillée :

$$(1, H.f) = H \circ (1, f) \circ h^{-1} .$$

THEOREME : " $f \in \mathcal{K} \circ g$ si et seulement si $\exists$ un germe de difféomorphisme :

$$(X \times Y, o \times o) \xrightarrow{H} (X \times Y, o \times o)$$

t.q. $H(X \times O) = X \times O$ et : $H(\text{graph } f) = \text{graph } g$ ".

Ceci résulte immédiatement du théorème analogue pour $\mathcal{E}$.

Remarquons que $\mathcal{E} \subset \mathcal{K}$ (sous-groupe).

Soit $\mathcal{R} \subset \mathcal{K}$, $\mathcal{R} = \text{Diff}_{o,o}(X)$. $\mathcal{R}$ agit sur $\mathcal{F}$ par composition à droite.

THEOREME : " $\mathcal{E} \subset \mathcal{K}$ est un sous-groupe invariant. Chaque élément $x \in \mathcal{K}$ s'écrit d'une manière et d'une seule $x = rc$ ($r \in \mathcal{R}$, $c \in \mathcal{E}$). (On a donc une décomposition en produit semi-direct : $\mathcal{K} = \mathcal{R} \mathcal{E}$)".

Démonstration : exercice.

Le groupe $\mathcal{K}$ agit (par l'intermédiaire du groupe des jets d'ordre k d'éléments de $\mathcal{K} : \mathcal{K}^k$) sur $J_{o,o}^k(X,Y)$.

THEOREME : " $j^k f \in \mathcal{K}^k_{j^k g} \iff Q_k(f) = Q_k(g)$ (isomorphisme de $\mathcal{R}$ -algèbres)".

Démonstration :

$\implies$ l'hypothèse implique qu'il existe $g', f' \in \mathcal{F}$, t.q. $j^k g' = j^k g$, $j^k f' = j^k f$, $f' \in g' \mathcal{K}$. On a : $Q_k(f') = Q_k(f)$ (et de même pour g), puisque l'algèbre considérée ne dépend que de j^k). La conclusion résulte si l'on montre que l'action de $\mathcal{E}$ et de $\mathcal{R}$ (donc celle $\mathcal{K} = \mathcal{R} \mathcal{E}$) ne change pas l'algèbre Q_k . Pour $\mathcal{E}$ ça résulte du fait que si $f_1 \in f_2 \mathcal{E} \implies I(f_1) = I(f_2) \subset C^\infty(x)$. Pour $\mathcal{R}$ c'est évident. (voir aussi les remarques faites plus bas sur $Q(f)$).

$\Leftarrow$ On peut supposer $k \geq 1$ (car pour $k = 0$ le résultat est trivial). $Q_k(f)$ est un anneau local d'idéal maximal $\mathfrak{m}_k$ et

$$Q_1(f) = Q_k(f)/\mathfrak{m}^2$$

[En effet : $Q_r = Q/\mathfrak{m}^{r+1}Q$ donc :

$$\mathfrak{m}Q_r = \mathfrak{m}Q/\mathfrak{m}^{r+1}Q \Rightarrow \mathfrak{m}^2Q^r = \mathfrak{m}^2Q/\mathfrak{m}^{r+1}Q \Rightarrow Q_k/\mathfrak{m}^2Q_k = (Q/\mathfrak{m}^{k+1}Q)/(\mathfrak{m}^2Q/\mathfrak{m}^{k+1}Q) = Q/\mathfrak{m}^2Q = Q_1].$$

Maintenant, si $f : (X, x) \rightarrow (Y, y)$ est un germe d'application avec $\text{rang } T_x f = r$, on peut choisir des coordonnées locales $(y_1, \dots, y_p)$ telles que $d(y_1 \circ f), \dots, d(y_r \circ f)$ soit une base de l'image du dual de $T_x X$ et $d(y_i \circ f) = 0$ si $i > r$. On peut choisir $x_i = y_i \circ f$ ($i \leq r$) comme une partie d'un système de coordonnées locales et on aura :

$$f = \begin{cases} y_i = x_i & (i \leq r) \\ y_{r+j} = f_{r+j}(x), & df_{r+j} = 0 \end{cases}.$$

De telles coordonnées, sont par définition, linéairement adaptées.

Je dis que $Q_k(f)$ détermine aussi :

$$\text{rang } T_x f = n - \dim_R Q_1(f) + 1 = r.$$

[La dernière égalité est une définition. La première résulte comme suit :

$$\text{Soit : } Q_1(f) = C^\infty(x) / f^*\mathfrak{m}_y + \mathfrak{m}_x^2.$$

Supposons qu'on ait choisi un système de coordonnées adaptées, comme ci-dessus.

Alors :

$$x_1, \dots, x_r \in f^*\mathfrak{m}_y, \\ f_{r+j}(x) \in f^*\mathfrak{m}_y \cap \mathfrak{m}_x^2.$$

L'algèbre $Q_1(f)$ admet comme R -base (d'espace vectoriel) :

$$1, x_{r+1}, \dots, x_n.$$

Donc :

$$\dim_R Q_1(f) = (n - r) + 1.$$

On remarque à la même occasion que $1, x_{r+1}, \dots, x_n$ forment un système de générateurs (minimal) de l'algèbre $Q_k(f)$. A ce sujet on remarque aussi que l'on a :

PROPOSITION : "Soit A une R -algèbre locale telle que $\bigcap_{i=1}^{\infty} \mathfrak{m}^i A = 0$,

$\mathfrak{m}A$ est A -fini, $A/\mathfrak{m}A \approx R$.

Alors : 1) $x_1, \dots, x_p \in \mathfrak{m}A$ sont un système de générateurs du A -module $\mathfrak{m}A \leftrightarrow x_1, \dots, x_p$ R -engendrent $\mathfrak{m}A/\mathfrak{m}^2 A$.

2) Si 1) est satisfait on a une surjection naturelle :

$$R[[x_1, \dots, x_p]] \rightarrow \hat{A} \rightarrow 0 \text{ " .}$$

Démonstration : 1) résulte de Nakayama. Si 1) est vrai les produits $x_{i_1} \dots x_{i_k}$ engendrent $\mathfrak{m}^k A / \mathfrak{m}^{k+1} A$, e.a.d.s.

Donc $x_1, \dots, x_p \in \mathfrak{m}\hat{Q}(\mathfrak{m}Q_k)$ engendrent l'algèbre respective si et seulement si c'est un système de R -générateurs de $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$].

On peut donc supposer que f, g ont la forme :

$$f = \begin{cases} y_i = x_i & (i \leq r) \\ y_{r+j} = f_{r+j}(x) \end{cases} \quad g = \begin{cases} y'_i = x'_i & (i \leq r) \\ y'_{r+j} = g_{r+j}(x') \end{cases} .$$

Pour $r+1 \leq i \leq n$ soient $\bar{x}_i \in Q_k(f)$ ($\bar{x}'_i \in Q_k(g)$) les images des coordonnées respectives. Puisque

$$\varphi : Q_k(f) \approx Q_k(g) \quad (\text{isomorphisme})$$

]

 des polynômes $p_i(\bar{x}'_{r+1}, \dots, \bar{x}'_n)$ t.q. :

$\varphi(\bar{x}_i) = p_i(\bar{x}')$ ($i = r+1, \dots, n$) . Le fait que φ est un isomorphisme implique que la matrice $(\partial p_i / \partial x'_j)$ est invertible (calcul immédiat). On peut donc construire un germe de difféomorphisme $h : (X, o) \rightarrow (X, o)$:

$x_i = x'_i$ ($i \leq r$), $x_{r+j} = p_{r+j}(x')$. Le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} C^\infty(x) & \xrightarrow[\cong]{h^*} & C^\infty(x') \cong C^\infty(x) \\ \downarrow & & \downarrow \\ Q_k(f) & \xrightarrow[\cong]{\varphi} & Q_k(g) \end{array} .$$

Donc, en remplaçant $g \Rightarrow g \circ h^{-1}$ on peut supposer que :

$$C^\infty(x) \supset f^* m_y \cdot C^\infty(x) + m_x^{k+1} = g^* m_y \cdot C^\infty(x) + m_x^{k+1} .$$

On peut trouver des autres f, g , ayant le même j_0^k que nos f, g ci-dessus, tels que

$$f^* m_y C^\infty(x) = g^* m_y C^\infty(x) .$$

(Il suffit de remplacer f, g , par leurs polynômes tayloriens d'ordre k).

Maintenant f et g sont dans la même $\mathcal{C}$ -orbite, e.a.d.s.

On va introduire encore deux sous-groupes de $\mathcal{K}$ (qui agissent donc sur $\mathcal{T}^c$).

$$\mathcal{L} = \text{Diff}_{0,0}(Y, 0)$$

$$\mathcal{R} = \mathcal{R} \times \mathcal{L} .$$

Soit $f \in \mathcal{T}^c$. Pour chaque

$$G = \mathcal{K}, \mathcal{R}, \mathcal{L}, \mathcal{E}$$

on va définir un sous-espace vectoriel :

$$\theta(G) \subset \Gamma_0^\infty(f^*TY) = \theta(f)$$

comme suit :

$$\theta(\mathcal{K}) = \beta_f(\Gamma_0^\infty(TX)) + f^* m_y C^\infty(y) \cdot \theta(f)$$

$$\theta(\mathcal{R}) = \beta_f(\Gamma_0^\infty(TX)) + \alpha_f(\Gamma_0^\infty(TY))$$

$$\theta(\mathcal{P}) = \beta_f(\Gamma_o^\infty(TX))$$

$$\theta(\mathcal{L}) = \alpha_f(\Gamma_o^\infty(TY))$$

$$\theta(\mathcal{E}) = f^*m_C^\infty(y) \cdot \theta(f) \quad .$$

THEOREME 1 (Mather) : " $f \in \mathcal{J}_e^2$ est de détermination finie (pour G) $\iff$

$$d(f, G) = \dim_R \theta(f) / \theta(G) < \infty " \quad .$$

Remarques : 0) $f = f_x$ est stable $\iff d(f, \mathcal{E}) = 0$.

1) Définissons, aussi, les sous-espaces vectoriels : $(m_x = m_C^\infty(x), m_y = m_C^\infty(y))$

$$\theta_1(\mathcal{K}) = \beta_f(m_x \Gamma_o^\infty(TX)) + f^*m_y \cdot \theta(f)$$

$$\theta_1(\mathcal{K}) = \beta_f(m_x \Gamma_o^\infty(TX)) + \alpha_f(m_y \Gamma_o^\infty(TY))$$

$$\theta_1(\mathcal{P}) = \beta_f(m_x \Gamma_o^\infty(TX))$$

$$\theta_1(\mathcal{L}) = \alpha_f(m_y \Gamma_o^\infty(TY))$$

$$\theta_1(\mathcal{E}) = f^*m_y \cdot \theta(f) = \theta(\mathcal{E}) \quad .$$

On remarque que

$$m_x \Gamma_o^\infty(TX) = \text{Ker}(\Gamma_o^\infty(TX) \xrightarrow{\text{ev}(o)} R_n) \quad .$$

Donc ;

$$\Gamma_o^\infty(TX) / m_x \Gamma_o^\infty(TX) = R_n \quad . \quad \text{Donc :}$$

$$\dim_R \theta(f) / \theta_1(G) < \infty \iff \dim_{R_x} \theta(f) / \theta_1(G) < \infty$$



$$\dim_R \theta(f) / \theta(G) < \infty \quad .$$

2) (Interprétation heuristique du théorème ci-dessus). Pensons à $m_x \theta(f)$ comme

étant l'espace des déformations infinitésimales de f , donc :

$$\mathfrak{m}_X^\theta(f) = T_f \mathcal{F}.$$

Je dis que, dans le même esprit, $\theta_1(G)$ est l'espace tangent à l'orbite de f , au point f :

$$T_f \mathcal{F} \supset T_f(f, G) = \theta_1(G).$$

En effet, si $G = R$ ou $\mathcal{A}$,

$$T_{\text{id}X} \mathcal{R} = \{\text{les champs de vecteurs sur } X \text{ qui s'annulent au point } 0\},$$

et de même pour $\mathcal{A}$.

Si $G = \mathcal{C}$, on considère la projection :

$$\pi_2 : X \times Y \rightarrow Y ;$$

et on remarque que

$\Gamma_0^\infty(T(X \times Y)) \supset T_{(\text{id}X) \times (\text{id}Y)} \mathcal{C} = \pi_2^* \mathfrak{m}_Y^\theta(\pi_2) = \{\text{l'ensemble des champs de vecteurs verticaux sur } X \times Y, \text{ qui s'annulent sur } X \times 0\}.$

Alors :

$$T_f(f, \mathcal{C}) = T\pi_2(\pi_2^* \mathfrak{m}_Y^\theta(\pi_2) \mid (\text{graph } f)) = f^* \mathfrak{m}_Y^\theta \circ \theta(f).$$

Le théorème nous dit donc que :

f est de G -détermination finie



l'orbite $G.f \subset \mathcal{F}$ est infinitésimalement de codimension finie,

ce qui est intuitivement naturel, car la dernière condition veut dire que $G.f \subset \mathcal{F}$ est déterminée par un nombre fini de conditions, "et sur quoi pourraient-elles porter, autre que sur $j^k f$, pour k assez grand ? "

Dans ce qui suit on donnera la condition nécessaire et suffisante de k -suffisance, ce qui va impliquer, à fortiori, le théorème ci-dessus.

3) Machinerie algébrique : Je rappelle le théorème de préparation :

"Soient A un $C^\infty(y)$ -module fini,

C un $C^\infty(x)$ -module fini,

$f \in \mathcal{A}^2$. Soit

$$\varphi : A \rightarrow C$$

un morphisme $C^\infty(y)$ -linéaire (Pour la structure de $C^\infty(y)$ -module sur C , induite par :

$$f^* : C^\infty(y) \rightarrow C^\infty(x)) .$$

Alors :

$$\varphi(A) + f^* \mathfrak{m}_y . C = C \implies \varphi(A) = C ."$$

LEMME 4 : "Soit C un $C^\infty(x)$ -module fini, $A \subset C$ un sous-module. Alors :

$$\dim_R (C/\mathfrak{m}_x^{\ell+1} C + A) \leq \ell \implies \mathfrak{m}_x^\ell C \subset A ."$$

Démonstration : Soit $d_k = \dim(C/\mathfrak{m}_x^k C + A)$.

On a :

$$0 = d_0 \leq d_1 \leq d_2 \leq \dots \leq d_{\ell+1} \leq \ell$$

$$\implies \exists k : d_k = d_{k+1} ;$$

$$\implies \mathfrak{m}_x^k C + A = \mathfrak{m}_x^{k+1} C + A . \quad (*)$$

Je dis que $\mathfrak{m}_x^k C + A$ est $C^\infty(x)$ -fini.

En effet : C , $\mathfrak{m}_x^\ell$ sont $C^\infty(x)$ -fini $\implies \mathfrak{m}_x^k C$ est $C^\infty(x)$ -fini. D'autre part, on a une suite exacte de $C^\infty(x)$ -modules :

$$0 \rightarrow \mathfrak{m}_X^k C \rightarrow \mathfrak{m}_X^k C + A \rightarrow \mathfrak{m}_X^k C + A / \mathfrak{m}_X^k C \rightarrow 0$$

et :

$(\mathfrak{m}_X^k C + A) / \mathfrak{m}_X^k C \hookrightarrow C / \mathfrak{m}_X^k C$, qui est R -fini, (donc $(\mathfrak{m}_X^k C + A) / \mathfrak{m}_X^k C$ est R -fini),...

Donc $(\mathfrak{m}_X^k C + A) / A = \Gamma$ est, encore, un module $C^\infty(x)$ -fini. (*) nous dit que

$$\mathfrak{m}_X \Gamma = \Gamma ,$$

donc (Nakayama) : $\Gamma = 0 \implies \mathfrak{m}_X^k C \subset A$.

On a : $(\ell > k)$

$$\mathfrak{m}_X^\ell C \hookrightarrow \mathfrak{m}_X^k C \hookrightarrow A \quad . \text{ (q.e.d.)}$$

LEMME 5 : "Dans les conditions du lemme précédent, il existe un système de $C^\infty(x)$ -générateurs de A ayant au plus :

$$\gamma \binom{n+\ell}{\ell} = \beta(\gamma, n, \ell)$$

éléments, où $n = \dim X$, $\gamma = \dim_{C^\infty(x)} C$ " .

Démonstration : On a :

$$A = A + \mathfrak{m}_X^\ell C ,$$

et on a déjà vu que $A + \mathfrak{m}_X^\ell C$ était $C^\infty(x)$ -fini $\implies \underline{A \text{ est } C^\infty(x)\text{-fini.}}$

Alors (Nakayama) :

Un système de R -générateurs de $A / \mathfrak{m}_X A \implies$ est un système de $C^\infty(x)$ -générateurs de A .

On a :

$$\dim_R A / \mathfrak{m}_X A \leq \dim A / \mathfrak{m}_X^{\ell+1} C \leq \dim C / \mathfrak{m}_X^{\ell+1} C \leq \gamma \cdot \dim C^\infty(x) / \mathfrak{m}_X^{\ell+1}$$

e.a.d.s.

LEMME 6 : "Soit A un $C^\infty(y)$ -module fini

C un $C^\infty(x)$ -module fini,

$f \in \mathcal{F}^2$ et $\varphi : A \rightarrow C$ un morphisme $C^\infty(y)$ -linéaire.

Soit

$$\alpha = \dim_R A/\mathfrak{m}_y A = \dim_{C^\infty(y)} A.$$

Si $\varphi(A) + (f^*\mathfrak{m}_y + \mathfrak{m}_x^{\alpha+1})C = C \implies \varphi(A) = C$ " .

Démonstration : On a :

$$C/(f^*\mathfrak{m}_y + \mathfrak{m}_x^{\alpha+1})C = \varphi(A)/\varphi(A) \cap (f^*\mathfrak{m}_y C + \mathfrak{m}_x^{\alpha+1}C). \quad \text{Mais :}$$

$$\varphi(A) \cap (f^*\mathfrak{m}_y C + \mathfrak{m}_x^{\alpha+1}C) \supset \varphi(\mathfrak{m}_y A) = f^*\mathfrak{m}_y \varphi(A).$$

Donc :

$$\dim_R (C/(f^*\mathfrak{m}_y + \mathfrak{m}_x^{\alpha+1})C) \leq \dim A/\mathfrak{m}_y A = \alpha$$

$$\implies \mathfrak{m}_x^\alpha C \subset f^*\mathfrak{m}_y C \quad (\text{lemme 4}),$$

$$\implies \mathfrak{m}_x^{\alpha+1} C \subset f^*\mathfrak{m}_y C ; \text{ on est donc réduit au théorème de préparation.}$$

LEMME 7 : "Soient A, C comme dans le lemme précédent, $C_0 \subset C$ un sous-module avec :

$$\delta = \dim_R (C/C_0).$$

Soit $p = \dim Y$ et

$$\ell = \beta(\alpha, p, \delta) = \alpha \binom{p+\delta}{\delta} \quad (\text{voir lemme 5}).$$

Alors :

$$\varphi(A) + \mathfrak{m}_x^{\ell+1} C_0 \supset C_0 \implies \varphi(A) \supset C_0 \text{ " .}$$

Démonstration : Soit: $A \supset A' = \varphi^{-1}C_0$. On a :

$$\varphi A' + \mathfrak{m}_x^{\ell+1} C_0 = C_0.$$

On a :

$$\dim_R A/A' \leq \dim_R C/C_0 = \delta.$$

Donc :

$$\dim_R A/m_y^{\delta+1} A + A' \leq \dim_R A/A' \leq \delta ,$$

donc, d'après le lemme 4 : $\mathfrak{m}_y^\delta A \subset A'$, donc (lemme 5)

$$\dim_{C^\infty(y)} A' \leq \ell = \beta(\alpha, p, \delta) .$$

Mais

$$\ell \geq \dim_{C^\infty(y)} A' = \dim_R A'/m_y A' \quad (\text{Nakayama})$$

et notre hypothèse est :

$$\varphi A' + \mathfrak{m}_x^{\ell+1} C_o = C_o .$$

On peut appliquer le lemme 6 , e.a.d.s.

LEMME 8 : "Soient A, C comme avant,

$$\alpha = \dim_R A/\mathfrak{m}_y A , \quad \varepsilon = \dim_R C/\varphi A .$$

On va supposer $\varepsilon < \infty$,

$\exists k = k(\alpha, \varepsilon, p)$, tel que :

$$\varphi A \supset \mathfrak{m}_x^k C .$$

(Remarque : $\varphi A \subset C$ n'est pas un sous $C^\infty(x)$ -module. Autrement la conclusion résulterait du lemme 4).

Démonstration : En considérant la suite

$$\dim_R C/\varphi A + \mathfrak{m}_x^{(\ell+1)i} C \leq \varepsilon$$

on voit qu'il existe un i tel que :

$$\varphi A + \mathfrak{m}_x^{(\ell+1)(i+1)} C = \varphi A + \mathfrak{m}_x^{(\ell+1)i} C .$$

Soit $\mathfrak{m}_x^{(\ell+1)i} C = C_o$. Donc :

$$\varphi A + \mathfrak{m}_x^{(\ell+1)} C_o \supset C_o$$

$$\implies \varphi(A) \supset C_o \quad \text{e.a.d.s.}$$

On va revenir maintenant aux conditions du théorème de détermination finie, énoncé

plus haut.

LEMME 9 : " $d(f, G) < \infty$ si et seulement si il existe k t.q. :

$$\theta(G) \supset \mathfrak{m}_x^k \theta(f)."$$

Démonstration : Si $\theta(G) \supset \mathfrak{m}_x^k \theta(f)$

alors :

$$d(f, G) = \dim_R \theta(f) / \theta(G) \leq \dim_R \theta(f) / \mathfrak{m}_x^k \theta(f) < \infty .$$

Il nous faut prouver l'implication inverse. On a le $C^\infty(x)$ -module $\theta(f)$, et pour chaque G on a un $C^\infty(y)$ -module $A = A(G)$, un $C^\infty(x)$ -module $B = B(G)$, des applications $\alpha = \alpha(G)$, $\beta = \beta(G)$ (qui sont $C^\infty(y)$ ($C^\infty(x)$)) - linéaires) :

$$\begin{array}{ccc} A & & B \xrightarrow{\beta} \theta(f) , \\ & \searrow \alpha & \nearrow \\ & & \end{array}$$

telles que $\theta(G) = \alpha(A) + \beta(B)$.

Soit

$$\begin{array}{ccccc} A & \xrightarrow{\alpha} & \theta(f) & \longrightarrow & \theta(f) / \beta(B) = C \\ \underbrace{\hspace{10em}}_{\bar{\alpha}} & & & & \uparrow \end{array}$$

Notre hypothèse est que $\dim_R C / \bar{\alpha}(A) < \infty$. Le lemme 8 nous dit que

$$\bar{\alpha}(A) \supset \mathfrak{m}_x^k C ;$$

$$\Rightarrow \alpha(A) + \beta(B) \supset \mathfrak{m}_x^k C .$$

q.e.d.

4) Le théorème principal. Le théorème 1 sera impliqué par un résultat qu'on va énoncer maintenant.

THEOREME 2 : "a) Nécessité : Soit $f \in \mathcal{C}^2$. Si $f(j^k f)$ est k -suffisant pour

G , alors :

$$\mathfrak{m}_x^{k+1} \theta(f) \subset \theta_1(G)$$

b) Suffisance : Si $G = \mathcal{K}, \mathcal{E}, \mathcal{F}$,

$$m_x^d \theta(f) \subset \theta(G) \implies f \text{ est } (d+1)\text{-suffisant par rapport à } G.$$

Si $G = \mathcal{A}, \mathcal{L}$ et :

$$m_x^k \theta(f) \subset \theta_1(G), \text{ il existe}$$

$$l = l(k, G, \dim X, \dim Y), \text{ t.q. } \implies f \text{ est } (l)\text{-suffisant".}$$

Exercices:

1) Il existe une fonction $\lambda(k, G)$ telle que $f \in \mathcal{F}^e$ soit G -suffisant si et seulement si il existe un k tel que :

$$\theta(G) + m_x^{\lambda(k)} \theta(f) \supset \theta(f).$$

2) Un germe analytique-réel est analytiquement G -suffisant si et seulement si il est (différentiablement) G -suffisant.

5) Un lemme d'approximation : Soient $f, g \in \mathcal{F}^e$.

Soient t les projections

$$\begin{array}{ccc} X \times R & & Y \times R \\ & \searrow t & \swarrow t \\ & R, & \end{array}$$

et $(y_1, \dots, y_p)$ ($y_i(0) = 0$) un système de coordonnées locales de Y .

On définit :

$$G : (X \times R, 0 \times R) \rightarrow (Y \times R, 0 \times R) :$$

$$G = \begin{cases} y_i \circ G = (1-t)(y_i \circ f) + t(y_i \circ g) \\ t \circ G = t. \end{cases}$$

Pour $a \in R$ on définit le germe de G en $0 \times a$:

$$G^a : (X \times R, 0 \times a) \rightarrow (Y \times R, 0 \times a)$$

et $G_a = G^a|_{(X \times a, 0 \times a)} : (X, 0) \rightarrow (Y, 0) .$

Soient : $X \times R \xrightarrow[\pi_1 = \pi_1]{X} X$, $Y \times R \xrightarrow[\pi_1 = \pi_1]{Y} Y$.

On va faire les identifications :

$$C_0^\infty(X) = \pi_1^* C_0^\infty(X) \hookrightarrow C_{0 \times a}^\infty(X \times R)$$

$$C_0^\infty(Y) = \pi_1^* C_0^\infty(Y) \hookrightarrow C_{0 \times a}^\infty(Y \times R) .$$

On va, de même, identifier les autres notions sur $X(\Gamma_0^\infty TX, \dots)$ à des notions sur $X \times R (Y \times R)$, via π_1^* .

Remarquons enfin que $\{\frac{\partial}{\partial y_i}\}$ est une $C_0^\infty(Y)$ -base libre de $\Gamma_0^\infty(TY)$,

$\frac{\partial}{\partial y_1} \circ f, \dots, \frac{\partial}{\partial y_p} \circ f$ est une $C_0^\infty(X)$ -base libre de $\Gamma_0^\infty(f^*TY) = \Theta(f)$, et

$\{\frac{\partial}{\partial y_i} \circ \pi_1 \circ G^a\}$ est une $C_{0 \times a}^\infty(X \times R)$ -base libre de $\Theta(\pi_1 \circ G^a)$ (On rappelle que :

$$X \times R \xrightarrow[\pi_1 \circ G^a]{} Y) .$$

On peut faire une identification :

$$\boxed{\Theta(f) \hookrightarrow \Theta(\pi_1 \circ G^a)}$$

par : $(u_i \in C_0^\infty(X) \hookrightarrow C_{0 \times a}^\infty(X \times R)) :$

$$\boxed{\sum u_i (\frac{\partial}{\partial y_i}) \circ f \xrightarrow{\sim} \sum u_i (\frac{\partial}{\partial y_i}) \circ \pi_1 \circ G^a}$$

Avec ces identifications, on a le :

LEMME 10 : "Si $j_0^\ell f = j_0^\ell g$, alors :

1) Si $\xi \in \Gamma_0^\infty(TX) :$

$$\beta_f(\xi) - \beta_{\pi_1 \circ G^a}(\xi) \in \mathfrak{m}_x^{\ell-1} \Theta(\pi_1 \circ G^a) .$$

2) Si $v \in C_0^\infty(Y)$:

$$f^*(v) - (G^a)^*(v) \in \mathfrak{m}_x^\ell C_{0 \times a}^\infty(X \times R) .$$

3) Si $\eta \in \Gamma_0^\infty(TY)$:

$$\alpha_f(\eta) - \alpha_{\pi_1 \circ G^a}(\eta) \in \mathfrak{m}_x^\ell \Theta(\pi_1 \circ G^a) . "$$

Démonstration :

(1) En coordonnées (locales) :

$$\beta_f\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right) = \sum_j \frac{\partial(y_j \circ f)}{\partial x_i} \left(\frac{\partial}{\partial y_j} \circ f\right)$$

(on remarque que $\left(\frac{\partial(y_j \circ f)}{\partial x_i}\right)$ = la matrice jacobienne de $f \dots$), et :

$$\beta_{\pi_1 G^a}\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right) = \sum_j \left(\frac{\partial(y_j \circ f)}{\partial x_i} + t \frac{\partial(y_j \circ g) - \partial(y_j \circ f)}{\partial x_i}\right) \left(\frac{\partial}{\partial y_j} \circ \pi_1 \circ G^a\right)$$

On remarque maintenant que d'après nos identifications :

$$\frac{\partial}{\partial y_i} \circ f \longrightarrow \frac{\partial}{\partial y_i} \circ \pi_1 \circ G^a$$

et que

$$\frac{\partial(y_j \circ g) - \partial(y_j \circ f)}{\partial x_i}$$

a le même $(\ell-1)$ -jet que 0 ... e.a.d.s.

(2) Il suffit de considérer le cas où v est un monôme en $y_1, \dots, y_p$.

[En effet :

$$v = \text{polynôme (en } y_i) + \text{élément de } \mathfrak{m}_y^\ell$$

et $f^*(\mathfrak{m}_y^\ell), (G^a)^*(\mathfrak{m}_y^\ell) \subset \mathfrak{m}_x^\ell C_{0 \times a}^\infty(X \times R) \dots]$

Maintenant on procède par induction. Si $\deg v = 0$:

$$f^*(v) = G^{a*}(v) . \text{ Si } \deg v = 1 : v = y_i ,$$

$$f^*(y_i) - G^{a*}(y_i) = t(y_i \circ f - y_i \circ g) \in \mathfrak{m}_x^{\ell} C_{\text{oxa}}^{\infty}(X \times R) .$$

Si $\deg v > 1$: $v = y_i w$, et :

$$f^*(v) - G^{a*}(v) = (f^*(y_i) - G^{a*}(y_i))f^*(w) + G^{a*}(y_i)(f^*(w) - G^{a*}(w)) .$$

On peut appliquer l'induction...

(3) résulte de (2) vu que α_f est un homomorphisme au-dessus de f^* ,...

(On décompose $\eta = \sum v_i(y) \frac{\partial}{\partial y_i}$ et on travaille avec les $v_i(y)$ comme ci-dessus.

Nos identifications sont telles que $\alpha_f(\frac{\partial}{\partial y_i}) = \alpha_{\pi_1 \circ G^a}(\frac{\partial}{\partial y_i})$.)

6) La démonstration de la nécessité.

Pour chacun des 5 groupes soit :

$$G_r \subset G$$

le sous-groupe (invariant) des éléments qui ont le même r -jet que l'identité, et :

($\ell > r$)

$$G_r^{\ell} = G_r / G_{\ell} = \text{le groupe des } \ell\text{-jets d'éléments de } G_r .$$

Soit $J^k = 1$ l'ensemble des k -jets de $\mathcal{F}$. C'est une variété C^{∞} .

On a une action : $(\Phi = \Phi(k, r, G))$:

$$G_r^k \times J^k \xrightarrow{\Phi} J^k .$$

$G_r^k \subset G^k$ sont des groupes de Lie $\implies$ les orbites dans J^k sont des sous-variétés (voir plus de détails à ce sujet, dans le chapitre suivant).

Soit $f \in \mathcal{F}$, $z = j^{\ell} f \in J^{\ell}$. On va définir :

$$\pi^{\ell} : \mathfrak{m}_x \theta(f) \rightarrow T_z J^{\ell} .$$

Soit $\mathfrak{J} \in \mathfrak{m}_x \theta(f)$, $0 \in I_0 \subset I_0 \subset R$,

et

$$\begin{array}{ccc} (X \times R, 0 \times I_0) & \xrightarrow{F} & (Y \times R, 0 \times I_0) \\ & \searrow & \swarrow \\ & R & \end{array}$$

telle que : $F(0) = f$, $\left. \frac{\partial F}{\partial t} \right|_{t=0} = \zeta$ (F garde $0 \rightarrow 0$, parce que $\zeta \in \mathfrak{m}_x \Theta(f)$). On définit :

$$\begin{array}{ccc} I_0 & \longrightarrow & J^\ell \\ t & \longmapsto & z_t = F_t^{(\ell)} \end{array} .$$

Alors :

$$\pi^\ell(\zeta) = \left. \frac{dz_t}{dt} \right|_{t=0} .$$

On vérifie que π^ℓ est bien défini. π^ℓ est R -linéaire, surjectif, et :

$$\text{Ker} \pi^\ell = \mathfrak{m}_x^{\ell+1} \Theta(f) .$$

LEMME 11 : "Soit $f \in \mathcal{F}$, $z = f^{(\ell)}$.

- (1) $T_z(\mathcal{K}_k^\ell z) = \pi^\ell(\beta_f(\mathfrak{m}_x^{k+1} \Gamma_0^\infty(TX)) + \mathfrak{m}_x^k f^*(\mathfrak{m}_y) \Theta(f))$
- (2) $T_z(\mathcal{H}_k^\ell z) = \pi^\ell(\beta_f(\mathfrak{m}_x^{k+1} \Gamma_0^\infty(TX)) + \alpha_f(\mathfrak{m}_y^{k+1} \Gamma_0^\infty(TY)))$
- (3) $T_z(\mathcal{B}_k^\ell z) = \pi^\ell(\beta_f(\mathfrak{m}_x^{k+1} \Gamma_0^\infty(TX)))$
- (4) $T_z(\mathcal{A}_k^\ell z) = \pi^\ell(\alpha_f(\mathfrak{m}_x^{k+1} \Gamma_0^\infty(TY)))$
- (5) $T_z(\mathcal{C}_k^\ell z) = \pi^\ell(\mathfrak{m}_x^k f^*(\mathfrak{m}_y) \Theta(f))"$.

Démonstration : Remarquons que, si

$$G \times M \xrightarrow{\Phi} M$$

est une action (C^∞) de groupe de Lie (quelconque), $m \in M$ et $G \xrightarrow[\Phi_m]{} M$ l'orbite de m , alors :

$$T_m(\text{Image } \Phi_m) = T_e \Phi_m(T_e G)$$

(où $e \in G$ est l'élément unité).

Le cas (3) : On a, comme avant, une application surjective :

$$\pi_R^\ell : \mathfrak{m}_X \Gamma_0^\infty(TX) \longrightarrow T_e \mathcal{P}^\ell,$$

et un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{m}_X \Gamma_0^\infty(TX) & \xrightarrow{\beta_f} & \mathfrak{m}_X \Theta(f) \\ \downarrow \pi_{\mathcal{P}}^\ell & & \downarrow \pi^\ell \\ T_e \mathcal{P}^\ell & \xrightarrow{T_e \Phi_z} & T_z J^\ell \cong z = j^\ell f \\ \downarrow & & \downarrow \\ 0 & & 0 \end{array}.$$

Si $k = 0$:

$$T_z(\mathcal{P}^\ell.z) = T\Phi_z(T_e \mathcal{P}^\ell) = T\Phi_z(\pi^\ell \mathfrak{m}_X \Gamma_0^\infty(TX)) = \pi^\ell(\beta_f(\mathfrak{m}_X \Gamma_0^\infty(TX))) .$$

Si $k > 0$, on remarque que :

$$\mathfrak{m}_X^{k+1} \Gamma_0^\infty(TX) = (\pi_{\mathcal{P}}^\ell)^{-1}(T_e \mathcal{P}_k^\ell),$$

e.a.d.s.

(4) (d) se démontre de la même façon, et (3) + (4) $\implies$ (2) .

Le cas (5) (3) : Soit $\pi_2 : X \times Y \rightarrow Y$. $\Theta(\pi_2)$ est le $C_{0 \times 0}^\infty(X \times Y)$ -module des sections η :

$$\begin{array}{ccc} & & TY \\ & \nearrow \eta & \downarrow \\ X \times Y & \xrightarrow{\pi_2} & Y \end{array}$$

On définit la surjection :

$$\pi_{\mathcal{E}}^{\ell} : \mathfrak{m}_Y^{\Theta}(\pi_2) \longrightarrow T_e \mathcal{E}^{\ell}, \quad \text{et}$$

$$\chi : \mathfrak{m}_Y^{\Theta}(\pi_2) \longrightarrow \mathfrak{m}_X^{\Theta}(f)$$

par : $\chi(\eta) = \eta \circ \langle \text{graph} f \rangle = \langle \text{id}(X), f \rangle * (\eta)$

(où $X \xrightarrow{\langle \text{id} X, f \rangle} X \times Y$).

Le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{m}_Y^{\Theta}(\pi_2) & \xrightarrow{\chi} & \mathfrak{m}_X^{\Theta}(f) \\ \downarrow \pi_{\mathcal{E}}^{\ell} & & \downarrow \pi^{\ell} \\ T_e \mathcal{E}^{\ell} & \xrightarrow{T_e \Phi_Z} & T_Z J^{\ell} \\ \downarrow & & \downarrow \\ 0 & & 0 \end{array}$$

[Démonstration de la commutativité : Si $\eta \in \mathfrak{m}_Y^{\Theta}(\pi_2) \subset \Theta(\pi_2)$ on considère la famille de germe de difféomorphismes (paramétrés par x) :

$$H_t(x) ; Y \rightarrow Y$$

tels que $H_0 = \text{id } Y$, $\frac{\partial H_t}{\partial t} \Big|_{t=0} = \eta$. On a :

$$\chi(\eta) = \frac{\partial}{\partial t} (H_t(x) \circ f(x)) \Big|_{t=0} : x \longmapsto TY.$$

$$\pi_{\mathcal{E}}^{\ell} \circ \chi(\eta) = \frac{\partial}{\partial t} (H_t f)^{(\ell)} \Big|_{t=0}.$$

D'autre part :

$$\pi_{\mathcal{E}}^{\ell}(\eta) = \frac{\partial H_t^{(\ell)}}{\partial t} \Big|_{t=0} \implies$$

$$T_e \Phi_Z \circ \pi_{\mathcal{E}}^{\ell}(\eta) = \frac{\partial}{\partial t} H_t^{(\ell)} \cdot f^{(\ell)} \Big|_{t=0} = \frac{\partial}{\partial t} (H_t f)^{(\ell)} \Big|_{t=0}].$$

Je dis que :

$$(x) \quad \chi(m_{x \times y}^k m_y \theta(\pi_2)) = f^*(m_y) m_x^k \theta(f) .$$

[Démonstration : On a clairement

$$\theta(\pi_2) \xrightarrow{\chi} \theta(f) \longrightarrow 0$$

est

et ceci un homomorphisme au-dessus de :

$$C_{0 \times 0}^\infty(X \times Y) \xrightarrow{\langle \text{id}(X), f \rangle^*} C_0^\infty(X) .$$

D'autre part :

$$\begin{cases} \langle \text{id} X, f \rangle^*(m_y C_{0 \times 0}^\infty(X \times Y)) = f^*(m_y) C_0^\infty(X) \\ \langle \text{id} X, f \rangle^*(m_{x \times y}^k) = m_x^k . \end{cases}$$

A partir de ces remarques :

$$\chi(m_{x \times y}^k m_y \theta(\pi_2)) = \langle \text{id} X, f \rangle^*(m_{x \times y}^k) . \langle \text{id} X, f \rangle^*(m_y) . \chi(\theta(\pi_2)) = \dots] .$$

On a aussi :

$$(xx) \quad (\pi_2^l)^{-1} T_e \mathcal{S}_k^l = m_{x \times y}^k m_y \theta(\pi_2) .$$

De (x) (xx) on déduit tout de suite (5).

(1) résulte de (3) + (5) vu que :

$$T_e \mathcal{K}_k^l = T_e \mathcal{S}_k^l \oplus T_e \mathcal{S}_k^l, \dots \text{ e.a.d.s.}$$

Ceci finit la démonstration du lemme 1.1.

Pour la démonstration de la nécessité on va considérer $G = \mathcal{H}$. Les autres cas se traitent de la même manière.

Soit $f \in \mathcal{F}^k$, k -suffisant pour $\mathcal{H}$. Soit $l > k$, $z = f^{(l)} \in J^l$ et

$$J^l \supset E = \pi^{-1} \pi(z) \quad \text{où} \quad \pi : J^l \rightarrow J^k .$$

Puisque f est k -suffisant et $l > k$ on a : $E \subset \Phi_z \mathcal{H}^l$, et :

$$T_Z E = \pi^\ell(\mathfrak{m}_x^{k+1} \Theta(f)) .$$

[En effet, $\pi^\ell(\mathfrak{m}_x \Theta(f)) = T_Z J^\ell$, et puisqu'on n'a pas le droit de changer $z^{(k)} = f^{(k)}$ il faut encore multiplier avec $\mathfrak{m}_x^k \dots$].

$$\pi^\ell(\mathfrak{m}_x^{k+1} \Theta(f)) \subset \pi^\ell(\alpha_f(\mathfrak{m}_y \Gamma_0^\infty(TY)) + \beta_f(\mathfrak{m}_x \Gamma_0^\infty(TX)))$$



$$\mathfrak{m}_x^{k+1} \Theta(f) \subset \alpha_f(\mathfrak{m}_y \Gamma_0^\infty(TY)) + \beta_f(\mathfrak{m}_x \Gamma_0^\infty(TX)) + \mathfrak{m}_x^{\ell+1} \Theta(f)$$

$$(\text{car } \mathfrak{m}_x^{\ell+1} \Theta(f) = \text{Ker } \pi^\ell) .$$

Soit :

$$\begin{array}{ccccc} \Gamma = \mathfrak{m}_x \Theta(f) / \text{Image } \beta_f & & \text{et} & & \\ \mathfrak{m}_y \Gamma_0^\infty(TY) & \xrightarrow{\alpha_f} & \mathfrak{m}_x \Theta(f) & \longrightarrow & \Gamma \\ \downarrow & & & & \downarrow A \\ & \xrightarrow{\bar{\alpha}_f} & & & \end{array}$$

On a :

$$\mathfrak{m}_x^k \Gamma \subset \bar{\alpha}_f(\mathfrak{m}_y \Gamma_0^\infty(TY)) + \mathfrak{m}_x^\ell \Gamma ,$$

pour ℓ arbitrairement grand.

D'après le lemme 7 :

$$\mathfrak{m}_x^k \Gamma \subset \bar{\alpha}_f(\mathfrak{m}_y \Gamma_0^\infty(TY)) , \text{ donc :}$$

$$\mathfrak{m}_x^{k+1} \Theta(f) \subset \alpha_f(\mathfrak{m}_x \Gamma_0^\infty(TY)) + \beta_f(\mathfrak{m}_x \Gamma_0^\infty(TX)) , \quad \text{q.e.d.}$$

7) Démonstration de la suffisance (cas $G = \mathbb{K}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$).

Il s'agit des cas où $\Theta(G) (\Theta_1(G))$ est un sous- $C_0^\infty(x)$ -module de $\Theta(f) (\mathfrak{m}_x \Theta(f))$. On n'aura pas besoin du théorème de préparation, le lemme de Nakayama suffira. On va considérer seulement $G = \mathbb{K}$, les autres cas sont pareils.

Soit $f \in \mathcal{F}$, tel que

$$(7.1) \quad m_X^d \theta(f) \subset f^*(m_Y) \theta(f) + \beta_f(\Gamma^\infty(TX)) .$$

On va montrer que f est $(d+1)$ -suffisant pour $\mathcal{K}$. On choisit $g \in \mathcal{F}^2$, tel que $f^{(d+1)} = g^{(d+1)}$, et on applique les constructions du lemme d'approximation.

Soit $a \in R$, $\Psi = \theta(\pi_1 \circ G^a)$ où :

$$(X \times R, 0 \times a) \xrightarrow{G^a} (Y \times R, 0 \times a) \xrightarrow{\pi_1} Y .$$

Je dis que :

$$(7.2) \quad m_X^d \Psi \subset G^{a*}(m_Y) \Psi + \beta_{\pi_1 \circ G^a}(\theta(\pi_1^X)) + m_X^{d+1} \Psi .$$

[Démonstration : Les deux termes sont des $C_{X \times a}^\infty(X \times R)$ -modules, et comme $m_X^d \theta(f) \subset m_X^d \Psi$ engendre $m_X^d \Psi$ comme $C_{X \times a}^\infty(X \times R)$ -module, il suffit de montrer que $m_X^d \theta(f)$ est contenu dans le membre droit de (7.2). Je rappelle ici qu'on identifie :

$$\theta(f) \ni \sum u_i(x) \left(\frac{\partial}{\partial y_i} \right) \circ f \xrightarrow{\cong} \sum u_i \left(\frac{\partial}{\partial y_i} \right) \circ \pi_1 \circ G^a \in \theta(\pi_1 \circ G^a) .$$

Soit $\zeta \in m_X^d \theta(f)$. D'après (7.1) :

$$\zeta = \sum_i f^*(v_i) \zeta_i + \beta_f(\xi)$$

où $v_i \in m_Y$, $\zeta_i \in \theta(f)$, $\xi \in \Gamma_0^\infty(TX)$.

En appliquant le lemme d'approximation :

$$\zeta - \left(\sum_i (G^a)^*(v_i) \zeta_i + \beta_{\pi_1 \circ G^a}(\xi) \right) \in m_X^{d+1} \Psi, \text{ e.a.d.s.}] .$$

(7.2) implique :

$$(7.3) \quad m_X^d \Psi \subset G^{a*}(m_Y) \Psi + \beta_{\pi_1 \circ G^a}(\theta(\pi_1^X)) .$$

[En effet ; considérons les $C_{o \times a}^\infty(X \times R)$ -modules finis suivants : $E =$ membre droit de (7.3) , $F = E + \mathfrak{m}_X^d \Psi$, $\alpha : E \hookrightarrow F$. On a (7.2) :

$$F = E + \mathfrak{m}_X^F \quad , \text{ donc,}$$

par Nakayama : $F = E$].

En multipliant par $\mathfrak{m}_X^r$:

$$(7.4) \quad \mathfrak{m}_X^{d+r} \Psi \subset G^{a*}(\mathfrak{m}_Y) \mathfrak{m}_X^r \Psi + \beta_{\pi_1 \circ G^a}(\mathfrak{m}_X^r \Theta(\pi_1^X)).$$

Remarquons que :

$$j^{(d+1)}_f = j^{(d+1)} \longrightarrow \frac{\partial}{\partial t} G^a \in \mathfrak{m}_X^{(d+1)} \Psi \quad .$$

On peut donc écrire :

$$\begin{array}{ccc} \frac{\partial G^a}{\partial t} = \sum_{i,j} G^{a*}(y_j) u_{ij} \left(\frac{\partial}{\partial y_i} \circ \pi_1^Y \circ G^a \right) + \beta_{\pi_1 \circ G^a}(\xi) & & \\ \downarrow & & \downarrow \\ \in \mathfrak{m}_X C_{o \times a}^\infty(X \times R) & & \in \mathfrak{m}_X \Theta(\pi_1^X) \end{array}$$

Soit

$$\Pi : (X \times Y \times R , o \times o \times a) \longrightarrow (X \times Y , o \times o)$$

et considérons $\eta \in \Theta(\Pi)$ défini par :

$$\eta = \sum_{i,j} y_j u_{ij} \frac{\partial}{\partial y_i} - \xi \quad .$$

[Remarques : Ceci est un champ (dépendant du temps t , voisin de a), défini sur $X \times Y$ (et pas seulement sur X , comme $\frac{\partial G^a}{\partial t}$). Le terme $\sum y_j u_{ij}(x,t) \frac{\partial}{\partial y_i}$ est vertical (Y) et le terme $-\xi(x,t)$ est horizontal (X)]

Soit :

$$\zeta = \sum_{i,j} y_i u_{ij}(x,t) \frac{\partial}{\partial y_i} \in C_{o,a}^\infty(X \times Y \times R) , \Gamma_o^\infty(TY) \quad .$$

On remarque que :

$$\frac{\partial G^a}{\partial t} = (\zeta + T_1 \xi) | (\text{graph } G^a) = \zeta \circ G^a + TG^a \circ \xi .$$

↓
ceci étant considéré comme un
champ sur $X \times R$.

↓
ceci étant considéré comme un
champ sur $Y \times R$ (dépendant
du paramètre x).

Considérons :

$$(X \times R, o \times a) \xrightarrow{F = \langle \pi_1^X, G^a \rangle} (X \times Y \times R, o \times o \times a) .$$

Je dis que :

$$(7.5) \quad \frac{\partial F}{\partial t} = \alpha_F(\eta) + \beta_F(\xi) .$$

(ici η est un champ sur $X \times Y \times R$, ξ un champ sur $X \times R$) .

[Démonstration : Considérons :

$$T(X \times Y \times R) = T(X) \oplus T(Y \times R) .$$

Alors :

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial t} &= (0) \oplus \frac{\partial G^a}{\partial t} = (0) \oplus (\zeta \circ G^a + TG^a \circ \xi) = \\ &= (\xi - \xi) \oplus (\zeta \circ G^a + TG^a \circ \xi) = \\ &= \underbrace{(-\xi \oplus \zeta \circ G^a)}_{\eta \circ F = \alpha_F(\eta)} + \underbrace{(\xi \oplus TG^a \circ \xi)}_{TF \circ \xi = \beta_F(\xi)} . \end{aligned}$$

Soient $H(H')$ les intégrales de $-\xi(\eta)$:

$$\begin{array}{ccccc}
 (X \times R, o \times a) & \xrightarrow{i} & (X \times Y \times R, o \times o \times a) & \longrightarrow & (Y \times R, o \times a) \\
 \downarrow H & \approx & \downarrow H' & \approx & \downarrow H \\
 (X \times R, o \times a) & \xrightarrow{i} & (X \times Y \times R, o \times o \times a) & \longrightarrow & (Y \times R, o \times a)
 \end{array}
 \quad \begin{array}{c} (x) \\ \\ (xx) \end{array}$$

[Ce diagramme commute : le carré (x) parce que la composante verticale de η s'annule pour ($y = o$) et la composante horizontale est exactement $-\xi$. Le carré (xx) parce que la composante horizontale de η est $-\xi$].

En appliquant le lemme 2, il résulte que pour un petit intervalle $a \in J \subset I$, tous les G_a sont dans la même $\mathcal{K}$ -orbite. (Plus exactement, pour $b \in J$:

$$(H'_b)^{-1} \circ \langle 1_X, G_b \rangle \circ H_b = \langle 1_X, G_a \rangle .$$

Puisque a est arbitraire, $G_o = f$, $G_1 = g$ sont dans la même $\mathcal{K}$ -orbite.

8) Démonstration de la suffisance (cas $G = \mathcal{A}_\infty$) .

On va s'occuper seulement du cas $G = \mathcal{A}$. (l'autre ne traite de la même façon).

On va supposer que :

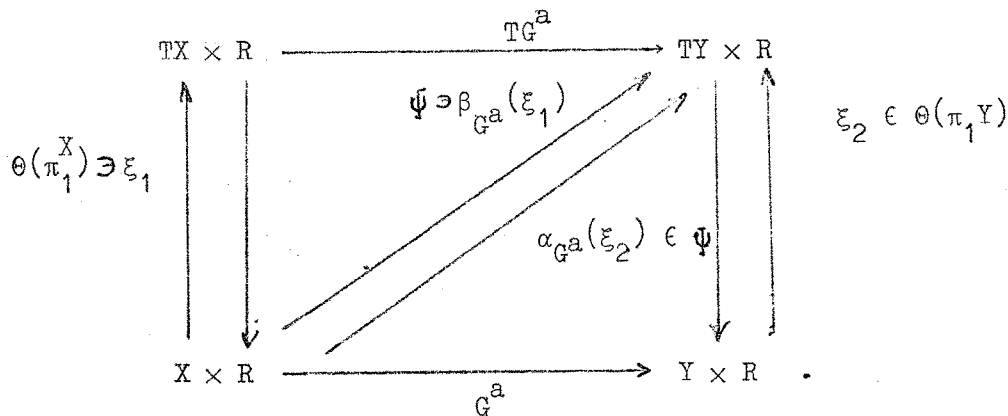
$$m_X^k \theta(f) \subset \alpha_f(m_{TY} \Gamma_o^\infty(TY)) + \beta_f(m_{TX} \Gamma_o^\infty(TX)) .$$

Soit $g \in \mathcal{G}$, tel que $f^{(l)} = g^{(l)}$. On veut montrer que f, g sont dans la même $\mathcal{A}$ -orbite.

Soit $a \in R$, $\psi = \theta(\pi_1 \circ G^a)$, et :

$$\begin{array}{ccc}
 (X \times R, o \times a) & \xrightarrow{G^a} & (Y \times R, o \times a) \\
 & \searrow & \swarrow \\
 & R & .
 \end{array}$$

On aura :



Soit A_0 le $C_0^\infty(Y)$ -sous module :

$$A_0 = \alpha_f^{-1} (\beta_f(m_x \Gamma_0^\infty(TX)) + m_x^k \theta(f)) \cap m_y \Gamma_0^\infty(TY) \subset \Gamma_0^\infty(TY) .$$

A_0 engendre un sous $C_{0 \times a}^\infty(Y \times R)$ -sous-module :

$$\bar{A}_0 \subset \theta(\pi_1^Y) .$$

Je dis que :

$$(8.1) \quad \alpha_{G^a}(\bar{A}_0) + \beta_{G^a}(m_x \theta(\pi_1^X)) + m_{x \times a}^{\ell-k} m_x^k \Psi = \beta_{G^a}(m_x \theta(\pi_1^X)) + m_x^k \Psi .$$

[Démonstration : ($\Leftarrow$) : Il suffit de montrer que $\alpha_{G^a}(\bar{A}_0) \hookrightarrow$. Mais le terme droit est un $C_{0 \times a}^\infty(X \times R)$ (donc un $C_{0 \times a}^\infty(Y \times R)$)-module. Il suffit donc de montrer : $\alpha_{G^a}(A_0) \hookrightarrow$.

Si $\eta \in A_0$:

$$\alpha_f(\eta) = \beta_f(\xi) + \zeta \quad \text{où :}$$

$$\xi \in m_x \Gamma_0^\infty(TX) , \quad \zeta \in m_x^k \theta(f) .$$

On a : (lemme d'approximation) :

$$\beta_f(\xi) - \beta_{G^a}(\xi) \in m_x^k \Psi$$

$$\alpha_f(\eta) - \alpha_{G^a}(\eta) \in m_x^k \Psi$$

(ℓ suffisamment grand).

Alors :

$$\alpha_{G^a}(\eta) = (\alpha_{G^a}(\eta) - \alpha_f(\eta)) + (\beta_f(\xi) - \beta_{G^a}(\xi)) + \beta_{G^a}(\xi) + \zeta, \dots$$

($\Leftarrow$) : Il suffit de montrer $\Leftarrow \mathfrak{m}_{l_X}^k \Psi$.

Soit $\zeta \in \mathfrak{m}_X^k \Psi$. On a :

$$\begin{array}{ccc} \zeta = \zeta' + \sum_{i=0}^{l-k-1} t^i \zeta_i & & \\ \downarrow & & \downarrow \\ \in \mathfrak{m}_{X \times a}^{l-k} \mathfrak{m}_{l_X}^k \Psi & & \in \mathfrak{m}_X^k \Theta(f) . \end{array}$$

(On se rappelle ici l'identification :

$$\Theta(f) \hookrightarrow \Theta(\pi_1 \circ G^a) .$$

L'image de $\Theta(f)$ consiste exactement des champs de la forme $\sum u_i(x) \left(\frac{\partial}{\partial y_i} \right) \circ \pi_1 \circ G^a$, tandis que $\Theta(\pi_1 \circ G^a) = \{ \sum v_i(x, t) \left(\frac{\partial}{\partial y_i} \right) \circ \pi_1 \circ G^a \}$. On a tout simplement développé ζ en $t \dots$).

Il suffit donc de montrer : $\Leftarrow \mathfrak{m}_{l_X}^k \Theta(f)$ (Puisque le membre gauche est stable par multiplication avec t). Mais (vu l'hypothèse du début), si $\zeta \in \mathfrak{m}_X^k \Theta(f)$:

$$\begin{array}{ccc} \zeta = \alpha_f(\eta) & + & \beta_f(\xi) \\ \swarrow & & \searrow \\ \in \mathfrak{m}_{l_Y}^\infty \Gamma_O(TY) & & \in \mathfrak{m}_{l_X}^\infty \Gamma_O(TX) . \end{array}$$

On réapplique le lemme d'approximation a :

$\zeta - \alpha_{G^a}(\eta) - \beta_{G^a}(\xi)$, qui se trouvera dans $\mathfrak{m}_X^l \Psi$. D'autre part :

$$\alpha_f(\eta) = \zeta - \beta_f(\xi) \Rightarrow \eta \in A_O \quad \text{e.a.d.s.}] .$$

Je dis que (8.1) $\Rightarrow$ (8.2) :

$$(8.2) \quad \alpha_{G^a}(\bar{A}_0) + \beta_{G^a}(\mathfrak{m}_X \Theta(\pi_1^X)) = \beta_{G^a}(\mathfrak{m}_X \Theta(\pi_1^X)) + \mathfrak{m}_X^k \bar{\Psi} .$$

[Démonstration : (C'est ici qu'on applique le théorème de préparation). On considère :

$$G^{a*} : C_{\text{oxa}}^\infty(Y \times R) \rightarrow C_{\text{oxa}}^\infty(X \times R) ,$$

et le $C_{\text{oxa}}^\infty(X \times R)$ -module (fini) :

$$\Gamma = (\beta_{G^a}(\mathfrak{m}_X \Theta(\pi_1^X)) + \mathfrak{m}_X^k \bar{\Psi}) / \beta_{G^a}(\mathfrak{m}_X \Theta(\pi_1^X)) .$$

$\bar{A}_0$ est un $C_{\text{oxa}}^\infty(Y \times R)$ -module et α_{G^a} induit un $C_{\text{oxa}}^\infty(Y \times R)$ -homomorphisme :

$$\alpha : \bar{A}_0 \rightarrow \Gamma ,$$

tel que $\alpha(\bar{A}_0) + \mathfrak{m}_{X \times R}^{\ell-k} \Gamma = \Gamma$. Si on prouve que $\bar{A}_0$ est $C_{\text{oxa}}^\infty(Y \times R)$ -fini (disons avec au plus α' générateurs), et si $\boxed{\ell-k \geq \alpha' + 1}$, alors on peut appliquer le lemme 6 (qui est lui-même une conséquence du théorème de préparation), pour déduire que :

$$\alpha(\bar{A}_0) = \Gamma$$

(ce qui implique 8.2).

Pour voir que $\bar{A}_0$ est fini, on raisonne comme suit : Il suffit de montrer que A_0 est $C_0^\infty(Y)$ -fini. On a : $A_0 \hookrightarrow \Gamma_0^\infty(TY)$ (inclusion de $C_0^\infty(Y)$ -modules), et

$$\dim_R(\Gamma_0^\infty(TY)/A_0) < \dim_R \Theta(f) / \mathfrak{m}_X^k \Theta(f) < \infty .$$

En appliquant les lemmes 4,5 il s'ensuit que A_0 est $C_0^\infty(Y)$ -fini. (α' sera évalué par les lemmes 4,5 puisque (le nombre minimum de générateurs de A_0 comme $C_0^\infty(Y)$ -module) $\geq \alpha'$.)]

On a : $A_0 \subset \mathfrak{m}_Y \Gamma_0^\infty(TY)$, donc :

$$\bar{A}_0 \subset \mathfrak{m}_Y \Theta(\pi_1^Y) .$$

Donc : (8.2) $\implies$ (8.3)

$$(8.3) \quad \mathfrak{m}_x^k \Psi \subset \alpha_{G^a}(\mathfrak{m}_y \theta(\pi_1^Y)) + \beta_{G^a}(\mathfrak{m}_x \theta(\pi_1^X))$$

Vu que $g^{(\ell)} = f^{(\ell)}$, on a :

$$\frac{\partial G^a}{\partial t} \in \mathfrak{m}_x^\ell \Psi \subset \mathfrak{m}_x^k \Psi \quad (\ell \text{ grand}, \dots)$$

donc $\exists \xi \in \mathfrak{m}_x \theta(\pi_1^X), \eta \in \mathfrak{m}_y \theta(\pi_1^Y)$ t.q. :

$$\frac{\partial G^a}{\partial t} = \alpha_{G^a}(\eta) + \beta_{G^a}(\xi).$$

A partir de là, on peut raisonner comme pour $\mathcal{K}$.

9) Remarques finales : On va considérer le cas $\dim Y = 1$. On peut faire, alors, les identifications suivantes :

$$\theta(f) = C_o^\infty(x)$$

$$\Gamma_o^\infty(TX) = \text{le } C_o^\infty(x)\text{-module libre engendré par } \frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n},$$

$$\Gamma_o^\infty(TX) = C_o^\infty(y) = C_o^\infty(R).$$

On remarque que :

$$\beta_f\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right) = \frac{\partial f}{\partial x_i} \in C_o^\infty(x) \approx \theta(f),$$

donc :

$$\beta_f(\Gamma_o^\infty(TX)) = \underbrace{\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}\right)}_{\text{l'idéal "jacobien" de } f} C_o^\infty(x),$$

l'idéal "jacobien" de f .

On a donc : f est $\mathcal{R}$ -suffisant $\iff \exists k$ t.q. .

$$\mathfrak{m}_x^k \subset \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}\right) C_o^\infty(x).$$

$$\iff \dim_R C_o^\infty(x) / \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}\right) C_o^\infty(x) < \infty.$$

Ceci est l'analogue algébrique de la notion de singularité isolée (au voisinage de laquelle f ne tend pas trop vite vers 0).

-:-:-:-

CHAPITRE IV.

-:-:-

CARACTERISATION DES APPLICATIONS (ET DES GERMES D'APPLICATIONS) STABLES.

Sauf mention explicite du contraire on ne s'occupera que des variétés compactes.

1) Les espaces de multi-jets : Si X est un espace (variété) on va désigner par :

$$X^r = X \times \dots \times X \quad (r \text{ fois})$$

et par $X^{(r)} \subset X^r$ le sous ensemble

$$X^{(r)} = \{(x_1, \dots, x_r) ; x_i \in X, x_i \neq x_j\}.$$

On va considérer la projection canonique : $\pi : J^k(X, Y) \longrightarrow X$; qui induit une fibration :

$$\pi^r : J^k(X, Y)^r \longrightarrow X^r.$$

Par définition :

$${}_r J^k(X, Y) = (\pi^r)^{-1}(X^{(r)}) \subset J^k(X, Y)^r.$$

On a une application naturelle :

$${}_r j^k : C^\infty(X, Y) \longrightarrow \Gamma^\infty(\pi^r|X^{(r)}) \subset C^\infty(X^{(r)}), \quad {}_r J^k(X, Y),$$

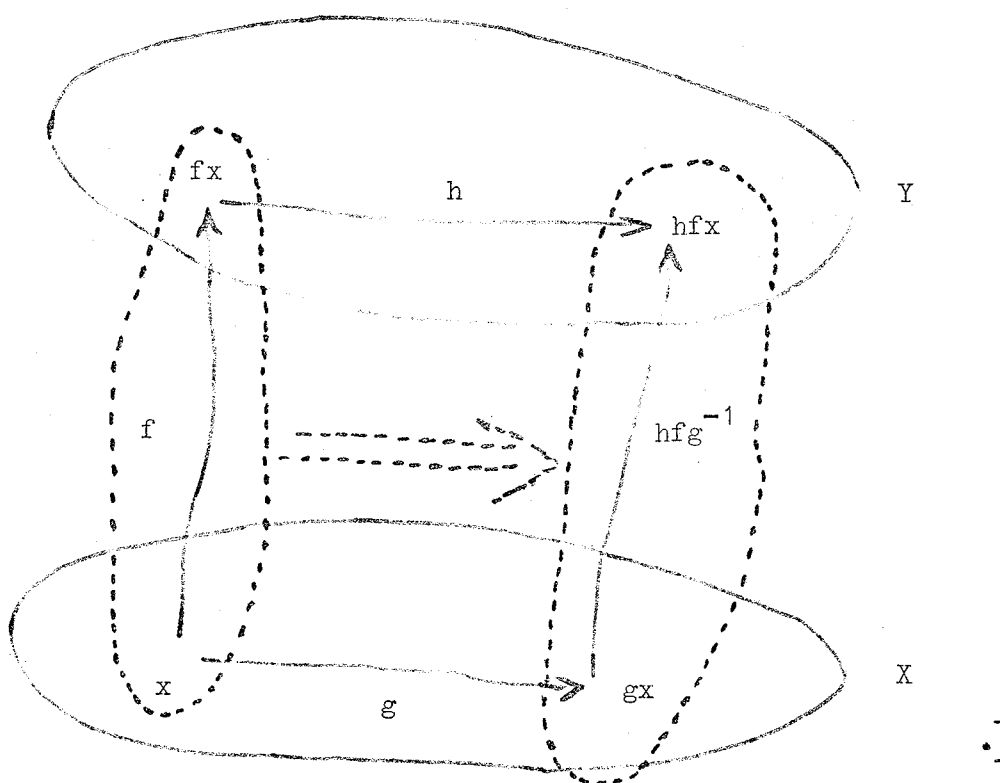
définie par :

$${}_r j^k f(x_1, \dots, x_r) = (j^k f(x_1), \dots, j^k f(x_r)).$$

L'action de $\text{Diff}(X) \times \text{Diff}(Y)$ sur $C^\infty(X,Y)$, considérée au chapitre II, induit une action sur ${}_r J^k(X,Y)$. [D'une manière plus précise, si $g \in \text{Diff } X$, $h \in \text{Diff } Y$, alors :

$$(g,h). (j^k_{f_1}(x_1), \dots, j^k_{f_r}(x_r)) = (j^k(hf_1 g^{-1})(gx_1), \dots, j^k(hf_r g^{-1})(gx_r)) .$$

Il faut penser ici au diagramme suivant :



Pour cette action on va considérer des orbites ou des sous ensembles invariants, parties de ${}_r J^k(X,Y)$. On a le :

THEOREME 1 : "Les orbites sont des sous-variétés de ${}_r J^k(X,Y)$ ".

Démonstration : On commence par considérer la "restriction" :

$$\Pi_{r,s} : J^r(n,p) \longrightarrow J^s(n,p) \quad (s \leq r) ,$$

et la composition :

$$J^r(n,p) \times J^r(p,q) \longrightarrow J^r(n,q) ,$$

qui est une application algébrique réelle (puisque les formules qui expriment les dérivées partielles de $f \circ g$ en fonction des dérivées partielles de f et de g sont algébriques) (On rappelle que $J^k(n,p) = \{\text{les } k\text{-jets des germes d'applications } C^\infty : (R_n, 0) \rightarrow (R_p, 0)\}$. Soit

$$L^r(n) \subset J^r(n,n)$$

l'ensemble des jets de difféomorphismes. L'inclusion $L^1(n) \subset J^1(n,n)$ est la même chose que

$GL(n,R) \subset M(n,R) =$ l'ensemble des matrices réelles à $n \times n$ éléments.

On a : $L^r(n) = \Pi_{r,1}^{-1}(L^1(n))$. On remarque que $L^r(n)$ est un groupe de Lie.

$(L^r(n))$ est un ouvert partout dense de $J^r(n,n)$, difféomorphe à $GL(n,R) \times$ (un espace euclidien) ; la loi de groupe est donnée par des applications polynomiales. En fait $L^r(n)$ est un groupe algébrique réel ...).

LEMME 1. "Les orbites W_0 de l'action naturelle :

$$(L^k(n)^r \times L^k(p)) \times J^k(n,p)^r \longrightarrow J^k(n,p)^r$$

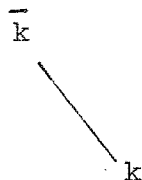
sont des sous-variétés". (Haefliger) (On considère ici l'action :

$$\langle g_1, \dots, g_r, h \rangle \cdot \langle z_1, \dots, z_r \rangle = \langle \text{hoz}_1 \circ g_1^{-1}, \dots, \text{hoz}_r \circ g_r^{-1} \rangle .)$$

Démonstration : D'après un théorème général, quand un groupe de Lie opère d'une façon C^∞ , sur une variété, les orbites sont des images d'immersions injectives (ce qui dans le cas où elles ne sont pas compactes, n'implique pas qu'elles sont des sous-variétés). Ceci étant insuffisant dans notre cas, on fera appel à des moyens de

géométrie algébrique.

Soit C^n l'espace complexe de dimension n muni de la topologie de Zariski (les fermés seront les ensembles algébriques fermés $\longleftrightarrow$ les zéros d'idéaux de polynômes). Si $A \subset C^n$ et $f : A \rightarrow C^m$, on dira que f est rationnelle régulière si elle s'exprime par des fonctions rationnelles, sans pôles sur A . Si $k \subset C$ est un sous corps et $G = G(C/k)$ est le groupe des automorphismes de C qui laissent invariant chaque $x \in k$, on dira que A est défini sur k s'il est invariant pour l'action $G \times C^n \rightarrow C^n$ ($g.(c_1, \dots, c_n) = (gc_1, \dots, gc_n)$). (Exemple : Un fermé de Zariski défini par des polynômes à coefficients dans k . En général si l'on considère un corps algébriquement clos $\bar{k}$, une extension galoisienne :



et un fermé de Zariski $A \subset \bar{k}^n$, A est invariant pour $G = \text{Gal}(k/k')$ si et seulement si on peut les définir par des équations à coefficients dans k). Une application régulière rationnelle est "définie sur k " si les fonctions rationnelles correspondantes ont les coefficients dans k .

Un ensemble $A \subset C^n$ est dit localement fermé s'il est l'intersection d'un fermé et d'un ouvert (de la topologie de Zariski). Exemple : $C^n - \{0\}$. Un ensemble $X \subset C^n$ est dit constructible s'il est la réunion finie d'une collection d'ensembles localement fermés. La famille de tous les ensembles constructibles de C^n est la plus petite algèbre booléenne (contenue dans $\mathcal{P}(C^n)$) qui contient tous les ouverts de C^n .

Je rappelle le :

THEOREME DE Chevalley : " Si $X \subset C^n$ est un ensemble constructible et $f : X \rightarrow C^m$ est une application rationnelle régulière, alors $f(X) \subset C^m$ est

constructible".

(Pour la démonstration voir, par exemple : D. Mumford : Introduction to algebraic geometry (mimeographié, Harvard), Chapitre 1).

Remarques : 1) Cet énoncé serait faux dans le cas réel. Exemple : soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ donnée par $f(x) = x^2$. Alors $f(\mathbb{R}) = [x \geq 0]$ qui n'est pas constructible.

2) Même si $X = \mathbb{C}^n$, $f(X)$ n'est pas nécessairement un ensemble "algébrique". Exemple : $f : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$ donné par : $f(z_1, z_2) = (z_1^2, z_2^2)$. Alors

$$f(\mathbb{C}^2) = (\mathbb{C}^2 - (z_2 = 0)) \cup (0) .$$

$\mathbb{C}^2 - (z_2 = 0)$ et (0) sont localement fermés, mais $f(\mathbb{C}^2)$ ne l'est pas.

Pour pouvoir utiliser le théorème de Chevalley, on commence par complexifier notre situation.

Soit :

$$J^k(n, p, \mathbb{C}) = \{ \text{les } k\text{-jets de germes d'applications } \underline{\text{holomorphes}} : \\ (\mathbb{C}^n, 0) \longrightarrow (\mathbb{C}^p, 0) \} .$$

$L^k(n, \mathbb{C}) \subset J^k(n, n, \mathbb{C})$ va désigner l'ensemble des jets invertibles. C'est un groupe de Lie complexe, défini sur $\mathbb{R}$, dont les opérations de groupe sont données par des applications rationnelles régulières, définies sur $\mathbb{R}$. On va identifier dorénavant :

$$J^k(n, p, \mathbb{C}) = \mathbb{C}^m \quad (m = m(n, p, k))$$

$$J^k(n, p) = \mathbb{R}^m \subset \mathbb{C}^m .$$

$L^k(n, \mathbb{C})$ est un ouvert de Zariski (dans $\mathbb{C}^{m(n, n, k)}$) .

On va considérer l'action naturelle :

$$\underbrace{L^k(n, \mathbb{C})^r \times L^k(p, \mathbb{C})}_G \times \underbrace{J^k(n, p, \mathbb{C})^r}_{\mathbb{C}^M} \rightarrow \underbrace{J^k(n, p, \mathbb{C})^r}_{\mathbb{C}^M} .$$

On remarque que cette action est rationnelle régulière, définie sur $\mathbb{R}$. On a aussi :

$$L^k(n)^r \times L^k(p) = G_{\mathbb{R}} = \text{le groupe de Lie réel formé par les points réels de } G .$$

On remarque aussi, que :

$$\dim_{\mathbb{C}} G = \dim_{\mathbb{R}} G_{\mathbb{R}} .$$

D'après le théorème de Chevalley, les orbites de G dans $\mathbb{C}^M$ sont constructibles. Donc elles contiennent toujours des points réguliers. D'autre part, comme elles sont homogènes, elles sont des vraies sous variétés analytiques (complexes).

Si $x \in \mathbb{C}^M$ est réel, (donc invariant pour la conjugaison complexe), alors l'orbite Gx est aussi, invariante, pour la conjugaison complexe. On a, aussi, $Gx \cap \mathbb{R}^M \neq \emptyset$, puisque $x \in Gx \cap \mathbb{R}^M$.

$Gx \cap \mathbb{R}^M$ est une variété analytique réelle telle que :

$$\dim_{\mathbb{R}}(Gx \cap \mathbb{R}^M) = \dim_{\mathbb{C}}(Gx)$$

[Ceci est une conséquence de la remarque suivante : "Soit $(\mathbb{C}^n, o)$ le germe de $\mathbb{C}^n$ au point o , $J : (\mathbb{C}^n, o) \rightarrow (\mathbb{C}^n, o)$ la conjugaison complexe et $V \subset (\mathbb{C}^n, o)$ un germe d'espace analytique, tel que $JV = V$. Alors V peut être défini par des équations analytiques à coefficients réels".

Démonstration : Soit V' un germe d'espace analytique quelconque défini par les séries convergentes :

$$(x) \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_{j,n} z^n = 0 \quad (j = 1, \dots, N) .$$

JV' est aussi un ensemble analytique car il est défini par :

$$(xx) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \bar{a}_{j,n} z^n = 0 .$$

Si $JV' = V'$, alors V' est défini par (x) ou (et) (xx), donc par

$$\sum (\operatorname{Re} a_{jn}) z^n = 0 \quad \text{et} \quad \sum (\operatorname{Im} a_{jn}) z^n = 0 . \quad]$$

D'autre part, ("par homogénéité") les applications qui définissent les orbites :

$$\varphi_x : G \longrightarrow \mathbb{C}^M$$

$$\varphi_x|_{G_R} : G_R \longrightarrow \mathbb{R}^M ,$$

sont de rang constant, et :

$$\operatorname{rang}_R(\varphi_x|_{G_R}) = \operatorname{rang}_C \varphi_x$$

(x étant réel, φ_x est définie par des équations réelles,...).

Donc :

$$\operatorname{rang}_R(\varphi_x|_{G_R}) = \dim_R(Gx \cap \mathbb{R}^M) .$$

Donc,

$$\varphi_x|_{G_R} : G_R \longrightarrow Gx \cap \mathbb{R}^M$$

est de rang maximal.

$\implies$ Dans la topologie ordinaire, $G_R x$ est un ouvert de la sous-variété

$$Gx \cap R^M.$$

$\Rightarrow G_R x$ est elle-même une vraie sous-variété.

Puisque $W_0 = G_R x$, ceci finit la démonstration du lemme 1.

On va donc montrer que le lemme 1 $\Rightarrow$ le théorème 1.

Soit $W \subset {}_r J^k(X, Y)$ une orbite.

Considérons :

$$J^k(X, Y)^r \xrightarrow{\pi_Y^r} Y^r \supset \Delta_r,$$

où $\Delta_r =$ la diagonale $= \{(y, y, \dots, y)\}$.

Si $z \in W$, sans perte de généralité, on a :

$$(*) \quad \pi_Y^r(z) = (\underbrace{y_1, \dots, y_1}_{r_1 \text{ fois}}, \underbrace{y_2, \dots, y_2}_{r_2 \text{ fois}}, \dots) \quad (y_i \neq y_j).$$

(pour arriver à cette forme on fait une éventuelle permutation.....).

Soit W_i l'orbite de $(y_i, \dots, y_i)$ dans ${}_{r_i} J^k(X, Y)$. On a :

$$\begin{array}{ccc} {}_r J^k(X, Y) & \subset & \prod_i {}_{r_i} J^k(X, Y) \\ \uparrow & & \uparrow \\ W & = & \prod_i W_i \end{array}.$$

Il résulte qu'il suffit de montrer que W est une sous-variété, dans le cas spécial où :

$$\pi_Y^r(W) \subset \Delta_r.$$

L'application :

$$(\pi_Y^r)^{-1} \Delta_r \xrightarrow{\pi^r} X^{(r)} \times \Delta_r = X^{(r)} \times Y$$

est une fibration C^∞ de fibre $J^k(n,p)^r$ et de groupe structural $L^k(n)^r \times L^k(p)$.

Si $U \subset X^{(r)} \times Y$, est un ouvert suffisamment petit, $W \cap (\pi^r)^{-1} U$ est de la forme $W_0 \times U$, et en appliquant le lemme 1 on a fini. [Si $X = \mathbb{R}^n$, $Y = \mathbb{R}^p$, on construit le difféomorphisme $W = W_0 \times X^{(r)} \times Y$, en construisant une fois pour toutes une application $\phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \text{Diff } \mathbb{R}^n$ telle que $\phi(o) = \text{id } \mathbb{R}^n$, $\phi(x)(o) = x, \dots$].

2) Transversalité : La relation entre les orbites $W \subset {}_r J^k(X,Y)$ et la stabilité, est suggérée par le lemme suivant :

LEMME 2 : "Soit $f \in C^\infty(X,Y)$ une application faiblement stable, dans le sens suivant : il existe un voisinage $f \in N \subset C^\infty(X,Y)$, tel que pour tout $g \in N$,
 $\exists h \in \text{Diff } X, h' \in \text{Diff } Y$ t.q. :

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ \downarrow h & & \downarrow h' \\ X & \xrightarrow{g} & Y \end{array}$$

soit commutatif.

Alors ${}_r j^k f : X^{(r)} \longrightarrow {}_r J^k(X,Y)$

est transversale à toutes les orbites W ."

Démonstration : D'après le théorème de transversalité de Thom, $\exists g \in N$ t.q. ${}_r j^k g$ soit transversale à W . (Pour appliquer le théorème de transversalité, il est nécessaire de travailler en dehors de la diagonale de X), mais comme la propriété d'être transversale à une orbite W

est (clairement) invariante par difféomorphisme, on a q.e.d.

(Remarque : 1) stabilité $\Rightarrow$ stabilité faible (trivialement.)

2) d'habitude c'est la "stabilité faible" qui est appelée "stabilité" (tout court). Comme, finalement, toutes les différentes notions de stabilité seront équivalentes, ceci n'a pas beaucoup d'importance...

LEMME 3 : "Soit $z \in W$ tel que :

$$\pi_Y^r z = (\underbrace{y_1, \dots, y_1}_{r_1}, \dots)$$

(voire (*) ci-dessus). Si $x \in X^{(r)}$, $r_j^k f(x) = z$, soit $x_{r_i} \in X^{(r_i)}$ la partie de x correspondant à

$$(\underbrace{y_i, \dots, y_i}_{r_i}) .$$

$r_j^k f$ est transversale à W au point x .

$$\iff \forall i, \quad r_i j^k f : X^{(r_i)} \longrightarrow r_i j^k(X, Y) \text{ est transversale à } W_i .$$

Démonstration : On a :

$$W = (W_1 \times \dots \times W_\ell) \cap r_j^k(X, Y) \quad \text{et} :$$

$$r_j^k f = (r_1 j^k f \times \dots \times r_\ell j^k f) | X^{(r)}, \quad \text{e.a.d.s.}$$

LEMME 4 : "Soit $x = \{x_1, \dots, x_r\} \in X^{(r)}$ et S le sous ensemble correspondant à x : $S \subset X$. Soit $z = r_j^k f(x) \in W$ (orbite de $r_j^k(X, Y)$). $r_j^k f$ est transversale à W au point x si et seulement si :

$$\beta_f(\Gamma_S^\infty(TX^r)) + \alpha_f(\Gamma_{fS}^\infty(TY^r)) + \cap_S^{k+1} \Gamma_S^\infty(f^*TY^r) = \Gamma_S^\infty(f^*TY^r) .$$

(Ici :

$$\mathfrak{M}_S^{k+1} = \mathfrak{M}_{x_1}^{k+1} \times \dots \times \mathfrak{M}_{x_r}^{k+1} \subset C_{x_1}^\infty(X) \times \dots).$$

Démonstration : Par le même procédé que celui qui définit l'application π^k du chapitre précédent, on a un isomorphisme canonique d'espaces vectoriels

$$T(J^k(X, Y)_x)_z = \theta(f)_S / \mathfrak{M}_S^{k+1} \theta(f)_S.$$

($x = (x_1, \dots, x_r)$, $z = J^k f(x)$). En termes de cet isomorphisme,

$\pi^k : \mathfrak{M}_x \theta(f) \longrightarrow T_z J^k$, définie un chapitre précédent est la même chose que :

$$\mathfrak{M}_S \theta(f) \longrightarrow \mathfrak{M}_S \theta(f) / \mathfrak{M}_S^{k+1} \theta(f)_S.$$

Soit W l'orbite de z et W_x la fibre de W au-dessus de x . Dans le cas où $W \subset (\pi_Y^r)^{-1}(\Delta_r)$ (c'est-à-dire : $f(x_1) = \dots = f(x_r) = y$) on désigne par W_{x, y^r} la fibre de W au-dessus de $(x, y^r) \in X^{(r)} \times Y^r$. D'après le lemme 11 du chapitre précédent :

$$T(W_{x, y^r})_z = \frac{\beta_f(\mathfrak{M}_S \Gamma_S^\infty(TX)) + \alpha_f(\mathfrak{M}_y \Gamma_y^\infty(TY)) + \mathfrak{M}_S^{k+1} \theta(f)_S}{\mathfrak{M}_S^{k+1} \theta(f)_S}.$$

Maintenant, si on donne à la valeur au but le droit de bouger (et de ne pas être nécessairement sur la diagonale), on a (comme conséquence immédiate de la formule ci-dessus) :

$$T(W_x)_z = \frac{\beta_f(\mathfrak{M}_S \Gamma_S^\infty(TX)) + \alpha_f(\Gamma_{fS}^\infty(TY)) + \mathfrak{M}_S^{k+1} \theta(f)_S}{\mathfrak{M}_S^{k+1} \theta(f)_S}.$$

On a une décomposition en somme directe, évidente :

$$T({}_r J^k(X, Y))_Z = \underbrace{T({}_r J^k(X, Y)_X)_Z}_{\text{terme vertical}} + \underbrace{T({}_r J^k f)(TX_X^{(r)})}_{\text{terme "le long du graphe de f"}}.$$

Soit :

$$\pi_f : T({}_r J^k(X, Y))_Z \longrightarrow T({}_r J^k(X, Y)_X)_Z$$

la projection correspondant à cette décomposition directe.

On a :

$${}_r J^k f \text{ est transverse à } W \text{ au point } x \iff$$

$$\pi_f((TW)_Z) = T({}_r J^k(X, Y)_X)_Z.$$

Maintenant, la démonstration de notre lemme sera finie, une fois qu'on aura montré que :

$$(*) \quad \pi_f((TW)_Z) = \frac{\beta_f(\Gamma_S^\infty(TX)) + \alpha_f(\Gamma_{fS}^\infty(TY)) + \pi_S^{k+1} \theta(f)_S}{\pi_S^{k+1} \theta(f)_S}.$$

La formule (*) est une conséquence de la remarque suivante :

(R) : "Soit $\xi \in \Gamma^\infty(TX)$, $h_t \in \text{Diff } X$ le système dynamique engendré par ξ

$$(\xi = \frac{\partial h}{\partial t} \circ h^{-1}) \text{ et}$$

$$z_t = {}_r J^k(f \circ h_t^{-1})(h_t(x)) \in {}_r J^k(X, Y)_X.$$

Soit :

$$\theta(f)_S \xrightarrow{\pi^k} \theta(f)_S / \pi_S^{k+1} \theta(f).$$

On a :

$$(**) \quad \pi_f\left(\frac{dz_t}{dt} \Big|_{t=0}\right) = - \pi^k(\beta_f(\xi_S)) \text{ " }.$$

[Démonstration : On a :

$$\begin{aligned} \frac{dz_t}{dt} \Big|_{t=0} &= \frac{d}{dt} \left({}_r j^k(f \circ h_t^{-1})(x) \right) \Big|_{t=0} + T({}_r j^k f) \left(\frac{dh_t(x)}{dt} \Big|_{t=0} \right) \\ &= \pi_{\beta_f}^k \left(- \frac{\partial h}{\partial t} \circ h^{-1} \right) \Big|_{t=0} = - \pi^k(\beta_f(\xi_S)) \in \text{Ker } \pi_f. \end{aligned}$$

Donc (en oubliant d'écrire les π^k , c'est-à-dire en travaillant modulo $\mathfrak{m}_S^{k+1} \theta(f)$) :

$$\pi_f \text{ (déformations infinitésimales de } z \text{ venant de la source)} = \beta_f(\Gamma_S^\infty(TX)) .$$

D'autre part :

$$\pi_f \text{ (déformations infinitésimales de } z \text{ venant du but)} = \text{(déformations infinitésimales de } z, \text{ venant du but, dans } W_x) = \alpha_f(\Gamma_{fS}^\infty(TY)) .$$

Ces dernières remarques impliquent (*).

Ceci finit la démonstration du lemme.

3) Caractérisation (complète) des applications stables :

THEOREME (J. Mather) : "Soient X, Y des variétés C^∞ compactes, $p = \dim Y$.

Choisissons $r \gg p + 1$, $k \gg p$. Si $f \in C^\infty(X, Y)$ les cinq conditions suivantes sont équivalentes :

- (1) f est infinitésimalement stable.
- (2) f est stable.
- (3) f est faiblement stable.
- (4) ${}_r j^k f$ est transverse à toutes les orbites dans ${}_r J^k(X, Y)$.
- (5) Si $S \subset X$ est un ensemble fini tel que $fS = \text{point unique}$, et avec

card $S \leq r$, le germe f_S est stable".

ADDENDUM : "Pour un germe f_x (ou multigerme f_S) les trois conditions suivantes sont équivalentes :

(1') f_x est infinitésimalement stable.

(2') f_x est stable.

(3') $J^k f_x$ est transverse à toutes les orbites". (Donc (5) $\iff f_S$

est infinitésimalement stable).

Démonstration : On sait que :

$$\begin{array}{l} \nearrow (2) \implies (3) \implies (4) \\ (1) \searrow (5) \end{array}$$

$$(1') \implies (2') \implies (3') .$$

[On voit que (1) $\implies$ (5) de la manière suivante : Si $S \subset X$ est un ensemble fini tel que $(x_1, \dots, x_s) = S$, $f(x_i) = y \in Y$, c'est facile à voir que (1) $\implies f_S$ est infinitésimalement stable. D'autre part, on sait déjà que pour les(multi) germes stabilité infinitésimale $\implies$ stabilité].

Maintenant si $z = j_x^k f \in J^k(X, Y)$, on considère la R -algèbre :

$$Q(z) = Q_k(f) = C_x^\infty(X) / f^* \cap_y C_x^\infty(X) + \cap_x^{k+1} .$$

(voir le chapitre précédent). On sait que si $z, z' \in J^k(n, p)$ on a :

$$Q(z) = Q(z') \quad (\text{isomorphisme de } R\text{-algèbres})$$

$$\iff z \text{ et } z' \text{ sont dans la même } \mathcal{K}^k\text{-orbite.}$$

Si $z = \langle z_1, \dots, z_r \rangle$, $z' = \langle z'_1, \dots, z'_r \rangle \in {}_r J^k(X, Y)$

on dira que z et z' sont contact-équivalents si :

$$1) \quad Q(z_i) = Q(z'_i)$$

$$2) \quad y_i = y_j \iff y'_i = y'_j \quad .$$

Une classe de contact (dans ${}_r J^k(X, Y)$) est une classe d'équivalence de contact.

Comme pour les orbites, on montre que les classes d'équivalence de contact sont des sous-variétés (action de $\mathbb{K}^k$, e.a.d.s.).

On va considérer aussi les conditions suivantes :

(6) ${}_r j^k f$ est transverse aux classes de contact.

(7) Si $S \subset X$, $\text{card } S \leq r$ et $fS = \text{un point unique}$, on a :

$$\beta_f(\Gamma_S^\infty(TX)) + \alpha_f(\Gamma_{fS}^\infty(TY)) + (f^* \mathfrak{m}_{fS} + \mathfrak{m}_S^{k+1}) \theta(f)_S = \theta(f) \quad .$$

Puisque les classes de contact contiennent les orbites : (4) $\implies$ (6) .

Je dis que, d'une manière analogue au lemme 4, la condition (7) est équivalente à la transversalité de ${}_r j^k f$ avec la classe de contact respective ($\text{card } S = r$, fS pas nécessairement un point unique).

[En effet, considérons pour le moment un jet $z = {}_r j^k f$ défini sur $x = (x_1, \dots, x_s)$ tel que $f(x_1) = \dots = f(x_s) = y$. Soit W la classe de contact de z et W_{x, y^S} sa fibre au-dessus de (x, y^S) . D'après le lemme 11 du chapitre précédent :

$$T(W_{x, y^S})_z = \frac{\beta_f(\mathfrak{m}_S \Gamma_S^\infty(TX)) + (f^* \mathfrak{m}_{fS} + \mathfrak{m}_S^{k+1}) \theta(f)_S}{\mathfrak{m}_S^{k+1} \theta(f)_S} \quad .$$

Il s'ensuit que :

$$T(W_x)_z = \frac{\beta_f(\mathcal{M}_S^\infty(TX)) + \alpha_f(\Gamma^\infty(TY))_{fS} + (f^*\mathcal{M}_{fS} + \mathcal{M}_S^{k+1}) \theta(s)_S}{\mathcal{M}_S^{k+1} \theta(f)_S},$$

ceci
et sans qu'aucune condition de rester sur la diagonale soit imposée à z .

En procédant comme dans le paragraphe précédent (c'est-à-dire en décomposant en action horizontale et verticale et en utilisant (**)) :

$$\pi_f((TW)_z) = \frac{\beta_f(\Gamma_S^\infty(TX)) + \alpha_f(\Gamma^\infty(TY))_{fS} + (f^*\mathcal{M}_{fS} + \mathcal{M}_S^{k+1}) \theta(f)_S}{\mathcal{M}_S^{k+1} \theta(f)_S},$$

e.a.d.s.].

On a donc (6) $\iff$ (7) .

PROPOSITION : (7) $\implies$ (1) : On remarque que

$$k \gg p = \dim Y = \dim_{C_Y^\infty(Y)} \Gamma_Y^\infty(TY) .$$

Donc, d'après le lemme 6 du chapitre précédent, les hypothèses de (7) impliquent en fait que :

$$\beta_f \Gamma_S^\infty(TX) + \alpha_f \Gamma_{fS}^\infty(TY) = \theta(f)_S . \quad (\sigma)$$

(Remarque : Si on ne veut pas parler des classes de contact, on peut déduire directement (σ) à partir de (5) (en utilisant le lemme 4, et la machinerie algébrique du chapitre précédent (lemme 6)).

On définit maintenant :

$$\Sigma = \{x \in X \text{ t.q. } Tf(TX_x) \neq TY_{fX}\} ,$$

$$\Sigma_Y = f^{-1}(Y) \cap \Sigma .$$

Je dis que

$$\text{card } \Sigma_y \leq p.$$

[En effet, si $x \in \Sigma_y$:

$$\theta(f)_x \neq \cap_x \theta(f)_x + \beta_f(\Gamma_x^\infty(TX)),$$

puisque'il existe des vecteurs $\neq 0$ dans TY_{fx} qui ne sont pas dans l'image de TX_x .

Donc, si $S \subset \Sigma_y$, $\text{card } S = s$:

$$\dim_R \frac{\theta(f)_S}{\cap_S \theta(f)_S + \beta_f(\Gamma_S^\infty(TX))} \geq s.$$

Soit $S \in \Sigma_y$ un sous ensemble de cardinalité $s \leq r$ (je rappelle que $r \geq p+1$).

Si on montre que $s \leq p$, on a fini :

Puisque $s \leq r$, (7), donc (σ) , s'applique à S . Donc :

$$\begin{aligned} & \dim_R \frac{\theta(f)_S}{\cap_S \theta(f)_S + \beta_f(\Gamma_S^\infty(TX))} = \\ &= \dim_R \frac{\alpha_f(\Gamma_y^\infty(TY)) + \beta_f(\Gamma_S^\infty(TX))}{\cap_S \theta(f)_S + \beta_f(\Gamma_S^\infty(TX))} = \\ &= \dim_R \frac{\alpha_f(\Gamma_y^\infty(TY))}{\cap_S \theta(f)_S \cap \alpha_f(\cdot, \cdot)} \leq p. \end{aligned}$$

On a donc $p \geq s$.

Donc (7) est valable pour $S = \Sigma_y$. (Donc (σ) aussi).

Si $\zeta \in \theta(f)$, $\exists U_y$ voisinage de Σ_y , $\xi_y \in \Gamma^\infty(TX)$, $\eta_y \in \Gamma^\infty(TX)$, t.q :

$$(\alpha_f(\eta_y) + \beta_f(\xi_y))|_{U_y} = \zeta|_{U_y}.$$

Puisque Σ est compact, par partition de l'unité, $\exists \xi_1 \in \Gamma^\infty(TX)$, $\eta_1 \in \Gamma^\infty(TY)$ t.q :

$$\zeta - \alpha_f(\eta_1) - \beta_f(\xi_1)$$

s'annule au voisinage de Σ .

Si $x \notin \Sigma$: $Tf : TX_x \longrightarrow TY_{f(x)} \longrightarrow 0$, donc $\exists$ une décomposition en somme directe de fibrés :

$$TX \mid X - \Sigma = \text{Ker } Tf \mid X - \Sigma \oplus \dots,$$

donc $\exists \xi_2 \in \Gamma^\infty(TX)$, t.q :

$$\zeta - \alpha_f(\eta_1) - \beta_f(\xi_1) = \beta_f(\xi_2) \quad , \quad \text{e.a.d.s.}$$

Ceci finit la démonstration de l'implication (7) $\implies$ (1) .

Les raisonnements ci-dessus montrent aussi que (3') $\implies$ (1') , car le lemme 6 du chapitre précédent nous permet d'effacer le terme $\eta_x^{k+1} \theta(f)_x$ de l'égalité :

$$\beta_f(\Gamma_x^\infty(TX)) + \alpha_f(\Gamma_y^\infty(TY)) + \eta_x^{k+1} \theta(f)_x = \theta(f)_x$$

($\iff$ la transversalité sur l'orbite).

Donc (5) $\implies$ (σ) , qui, d'après ce qu'on vient de voir $\implies$ (1) . q.e.d.

-:-:-:-:-