PUBLICATIONS MATHEMATIQUES D'ORSAY

COURS ELEMENTAIRE DE K-THEORIE

V. Poenaru

année universitaire 1967-1968

Mathématique (425)
(Service des Publications - Bibliothèque)
Faculté des Sciences
91 - Orsay (France)

PUBLICATIONS MATHEMATIQUES D'ORSAY

COURS ELEMENTAIRE DE K-THEORIE

V. Poenaru

année universitaire 1967-1968

Mathématique (425)
(Service des Publications - Bibliothèque)
Faculté des Sciences
91 - Orsay (France)

INTRODUCTION A LA K - THEORIE

Cours de V. POENARU

-:-:-:-

Notes rédigées par M. Lenfant

Chapitre I - GENERALITES SUR LES ESPACES FIBRES VECTORIELS

Paragraphe 1 - DEFINITIONS ET EXEMPLES

1. Familles d'espaces vectoriels - Espaces fibrés vectoriels.

On ne considèrera dans ce cours que des espaces vectoriels V_n de dimension finie n sur $\underline{R}(V_n = \underline{R}^n)$ ou sur $\underline{C}(V_n = \underline{C}^n)$

Définition 1. Une famille d'espaces vectoriels est un triplet $(E, X ; p)$ formé d'un couple d'espaces topologiques E, X et d'une application continue surjective $p : E \longrightarrow X$, satisfaisant aux axiomes suivants :

(F.1). Pour tout $x \in X$, l'image réciproque $p^{-1}(x)$ est munie d'une structure d'espace vectoriel.

(F.2). L'addition et l'homothétie sur chaque fibre sont des applications continues,
continuité de l'addition au point (a,b), où a et $b \in p^{-1}(x)$ $\Longleftrightarrow$ pour tout voisinage U de $a+b$ dans E, il existe des

voisinages U_1 de a , et U_2 de b , dans E , tels que:

$$a'\in U_1,\ b'\in U_2,\ p(a') = p(b') \Longrightarrow a'+b'\in U$$

Continuité de l'homothétie au point (λ, a) , où $D\in R$ (ou C) et $a\in p^{-1}(x)$

$\Longleftrightarrow$ pour tout voisinage U de λa dans E , il existe des voisinages V de λ dans $\underline{R}$, et U_1 de a dans E , tels que :

$$\lambda'\in V\ ,\ a'\in U_1 \Longrightarrow \lambda' a'\in U$$

<u>Définition 2</u>. Si (E,X,p) est une famille d'espaces vectoriels
X est appelé la base
E est appelé l'espace total
p est appelé la projection
$E_x = p^{-1}(x)$ est appelé la fibre au-dessus du point x .

<u>Exemple 1</u>. Soit V_n introduit ci-dessus, X un espace topologique quelconque, $E = X\times V_n$ muni de la topologie produit, $p = pr_1$: $X\times V_n \longrightarrow X$.
Le triplet (E,X,p) est alors une famille d'espaces vectoriels ; on l'appelle famille d'espaces vectoriels triviale.

<u>Définition 3. Restriction</u>. Soit $(E \xrightarrow{p} X)$ une famille d'espaces vectoriels, Y un sous-espace de X , q la restriction : $q = p\,|p^{-1}(Y)$
La famille d'espaces vectoriels $(p^{-1}(Y),X,q)$ est appelée famille induite par (E,X,p) sur le sous-espace Y .

<u>Définition 4. Fibres vectoriels</u>. Un fibré vectoriel réel (resp. complexe) est une famille d'espaces vectoriels réels (resp. complexes) qui satisfait en outre à l'axiome suivant :

(F.3). Axiome de trivialité locale - Pour tout $x\in X$, il existe un voisinage U de x , tel que la famille induite sur U soit triviale.

Remarque : (F.1) U(F.2) U(F.3) $\Longleftrightarrow$ (F.1) U(F.3)

Exemple 2. Toute famille d'espaces vectoriels triviale $(X \times V_n, X, pr_1)$ est un fibré vectoriel, (on prend U=X) On l'appelle fibré trivial.

Exemple 3. Bande de Möbius. Soit $I = [0,1]$. Considérons le fibré vectoriel trivial $(I \times \underline{R}, I, pr_1 = p)$, soit E la relation d'équivalence définie sur $I \times R$ par :

$$\left| \begin{array}{l} E \text{ est l'égalité sur }]0,1[\times \underline{R} \\ (0,a) = (1,b) \ (\text{mod.} E) \Longleftrightarrow a = -b \ ^{(*)} \end{array} \right.$$

Notons E' la relation d'équivalence définie sur I par :

$$\left| \begin{array}{l} E' \text{ est l'égalité sur }]0,1[\\ 0 = 1 \ (\text{mod.} E') \end{array} \right.$$

L'espace quotient I/E' s'identifie au cercle S_1

Exercice : montrer que p induit une surjection continue entre les espaces quotients $q : M \to S_1$

En déduire que (M, S_1, q) est un fibré vectoriel.

Etablir qu'il est non trivial en appliquant le lemme suivant :

Lemme : Une condition nécessaire pour qu'un fibré (E,X,p) soit trivial est qu'il existe au-dessus de X une section continue σ qui ne s'annule pas.

(Si $X \times V$ est un fibré trivial, v_o un vecteur non nul de V, $\sigma(x) = (x, v_o)$ répond à la question).

Paragraphe 2 - HOMOMORPHISMES DE FIBRES - IMAGE RECIPROQUE D'UN FIBRE PAR UNE APPLICATION CONTINUE.

1. Homomorphismes entre deux familles d'espaces vectoriels.

Définition 1. Un homomorphisme entre les familles d'espaces vectoriels $(E \xrightarrow{p} X)$ et $(F \xrightarrow{q} Y)$ est un couple (θ, ϕ)

(*) Soit $M = I \times \underline{R}/_E$ muni de la topologie quotient.

d'applications continues

$$\phi : E \longrightarrow F \quad \text{et} \quad \theta : X \longrightarrow Y \quad \text{tel que :}$$

1) Le diagramme
$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{\phi} & F \\ p\downarrow & & \downarrow q \\ X & \xrightarrow{\theta} & Y \end{array}$$
soit commutatif

2) $\phi | p^{-1}(x)$ est une application linéaire : $p^{-1}(x) \longrightarrow q^{-1}(\theta(x))$.

<u>Définition 2.</u> Le couple (ϕ,θ) est un isomorphisme si

1) $X = Y$, $\theta = \text{id}\, X$

2) $\forall\, x \in X$, la restriction $\phi x : p^{-1}(x) \longrightarrow q^{-1}(x)$ est un isomorphisme linéaire

3) ϕ^{-1} est continue.

Ces définitions s'appliquent en particulier aux fibrés vectoriels. Dans ce cas, la condition 3) de la définition 2 résulte des deux autres. C'est ce que nous allons établir maintenant.

<u>Cas des fibrés triviaux.</u>

Soient $E = X \times V$ et $F = X \times W$ deux fibrés de base X .

<u>Théorème 1.</u> <u>Il y a une bijection canonique entre les homomorphismes</u> $X \times V \longrightarrow X \times W$ <u>et les applications continues</u> $X \longrightarrow HOM(V,W)$.

<u>Notation.</u> Si E, F sont deux fibrés vectoriels de base X , on désignera par $HOM(E,F)$ l'ensemble des homomorphismes de fibrés : $E \longrightarrow F$.

<u>Démonstration</u> : Construisons une bijection entre $HOM(E,F)$ et l'ensemble des applications continues : $X \longrightarrow HOM(V,W)$

a) Si $\phi \in HOM(E,F)$, chaque restriction $\phi_x : V \longrightarrow W$ est linéaire. $\forall (x,v)$ on a : $\phi(x,v) = (x,\phi_x(v))$.

L'application $\tilde{\phi}$ $\begin{array}{l} X \longrightarrow HOM(V,W) \\ x \longrightarrow \phi_x \end{array}$ est continue

(Cela résulte du théorème de topologie : soit Y compact, Z un espace métrique ; on munit $C(Y,Z)$ de la topologie de la convergence uniforme. Une application $\Psi : X \to C(Y,Z)$ est continue si et seulement si

$$\begin{array}{ccc} X \times Y & \to & Z \\ (x,y) & \to & \Psi_x(y) \end{array} \quad \text{est continue}$$

Dans le cas présent Y = boule unité de V (elle est compacte car V est de dimension finie).)

b) Réciproquement : soit Ψ une application continue $X \to HOM(V,W)$. Le théorème rappelé ci-dessus montre que $\Phi : E \to F$ définie par :

$$\Phi(x,v) = (x, \Psi(x).v) \quad \text{est continue.}$$

<u>Remarque</u> : <u>Structure naturelle d'espace vectoriel de</u> $HOM(E,F)$

a) Soit α, $\beta \in HOM(E,F)$

$$\begin{tikzcd} E \arrow[rr, shift left, "\alpha"] \arrow[rr, shift right, "\beta"'] \arrow[dr, "p"'] & & F \arrow[dl, "q"] \\ & X & \end{tikzcd}$$

si $p(y) = x$, $\alpha(y)$ et $\beta(y) \in q^{-1}(x)$ ont une somme $\alpha(y) + \beta(y) \in q^{-1}(x)$

On définit : $(\alpha+\beta)(y) = \alpha(y) + \beta(y)$ $\qquad (\lambda\alpha)(y) = \lambda.\alpha(y)$

b) <u>Exercice</u> : Vérifier que la bijection canonique entre $HOM(E,F)$ et $X \xrightarrow{\text{cont}} HOM(V,W)$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

<u>Théorème 2</u>. Si $\Phi : X \times V \to X \times V$ est continue et si chaque $\Phi_x : p^{-1}(x) \to p^{-1}(x)$, Φ^{-1} est continue

<u>Démonstration</u> : l'application $x \to \Phi_x^{-1}$ est continue comme

composée des applications continues :

$$X \to \mathrm{Iso}(V,V) \quad \text{et} \quad \mathrm{Iso}(V,V) \to \mathrm{Iso}(V,V)$$
$$x \to \Phi_x \qquad\qquad\qquad T \to T^{-1}$$

D'après le théorème 1, il en résulte que Φ^{-1} est continue.

Corollaire 1. Si $E = X \times V$ est un fibré trivial, $\mathrm{Iso}(E,E)$ est en correspondance bijective avec l'espace vectoriel des applications continues $X \to \mathrm{Iso}(V,V)$.

Corollaire 2. Soient E et F deux fibrés vectoriels quelconques sur X dont les fibres ont la même dimension et soit $\Phi \in \mathrm{HOM}(E,F)$:

$$\begin{tikzcd} E \arrow[rr, "\Phi"] \arrow[dr, "p"'] & & F \arrow[dl, "q"] \\ & X & \end{tikzcd}$$

Φ est un isomorphisme si et seulement si chaque $\Phi_x : p^{-1}(x) \to q^{-1}(x)$ est un isomorphisme linéaire.

CN résulte de la définition.

CS Supposons $\forall x \in X$, Φ_x est un isomorphisme

Pour vérifier la continuité de Φ^{-1} en un point de $p^{-1}(x)$ on se restreint (propriété locale) à un voisinage de x .

D'après (F.4), il existe un voisinage U de x assez petit pour que les familles induites $E|U$ et $F|U$ soient triviales.

q étant continue, $F|U = U \times V$ est un voisinage ouvert de tout $y \in q^{-1}(x)$

Le diagramme $\begin{tikzcd} E|U \arrow[rr, "\Phi|"] \arrow[dr, "p|"'] & & F|U \arrow[dl, "q|"] \\ & U & \end{tikzcd}$ est justiciable du Th.2 : Φ^{-1} est continue en y .

2. Sections d'une famille d'espaces vectoriels.

Définition 3. Si $(E \xrightarrow{p} X)$ est une famille d'espaces vectoriels, une section de cette famille est une application continue $s : X \longrightarrow E$ telle que $p \circ s = id_X$.

Proposition 3. L'ensemble $\Gamma(E)$ des sections de E peut être muni d'une structure de module sur l'anneau $C(X)$ des fonctions continues $X \longrightarrow k$.

En effet :

a) $\Gamma(E)$ est un groupe pour la loi d'addition $(s+s')(x) = s(x)+s'(x)$

b) la loi externe $C(X) \times \Gamma(E) \longrightarrow \Gamma(E)$

$(a , s) \longrightarrow a.s$ définie par

$(a.s)(x) = a(x)\, s(x)$ en fait un module sur $C(X)$.

La continuité de $a.s$ résulte de (F.2) (continuité de l'homothétie)

Corollaire. $\Gamma(E)$ a par restriction une structure d'espace vectoriel sur k. Nous verrons au numéro suivant que dans le cas des familles localement triviales, $\Gamma(E)$ est de type fini sur $C(X)$ tandis que $\Gamma(E)$ est un K-esapce vectoriel de dimension infinie. C'est pourquoi cette dernière structure n'est pas utile dans la pratique.

3. Critères de trivialité d'un espace fibré vectoriel.

Proposition 4. Soit $(E \xrightarrow{p} X)$ un espace fibré vectoriel. Les trois conditions suivantes sont équivalentes :

a) le fibré est trivial de fibre V où $\dim V = n$

b) il existe $s_1, s_2 \ldots s_n \in \Gamma(E)$ telles que pour chaque $x \in X$, $(s_1(x), s_2(x), \ldots, s_n(x))$ soit une base de $p^{-1}(x)$.

c) il existe un homomorphisme

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{F} & V \\ {\scriptstyle p}\downarrow & & \downarrow \\ X & \longrightarrow & * \text{ (un point)} \end{array}$$

tel que $\forall x \in X$, $p^{-1}(x) \xrightarrow{Fx} V$ soit un isomorphisme

Démonstration :

a) $\Longrightarrow$ b)

Soit $(y_1, \ldots, y_n)$ une base de V

L'application $s_i : X \to X \times V$ est continue et telle que $p \circ s_i = id_X$

$$x \longmapsto (x, y_i)$$

Pour chaque $x \in X$, $(s_1(x), \ldots, s_n(x))$ est une base de (x, V)

<u>b) $\Longrightarrow$ c)</u>

Soit l'application ϕ au-dessus de X : $X \times k^n \to E$

$$(x, \lambda_1, \ldots, \lambda_n) \to \sum_1^n \lambda_i\, s_i(x)$$

s_i étant continue, de même $(x, \lambda_1, \ldots, \lambda_n) \to s_i(x)$

l'homothétie étant continue, chaque application

$$(x, \lambda_1, \ldots, \lambda_n) \to \lambda_i\, s_i(x) \text{ est continue}$$

La continuité de l'addition entraîne alors celle de Φ.

La famille $\{s_i(x)\}$ $1 \leq i \leq n$ forme une base de $p^{-1}(x)$

$$\begin{tikzcd} X \times k^n \arrow[rr, "\phi"] \arrow[dr, "pr_1"'] & & E \arrow[dl, "p"] \\ & X & \end{tikzcd}$$

Par suite $\phi_x : pr_1^{-1}(x) \to p^{-1}(x)$ est un isomorphisme linéaire pour tout $x \in X$.

Le corollaire 2 du théorème 2 établit alors : $\Phi \in \mathrm{Iso}(X \times k^n, E)$

Si pr_2 est la projection $X \times k^n \to k^n$, on obtient les conclusions du c) pour $F = pr_2 \circ \Phi^{-1}$ et $V = k^n$

<u>c) $\Longrightarrow$ a)</u>

Soient (V, F) fournis par c). L'application au-dessus de X

$$\begin{tikzcd} E \arrow[rr, "p \times F"] \arrow[dr, "p"'] & & X \times V \arrow[dl, "pr_1"] \\ & X & \end{tikzcd}$$

est continue car ses composées avec les projections le sont.

$p \times F$ est un isomorphisme sur les fibres.

D'après le théorème 2, Corollaire 2 : $p \times F \in \mathrm{Iso}(E, X \times V)$

<u>Proposition 5. Soit</u> $(p : E \to X)$ <u>un fibré vectoriel. Il est</u>

trivial si et seulement si $\Gamma(E)$ est un module libre sur $C(X) = C(X,k)$

a) Si E est trivial, la propriété b de Prop.4 est vraie. Soit $s \in \Gamma(E)$. Sur la fibre $p^{-1}(x)$, $s(x)$ se décompose suivant la base :

$$s(x) = \sum_{1}^{n} a_i(x) \quad s_i(x)$$

d'où $(\Phi^{-1} \circ s)(x) = (x, a_1(x), \ldots, a_n(x))$
s et Φ^{-1} étant continues, il en est de même de chaque $x \longrightarrow a_i(x)$: $a_i \in C(X)$, $\{s_i\}$ $1 \leq i \leq n$ est donc une base de $\Gamma(E)$ sur $C(X)$; (les s_i sont évidemment libres sur $C(X)$)

b) réciproquement, supposons $\Gamma(E)$ module libre sur $C(X)$. S'il existait dans $\Gamma(E)$ un système infini de sections linéairement indépendantes sur $C(X)$, on en déduirait au-dessus de x un système infini de vecteurs linéairement indépendants sur k, ce qui est impossible.
Soit (s_i) $1 \leq i \leq n$ une base de $\Gamma(E)$, U un voisinage de x au-dessus duquel E est trivial $(s_i|U)$ $1 \leq i \leq n$ est alors une base de $\Gamma(\Gamma|U)$.
De l'isomorphisme de trivialité locale

$$\begin{tikzcd} E|U \arrow[rr, "\Phi"] \arrow[dr] & & U \times k^n \arrow[dl] \\ & U & \end{tikzcd}$$

on déduit un isomorphisme Ψ $\Gamma(E|U) \longrightarrow \Gamma(U \times k^n) = C(U,k^n)$
$s \longrightarrow \Phi \circ s$

soit $\sigma_i \in \Gamma(U \times k^n)$ défini par $\sigma_i(x) = e_i$, ième vecteur de la base canonique de k^n.
$\Phi o s_i$ étant une base de $\Gamma(U \times k^n)$, il existe $a_{ji} \in C(X)$ tels que $\forall i \in [1,n]$, $\sigma_i = \sum a_{ji}(\phi \circ s_i)$
d'où $\forall X_x \in E|U$, $\Phi(X_x) = \sum_{1}^{n} \lambda_i e_i = \sum_{1}^{n} X_i \ \sigma_i(x) = \sum_{i,j} X_i a_{ji}(x) \ (\Phi \circ s_j)(x)$
et en appliquant Φ^{-1} : $X_x = \sum_{i,j} X_i \ a_{ji}(x) \ s_j(x)$
$(s_j(x))$ $i \leq j \leq n$ est donc une base de la fibre au-dessus de x.

4. Image réciproque d'un fibré par une application continue.

<u>Théorème 7</u>. Soit $(p : E \to Y)$ un fibré vectoriel, X un espace topologique, $f : X \to Y$ une application continue.
Il existe un fibré vectoriel $(q : f^*(E) \to X)$ et un homomorphisme $F : f^*(E) \to E$ qui rend commutatif le diagramme :

$$\begin{array}{ccc} f^*(E) & \xrightarrow{F} & E \\ q\downarrow & & \downarrow p \\ X & \xrightarrow{f} & Y \end{array}$$

Chaque $F_x : q^{-1}(x) \to p^{-1}(f(x))$ est un isomorphisme.
Le fibré $f^*(E)$ qui possède ces propriétés est unique à un isomorphisme près.

<u>Existence</u>.
Soit le sous-ensemble $f^*(E)$ de $X \times E$ défini par
$f^*(E) = \{(x,b) \; ; \; f(x) = p(b)\}$ muni de la topologie induite
$q(x,b) = x \quad F(x,b) = b$
La fibre au-dessus de x, $q^{-1}(x)$, est munie de la structure vectorielle de $p^{-1}(f(x))$.
Vérifier qu'on a ainsi défini une famille d'espaces vectoriels.

<u>Vérification de la trivialité locale</u>.

<u>Lemme</u>. Si $E = Y \times V$ est un fibré trivial, il en est de même de $f^*(E)$. Par définition, $f^*(E)$ est le sous-espace de $X \times E = X \times Y \times V$ constitué des points de la forme $(x,f(x),v)$. Il s'identifie donc à $X \times V$ par l'application $(x,f(x),v) \to (x,v)$. Cette identification est compatible avec la structure de fibré vectoriel.

<u>Cas général</u>.
On établira d'abord qu'étant donné

$$\begin{array}{ccc} f^*(E) & \xrightarrow{F} & E \\ q\downarrow & & \downarrow p \\ X & \xrightarrow{f} & Y \end{array}$$

et $X_1 \subset X$, $Y_1 \subset Y$ tels que $f(X_1) \subset Y_1$ les deux familles sur X_1

$f^*(E)|X_1$ et $(f|X_1)^*\ (E|Y_1)$ sont égales.
Soit alors $U \subset Y$ tel que $E|U$ soit trivial. Posons $V = f^{-1}(U)$.
La remarque précédente permet d'écrire : $f^*(E)|V = (f|V)^*\ (E|U)$
$(E|U)$ étant trivial, de même $(f|V)^*(E|U)$ et $f^*(E)|V$

Unicité.

Soient E' et E'' deux fibrés sur X, α et β isomorphismes sur chaque fibre.

$$\begin{tikzcd}
E' \arrow[rr, "\alpha"] \arrow[dd, "q'"'] & & E \arrow[dd, "p"] \\
& E'' \arrow[ur, "\beta"'] \arrow[dl, "q''"] & \\
X \arrow[rr, "f"] & & Y
\end{tikzcd}$$

Posons $p^{-1}(x) = E_x$ et supposons que

$$\begin{tikzcd}
E'_x \arrow[dr] & \\
& E_x \\
E''_x \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

sont des isomorphismes linéaires.

$E'_x \xrightarrow{\beta_x^{-1} \circ \alpha_x} E''_x$ est un isomorphisme linéaire.

L'application $\phi\ E' \longrightarrow E''$ définie par $\phi|E'_x = \beta_x^{-1} \circ \alpha_x$ continue au-dessus de X. Par suite $E' \approx E$.

Propriétés fonctorielles de l'image réciproque.

De l'unicité de l'image réciproque, on déduit les relations :

$$(fg)^*\ (E) = g^*(f^*E)$$
$$(id)^*(E) = E$$

A l'espace topologique X, on peut associer l'ensemble $\mathrm{Vect}{}^n_k(X)$ des fibrés vectoriels de dimension n sur k et de base X définis à un isomorphisme près.

D'où un foncteur contravariant de la catégorie des espaces topologiques et applications continues dans celle des fibrés vectoriels et morphismes de fibrés.

Paragraphe 3 - OPERATIONS SUR LES FIBRES

1. Somme directe (ou de Whitney)

Remarque préliminaire : Si U, U', V, V' sont des espaces

vectoriels de dimension finie (sur $\underline{R}$ ou $\underline{C}$) et si $f : U \to V$ et $f' : U' \to V'$ sont des applications linéaires, on peut construire une application linéaire $f \oplus f' : U \oplus U' \to V \oplus V'$. On définit ainsi une application :
$\mathrm{Hom}(U,V) \times \mathrm{Hom}(U',V') \to \mathrm{Hom}(U \oplus U', V \oplus V')$ qui est continue.

Soit E et F deux fibrés de base X. Définissons leur somme directe $E \oplus F$.

Ensemble sous-jacent $E \oplus F = \bigcup_{x \in X} E_x \oplus F_x$.

Topologie. Nous voulons que, pour tout couple de morphismes de fibrés

$$\begin{tikzcd} E \arrow[rr, "f"] \arrow[dr] & & E' \arrow[dl] \\ & X & \end{tikzcd} \qquad \text{et} \qquad \begin{tikzcd} F \arrow[rr, "g"] \arrow[dr] & & F' \arrow[dl] \\ & X & \end{tikzcd}$$

L'application : $\bigcup(E_x \oplus F_x) \xrightarrow{\bigcup(f_x \oplus g_x)} \bigcup(E'_x \oplus F'_x)$ soit une application continue.

Etudions d'abord le cas de deux fibrés triviaux E et F. Il existe deux applications $\alpha : E \to X \times V$ et $\beta : F \to X \times W$ qui sont des isomorphismes de fibrés (donc en particulier des homéomorphismes, $X \times V$ et $X \times W$ étant munis des topologies produit)

On en déduit une bijection $E \oplus F \leftrightarrow X \times (V \oplus W)$ qui permet de transporter sur $E \oplus F$ la topologie de $X \times (V \oplus W)$

Cette topologie satisfait bien à la condition requise. Soient en effet deux morphismes :

$$\begin{tikzcd} X \times V \arrow[rr, "F"] \arrow[dr] & & X \times V' \arrow[dl] \\ & X & \end{tikzcd} \qquad \text{et} \qquad \begin{tikzcd} X \times W \arrow[rr, "G"] \arrow[dr] & & X \times W' \arrow[dl] \\ & X & \end{tikzcd}$$

La donnée de F équivaut à la donnée d'une application continue de X dans $\mathrm{Hom}(V,V')$. Il en résulte le schéma :

$$\begin{tikzcd} & \mathrm{Hom}(V,V') \\ X \arrow[ur, "\text{cont.}"] \arrow[dr, "\text{cont.}"'] & & X \arrow[r, mapsto, "\text{continue}"] & \mathrm{Hom}(V \oplus W, V' \oplus W') \\ & \mathrm{Hom}(W,W') \end{tikzcd}$$

L'application $X \times (V \oplus W) \xrightarrow{U(F_x \oplus G_x)} X \times (V' \oplus W')$ est donc continue.

Il nous reste à montrer que la topologie ainsi obtenue pour $E \oplus F$ est indépendante de l'isomorphisme par lequel on a identifié E (resp. F) à $X \times V$ (resp. $X \times W$).

$$\begin{tikzcd}[row sep=small] & X \times V \\ E \arrow[ur, "\alpha"] \arrow[dr, "\alpha'"'] & \\ & X \times V \end{tikzcd} \qquad\qquad \begin{tikzcd}[row sep=small] & X \times W \\ F \arrow[ur, "\beta"] \arrow[dr, "\beta'"'] & \\ & X \times W \end{tikzcd}$$

(α, α', β, β' sont des isomorphismes)

Pour comparer les espaces topologiques $E \oplus F_{(\alpha,\beta)}$ et $E \oplus F_{(\alpha',\beta')}$ il suffit de montrer que, dans le diagramme ci-dessous, γ est un homéomorphisme.

$$\begin{tikzcd} E \oplus F_{(\alpha,\beta)} \arrow[r] \arrow[d, "id"'] & X \times (V \oplus W) \arrow[d, "\gamma"] \\ E \oplus F_{(\alpha',\beta')} \arrow[r] & X \times (V \oplus W) \end{tikzcd}$$

Sur chaque fibre $V_x \oplus W_x$, $\gamma_x = \alpha'_x \circ \alpha_x^{-1} \oplus \beta'_x \circ \beta_x^{-1}$

Cette application dépend continuement de x et est une bijection.

C.Q.F.D.

Nous pouvons maintenant définir la topologie de $E \oplus F$ pour des fibrés E et F non nécessairement triviaux.

$$\begin{tikzcd} E \arrow[dr, "p"'] & & F \arrow[dl, "\pi"] \\ & X & \end{tikzcd}$$

On considère un recouvrement ouvert de X : $\{U_i\}$ $i \in I$, tel que $\forall_{i \in I}$ $E|_{U_i}$ et $F|_{U_i}$ sont triviaux.

$E \oplus F|_{U_i} = E|_{U_i} \oplus F|_{U_i}$

On pose en définition :

$$\boxed{Y \subset E \oplus F \text{ est ouvert} \iff \forall_{i \in I} \quad Y \cap (E \oplus F)|U_i \text{ est ouvert}}$$

Il est aisé de vérifier qu'on définit ainsi une topologie. En outre, la continuité étant une propriété locale, les opérations et la projection sont continues.

:
: : : :
:

Nous pouvons introduire la somme directe par une autre méthode. Pour cela il nous faut définir les fibrés vectoriels au moyen d'atlas.

Soit $E \xrightarrow{p} X$ un fibré. Il existe un recouvrement de X par des ouverts U_i tels $E|_{U_i}$ soit trivial donc il existe des isomorphismes :

$$E|_{U_i} \xrightarrow{h_i} U_i \times V$$

Si l'on considère l'intersection de deux ouverts U_i et U_j, on obtient :

$$\begin{tikzcd}
(E|_{U_i})|_{U_i \cap U_j} \arrow[r, "h_i | U_i \cap U_j"] \arrow[d, "\mathrm{Id}"'] & (U_i \cap U_j) \times V \arrow[d, "G_{ji}"] \\
(E|_{U_i})|_{U_j \cap U_i} \arrow[r, "h_j | U_i \cap U_j"] & (U_j \cap U_i) \times V
\end{tikzcd}$$

$$G_{j,i} \qquad (U_i \cap U_j) \times V \xrightarrow{h_j \circ h_i} (U_i \cap U_j) \times V$$

La donnée de G_{ji} équivaut à la donnée d'une application continue

$$g_{ji} : U_i \cap U_j \longrightarrow \mathrm{Iso}(V)$$

Si on a trois ouverts tels que : $U_i \cap U_j \cap U_k \neq 0$ il faut que sur $U_i \cap U_j \cap U_k$,

$$G_{k,j} \circ G_{j,i} = G_{k,i}$$

Il résulte de cette étude :

$\forall x \in U_i$	$g_{ii}(x) =$ Identité sur V	T_1
$\forall x \in U_i \cap U_j$	$g_{ij}(x) = g^{-1}_{j,i}(x)$	T_2
$\forall x \in U_i \cap U_j \cap U_k$	$g_{k,j}(x) \circ g_{ji}(x) = g_{k,i}(x)$	T_3

E apparaît alors comme le quotient de $\bigcup_{i \in I} (U_i \times V)$ par la relation:

$$(x,t) \sim (y,s) \Longleftrightarrow \left| \begin{array}{l} x = y \\ \exists i \text{ et } j : s = g_{i,j}(x).t \end{array} \right.$$

Plus précisément on montre le théorème suivant :

Théorème : Soit $\{U_i\}_{i \in I}$ un recouvrement ouvert de l'espace topologique X et $\{g_{ij}\}_{(i,j) \in I^2}$ un ensemble de fonctions continues

g_{ij} $U_i \cap U_j \rightarrow GL(V_n)$ satisfaisant aux axiomes T_1, T_2, T_3.
Alors il existe un fibré vectoriel de fibre $V_n (= \underline{R}^n$ ou $\underline{C}^n)$ et un atlas $\{(U_i, h_i)\}$ tels que les g_{ij} soient les applications de changement de carte. Le fibré ainsi défini l'est à un isomorphisme près.

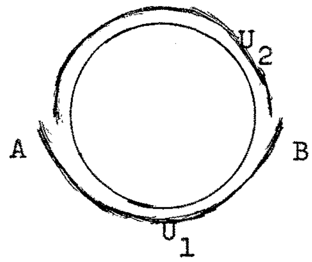
Considérons l'exemple de la bande de Möbius

Soit A et B les deux composantes connexes de $U_1 \cap U_2$

$g_{11} : x \in U_1 \rightarrow$ identité de $\underline{R}$

g_{22} : $x \in U_2 \longrightarrow$ identité de $\underline{R}$

g_{12} : $x \in U_1 \cap U_2 \longrightarrow \begin{cases} id_{\underline{R}} & \text{si } x \in A \\ -id_{\underline{R}} & \text{si } x \in B \end{cases}$



g_{21} : $g_{2,1} = g_{1,2}$

Ceci étant il devient facile de définir la somme de Whitney.

$$\begin{tikzcd} E \arrow[dr] & & F \arrow[dl] \\ & X & \end{tikzcd}$$

On recouvre X par des U_i suffisamment petits pour que $E|_{U_i}$ et $F|_{U_i}$ soient triviaux pour tout i. On en déduit les applications de changement de carte

$$g_{ij} : U_i \cap U_j \longrightarrow \mathrm{Iso}(V) = GL(k^n)$$
$$f_{ij} : U_i \cap U_j \longrightarrow \mathrm{Iso}(W) = GL(k^m)$$

On en déduit aisément $h_{ij} : U_i \cap U_j \longrightarrow GL(k^{m+n})$.

La somme directe de E et F est le fibré que le théorème précédemment énoncé associe au recouvrement $\{U_i\}$ et aux applications $h_{ij} = f_{ij} \oplus g_{ij}$

<u>Proposition</u>. Soit f continue : $X \longrightarrow Y$

$$\begin{tikzcd} & f^*(E \oplus F) \arrow[d] & & & E \oplus F \arrow[d] & \\ {}^*(E) \arrow[r] & X \arrow[rrr] & {}^*(F) \arrow[l] & E \arrow[r] & Y & F \arrow[l] \end{tikzcd}$$

$f^*(E) \oplus f^*(F) = f^*(E \oplus F)$

(vérification aisée)

2. <u>Produit tensoriel</u>

On peut utiliser deux méthodes analogues à celles qui ont servi à définir la somme directe

. méthode "descriptive" : $E \otimes F : \bigcup_{x \in X} (E_x \otimes F_x)$

Il reste à définir une topologie convenable.

. changements de carte : $E \otimes F$ est défini à partir des opérations de changement de carte $U_i \cap U_j \xrightarrow{h_{ij}} \mathrm{Iso}(V \otimes W)$ où $h_{ij}(x) = f_{ij}(x) \otimes g_{ij}(x)$

3. <u>Passage au dual</u>.

On utilise encore l'une ou l'autre des méthodes précédentes. On note : E^*

4. <u>Ensemble Hom(E,F)</u>.

Il convient de ne pas le confondre avec HOM(E,F) précédemment défini.

<u>Définition</u>. $\mathrm{Hom}(E,F) = E^* \otimes F$ (E et F sont des fibrés au-dessus d'une même base X)

La fibre de cet espace au-dessus du point x est donc $\mathrm{Hom}(E_x,F_x)$

<u>Proposition</u>. HOM(E,F) est l'ensemble des sections continues du fibré Hom(E,F).

Supposons d'abord E et F triviaux : $E \approx X \times V$, $F \approx X \times W$. Si α appartient à $\mathrm{HOM}(X \times V, X \times W)$, $\alpha(x,v) = (x,\alpha_x v)$, l'application $\begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & \mathrm{Hom}(V,W) \\ x & \longrightarrow & \alpha_x \end{array}$ étant continue. Or les espaces topologiques $\mathrm{HOM}(X \times V, X \times W)$ et $X \times \mathrm{Hom}(V,W)$ sont identiques, donc : $\mathrm{HOM}(X \times V, X \times W) = \Gamma(\mathrm{Hom}(X \times V, X \times W))$ et, modulo les isomorphismes trivialisants de E et F, $\mathrm{HOM}(E,F) = \Gamma(\mathrm{Hom}(E,F))$.

Si E et F sont des fibrés quelconques de base X, on associe à tout élément de HOM(E,F) une section "ensembliste" de Hom(E,F) : les fibrés étant localement triviaux, il est clair que les sections obtenues sont continues. Cette application $\mathrm{HOM}(E,F) \longrightarrow \Gamma(\mathrm{Hom}(E,F))$ est une bijection canonique.

Chapitre II - HOMOTOPIE

<u>Définition</u> : Soient X, Y espaces topologiques. Deux applications continues f et $g : X \to Y$ sont dites homotopes s'il existe une application continue

$$H \quad X\times[01] \to Y \quad \text{telle que} \quad \left| \begin{array}{ll} \forall x \in X & H(x,0) = f(x) \\ \forall x \in X & H(x,1) = g(x) \end{array} \right.$$

H est l'homotopie reliant f à g. Les applications f_t définies par $f_t(x) = H(x,t)$ forment une famille d'applications continues de X dans Y qui dépendent continuement de t.
Si f et g sont homotopes, on note $f \sim g$

<u>Proposition</u>. L'homotopie est une relation d'équivalence dans $C(X,Y)$

- $f \sim f$: on utilise l'homotopie $H(x,t) = f(x)$
- $f \sim g \implies g \sim f$: on utilise $H'(x,t) = H(x,1-t)$
- $f \sim g$, $g \sim h \implies f \sim h$: soit $H_1(x,t)$ tel que $H_1(x,0) = f(x)$, $H_1(x,1) = g(x)$

  $H_2(x,t)$ tel que $H_2(x,0) = g(x)$, $H_2(x,1) = h(x)$

On pose $H(x,t) = \left| \begin{array}{lll} H_1(x,2t) & \text{si} & 0 \leqslant t \leqslant \frac{1}{2} \\ H_2(x,2t-1) & \text{si} & \frac{1}{2} \leqslant t \leqslant 1 \end{array} \right.$

On vérifie aisément que H est une homotopie entre f et h.

<u>Proposition</u>. Les composés d'applications homotopes sont homotopes.

Soit $X \underset{f'}{\overset{f}{\rightrightarrows}} Y \underset{g'}{\overset{g}{\rightrightarrows}} Z$ où $\begin{array}{l} f \sim f' \\ g \sim g' \end{array}$

Soit F continue $X \times I \to Y$ $\quad F(x,0) = f(x) \quad F(x,1) = f'(x)$

$\quad G$ continue $Y \times I \to Z$ $\quad G(y,0) = g(y) \quad G(y,1) = g'(y)$

Alors H $\quad X \times I \to Z$ définie par $H(x,t) = G(F(x,t),t)$

est une homotopie entre $g \circ f$ et $g' \circ f'$.

Notation : $[X,Y]$ est l'ensemble des classes d'homotopie de $C(X,Y)$

Proposition. [espace point, X] est l'ensemble des composantes connexes par arcs de X.

En effet, si $\{x_0\}$ désigne l'espace point,

$$\begin{matrix} x_0 \to x \in X \\ x_0 \to y \in X \end{matrix} \text{ sont homotopes} \iff \exists F \text{ continue } \{x_0\} \times I \to X \text{ telle que } \begin{matrix} F(x_0,0) = x \\ F(x_0,1) = y \end{matrix}$$

Equivalence d'homotopie.

Une application continue $f : X \to Y$ est appelée équivalence d'homotopie s'il existe f' continue $Y \to X$ telle que $f' \circ f \sim id_X$ et $f \circ f' \sim id_Y$. S'il existe une équivalence d'homotopie entre deux espaces X et Y, on dit qu'ils ont le même type d'homotopie.

Cas particulier. Un homéomorphisme est une équivalence d'homotopie.

Proposition. La relation "a le même type d'homotopie que" est une relation d'équivalence.

. $X \sim X$ $\qquad X \underset{\longleftarrow}{\overset{\text{Id } X}{\longrightarrow}} X$

. $X \sim Y \implies Y \sim X$ car si $f : X \to Y$ est une équivalence d'homotopie, f' (cf. notations ci-dessus) en est une également.

. $X \sim Y$ et $Y \sim Z \implies X \sim Z$

$X \underset{f'}{\overset{f}{\rightleftarrows}} Y \underset{g'}{\overset{g}{\rightleftarrows}} Z$ Il faut montrer que $g \circ f$ est une équivalence d'homotopie, c'est-à-dire que :

$$f' \circ g' \circ g \circ f \sim Id_X \qquad g \circ f \circ f' \circ g' \sim Id_Z$$

Ceci est aisé : $g' \circ g \sim Id\ Y$. La composition gardant l'homotopie

$$f' \circ g' \circ g \circ f \sim f' \circ Id_Y \, f \circ f = f' \circ f \sim Id_X$$

De même : $g \circ f \circ f' \circ g' \sim Id_Z$.

Remarquons qu'une relation d'équivalence est une relation binaire définie sur un ensemble. La classe des espaces topologiques n'est pas un ensemble ; nous ne soulèverons pas plus la difficulté logique.

Paragraphe 2 - RETRACTES - ESPACES CONTRACTILES

Définition. Soit i l'injection canonique : $A \to X$. Supposons qu'il existe une application r continue : $X \to A$ telle que

a) $\forall \; a \in A \quad r(a) = a$

b) $i \circ r \sim Id_X$

On dit alors que A est un rétracte de X par déformation.

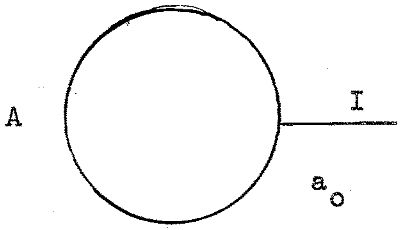
Proposition. Si A est un rétracte de X par déformation, $A \xrightarrow{i} X$ est une équivalence d'homotopie.

Car $r \circ i = Id_A$ et $i \circ r \sim Id_X$

Proposition. A rétracte de X par déformation est fermée dans X, si X est un espace topologique séparé.

En effet, l'application $X \to X \times X$ définie par $x \to (r(x), x)$ est continue. La diagonale de $X \times X$ est fermée puisque X est séparé. Donc son image réciproque, soit A est fermée dans X.

Exemple. Dans $\underline{R}^2$ considérons le cercle $A = \{x \in \underline{R}^2 \; \|x\| = 1\}$
Soit $X = A \cup I$ où $I = [1,2] \times 0$



L'application $r : X \to A$ définie par $a \in A \to r(a) = a$, $x \in B \to a_o$ est une rétraction déformation. En particulier l'homotopie entre $i \circ r$ et Id_X est définie par

$$\left.\begin{array}{l} H_{(a,t)} = a \qquad \forall\, a \in A \\ H(x,1) = x \\ H(x,0)\ a_o \\ \text{et prolongation linéaire} \end{array}\right] \forall\, x \in B$$

<u>Définition</u>. Un espace topologique X est contractile s'il a le même type d'homotopie que l'espace réduit à un seul point. Autrement dit : X est contractile si Id_X est homotope à une application constante de X dans X.

<u>Proposition</u>. un sous-ensemble convexe d'un espace vectoriel topologique est contractile.

Il suffit pour s'en convaincre de considérer l'homotopie $H \quad X \times I \longrightarrow X$ définie par $H(x,t) = t\,x + (1-t)x_o$ où x_o est un point fixé dans X.
Remarquons que la démonstration est valable dès que X est étoilé par rapport à x_o (c'est-à-dire si $x \in X \Longrightarrow$ le segment $[x,x_o]$ est inclus dans X).

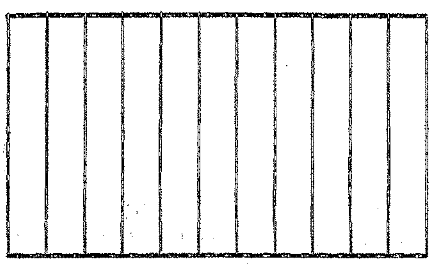
<u>Corollaire</u>. $\underline{R}^n$ est contractile ; $D_n = \{x \mid \|x\| \leq 1\}$ est contractile.

<u>Cône sur un espace topologique</u>.

Soit X un espace topologique. On appelle cône sur X (et on note $C\,X$ le quotient de $X \times I$ par la relation d'équivalence qui identifie tous les éléments de $X \times \{1\}$, cet ensemble étant muni de la topologie-quotient.

$$C\,X = X \times I/_{X \times \{1\}}$$

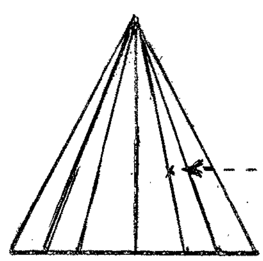
Le sommet du cône est la classe des éléments de $X \times \{1\}$



X x 1

X x 0

X



C X

(x,t)

<u>Proposition</u>. Quel que soit l'espace topologique X son cône est contractile.

Il existe en effet une homotopie entre l'identité sur $C\,X$ et l'application constante sur son sommet :

$$H((\overline{x,t}),u) = (\overline{x,1-(1-u)(1-t)})$$

où $(\overline{x,t})$ désigne la classe de $(x,t) \in X \times [0,1]$

<u>Remarque</u> : L'homotopie ci-dessus est telle que le sommet est un point fixe pour chacune des applications H_u : il n'en est pas de même pour une homotopie arrivant sur une fonction constante quelconque de $C\,X$ dans $C\,X$.

Ainsi si X est l'union des cercles de centre $(\frac{1}{n},0)$ et de rayon $\frac{1}{n}$, muni de la topologie induite par $\underline{R}^2$, il n'existe pas d'homotopie de $Id_{C\,X}$ sur l'application constante $C\,X \longrightarrow (0,0;0)$ laissant ce dernier point invariant à tout stade.

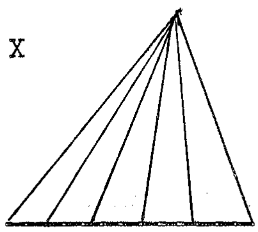
<u>Suspension sur un espace topologique</u> X : ΣX

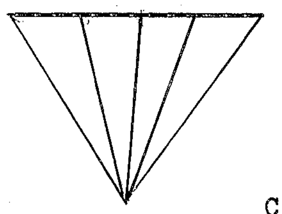
C'est le quotient de $X \times [-1,1]$ par la relation d'équivalence identifiant les éléments de $X \times \{1\}$ d'une part, ceux de $X \times \{-1\}$ d'autre part.

On peut également considérer la suspension de X comme la réunion avec identification de leurs bases des deux cônes :

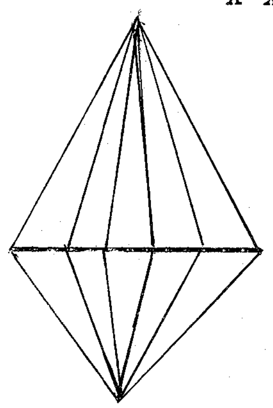
$C^+ X = X \times [0,1]/_{X \times \{1\}}$ et $C^- X = X \times [-1,0]/_{X \times \{-1\}}$

$C^+ X$





$C^- X$



ΣX

La classe de $X \times \{1\}$ est le pôle nord
La classe de $X \times \{-1\}$ est le pôle sud
$X \times \{0\}$ (identifié à X) est l'équateur.

<u>Exemple</u>. $\Sigma S_n = S_{n+1}$

On considère S_{n+1} plongée dans $\underline{R}^{n+2}$, $\underline{R}^{n+1}$ étant identifié à l'hyperplan des vecteurs dont la $(n+2)^e$ composante sur la base canonique de $\underline{R}^{n+2}$ est nulle. Soit p_+ (resp. p_-) la projection de l'hémisphère

$$H_+ = \{(z_1, \ldots, z_{n+2}) \in S_{n+1} \mid z_{n+2} \geq 0\} \quad (\text{resp. } H_-) \quad \text{sur } \underline{R}^{n+1}$$

L'application $\Sigma(S_n) \xrightarrow{f} S_{n+1}$ définie par

$$(z,t) = \left| \begin{array}{ll} p_-^{-1}((t+1)z - tc) & \text{si } -1 \leq t \leq 0 \\ p_+^{-1}((1-t)z + tc) & \text{si } 0 \leq t \leq 1 \end{array} \right.$$

(où c désigne le centre de S_n)

est un homéomorphisme : $\Sigma S_n - S_{n+1}$

<u>Relèvement des applications dans la suspension</u>.

Soient X et Y deux espaces topologiques et f continue $X \to Y$. On en déduit une application $\Sigma f : \Sigma X \to \Sigma Y$ définie par $(\Sigma f)(x,t) = (f(x),t)$, Σf est continue. En outre si $f\ X \to Y$ est une équivalence d'homotopie, Σf en est une également.

Paragraphe 3 - <u>THEOREME DU RELEVEMENT DES HOMOTOPIES</u>

<u>Lemme 1</u>. Soient $E \to X$ un fibré à base compacte, Y un fermé de X, s une section de $E|Y$. Il existe une section S de E qui prolonge s

Soit $\{U_i\}_{i=1\ldots n}$ un recouvrement de X fini, ouvert et trivialisant pour le fibré E . X étant compact, donc normal, il existe un recouvrement $\{V_i\}_{i=1,..n}$ ayant les mêmes propriétés et en outre tel que $V_i \subset \overline{V}_i \subset U_i$ pour tout i .

$$E|\overline{V}_i = \overline{V}_i \times k$$

$$(E|\overline{V}_i)|Y = E|\overline{V}_i \cap Y \qquad\qquad s|\overline{V}_i \cap Y \in \Gamma(E|\overline{V}_i \cap Y)$$

D'après le théorème de Tietze, il existe une section $t_i \in \Gamma(E|\overline{V}_i)$ qui prolonge $s|\overline{V}_i \cap Y$.

Soit $\{\alpha_i\}_{i=1,..n}$ une partition de l'unité subordonnée au recouvrement $\{V_i\}$.

Posons $s_i(x) = \left|\begin{array}{ll} \alpha_i(x)\ t_i(x) & \text{si } x \in \overline{V}_i \\ 0 & \text{si } x \in \complement\, \overline{V}_i \end{array}\right.$

Les restrictions de $s_i(x)$ aux fermés $\overline{V}_i$ et $\complement\, V_i$ sont continues : la première est le produit de deux fonctions continues, la seconde est identiquement nulle. Comme $\overline{V}_i \cup \complement\, V_i = X$, s_i est continue

$$s_i \in \Gamma(E) \Longrightarrow S = \sum_{i=1}^{n} s_i \in \Gamma(E)$$

Il est clair que S prolonge s .

<u>Lemme 2.</u> Soient E et F deux fibrés de même dimension sur une base X compacte et Φ un homomorphisme : $E \to F$. A désigne l'ensemble des points x de X où ϕ_x est un isomorphisme , alors A est un ouvert de X .

Grâce à la trivialité locale, on peut supposer $E = X \times V$, $F = X \times W$

$$\Phi \qquad X \times V \longrightarrow X \times W \qquad\qquad (\dim V = \dim W)$$

$$(x,v) \longrightarrow (x,\Psi(x)\ v)$$

Ψ est une application continue : $X \to \mathrm{Hom}(V,W)$.

Comme $A = \Psi^{-1}(\mathrm{Iso}(V,W))$, A est ouvert.

<u>Lemme 3.</u> Soient E et F deux fibrés de base compacte X et Y un fermé de X . Pour tout isomorphisme $f : E|Y \to F|Y$ il existe

un voisinage ouvert U de Y et un isomorphisme $\phi : E|U \longrightarrow F|U$ qui prolonge f.

On utilise l'identification $HOM(E,F) = \Gamma(Hom(E,F))$.

Soit i l'injection canonique $Y \longrightarrow X$

$$Hom(E,F)|Y = i^* \, Hom(E,F) = Hom(i^*(E), i^*(F)) = Hom(E|Y, F|Y)$$

Donc $$Hom(E|Y, F|Y) = \Gamma(Hom(E,F)|Y)$$

D'après le premier lemme f section de $Hom(E,F)|Y$ se prolonge en une section F de $Hom(E,F)$: F est un homomorphisme $E \longrightarrow F$.

Le second lemme implique qu'il existe un voisinage ouvert de Y au-dessus duquel F est un isomorphisme.

<u>Théorème</u>. Soient Y un compact, $p : E \longrightarrow X$ un fibré vectoriel localement trivial, f_o et f_1 deux applications continues homotopes $Y \longrightarrow X$. Alors

$$f_o^* \, E \approx f_1^* \, E$$

Soit $F : Y \times I \longrightarrow X$ l'homotopie reliant f_o et f_1 : $F(\cdot, t) = f_t$.
Soit π la projection $Y \times I \longrightarrow Y$ et i l'injection canonique $Y \times t \longrightarrow Y \times I$

$$\begin{tikzcd} Y \times I \arrow[rr, "F"] \arrow[dr, "\pi"'] & & X \\ & Y \arrow[ur, "f_t"'] & \end{tikzcd}$$

(Diagramme non commutatif)

$$F|Y \times t = f_t \circ \pi|Y \times t$$

Donc $$(F|Y \times t)^* \, (E) = (f_t \circ (\pi|Y \times t))^* \, (E) \qquad (1)$$

Or $F|Y \times t = F \circ i$.

$$(F|Y \times t)^* \, (E) = i^* \circ F^*(E) \approx F^*(E)|Y \times t$$

On opère des transformations analogues sur le second membre de (1)

Il en résulte

$$F^*(E)|Y\times t \approx (\pi^* \circ f_t^*)(E)|Y\times t$$

$Y \quad t$ étant fermé dans $Y \quad I$ on peut appliquer le lemme 3 démontré ci-dessus : il existe un voisinage ouvert U de $Y \quad t$ tel que

$$\boxed{F^*(E)|U \approx (\pi^* \circ f_t^*)(E)|U} \qquad (2)$$

Y étant compact, il existe un voisinage ouvert δt de t dans I tel que $U \supset Y \times \delta t$.

Soit $t' \in \delta t$: $Y\times t$ et $Y \times t'$ peuvent être identifiés à Y : les fibrés $\pi^* f_t^*(E)|Y\times t'$ et $\pi^* f_t^*(E)|Y\times t$ ont donc même base ; montrons qu'ils sont isomorphes.

Désignons par ϕ l'application composée

$$Y = Y\times t' \longrightarrow Y\times I \xrightarrow{\pi} Y \xrightarrow{f_t} X$$

et par ψ

$$Y = Y\times t \longrightarrow Y \quad I \xrightarrow{\pi} Y \xrightarrow{f_t} X$$

$$\pi_o^* f_t^*(E)|Y\times t' = \phi^*(E) \qquad\qquad \pi_o^* f_t^*(E)|Y\times t = \psi^*(E)$$

Or $\phi = \psi = f_t$: les deux fibrés considérés sont donc isomorphes à $f_t^*(E)$.

Par restriction des deux membres à $Y\times t'$, (2) implique

$$F^*(E)|Y\times t' \approx (\pi^* \circ f_t^*)(E)|Y\times t' \qquad (3)$$

Soit j l'injection canonique $Y\times t' \longrightarrow Y\times I$

$$F^*(E)|Y\times t' \approx (F \circ j)^*(E) = f_{t'}^*(E)$$

Donc, d'après (3) : $f_{t'}^*(E) \approx f_t^*(E)$ pour tout $t' \in \delta t$

La classe d'isomorphisme de $f_t^*(E)$ est une fonction localement constante de t, donc est constante puisque I est connexe

$$f_o^*(E) \approx f_1^*(E)$$

<u>Remarque 1</u>. Le théorème de relèvement des homotopies reste vrai si la base X est para-compacte.

<u>Remarque 2. Notations</u>. Si X est un espace topologique, $\mathrm{Vect}_n^k(X)$ désigne l'ensemble des classes d'isomorphisme des fibrés vectoriels de dimension n sur le corps k. $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{Vect}_n^k(X)$ est noté $\mathrm{Vect}^k(X)$. La somme de Whitney induit une loi de demi-groupe abélien sur $\mathrm{Vect}^k(X)$.

Les résultats précédents s'énoncent alors : $\mathrm{Vect}^k(\cdot)$ est un foncteur contravariant de la catégorie dont les objets sont les espaces topologiques compacts et dont les flèches sont les classes d'homotopie d'applications continues, dans la catégorie des demi-groupes abéliens. En effet, à un espace X, $\mathrm{Vect}^k(\cdot)$ associe le demi-groupe abélien $\mathrm{Vect}^k(X)$ et a une application continue $f : X \to Y$, $\mathrm{Vect}^k(\cdot)$ associe $\mathrm{Vect}^k(f)$ défini de la façon suivante,

$$(E \text{ désigne un fibré sur } Y),$$
$$\mathrm{Vect}^k(f)(E) = f^*(E)$$

$\mathrm{Vect}^k(f)$ est bien un homomorphisme de demi-groupe.
$\mathrm{Vect}^k(f)(E_1 \oplus E_2) = f^*(E_1) \oplus f^*(E_2)$ et $\mathrm{Vect}^k(f \circ g) = \mathrm{Vect}^k(g)\circ \mathrm{Vect}^k(f)$. Le théorème précédent affirme d'autre part que $\mathrm{Vect}^k(f)$ ne dépend que de la classe d'homotopie de f. On notera aussi $\mathrm{Vect}^k(f), f^*$, (image réciproque).

<u>Corollaire 1</u>. Soit X un espace compact et E un fibré de base $X\times I$. Identifions $X\times 0$ et $X\times 1$ à X. Alors

$$E|X\times 0 \approx E|X\times 1$$

Soit j_t l'application $X \to X\times I$
$x \mapsto (x,t)$

j_o et j_1 sont donc homotopes.

Or $E|X\times 0 \approx j_o^* E$, $E|X\times 1 \approx j_1^* E$

De $j_1^* E \approx j_1^* E$ on déduit $E|X\times 0 \approx E|X\times 1$.

<u>Corollaire 2</u>. Soit X un espace compact, E un fibré sur $X \times I$, π la projection $X \times I \longrightarrow X \times 0$, alors

$$\pi^*(E|X \times 0) \approx E$$

Soit i l'injection canonique $X \times 0 \longrightarrow X \times I$, $Id_{X \times I}$ et $i \circ \pi$ sont reliés par l'homotopie

$$\begin{aligned} H : X \times I \times I &\longrightarrow X \times I \\ (x,u,t) &\longmapsto (x,tu) \end{aligned}$$

Donc $E = (Id_{X \times I})^* E = (i \circ \pi)^* E = \pi^* \circ i^*(E) = \pi^*(E|X \times 0)$

Ce corollaire peut encore s'énoncer sous la forme : tout fibré E sur $X \times I$ est de la forme $E' \times I$ où E' est un fibré sur X.

<u>Corollaire 3</u>. Soient X et Y deux espaces topologiques compacts, f une équivalence d'homotopie : $X \longrightarrow Y$.
L'application f^*: $Vect_n^k(Y) \longrightarrow Vect_n^k(X)$ est une bijection qui transforme la classe du fibré trivial $Y \times k^n$ en la classe de $X \times k^n$.
Cela résulte du caractère fonctoriel de $Vect_n^k$: il existe une application continue g $Y \longrightarrow X$ telle que

$$g \circ f \sim Id_X \qquad \text{et} \qquad f \circ g \sim Id_Y$$

Donc $f^* \circ g^*$ (resp. $g^* \circ f^*$) est l'identité de $Vect_n^k(X)$ (resp. $Vect_n^k(Y)$).

<u>Corollaire 4</u>. Soit X un espace compact et contractile. $Vect_n^k(X)$ est réduit à la classe du fibré trivial.
Soit x_o le point sur lequel X est contracté, P l'espace-point $\{x_o\}$. D'après le corollaire 3, il existe une bijection

$$Vect_n^k(P) \longleftrightarrow Vect_n^k(X)$$

Le corollaire 4 en résulte immédiatement.

Cette proposition permet de montrer que certains espaces compacts ne sont pas contractiles. Ainsi S_1 n'est pas contractile car la bande de Möbius n'est pas triviale.

Paragraphe 4 - TRIVIALISATIONS D'UN FIBRE

Soit $E \to X$ un fibré trivial de fibre vectoriel V : il existe un isomorphisme trivialisant (ou trivialisation) $\alpha : E \to X \times V$ mais celui-ci n'est pas unique. Cherchons donc à comparer deux tels isomorphismes.

Différence de deux trivialisations.

Soient α_o et α_1 deux trivialisations de E, $\alpha_1 \circ \alpha_o^{-1}$ est un isomorphisme de fibrés $X \times V \to X \times V$.
Donc $\alpha_1 \circ \alpha_o^{-1} = (\mathrm{Id}_X, \psi)$ où ψ est une application continue $X \to \mathrm{Iso}(V)$, ψ est la différence des trivialisations α_o et α_1.

Homotopie de deux isomorphismes de fibrés.

Soient E_1 et E_2 deux fibrés vectoriels quelconques de base X, ψ_o et ψ_1 deux isomorphismes $E_1 \to E_2$. On dit que ψ_o et ψ_1 sont homotopes s'il existe un <u>isomorphisme</u> Ψ

$$\begin{tikzcd} E_1 \times I \arrow[rr, "\Psi"] \arrow[dr, "p_1"'] & & E_2 \times I \arrow[dl, "p_2"] \\ & X \times I & \end{tikzcd}$$

tel que $\Psi | p_1^{-1}(X \times 0) = \psi_o$ et $\Psi | p_1^{-1}(X \times 1) = \psi_1$

Théorème. Soient E un fibré trivial de base X, de fibre V ; α_o et α_1 deux trivialisations de E, de différence ψ, α_o et α_1 sont homotopes si et seulement si ψ est homotope à l'application constante

$$\begin{aligned} \gamma : X &\longrightarrow \mathrm{Iso}(V) \\ x &\longmapsto \mathrm{Id}_V \end{aligned}$$

C.N. Soit A l'homotopie d'isomorphismes

$$A : E \times I \longrightarrow (X \times I) \times V$$

Restreignons le

$$\alpha_t : E = E \times I\big|_{X \times t} \longrightarrow X \times V$$

Soit ψ_t la différence entre les trivialisations α_o et α_t

$$\psi_1 = \psi \qquad \psi_o = \gamma$$

Il reste donc à montrer que $H : X \times I \longrightarrow \mathrm{Iso}(V)$

$$(x,t) \longmapsto \psi_t(x)$$

est continue. Considérons $\alpha_o \times \mathrm{Id}_I : E \times I \longrightarrow (X \times V) \times I$, c'est un isomorphisme ; son inverse est $\alpha_o^{-1} \times \mathrm{Id}_I$.

$A \circ (\alpha_o^{-1} \times \mathrm{Id}_I) : (X \times V) \times I \longrightarrow (X \times V) \times I$ est isomorphisme.

D'après le théorème 1 (chap.I, §2), il lui correspond canoniquement une application continue

$$X \times I \longrightarrow \mathrm{Iso}(V)$$

qui est précisément H .

C.S. à H application continue : $X \times I \longrightarrow \mathrm{Iso}(V)$ est associé canoniquement un isomorphisme

$$\Omega : (X \times V) \times I \longrightarrow (X \times V) \times I$$

L'isomorphisme $\Omega \circ (\alpha_o \;\; \mathrm{Id}_I) : E \times I \longrightarrow (X \times V) \times I$ est une homotopie entre α_o et α_1 .

Lemme. Soit Y un espace topologique contractile, X un espace connexe par arcs. Alors l'ensemble des classes d'homotopie d'applications continues de Y dans X noté $[Y,X]$, a un seul élément.

Notons F une homotopie entre Id_Y et l'application constante

$$\begin{aligned} Y &\longrightarrow Y \\ y &\longmapsto y_o \end{aligned}$$

Soit γ_x l'application constante $\begin{aligned} Y &\longrightarrow X \\ y &\longmapsto x \end{aligned}$

$$\forall\ f \in \mathcal{C}(Y,X) \qquad f \sim \gamma_{f(y_o)} \qquad \text{(considérer } f \circ F)$$

Puisque X est connexe par arcs, pour tous x et $x' \in X$, $\gamma_x \sim \gamma_{x'}$
D'où le lemme.

<u>Proposition</u>. Soit Y un espace contractile, $E \longrightarrow Y$ un espace fibré complexe donc nécessairement trivial. Deux trivialisations de E sont homotopes.

En effet l'ensemble des trivialisations de $E \times I$, fibré sur $Y \times I$ est en bijection canonique avec $\mathcal{C}(Y, GL(n\ \mathbb{C}))$.

Donc l'ensemble des classes d'homotopie des trivialisations de E est en bijection avec $[Y, GL(n\ \mathbb{C})]$ qui n'a qu'un élément puisque $GL(n\ \mathbb{C})$ est connexe par arcs et que Y est contractile.

<u>Etude d'un cas particulier</u>.

Considérons le fibré trivial $E = SO(2\ \mathbb{R}) \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow SO(2\ \mathbb{R})$ (on peut le considérer intuitivement comme $S_1 \times \mathbb{R}^2$, S_1 groupe des complexes de module 1 opérant sur $\mathbb{R}^2$ comme groupe de rotations. Si on substitue à la fibre vectorielle une "fibration en sphères", on obtient le tore).

Considérons les deux trivialisations de E

$$\begin{array}{lccc} & SO(2\ \mathbb{R}) \times \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & SO(2,\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^2 \\ \alpha_o & (g,x) & \longmapsto & (g,x) \\ \alpha_1 & (g,x) & \longmapsto & (g, g \circ x) \end{array}$$

Les deux isomorphismes ne sont pas homotopes : montrons par l'absurde que leur différence ψ n'est pas homotope à l'application constante $\gamma : \begin{aligned} SO(2,\mathbb{R}) &\longrightarrow Gl(2,\mathbb{R}) \\ g &\longmapsto 1 \end{aligned}$

ψ est évidemment l'injection canonique $SO(2,\mathbb{R}) \longrightarrow GL(2,\mathbb{R})$.

Démontrons que ψ et γ en tant qu'applications de $SO(2,\mathbb{R})$ dans $SO(2,\mathbb{R})$ sont homotopes.
L'homotopie reliant ψ et γ prend évidemment ses valeurs dans $SL(2,\mathbb{R})$ composante connexe de l'image de γ. On peut donc co-restreindre γ et ψ à cet espace.

Soit δ l'application $SO(2,\mathbb{R}) \longrightarrow SO(2,\mathbb{R})$
$$g \longmapsto 1$$

$$SO(2,\mathbb{R}) \underset{\delta}{\overset{Id}{\rightrightarrows}} SO(2,\mathbb{R}) \longrightarrow SL(2,\mathbb{R})$$

$$\psi = i \circ Id \qquad i \circ \delta = \gamma$$

Donc $i \circ Id \sim i \circ \delta$ et comme i est une équivalence d'homotopie (cf. Appencide) $\delta \sim Id$ $SO(2,\mathbb{R})$, homéomorphe à S_1 est contractile. Absurde.

Chapitre III - CONSTRUCTION DE FIBRES VECTORIELS

Paragraphe 1 - CONTRACTION AU-DESSUS D'UN FERME TRIVIALISANT

Soit $(p : E \to X)$ un fibré vectoriel de base compacte, trivial au-dessus du fermé $Y \subset X$; soit α une trivialisation $E|Y \to Y \times V$ X/Y désigne l'espace topologique quotient de X par la relation d'équivalence qui identifie les points de Y ; nous allons définir un fibré vectoriel de base X/Y dont l'espace total sera noté E/α

Comme Y est fermé dans le compact X, tout point de $X - Y$ possède un voisinage qui est disjoint d'un voisinage au moins de Y: l'espace X/Y est donc séparé.

i) Définition de l'espace topologique E/α

Soit pr_2 la projection $Y \times V \to V$. E/α est l'espace topologique quotient de E par la relation d'équivalence :

$$e \mathcal{R} e' \iff \begin{cases} e \text{ et } e' \in E|Y \text{ et } (pr_2 \circ \alpha)(e) = (pr_2 \circ \alpha)(e') \\ \text{ou} \\ e, e' \notin E|Y \text{ et } e = e' \end{cases}$$

La surjection canonique est : $\psi : E \to E/\alpha$. On vérifie que E/α est muni d'une topologie séparée.

ii) Projection du fibré.

C'est la surjection (unique) π qui rend commutatif le diagramme :

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, "p"'] & E/\alpha \arrow[d, "\pi"] \\ X \arrow[r, "\sigma"'] & X/Y \end{tikzcd}$$

iii) <u>Structure vectorielle sur les fibres.</u>

$\mathcal{R}$ étant régulière vis-à-vis de l'addition et de la multiplication par un <u>scalaire</u> dans les fibres, les fibres de E/α sont munies de la structure vectorielle induite.

iv) <u>Trivialité locale.</u>

Soit y_o l'image de Y par la surjection canonique $\sigma : X \to X/Y$. E/α est trivial au voisinage de ce point. En effet X étant compact et Y fermé, α se prolonge en un isomorphisme trivialisant A défini au-dessus d'un ouvert U contenant Y :

$$A : E|U \to U \times V$$

A étant compatible avec la relation $\mathcal{R}$ passe au quotient : on obtient un isomorphisme $(E|U)/\alpha = E/\alpha|(U/Y) \to U/Y \times V$.
Il est clair que E/α est trivial au voisinage des autres points de X/Y.
Nous avons donc construit un fibré vectoriel localement trivial $E/\alpha \to X/Y$ de même dimension que E.

<u>Proposition 1.</u> Soient α_o et α_1 deux trivialisations homotopes $E|Y \to Y \times V$. Alors E/α_o est isomorphe à E/α_1

Soit A une homotopie reliant α_o et α_1. $(E \times I)/A$ est un fibré de base $X \times I/Y \times I \approx X/Y \times I$; X/Y étant compact les restrictions de ce fibré à $X/Y \times \{0\}$ et $X/Y \times \{1\}$ sont isomorphes : E/α_o est isomorphe à E/α_1.

<u>Proposition 2.</u> Soit σ la surjection $X \to X/Y$. Les deux fibrés $\sigma^*(E/\alpha)$ et E sont isomorphes.

L'espace topologique $\sigma^*(E/\alpha)$ est un sous-espace de $X \times E/\alpha$. L'application $E \to \sigma^*(E/\alpha)$ qui à un point e associe le couple $(p(e), \psi(e))$ est évidemment continue et ses restrictions aux fibres sont des isomorphismes : c'est un isomorphisme de fibrés.

La construction précédente est valable pour des fibrés vectoriels sur un corps quelconque. Dans la proposition ci-dessous l'hypothèse que les fibrés considérés sont complexes est essentielle.

Proposition 3. Soit X un espace topologique compact, Y un fermé contractile de X. Alors $\sigma^* : \mathrm{Vect}^c(X/Y) \to \mathrm{Vect}^c(X)$ est un isomorphisme de monoïdes commutatifs.

Y étant contractile, tout fibré complexe de base X est trivial au-dessus de Y et la trivialisation est unique à une homotopie près (cf. chap. II, §). Compte tenu de la proposition 1 ci-dessus, il existe une application

$$q \quad \mathrm{Vect}^c(X) \longrightarrow \mathrm{Vect}^c(X/Y)$$
$$[E] \longmapsto [E/\alpha]$$

(où α désigne une trivialisation de $E|Y$).

La proposition 2 montre que $\sigma^* \circ q$ est l'application identique de $\mathrm{Vect}^c(X)$. En outre si E' est un fibré de base X/Y, $(\sigma^* E')|Y = Y \times E'_{y_0}$: l'identité est une trivialisation ; il en résulte que $q \circ \sigma^*$ est l'identité de $\mathrm{Vect}^c(X/Y)$. Il est clair que σ^* est un isomorphisme de monoïdes commutatifs.

Intérêt de cette construction.

Nous y aurons recours pour étudier les fibrés sur des suspensions. Rappelons que si (X, x_0) et (Y, y_0) sont deux espaces topologiques pointés, leur produit réduit est l'espace $X \wedge Y = (X \times Y) / (X \times y_0 \cup x_0 \times Y)$ muni du point de base : classe des points de $X \times y_0 \cup x_0 \times Y$. La suspension réduite d'un espace X (notée $S_1 X$) est le produit réduit $S_1 \wedge X$. Comparons la suspension $\sum X$ et la suspension réduite $S_1 X$ d'un espace compact (X, x_0). S_1 est identifié à l'ensemble des complexes de module 1 muni du point de base 1.

L'application continue $X \times [-1,1] \longrightarrow X \times S_1$

$$(x,t) \longmapsto (x, e^{int})$$

induit par passage au quotient une application ψ de $\sum X$ dans $S_1 X$: or $\psi(\overline{(x_o, E)})$ ne dépend pas de t. D'où une application continue de $\sum X/x_o \times I$ dans $S_1 X$ qui est bijective et bicontinue (puisque l'espace de définition est compact). Il résulte alors de la proposition 3 :

<u>Proposition</u>. Si X est compact $\mathrm{Vect}^c(\sum X)$ et $\mathrm{Vect}^c(S_1 X)$ sont isomorphes.

On pourra vérifier les formules ci-dessous :

$$X \wedge Y \approx Y \wedge X \qquad (X \wedge Y) \wedge Z \approx X \wedge (Y \wedge Z)$$

$$S_n = S_1 \wedge \ldots \wedge S_1 \quad (n \text{ fois}) \qquad S_n \wedge S_m = S_{n+m}$$

En outre si X est un espace compact pointé, on peut poser $S_n X = S_n \wedge X$. On vérifie que $S_n(X/Y) \approx S_n X/S_n Y$.

Paragraphe 2 - <u>RECOLLEMENT DE FIBRES VECTORIELS A BASE COMPACTE</u>

<u>Théorème et définition</u>. Soient X un espace compact, X_1 et X_2 deux fermés de X non disjoints qui recouvrent X, ($p_1 : E_1 \longrightarrow X_1$) et $p_2 : E_2 \longrightarrow X_2$) deux fibrés de même dimension. Supposons qu'au-dessus de $A = X_1 \cap X_2$ il existe un isomorphisme de fibrés $\Phi : E_1|A \longrightarrow E_2|A$. Alors le quotient (noté $E_1 \cup_\Phi E_2$) de la somme $E_1 \coprod E_2$ par la relation d'équivalence :

$$e \,\mathcal{R}\, e' \Longleftrightarrow \begin{array}{l} \text{Pour } i=1 \text{ ou } 2 \;\; e_1 \text{ et } e' \in E_i \text{ et } e=e' \\ \qquad\qquad \text{ou} \\ e \text{ et } e' \text{ se correspondent par } \Phi \end{array}$$

peut être muni naturellement d'une structure de fibré vectoriel localement trivial de base X. On l'appelle recollement des fibrés

E_1 et E_2 par l'isomorphisme Φ.

i) <u>Projection</u>

$p_1 \amalg p_2 \quad E_1 \amalg E_2 \longrightarrow X$ est compatible avec $\mathcal{R}$: l'application obtenue par passage au quotient sera la projection du recollement.

ii) <u>Structure vectorielle des fibres</u>

$\mathcal{R}$ étant régulière vis-à-vis de la structure vectorielle des fibres, induit la structure vectorielle des fibres de $E_1 \cup_\Phi E_2$.

iii) <u>Trivialité locale</u>

Le recollement est évidemment trivial au voisinage d'un point de $X - A$. Tout point de A possède un voisinage V fermé (dans X) tel que $E_1|V \cap X_1$ et $E_2|V \cap X_2$ soient triviaux. Soit θ_1 un isomorphisme de $E_1|V \cap X_1$ sur $(V \cap X_1) \times F$. θ_1^A désignant la restriction de θ_1 à $p_1^{-1}(A \cap V)$, considérons l'isomorphisme $E_2|V \cap A \xrightarrow{\phi^{-1}} E_1|V \cap A \xrightarrow{\theta_1^A} (V \cap A) \times F$. Il est défini au-dessus d'un fermé de X_2 donc se prolonge en un isomorphisme θ_2 défini au-dessus de $W \cap X_2$, W étant un ouvert de X. Posons $U = W \cap \overset{\circ}{V}$ c'est un voisinage du point de A considéré et l'application $(\theta_1|X_1 \cap U) \amalg (\theta_2|X_2 \cap U)$

$$(E_1|X_1 \cap U) \amalg (E_2|X_2 \cap U) \longrightarrow U \times F$$

est régulière pour $\mathcal{R}$ (puisque θ_2 prolonge θ_1^A : l'application obtenue par passage au quotient est un isomorphisme de $(E_1 \cup_\Phi E_2)|U$ sur $U \times F$. La trivialité locale en résulte.

<u>Proposition 1</u>. Des isomorphismes homotopes définissent des recollements isomorphes.

Soient ϕ_0 et ϕ_1 deux isomorphismes de $E_1|A$ sur $E_2|A$ reliés par une homotopie Φ ; $(E_1 \times I) \cup_\Phi (F_2 \times I)$ est un fibré de base $X \times I$ dont la restriction à $X \times \{0\}$ est $E_1 \cup_{\phi_0} E_2$ et dont la restriction à $X \times \{1\}$ est $E_1 \cup_{\phi_1} E_2$; la proposition en résulte.

Proposition 2. Soient E_1, E_2, E'_1, E'_2 quatre fibrés ; Φ et Φ' deux isomorphismes de $E_1|A$ (resp. $E'_1|A$) sur $E_2|A$ (resp. $E'_2|A$). S'il existe deux isomorphismes $\alpha : E_1 \to E'_1$ et $\beta : E_2 \to E'_2$ tels que $\Phi' \circ (\beta|A) = (\alpha|A) \circ \Phi$, alors $E_1 \cup_\Phi E_2$ et $E'_1 \cup_\Phi E'_2$ sont isomorphes.

Un isomorphisme entre les deux recollements est l'application obtenue par passage au quotient selon $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$ à partir de $\alpha \amalg \beta : E_1 \amalg E_2 \longrightarrow E' \amalg E'_2$

Remarque. Soit E un fibré au-dessus de X, $E_i = E|X_i$ $(i=1,2)$. Il est facile de vérifier que E est isomorphe au recollement de E_1 et E_2 par l'application identique de $E|A$.

Comptabilité du recollement avec la somme de Whitney.

Proposition. Soient E_1 E_2 E'_1 E'_2 quatre fibrés au-dessus de X. Φ et Φ' deux isomorphismes de $E_1|A$ (resp. $E'_1|A$) sur $E_2|A$ (resp. $E'_2|A$).
Les deux fibrés $(E_1 \oplus E'_1) \cup_{\Phi\oplus\Phi'} (E_2 \oplus E'_2)$ et $(E_1 \cup_\Phi E_2) \oplus (E'_1 \cup_\Phi E'_2)$ sont isomorphes.

(évident)

On peut énoncer deux résultats similaires pour le produit tensoriel et le passage au dual :

$(E_1 \otimes E'_1) \cup_{\Phi\otimes\Phi'} (E_2 \otimes E'_2)$ est isomorphe à $(E_1 \cup_\Phi E_2) \otimes (E'_1 \cup_{\Phi'} E'_2)$

et

$$(E_1 \cup_\Phi E_2)^* \text{ est isomorphe à } E_1^* \cup_{(\Phi^*)^{-1}} E_2^* .$$

:

: : : :

:

Etudions deux applications de cette construction qui nous seront particulièrement utiles.

I. Fibré sur une suspension.

Théorème. Soit X un espace topologique compact. Il existe une bijection B de $[X, GL(n,\underline{C})]$ sur $\mathrm{Vect}_n^c(X)$. Rappelons que $[\ ,\ ]$ désigne l'ensemble des classes d'homotopie de $\mathcal{C}(\ ,\ ))$.

Construction de B. Soit f une application continue de X dans $GL(n,\underline{C})$. Soit $E^+ = C^+X \times \underline{C}^n$ (resp. $E^- = C^-X \times \underline{C}^n$) un fibré base C^+X (resp. C^-X). Identifions $C^+X \cap C^-X$ à X. f permet de définir un isomorphisme :

$$\begin{array}{cccc} \tilde{f} & E^+|X & \longrightarrow & E^-|X \\ & (x,\theta) & \longmapsto & (x, f(x)\circ\theta) \end{array}$$

B est l'application qui à la classe de f associe la classe d'isomorphisme du fibré $E^+ \cup_{\tilde{f}} E^-$ (cf. proposition 1)

Construction de B^{-1}. Soit E un fibré vectoriel complexe sur $\sum X$, $E|C^+X$ et $E|C^-X$ sont triviaux car les cônes sont contractiles ; ils possèdent des trivialisations α^+ et α^- et celles-ci d'après une proposition du chap.II, §4, sont uniques à une homotopie près.

Restreignons une nouvelle fois : $\alpha^+|X : E|X \longrightarrow X \times \underline{C}^n$
$\alpha^-|X : E|X \longrightarrow X \times \underline{C}^n$

La construction définit donc une classe d'homotopie d'automorphismes de $X \times \underline{C}^n$: celle de $(\alpha^-|X) \circ (\alpha^+|X)^{-1}$. Il convient de remarquer que deux trivialisations de $E|X$ ne sont pas en général homotopes ; c'est pourquoi nous avons dû restreindre E aux cônes, avant de le restreindre à l'équateur. Ces automorphismes de $X \times \underline{C}^n$ sont en correspondance avec les applications continues de X dans $GL(n,\underline{C})$ par une bijection naturelle qui conserve les homotopies. Nous avons donc défini une application de l'ensemble des fibrés $\underline{C}$-vectoriels de dimension n dans $[X, GL(n,\underline{C})]$ qui est constante sur les classes d'isomorphie : si E' est isomorphe à E par Φ on lui associe l'automorphisme :

$$(\alpha^-|X) \circ (\Phi|X) \circ (\Phi|X)^{-1} \circ (\alpha^+|X)^{-1} = (\alpha^-|X) \circ (\alpha^+|X)^{-1}$$

L'application de $\mathrm{Vect}_n^c(X)$ dans $[X, GL(n,\underline{C})]$ ainsi construite est l'inverse de B.

Remarques :

1°) B est un morphisme fonctoriel. Soit en effet une application continue $g : X \longrightarrow Y$; le carré ci-dessous est commutatif :

$$\begin{array}{ccc} [Y, GL(n,\underline{C})] & \xrightarrow{B^Y} & \mathrm{Vect}_n^c(\sum Y) \\ g^* \downarrow & & \downarrow (\sum g)^* \\ |X, GL(n,\underline{C})| & \xrightarrow[B^X]{} & \mathrm{Vect}_n^c(\sum X) \end{array}$$

2°) Appliquons le théorème aux fibrés complexes sur une sphère: $\mathrm{Vect}_n^c(S_{k+1})$ est en bijection canonique avec $[S_k, GL(n,\underline{C})]$ c'est-à-dire avec le k^e groupe d'homotopie de $GL(n,\underline{C})$.

: : : :

II. Fibré de Hopf.

C'est un fibré complexe de dimension 1 sur la sphère S_2. Identifions celle-ci au compactifié d'Alexandroff du plan complexe $\underline{C}$. Soient X_1 la réunion des nombres de module ≥ 1 et du "point à l'infini" et X_2 l'ensemble des nombres de module ≤ 1, $\Gamma = X_1 \cap X_2$ l'ensemble des complexes de module 1. Posons $E_i = X_i \times C$ $(i=1,2)$ On considère l'isomorphisme $\psi(n)$ $(n \in Z)$:

$$\begin{array}{ccc} E_1|\Gamma & \longrightarrow & E_2|\Gamma \\ (x,z) & \longmapsto & (x, x^n z) \end{array}$$

Le fibré de Hapf H est par définition $E_1 \cup_{\psi(-1)} E_2$.

Plus généralement on pose $H^n = E_1 \cup_{\psi(-n)} E_2$.

<u>Proposition</u>. Le fibré de Hopf n'est pas trivial.

D'après le théorème relatif aux suspensions sur un fibré démontré ci-dessus, il suffit de montrer que les deux applications de S_1 dans $\underline{C}-\{0\} \approx GL(1,\underline{C})$ définies par $z \longmapsto 1$ et $z \longmapsto 1/z$ ne sont pas homotopes. Supposons qu'il existe une telle homotopie H : z $H/\|H\|$ est alors une homotopie entre l'identité de S_1 et une application constante, ce qui est absurde car S_1 n'est pas contractile.

<u>Lemme</u>. $Vect_1^c(X)$ est un groupe abélien pour la loi induite par le produit tensoriel.

Seul n'est pas évident l'axiome d'existence d'un élément neutre pour tout $[E] \in Vect_1^c(X)$. Montrons que $E \otimes E^* \approx X \times \underline{C}$. On peut faire la remarque suivante : si u est un vecteur non nul d'un espace V de dimension 1, il existe un vecteur unique u^* de V^* tel que $u^*(u) = 1$; comme $(\lambda u)^* = \frac{1}{\lambda} u^*$, $u \otimes u^*$ est un vecteur de $V \otimes V^*$ non nul et indépendant de u. Donc si s est une section ensembliste partout non nulle de E, $s \otimes s^*$ est une section continue partout non nulle de $E \otimes E^*$: $E \otimes E^*$ est trivial.

<u>Proposition</u>. H^n est isomorphe à $H \otimes \ldots\ldots \otimes H$ (n fois) si $n>0$
$H^* \otimes \ldots\ldots \otimes H^*$ (n fois) si $n<0$

De l'identification de $\underline{C} \otimes \underline{C}$ à $\underline{C}$ il résulte que $\psi(p) \otimes \psi(q) = \psi(p+q)$. Donc $H^2 = H \otimes H$, $H^3 = H \otimes H \otimes H$, ... Pour la même raison $H^n \otimes H^{-n}$ $(n>0)$ est le fibré trivial de dimension 1. Le lemme précédent permet d'affirmer que H^{-n} est le dual de H^n :

$$H^{-n} \approx (H^n)^* \approx H^* \otimes \ldots \otimes H^* .$$

Paragraphe 3 - <u>HOMOMORPHISMES DE FIBRES</u>

<u>Monomorphisme - épimorphisme</u>.

Un homomorphisme de fibrés f est un monomorphisme (resp. un épimorphisme) si ses restrictions aux fibres sont des monomorphismes (resp. épimorphismes) d'espaces vectoriels.

<u>Sous-fibré</u>. Soit $(p : E \longrightarrow X)$ un fibré et $E' \subset E$ $(p|E' : E' \longrightarrow X)$ est un sous-fibré si et seulement si les deux conditions suivantes sont remplies :

i) $E_x \cap E' = E'_x$ est un sous-espace vectoriel pour tout x.

ii) la famille induite d'espaces vectoriels est un fibré.

<u>Théorème 1</u> : Soient E et F deux fibrés au-dessus d'une même base X et ψ un monomorphisme $F \longrightarrow E$.
Alors $\psi(F)$ est un sous-fibré de E et ψ est un isomorphisme sur son image.

Il est clair que $\psi(F)$ est une famille continue d'espaces vectoriels. La seule assertion non évidente est que $\psi(F)$ est localement triviale ; nous supposerons donc que $E = E \times V$ $F = X \times V'$. Soit x un point de X : $\psi(F_x)$ est un sous-espace vectoriel de V qui admet un supplémentaire W_x : $W_x \oplus \psi(F_x) = V$. Soient G le sous-fibré $X \times W_x$ de $X \times V$ et θ l'homomorphisme :

$$\begin{aligned} F \oplus G = X \times (V' \oplus W_x) &\longrightarrow X \times V = E \\ (y, v' \oplus w) &\longmapsto (y, \psi_x(v') \oplus w) \end{aligned}$$

Au-dessus du point x, θ_x est un isomorphisme. Comme l'ensemble des isomorphismes est ouvert dans $\mathrm{Hom}(V' \oplus W_x, V)$, il existe un voisinage U de x au-dessus duquel θ est un isomorphisme.
Donc :

$$E|U \approx (F \oplus G)|U \approx F|U \oplus G|U$$

$F|U$ étant un sous-fibré de $F \oplus G|U$, $\psi(F)|U$ est un sous-fibré de $F|U$.

<u>Remarque</u>. On a prouvé un peu plus : localement E est isomorphe à la somme de $\psi(F)$ et d'un autre sous-fibré :

$$E|U \approx \psi(F)|U \oplus G|U$$

Donc si $\psi : F \longrightarrow E$ est un monomorphisme, le quotient de E par la relation d'équivalence

$$e \equiv e' \iff \left| \begin{array}{c} p(e) = p(e') = x \\ \text{et} \\ e-e' \in \psi(F_x) \end{array} \right.$$

est un fibré noté $E/\psi(F)$.

<u>Proposition</u>. Soit $\psi : E \longrightarrow E'$ un homomorphisme entre deux fibrés de base X . L'application de X dans $\underline{N}$ définie par $x \longmapsto \text{rang } \psi_x$ est semi continue inférieurement.

La semi-continuité étant une propriété locale, nous supposerons que $E = X \times V$ et $E' = X \times V'$. La donnée de ψ équivaut à la donnée d'une application continue $\sigma : X \longrightarrow \text{Hom}(V,V')$. Or le rang est une fonction s.c.i. de $\text{Hom}(V,V')$ dans $\underline{N}$. En précomposant par σ on obtient la fonction considérée qui est donc s.c.i. .

<u>Homomorphisme strict</u>. Soient E et F deux fibrés au-dessus d'un espace topologique X . Un homomorphisme de fibrés $\psi : F \longrightarrow E$ est strict si et seulement si le rang de ψ_x est une fonction continue de x .

<u>Théorème 2</u>. Soit ψ un homomorphisme strict entre deux fibrés de base X : ψ $F \longrightarrow E$. Alors :

a) $\text{Im } \psi = \bigcup_{x \in X} \text{Im } \psi_x$ est un sous-fibré de E .

b) $\text{Coker } \psi = E/\text{Im } \psi$ est un fibré.

c) $\text{Ker } \psi = \bigcup_{x \in X} \text{Ker } \psi_x$ est un sous-fibré de F .

<u>Démonstration de a)</u> :

Il est clair que $\text{Im } \psi$ est une famille continue d'espaces vectoriels (même si ϕ n'est pas strict). Reste donc à vérifier la trivialité locale. Nous pouvons donc, pour simplifier les notations, supposer que E et F sont triviaux ; nous noterons $F = X \times V$. Soit x un point de X , le sous-espace vectoriel

$\operatorname{Ker} \psi_x$ admet un supplémentaire W dans $F_x \approx V$. Considérons le sous-fibré $G = X \times W \subset F$. Soit θ la restriction de ψ à G :

$$G \xrightarrow{i} F \xrightarrow{\psi} E .$$

Au-dessus du point x, $\operatorname{Ker} \theta_x = 0$. Le rang de θ_y étant une fonction s.c.i. et celui de ψ_y une fonction continue, à valeurs dans un ensemble discret, il existe un voisinage U de x sur lequel ces deux fonctions sont constantes. D'après le théorème 1 $\operatorname{Im}(\theta|U)$ est un sous-fibré de $E|U$. La famille continue d'espaces vectoriels $\operatorname{Im}(\psi|U)$ est telle que :

$$\left| \begin{array}{l} \operatorname{Im}(\theta|U) \subset \operatorname{Im}(\psi|U) \subset E|U \\ \dim \theta_y(G_y) = \dim \psi_y(F_y) \text{ si } y=x \text{ donc, d'après la définition} \\ \text{de } U \text{, pour tout point } y \in U \end{array} \right.$$

Il en résulte que $\operatorname{Im}(\psi|U)$ est égal au fibré $\operatorname{Im}(\theta|U)$; $\operatorname{Im} \psi$ est donc localement trivial.

Démonstration de b) :

C'est une conséquence immédiate de a) et de la remarque qui suit le théorème 1.

Démonstration de c) :

Si $\phi : F \longrightarrow E$ est un homomorphisme strict, l'homomorphisme transposé $\phi^* : E^* \longrightarrow F^*$ est également strict. On vérifie aisément que $\operatorname{Ker} \phi$ est une famille continue d'espaces vectoriels isomorphe à $(\operatorname{Coker} \phi^*)^*$; d'après la partie b) de ce théorème $(\operatorname{Coker} \phi^*$ est un fibré ; il en est donc de même de $\operatorname{Ker} \phi$.

Exemple d'homomorphisme : les projecteurs.

Définition. Un endomorphisme P d'un fibré E est un projecteur si et seulement si $P \circ P = P$.

Un tel ensomorphisme possède les propriétés suivantes :

i) Id-P est un projecteur

ii) P est strict : en effet rang P_x + rang$(Id-P)_x$ = dim E_x. Les deux fonctions s.c.i; du membre de gauche ayant une somme continue sont continues.

iii) Ker P = Im(Id-P) car pour tout $x \in X$ Ker P_x = Im$(Id-P)_x$

iv) $E \approx \text{Im } P \oplus \text{Im}(Id-P) \approx \text{Im } P \oplus \text{Ker } P$.

Nous allons étudier le problème suivant : étant donné un sous-fibré F d'un fibré E, existe-t-il un projecteur P tel que Im P = F ? D'après iv) cette question est équivalente à : F est-il facteur direct de E ? Nous montrerons qu'il en est ainsi si la base du fibré est paracompacte. Pour cela introduisons une notion nouvelle.

Métrique hermitienne (resp. euclidienne) sur un fibré complexe (resp. réel).

Définition. Soit E un fibré vectoriel complexe de base X. Une structure hermitienne sur E est une section continue h de $E^* \otimes E^*$ telle que pour tout point x de X, h_x soit une forme hermitienne définie positive.

On peut présenter cette définition sous la forme équivalente suivante : une structure hermitienne est la donnée pour tout $x \in X$ d'une métrique hermitienne h_x sur E_x qui satisfasse à la condition de continuité : pour tout point x de X, si a et b sont deux vecteurs de E_x et ε un réel strictement positif, il existe deux voisinages U (et V) de a et b dans E tels que :

$$\forall a' \in U, \quad \forall b' \in V \quad p(a') = p(b') \implies |h_a(a,b) - h_y(a'b')| < \varepsilon .$$

Cette définition (et les propositions qui suivent) s'adapte aisément au cas des fibrés réels : il suffit de remplacer "forme hermitienne" par "forme euclidienne".

<u>Proposition</u>. Tout fibré complexe E dont la base X est paracompacte peut être muni d'une structure hermitienne.

Soient $\{U_i\}$ un recouvrement ouvert localement fini et trivialisant de X et $\{\lambda_i\}$ une partition de l'unité subordonnée à ce recouvrement ; $E|U_i$ étant trivial il existe une structure hermitienne sur ce fibré : $h_i : U_i \longrightarrow (E|U_i)^* \otimes (E|U_i)^*$.

Soit g_i la section de $E^* \otimes E^*$ définie par :

$$\begin{aligned} g_i(x) &= \lambda_i(x)\, h_i(x) && \text{si } x \in U_i \\ g_i(x) &= 0 && \text{si } x \notin U_i \end{aligned}$$

La section $h = \sum_i g_i$ est une structure hermitienne car les fonctions λ_i sont positives et ne s'annulent pas toutes en un même point.

<u>Théorème 3</u>. Soit $(p : E \longrightarrow X)$ un fibré vectoriel dont la base paracompacte. Tout sous-fibré F de E est facteur direct.

Nous continuerons à employer la terminologie du cas complexe.

Soient $\{U_i\}$ un recouvrement de X ouvert localement fini et trivialisant pour F, $\{\lambda_i\}$ une partition de l'unité subordonnée à ce recouvrement. Au-dessus de U_i il existe $n(i)$ sections $\{f_i^j\}_{(j=1,\dots,n(i))}$ de $F|U_i$ telles que pour tout y appartenant à U_i, $\{f_1(y)\dots f_{n(i)}(y)\}$ constitue une base de la fibre. Soit g_i^j la section du sous-fibré F définie par :

$$\begin{aligned} g_i^j(x) &= \lambda_i(x)\, f_i^j(x) && \text{si } x \in U_i \\ g_i^j(x) &= 0 && \text{si } x \notin U_i \end{aligned}$$

Soit P l'application de E dans E telle que :

$$P(v) = \sum_{i,j} h\left[v, g_i^j(p(v))\right]\, g_i^j(p(v)) .$$

Il est clair que P est un projecteur dont l'image est F. Le fibré E est donc isomorphe à $F \oplus \operatorname{Ker} P$.

Suite exacte de fibrés.

Définition. Une suite de fibrés de base X et d'homomorphismes :

$$\cdots \longrightarrow E_{n-1} \xrightarrow{\psi_{n-1}} E_n \xrightarrow{\psi_n} E_{n+1} \longrightarrow \cdots$$ est exacte en E_n

si et seulement si pour tout point x de X, cette suite restreinte aux fibres en x est une suite d'espaces vectoriels exacte en $(E_n)_x$. Elle est exacte si et seulement si elle est exacte en E_n pour tout n.

Théorème 4. Soit $0 \longrightarrow E' \xrightarrow{\theta} E \xrightarrow{\psi} E'' \longrightarrow 0$ une suite exacte de fibrés vectoriels au-dessus d'un espace paracompact X. Il existe un isomorphisme $j : E \longrightarrow E' \oplus E''$ tel que le diagramme :

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & E' \arrow[r, "\theta"] \arrow[d, "\mathrm{Id}"'] & E \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, "j"] & E'' \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{Id}"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & E' \arrow[r] & E' \oplus E'' \arrow[r] & E'' \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

soit commutatif.

L'image de E' par le monomorphisme θ est un sous-fibré de E qui admet un supplémentaire F (cf. th.III). L'exactitude de la suite de fibrés a les deux conséquences suivantes :

- $\dim F_x = \dim E''_x$ pour tout $x \in X$

- $F \xrightarrow{\psi|F} E''$ est un monomorphisme.

De la réunion de ces deux remarques il résulte que $\psi|F$ est un isomorphisme.

L'isomorphisme j est la somme des deux isomorphismes $\psi(E') \longrightarrow E'$ et $F \longrightarrow E''$. Le diagramme est évidemment commutatif.

Théorème 5. Soit E un fibré vectoriel dont la base X est compacte. Il existe un fibré $E' \longrightarrow X$ tel que $E \oplus E'$ soit trivial.

Soit $\Gamma(E)$ l'ensemble des sections continues de E muni de sa structure canonique d'espace vectoriel. X étant compact, il existe un nombre fini de sections $\{g_i^j\}$ telles que pour tout point x de X l'ensemble des vecteurs $g_i^j(x)$ engendre E_x (voir le début de la démonstration du th.3). Soit Γ' le sous-espace vectoriel de dimension finie engendré par ces sections. L'application :

$$\begin{array}{lccc} \Psi & X \times \Gamma' & \longrightarrow & E \\ & (x,g) & \longmapsto & g(x) \end{array}$$

est un homomorphisme surjectif de fibrés ; en particulier c'est un homomorphisme strict. Donc $\operatorname{Ker} \Psi$ est un sous-fibré de $X \times \Gamma'$ et la suite $0 \longrightarrow \operatorname{Ker} \psi \longrightarrow X \times \Gamma' \longrightarrow E \longrightarrow 0$ est exacte. D'après le théorème 4 : $\operatorname{Ker} \psi \oplus E$ est isomorphe au fibré trivial $X \times \Gamma'$.

--

Chapitre IV - THEOREME DE PERIODICITE DE BOTT (FIBRES COMPLEXES)

Paragraphe 1 - GROUPE DE GROTHENDIECK

Théorème et Définition. Soit A un monoïde commutatif et unitaire (on dit que A est un demi-groupe) et $\mathcal{C}$ la catégorie ainsi définie

Les objets sont les couples (γ,G) où G est un groupe abélien et γ un homomorphisme de monoïde unitaire : $\gamma : A \to G$

les morphismes de (γ,G) dans (γ',G') sont les homomorphismes F de groupe abéliens : $F : F \to G'$ tels que le diagramme ci-dessous soit commutatif :

$$\begin{tikzcd} & G \arrow[d, "F"] \\ A \arrow[ur, "\gamma"] \arrow[r, "\gamma'"'] & G' \end{tikzcd}$$

$\mathcal{C}$ possède un élément initial $(\alpha,K(A))$, $K(A)$ défini à un isomorphisme près est appelé groupe de Grothendieck de A .

Considérons A en tant qu'ensemble. Il engendre un groupe abélien libre $F(A)$ dans lequel il s'injecte canoniquement par α . Soit $H(A)$ le sous-groupe de $F(A)$ engendré par les éléments de la forme $\overline{\alpha}(a+b) - \overline{\alpha}(a) - \overline{\alpha}(b)$ $(a,b \in A)$.

Posons $K(A) = F(A)/H(A)$ et $\alpha = \sigma \circ \overline{\alpha}$:

$$A \xrightarrow{\overline{\alpha}} F(A) \xrightarrow{\sigma} F(A)/H(A)$$

Il est clair que α est un homomorphisme de monoïde unitaire. On note habituellement $\alpha(a) = [a]$.

Soit (γ, G) un objet de $\mathscr{C}$; montrons qu'il existe un unique homomorphisme $f : K(A) \longrightarrow G$ tel que $f \circ \alpha = \gamma$.

Si f existe, $f([a]) = \gamma(a)$ donc f est unique puisque $\alpha(A)$ engendre $K(A)$.

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[d, "\bar{\alpha}"'] \arrow[dr, "\gamma"] & \\
F(A) \arrow[r, "\bar{f}"] \arrow[d, "\sigma"'] & G \\
K(A) \arrow[ur, "f"'] &
\end{tikzcd}$$

$F(A)$ étant le groupe libre sur A, il existe un homomorphisme de groupe $\bar{f}$ tel que $\gamma = \bar{f} \circ \bar{\alpha}$. γ étant un homomorphisme, $\bar{f}$ s'annule sur $H(A)$ donc passe au quotient : f existe et est unique.

<u>Autre définition du groupe de Grothendieck attaché à un monoïde commutatif unitaire.</u>

Soit G un demi-groupe et G' un demi-sous-groupe de G. Définissons une relation d'équivalence sur G en posant :

$$a, b \in G \qquad a \equiv b \iff \exists g', g'' \in G' : a+g' = b+g''.$$

On vérifie aisément que le quotient de G par cette relation (noté : G/G') est un demi-groupe.

Soit A un demi-groupe : $A \times A$ est un demi-groupe et $\Delta(A)$ sa diagonale en est un demi-sous-groupe. Notons $\hat{K}(A) = A \times A/\Delta(A)$

$$\begin{array}{ccccc} A & \xrightarrow{j} & A \times A & \xrightarrow{\sigma} & A \times A/\Delta(A) = \hat{K}(A) \\ a & \longmapsto & (a,0) & & \end{array}$$

Posons $\hat{\alpha} = \sigma \circ j$, $\sigma(a,b) = (a,b)^\wedge$, $\hat{K}(A)$ est un semi-groupe. En outre tout élément de $\hat{K}(A)$ est de la forme $(a,b)^\wedge$: or $(a,b) + (b,a) \in \Delta(A)$; donc $(a,b)^\wedge + (b,a)^\wedge$ est l'élément neutre de $\hat{K}(A)$: $\hat{K}(A)$ est un groupe abélien.

<u>Proposition</u>. $\hat{K}(A)$ est le groupe de Grothendieck de A.

- Si A est un groupe abélien, $\hat{K}(A)$ est isomorphe à A par $\hat{\alpha}$
- Soient A et B deux demi-groupes et ψ un homomorphisme : $A \longrightarrow B$.

Il existe alors un homomorphisme unique $\hat{\psi}$ rendant le diagramme ci-dessous commutatif :

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\hat{\alpha}_A"] \arrow[d, "\psi"'] & \hat{K}(A) \arrow[d, "\hat{\psi}"] \\ B \arrow[r, "\hat{\alpha}_B"] & \hat{K}(B) \end{tikzcd}$$

En effet le diagramme :

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "j_A"] \arrow[d, "\psi"'] & A \times A \arrow[d, "\theta"'] & (a,a') \arrow[d] \\ B \arrow[r, "j_B"] & B \times B & (\psi(a),\psi(a')) \end{tikzcd}$$

est commutatif et comme $\theta(\Delta(A)) \subset \Delta(B)$, on obtient par passage au quotient :

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r] \arrow[d, "\psi"'] & A \times A \arrow[r] \arrow[d, "\theta"] & \hat{K}(A) \arrow[d, "\hat{\psi}"] \\ B \arrow[r, no head] & B \times B \arrow[r, no head] & \hat{K}(B) \end{tikzcd}$$

$\hat{\psi}$ est unique car le groupe $\hat{K}(A)$ est engendré par $\hat{\alpha}(A)$.

De ces deux remarques, il résulte que $(\hat{K}(A),\hat{\alpha})$ est solution du problème universel de la première définition (choisir pour demi-groupe B un groupe abélien).

<u>Groupe de Grothendieck d'un espace topologique.</u>

Soit X un espace topologique. $\mathrm{Vect}^R(X)$ (resp. $\mathrm{Vect}^c(X)$) , ensemble des classes d'isomorphisme des fibrés vectoriels réels (resp. complexes) de base X est un demi-groupe pour la loi induite par la somme de Whitney. Le groupe de Grothendieck associé est noté $KO(X)$ (resp. $K(X)$) . Dans toute la suite de cet exposé, $K(X)$ sera appelé "groupe de Grothendieck de l'espace X" (nous ne nous intéresserons pas à $KO(X)$) .

Un élément de $K(X)$ est de la forme $\sum \lambda_i [E_i] =$

$$\sum_{\lambda_i \geq 0} \lambda_i [E_i] - \sum_{\lambda_i < 0} (-\lambda_i)[E_i] = [\bigoplus_{\lambda_i \geq 0} \lambda_i E_i] - [\bigoplus_{\lambda_i < 0} (-\lambda_i) E_i]$$

$$\text{où } \lambda_i E_i = E_i \oplus \dots \oplus E_i \quad (\lambda_i \text{ fois})$$

L'application canonique $\mathrm{Vect}^c(X) \longrightarrow K(X)$ n'est pas injective car il existe des éléments non réguliers pour la somme de Whitney. Précisons cette remarque.

<u>Théorème</u>. Deux fibrés vectoriels au-dessus d'un espace compact X ont même image dans $K(X)$ si et seulement si il existe un entier positif n tel que $E \oplus n\theta \approx F \oplus n\theta$ (θ est le fibré trivial $X \times C$).

La condition est évidemment suffisante. Montrons qu'elle est nécessaire en utilisant l'isomorphisme entre $K(X)$ et $\hat{K}(\mathrm{Vect}^{c}(X))$. $[E] = [F]$ équivaut à $(E,F)^{\wedge} = 0$ c'est-à-dire à $(E,0)^{\wedge} = (F,0)^{\wedge}$. Cela signifie qu'il existe deux fibrés G et H tels que $(E,0) \oplus (G,G) \approx (F,0) \oplus (H,H)$. Donc G est isomorphe à H et $E \oplus G \approx F \oplus G$. La compacité de H entraîne l'existence d'un fibré G_1 tel que $G \oplus G_1 \approx n\theta$ ce qui permet d'achever la démonstration.

<u>Proposition</u>. $K(X)$ est un anneau commutatif pour les lois induites par $\oplus$ et $\otimes$.

(évident).

<u>Caractère fonctoriel de</u> K.

Soit f une application continue de X dans Y. Il lui correspond un homomorphisme de demi-anneaux : $f^* : K(Y) \longrightarrow K(X)$ et un homomorphisme d'anneaux F^* tels que le diagramme :

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Vect}(Y) & \xrightarrow{\hat{\alpha}} & K(Y) \\ {\scriptstyle f^*}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle F^*} \\ \mathrm{Vect}(X) & \xrightarrow{\hat{\alpha}} & K(X) \end{array}$$

soit commutatif. K est un foncteur contravariant de la catégorie des espaces compacts et classes d'homotopie d'applications continues dans celle des anneaux et homomorphismes d'anneaux.

:
: : : :
:

Nous pouvons maintenant énoncer le théorème de périodicité de Bott.

Soit X un espace topologique compact ; on désignera par π_1 (resp. π_2) la projection canonique de $X \times S_2$ sur X (resp. S_2). Soit $\mu : K(X) \otimes K(S_2) \longrightarrow K(X \times S_2)$ l'homomorphisme de groupes défini par $[E] \otimes [F] \longrightarrow [\pi_1^* E] \otimes [\pi_2^* F]$. Le théorème de Bott affirme que μ est un isomorphisme. En outre $K(S_2)$ est un groupe abélien libre à deux générateurs, 1 et h (classes du fibré trivial et du fibré de Hopf).

Il existe un autre théorème de périodicité, relatif aux fibrés réels :

$$KO(X) \otimes KO(S_8) \text{ est isomorphe à } KO(X \times S_8) .$$

Les paragraphes qui suivent sont consacrés à la démonstration du théorème de Bott pour les fibrés complexes ; la partie la plus ardue en est la vérification de la surjectivité de μ. Nous montrerons d'abord que les fibrés au-dessus de $X \times S_2$ s'obtiennent par recollement de fibrés au-dessus de $X \times D^+$ et $X \times D^-$ (D^+ et D^- sont deux hémisphères de S_2). Ensuite nous mettrons sous une forme simple l'isomorphisme de recollement.

Paragraphe 2 - FIBRES COMPLEXES SUR $X \times S_2$

Dans ce paragraphe et dans ceux qui le suivent S_2 est identifié au plan $\underline{C}$ compactifié par un point "à l'infini" (sphère de Riemann). L'ensemble des nombres complexes de module inférieur ou égal à 1 est l'hémisphère D^- ; D^+ est l'ensemble obtenu par réunion du point à l'infini et des nombres complexes de module supérieur ou égal à 1 . L'intersection de D^+ et de D^- est la sphère S_1 . Soit X un espace topologique compact ; nous noterons : $X_1 = X \times D^+$, $X_2 = X \times D^-$, $A = X \times S_1$, π, π_1, π_2 sont respectivement les trois projections canoniques $X \times S_1 \longrightarrow X$, $X \times S_2 \longrightarrow X$, $X \times S_2 \longrightarrow S_2$.

Lemme. Soient Y un espace compact, Z un rétracte par déformation de Y , E_1 et E_2 deux fibrés de base Y tels qu'il existe un isomorphisme $\phi : E_1|Z \longrightarrow E_2|Z$. Alors il existe un isomorphisme Φ de E_1 sur E_2 qui prolonge ϕ et Φ est déterminé a une homotopie près.

Soit r la retraction de Y sur Z , i l'injection canonique de Z dans Y .

$$r^*(E_1|Z) \approx r^* \circ i^* E_1 \approx (i \circ r)^* E_1$$

X étant compact et $i \circ r$ homotope à Id_Y , $r^*(E_1|Z)$ est isomorphe à E_1 . De même $r^*(E_2|Z)$ est isomorphe à E_2 . L'existence de Φ en résulte. Il reste à vérifier que deux isomorphismes Φ_1 et Φ_2 qui coïncident au-dessus de Z sont homotopes ce qui équivaut à $\Phi_2^{-1} \circ \Phi_1$ est homotope à Id_{E_1} . Il

suffit donc de montrer que deux automorphismes Ψ_1 et Ψ_2 d'un fibré E de base Y sont homotopes si $\Psi_1|Z = \Psi_2|Z = Id_{E|Z}$. Considérons le fibré $E \times I$ de base $Y \times I$: il existe un automorphisme θ de sa restriction à $(Y \times \{0\}) \cup (Z \times I) \cup (Y \times \{1\})$ qui coïncide avec Ψ_1 sur $Y \times \{0\}$, avec Ψ_2 sur $Y \times \{1\}$, avec $Id_{E|Z}$ sur $Z \times \{t\}$ (pour tout $t \in I$) . Or, comme on le vérifie facilement, $(Y \times \{0\}) \cup (Z \times I) \cup (Y \times \{1\})$ est un rétracte par déformation de $Y \times I$, donc θ se prolonge en un automorphisme de $E \times I$: Ψ_1 et Ψ_2 sont donc homotopes.

Théorème. Soit F un fibré de base compacte X . L'ensemble $\mathcal{E}_1$ des fibrés sur $X \times S_2$ qui induisent F par restriction à $X \times \{1\}$ est en bijection canonique avec l'ensemble $\mathcal{E}_2$ des classes d'homotopie des automorphismes f du fibré $\pi^*F = F \times S_1 \longrightarrow X \times S_1$ qui sont tels que $f|_{X \times 1}$ soit homotope à Id_F.

Nous désignerons par σ_+ (resp. σ_-) la projection canonique de $X \times D^+$ (resp. X D^-) sur X.

Application : $\Phi : \mathcal{E}_1 \longrightarrow \mathcal{E}_2$

Soit E un représentant d'une classe de $\mathcal{E}_1$. Comme $X \times \{1\}$ est un rétracte par déformation de $X \times D^+$ il existe un isomorphisme f_1 de $E|X \times D^+$ sur $\sigma_+^*F = F \times D^+$ qui prolonge l'identité de F : f_1 est déterminé à une homotopie près par la donnée de la classe d'isomorphisme de E. Il existe de même un isomorphisme f_2 de $E|X \times D^-$ sur σ_-^*F. D'où au-dessus de $X \times S_1$:

$$(\sigma_+^*F)|A \xrightarrow{(f_1|A)^{-1}} E|A \xrightarrow{f_2|A} (\sigma_-^*F)|A$$

Or $(\sigma_+^*F)|A = \pi^*F = (\sigma_-^*F)|A$. Nous avons ainsi associé à la classe du fibré E un automorphisme de π^*F, $(f_2|A) \circ (f_1|A)^{-1}$ déterminé à une homotopie près et prolongeant l'identité de F.

Application : $\Psi : \mathcal{E}_2 \longrightarrow \mathcal{E}_1$

Soit f un représentant d'une classe de $\mathcal{E}_2$: il permet de construire un fibré sur $X \times S_2$ par recollement de $F \times D^+$ et $F \times D^-$: on a montré au chapitre précédent que la classe d'isomorphisme du fibré ainsi obtenu dépend de la classe d'homotopie de f ; nous avons donc bien défini une application de $\mathcal{E}_2$ dans $\mathcal{E}_1$.

Il est facile de vérifier que Φ et Ψ sont des bijections réciproques.

Notation. Toute classe d'isomorphisme de fibrés sur $X \times S_2$ sera désormais désignée par ses données de recollement $[F,f]$.

Paragraphe 3 - RECOLLEMENT PAR UN POLYNOME DE LAURENT.

Le paragraphe précédent a mis en lumière l'importance des endomorphismes du fibré $F \times S_1 \longrightarrow X \times S_1$. Soit a un endomorphisme de F : nous désignerons par $z^n a$ l'homomorphisme :

$$\begin{array}{ccc} F \times S_1 & \longrightarrow & F \times S_1 \\ (v,z) & \longmapsto & (z^n(a.v),z) \end{array}$$

Un <u>homomorphisme de Laurent</u> est un endomorphisme ψ de $F \times S_1$ de la forme $\sum_{-n}^{n} z^p a_p$ ($a_p \in \mathrm{Hom}(FF)$) . En outre ψ est <u>propre</u> si ψ est un isomorphisme.

<u>Théorème</u>. Soit X un espace compact. Pour tout fibré E de base $X \times S_2$, il existe un polynôme de Laurent propre p tel que E soit isomorphe à $[F,p]$.

Il suffit de montrer que tout automorphisme f de $F \times S_1$ est homotope (en tant qu'isomorphisme) à un polynôme de Laurent propre. f sera considéré comme une section de $\mathrm{Hom}(F \times S_1, F \times S_1)$. Soit $\{A_i\}_{i=1\ldots d}$ un recouvrement fini du compact X par des fermés trivialisant F :

$$\psi_i \ : \ F|A_i \xrightarrow{\approx} A_i \times V$$

Il en résulte des isomorphismes :

$$\psi_i \times \mathrm{Id}_{S_1} \ : \ F \times S_1 | A_i \times S_1 \longrightarrow (A_i \times S_1) \times V$$

$$\tau_i \ : \ \mathrm{Hom}(F \times S_1, F \times S_1) | A_i \times S_1 \longrightarrow (A_i \times S_1) \times \mathrm{Hom}(V,V)$$

L'isomorphisme τ_i a la propriété suivante : les fibrés de $F \times S_1$ au-dessus de (x,z) et (x,z') étant canoniquement identifiés, les restrictions de τ_i à ces fibres sont égales ; on dira que τ_i est indépendant de z . Nous pouvons écrire le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}(F \times S_1, F \times S_1)|A_i \times S_1 & \xrightarrow{\tau_i} & (A_i \times S_1) \times \mathrm{Hom}(V,V) \\ \Big\downarrow f| & & \Big\downarrow \hat{f}^i = (\mathrm{Id}, f^i) \\ A_i \times S_1 & \xrightarrow{\mathrm{Id}} & A_i \times S_1 \end{array}$$

La fonction $f^i : A_i \times S_1 \longrightarrow \mathrm{Hom}(V,V)$ est continue. On peut calculer les coefficients de Fourier de $f^i(x,.)$:

$a_k^i(x) = \frac{1}{2i\pi} \int z^{-k-1} f^i(x,z)\, dz$, puis former les sommes de Cesaro

$$f_n^i(x,z) = \frac{\sum_o^n S_t(t)}{n+1} \quad \text{où} \quad S_t(t) = \sum_{-t}^{t} a_k^i z^k .$$

Puisque τ_i est indépendant de z pour tout i , $\tau_i^{-1} \circ f_n^i$ et $\tau_j^{-1} \circ f_n^j$ coïncident sur l'intersection de $A_i \times S_1$ et $A_j \times S_1$: par recollement de ces fonctions définies sur des fermés on obtient une section continue f_n de $\mathrm{Hom}(F \times S_1, F \times S_1)$.

L'image de $A^i \times S_1$ par f^i est un compact inclus dans l'ouvert $\mathrm{Iso}(V,V)$: il existe donc un réel psoitif α_i tel que tout endomorphisme se trouvant à une distance de $f^i(A_i \times S_1)$ moindre que α_i est un isomorphisme. D'après le théorème de Fejer la suite $\{f_n^i(.,.)\}$ converge uniformément vers $f^i(.,.)$; par conséquent il existe un entier n_i tel que si $n > n_i$, $t\, f_n^i(x,z) + (1-t)\, f^i(x,z)$ est un isomorphisme de V dans lui-même, quels que soient $t \in [0,1]$ et $(x,z) \in A_i \times S_1$. Si n est supérieur à $\sup_i(n_i)$, f_n est donc un isomorphisme homotope à f ; c'est en outre un polynôme de Laurent puisque $f_n^i(x,z)$ est de la forme $\sum_{-n}^{n} a_k(x)\, z^k$ et que τ_i ne dépend pas de z .

C.Q.F.D.

Nous allons montrer au paragraphe suivant que (Fp) peut s'exprimer à l'aide de $\pi_2^* H^{-n}$ et de fibrés pour lesquels, il existe un isomorphisme de recollement qui soit du premier degré en z .

Paragraphe 4 - LINEARISATION DES POLYNOMES DE LAURENT.

Soit F un fibré de base X . Notons $L^q(F)$ la somme de Whitney de $(q+1)$ exemplaires de F . Soit un automorphisme

$p = \sum\limits_{o}^{n} a_k z^k$ de $F \times S_1$. Nous nous proposons d'abord de montrer qu'il existe un isomorphisme $L^n(p)$ du premier degré en z tel que $[F,p] \oplus [L^{n-1}(F), Id]$ soit isomorphe à $[L^n(F), L^n(p)]$.
(Nous utilisons désormais la convention suivante : si $E \longrightarrow X$ est un fibré $[E, Id]$ désigne $[E, Id_{E \times S_1}]$).

Lemme 1. $Hom(L^n(F), L^n(F))$ s'identifie à l'anneau des matrices carrées d'ordre $(n+1)$ à coefficients dans $Hom(F,F)$.

Un élément g de $L^n(F)$ s'écrit de façon unique $g = (f_o, \ldots, f_n)$, g, $f_o, \ldots, f_n$ ayant même projection sur la base X. On peut donc définir deux familles d'homomorphismes :

$$- \; b_j : \begin{array}{ccc} F & \longrightarrow & L^n(F) \\ f & \longmapsto & (0, \ldots, f, 0 \ldots 0) \end{array}$$

$$- \; p_i \quad \begin{array}{ccc} L^n(F) & \longrightarrow & F \\ g & \longmapsto & f_i \end{array}$$

Soit Φ un endomorphisme de $L^n(F)$

$$\begin{aligned} \Phi(g) = \Phi(\sum_j b_j \circ f_j) &= \sum_j (\Phi \circ b_j) f_j \\ &= \Big(p_o(\sum_j \Phi \circ b_j f_j), p_1(\sum_j \Phi \circ b_j f_j), \ldots\Big) \\ &= \Big(\sum_j a_{oj} f_j, \sum_j a_{1j} f_j \ldots\Big) \end{aligned}$$

où l'on a posé $a_{ij} = p_i \circ \Phi \circ b_j$

Réciproquement à toute matrice (a_{ij}) on peut associer de manière canonique un endomorphisme de $L^n(F)$. Les structures d'anneau sont respectées par cette bijection.

Lemme 2. Soit $\gamma_{ij}(a)$ l'endomorphisme de $L^n(F)$ associé à

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & & 0 \\ \cdots & & & & & \cdots \\ 0 & & \cdots & & a \cdots & 0 \\ \cdots & & & & & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & & 1 \end{bmatrix}$$

(1 est l'application identique de F, a situé à l'intersection de la $(i+1)^e$ ligne et de la $(j+1)^e$ colonne est un endomorphisme de F).

Alors i) $\gamma_{ij}(a)$ est un isomorphisme

ii) $\gamma_{ij}(a)$ est homotope à l'application identique de $L^n(F)$.

L'inverse de $\gamma_{ij}(a)$ existe : c'est $\gamma_{ij}(-a)$; $\gamma_{ij}(a)$ et l'application identique de $L^n(F)$ sont reliés par l'arc $t \longmapsto \gamma_{ij}(ta)$

Lemme 3. (Opérations élémentaires sur les matrices).

Soit Φ un isomorphisme de $L^n(F)$ dans lui-même : $\Phi = (a_{ij})$ $(i,j=0,1\ldots n)$. Soit a un endomorphisme de F. On forme Φ' (resp. Φ'') à partir de Φ en ajoutant à la p^e-ligne (resp. colonne) la q^e-ligne (resp. colonne) prémultipliée (resp. post-multipliée) par a. Alors Φ' et Φ'' sont deux isomorphismes homotopes à Φ.

En effet $\Phi' = \gamma_{pq}(a)\Phi$ et, $\Phi'' = \Phi\,\gamma_{pq}(a)$. De plus Φ est relié à Φ' par l'arc $\gamma_{pq}(ta)\Phi$ et à Φ'' par $\Phi\,\gamma_{pq}(ta)$.

Soit p un automorphisme de $F\ S_1$ de la forme $\sum_{i=0}^{n} a_i z^i$.

Définissons $L^n(p) \in \mathrm{Hom}(L^n(F), L^n(F))$ par :

$$L^n(p)\,(f_0, f_1, \ldots, f_n) = \left(\sum_0^n a_i f_i, -z f_0 + f_1, -z f_1 + f_2, \ldots, -z f_{n-1} + f_n\right)$$

Ou encore en écriture matricielle :

$$L^n(p) = \begin{bmatrix} a_o & a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots -1 & 0 \end{bmatrix}$$

<u>Proposition 1.</u> $L^n(p)$ est un isomorphisme et
$[L^n(F),L^n(p)] = [F,p] \oplus [L^{n-1}(F),Id]$

Il est clair que $[F,p] \oplus [L^{n-1}(F),Id] = [L^n(F)p']$, p' étant l'isomorphisme :

$$\begin{bmatrix} p & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

D'après le lemme 3 il suffit de montrer que $L^n(p)$ se déduit de p' par des opérations élémentaires. Multiplions la seconde ligne de p' par $\sum_1^n a_i z^{i-1}$ et ajoutons à la première ; puis multiplions la seconde colonne par $-z$ et ajoutons-la à la première ; on obtient :

$$\begin{bmatrix} a_o & \sum a_i z^{i-1} & 0 & \dots & 0 \\ -z & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

On multiplie la troisième ligne par $\sum_2^n a_i z^{i-2}$ et ajoutons à la seconde ; multiplions la troisième colonne par $(-z)$ et additionnons -la à la seconde. En itérant le procédé on achève la démonstration.

En appliquant à nouveau le lemme 3, on démontre sans difficulté :

Proposition 2. Si $p = \sum_{0}^{n} a_i z^i$ est un automorphisme de $F \times S_1$

i) $[L^{n+1}(F), L^{n+1}(p)] = [L^n(F), L^n(p)] \oplus [F, Id]$

ii) $[L^{n+1}(F), L^{n+1}(zp)] = [L^n(F), L^n(p)] \oplus [F, z]$

Dans ces formules $L^{n+1}(p)$ est l'isomorphisme que l'on définit aisément en posant : $p = a_{n+1} z^{n+1} + a_n z^n + \dots + a_o$ où $a_{n+1} = 0$.

Corollaire. La classe dans $K(S_2)$ du fibré de Hopf satisfait à la relation $(h-1)^2 = 0$. En outre pour tout entier p, il existe deux entiers i_p et j_p tels que : $h^p = i_p h + j_p$.

Soit θ le fibré complexe de dimension 1 sur l'espace-point.
D'après la proposition 1,

$$\begin{aligned}[L^2(\theta), L^2(z^2)] &= [\theta, z^2] \oplus [L^1(\theta), Id] \\ &= [\theta, z^2] \oplus 2[\theta, Id] = H^{-2} \oplus 2\tau\end{aligned}$$

(τ est la classe dans Vect (S_2) du fibré $S_2 \times \underline{C}$)

Evaluons cette même quantité à l'aide de la proposition 2,ii) :

$$\begin{aligned}[L^2(\theta), L^2(z^2)] &= [L^1(\theta), L^1(z)] \oplus [\theta, z] \\ &= [\theta, Id] + 2[\theta, z] = \tau + 2H^{-1}\end{aligned}$$

De l'égalité $H^{-2} \oplus 2\tau = \tau \oplus 2H^{-1}$, il résulte que $h^{-2} + 2 = 1 + 2h^{-1}$. C'est-à-dire : $(h-1)^2 = 0$. La deuxième partie du corollaire est évidente puisque $h^2 = 2h-1$.

:

: : : :

:

Nous allons achever ce paragraphe en étudiant le passage d'un polynôme de Laurent à un polynôme (véritable). Les notations utilisées sont exposées au début du paragraphe 2.

Proposition 3. Soit $F \longrightarrow X$ un fibré vectoriel à base compacte et f un automorphisme de $F \times S_1$. Le fibré $[F, z^n f]$ est isomorphe à $[F,f] \otimes \pi_2^* H^{-n}$.

Par définition $[F,z^n f] = (F \times D^+) \bigcup_{z^n f} (F \times D^-)$. De l'isomorphisme entre F et son produit tensoriel par le fibré trivial $\theta = X \times \underline{C}$ il résulte :

$$(F, z^n f) \approx (F \otimes \theta) \times D^+ \bigcup_{z^n f \otimes Id_\theta} (F \otimes \theta) \times D^-$$

$$(F, z^n f) \approx (F \otimes \theta) \times D^+ \bigcup_{f \otimes z^n} (F \otimes \theta) \times D^-$$

$$(F, z^n f) \approx (F \times D^+ \bigcup_f (F \times D^-)) \otimes (\theta \times D^+ \bigcup_{z^n} \theta \times D^-)$$

ce qui précisément la conclusion à établir.

Paragraphe 5 - ETUDE DES RECOLLEMENTS PAR POLYNOME DU 1er DEGRE

Nous voulons montrer dans ce paragraphe qu'à tout isomorphisme $p = az + b$ on peut associer une décomposition du fibré F, $F = F_+ \oplus F_-$, telle que : $[F,p] = [F_+, z] \oplus [F_-, Id]$, ce qui peut encore s'écrire : $[F,p] = \pi_1^* (F_+) \otimes \pi_2^* H^{-1} \oplus \pi_1^*(F_-) \otimes \pi_2^*(\tau)$ où τ désigne la classe d'isomorphisme du fibré trivial $S_2 \times \underline{C}$. (cf. §4, Proposition 3). La démonstration est la généralisation aux fibrés d'un théorème de décomposition spectrale que nous allons tout d'abord établir.

Théorème 1. Soient T un endomorphisme de l'espace vectoriel complexe de dimension finie V et Γ un cercle du plan complexe qui ne rencontre pas le spectre de T. L'endomorphisme $E = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma (\lambda - T)^{-1} \, d\lambda$ possède alors les propriétés suivantes :

i) E est un projecteur qui permute avec T.

ii) $V_+ = EV$ et $V_- = (1-E)V$ sont deux sous-espaces vectoriels stables par T.

iii) Soit T_+ (resp. T_-) obtenu par restriction et corestriction de T à V_+ (resp. V_-) ; le spectre de T_+ est inclus dans l'intérieur de Γ celui de T_- dans l'extérieur de Γ. (notons que ext. Γ contient le "point à l'infini")

Démonstration de i) :

Puisque le spectre de T est fini, il existe un cercle Γ' contenu dans l'extérieur de Γ tel qu'il n'y ait pas de valeur propre de T entre Γ et Γ'. L'application $\lambda \longmapsto (\lambda-T)^{-1}$ méromorphe dans $\underline{C}$, $\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma'}(\lambda-T)^{-1}\,d\lambda = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}(\lambda-T)^{-1}\,d\lambda$ et par conséquent $E^2 = -\frac{1}{4\pi^2}\left(\int_{\Gamma}(\lambda-T)^{-1}\,d\lambda\right)\left(\int_{\Gamma'}(\mu-T)^{-1}\,d\mu\right)$.

Appliquons le théorème de Fubini :

$$E^2 = -\frac{1}{4\pi^2}\int_{\Gamma}\int_{\Gamma'}(\lambda-T)^{-1}(\mu-T)^{-1}\,d\lambda\,d\mu \;.$$

De l'égalité $\frac{1}{\lambda-T}\,\frac{1}{\mu-T} = \frac{1}{\mu-\lambda}\left[(\lambda-T)^{-1}-(\mu-T)^{-1}\right]$ on déduit :

$$E^2 = \frac{-1}{4\pi^2}\iint \frac{1}{\mu-\lambda}(\lambda-T)^{-1}\,d\lambda\,d\mu + \frac{1}{4\pi^2}\iint\frac{1}{\mu-\lambda}(\mu-T)^{-1}\,d\lambda\,d\mu$$

Le premier terme de cette somme est égal à

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}(\lambda-T)^{-1}\,d\lambda\int_{\Gamma'}\frac{d\mu}{2\pi i(\mu-\lambda)}$$ c'est-à-dire à

E puisque $\frac{1}{2\pi i}\int\frac{d\mu}{\mu-\lambda} = 1$ ($\Gamma' \subset \text{ext}\,\Gamma$). Le second terme en revanche est nul : E est un projecteur.

E commute avec T parce que $(1-T)^{-1}T = T(1-T)^{-1}$.

Démonstration de ii) :

Un vecteur v de V_+ est caractérisé par $Ev = v$; il en résulte $Tv = TEv = ETv$: Tv appartient donc à V_+. On démontre de manière analogue que V_- est stable.

Démonstration de iii) :

Soit z un point de $\underline{C} - \Gamma$. Considérons l'endomorphisme de

V : $B = (z-T)\ A(T,z)$ où $A(T,z)$ désigne :

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}(\lambda-T)^{-1}(\lambda-z)^{-1}\,d\lambda$$

De l'égalité $(z-T)(\lambda-T)^{-1}(\lambda-z)^{-1} = (\lambda-z)^{-1} - (\lambda-T)^{-1}$ on déduit :

$$B = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{d\lambda}{\lambda-z} - \frac{1}{2\pi i}\int(\lambda-T)^{-1}\,d\lambda \ .$$

si z est à l'extérieur de $\Gamma : I = -E$

si z est à l'intérieur de $\Gamma : I = 1-E$.

Remarquons que $A(T,z)$ commute avec E : V_+ et V_- sont donc stables par $A(T,z)$ et l'on peut écrire la décomposition $A(T,z) = A_+(T,z) \oplus A_-(T,z)$.

Soit z un point de l'extérieur de Γ et v un vecteur de V_+

$$(z-T)(-A(T,z).v) = E\ v = v$$

c'est-à-dire : $(z-T_+)(-A_+(T,z).v) = v$.

Par conséquent $-A_+(T,z)$ est l'inverse dans $\mathrm{Hom}(V_+,V_+)$ de $(z-T_+)$; le spectre de T_+ est donc inclus dans l'intérieur de Γ . Pour des raisons analogues celui de T_- est inclus dans l'extérieur de Γ .

C.Q.F.D.

Soient E et F deux espaces vectoriels complexes de même dimension, a et b deux homomorphismes de E dans F tels que $p(z) = az + b$ soit un isomorphisme si z est un nombre complexe de module 1. Considérons les deux endomorphismes de E et F : $P = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}(az+b)^{-1}\ a\ dz = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}p^{-1}\ dp$

$$Q = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}a(az+b)^{-1}\ dz = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}dp\ p^{-1} \ .$$

<u>Corollaire</u>.

i) P et Q sont des projecteurs. Nous noterons

$P\,E = E_+$, $(1-P)E = E_-$ $\quad Q\,F = F_+$, $(1-Q)F = F_-$.

ii) $p\,P = Q\,p$. Il en résulte en particulier que $p(z)$ envoie E_+ dans F_+ et E_- dans F_- ; cet homomorphisme se décompose donc : $p = p_+ \oplus p_-$.

iii) Si z est un point de la sphère de Riemann extérieur (resp. intérieur) au cercle unité Γ , $p_+(z)$ (resp. $p_-(z)$) est un isomorphisme.

Soit α un nombre réel supérieur à 1 tel que $p(\alpha)$ soit un isomorphisme. La transformation conforme de la sphère de Riemann $w = \frac{1-\alpha z}{z-\alpha}$ conserve globalement Γ , son intérieur et son extérieur.

$$p(z) = az + b = a\,\frac{1+w\alpha}{w+\alpha} + b = \frac{1}{w+\alpha}\,(w(a\alpha+b) + (a+\alpha b))$$

$$p(z) = (a\alpha+b)\left[\frac{1}{w+\alpha}\,(w + (a\alpha+b)^{-1}(a+\alpha b))\right]$$

Posons $T = -(a\alpha+b)^{-1}(a+\alpha b)$, $\overline{p}(z) = \frac{1}{w+\alpha}\,(w-T)$; l'idée est d'identifier E et F par $p(\alpha)$:

$$E \xrightarrow{\overline{p}} E \xrightarrow{p(\alpha)} F\ .$$

$$P = \frac{1}{2\pi i}\int p^{-1}\,dp = \frac{1}{2\pi i}\int \overline{p}^{-1}\,d\overline{p} \quad \text{et} \quad Q = p(\alpha)\,P\,p(\alpha)^{-1}$$

Or après le changement de variable,

$$P = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma (w-T)^{-1}\,dw - \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma (w+\alpha)^{-1}\,dw \quad .$$

La seconde intégrale est nulle puisque $|\alpha|>1$; on peut donc appliquer le théorème précédent à P : P est un projecteur de même d'ailleurs que $p(\alpha)\,P\,p^{-1}(\alpha) = Q$; puisque T permute avec P il en est ainsi également de $\overline{p} = \frac{1}{w+\alpha}\,(w-T)$: donc

$p(z)P = p(\alpha)\,\overline{p}(z)P = p(\alpha)\,P\,p(\alpha)^{-1}\,p(\alpha)\,\overline{p}(z) = Q\,p(z)$.

Enfin $p_+(z) = \frac{1}{w+\alpha} p_+(\alpha)(w-T_+)$ est un isomorphisme si z est extérieur à Γ car w, lui-même extérieur à Γ, n'est pas valeur propre de T_+ (et $p_+(\alpha)$ est un isomorphisme).

Théorème 2. Soit $[F,p]$ un fibré de base $X \times S_2$ dont le polynôme de recollement est du 1er degré. Il existe deux sous-fibrés supplémentaires de F, F_+ et F_-, tels que

$$[F,p] = [F_+,z] \oplus [F_-,\mathrm{Id}]$$

L'isomorphisme p est de la forme $az + b$. Plaçons-nous au-dessus d'un point x de X ; $p(z)_x$ est inversible pour tout complexe z de norme 1. Les deux intégrales $P_x = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma p_x^{-1}\, dp_x$ et $Q_x = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma dp_x\, p_x^{-1}$ existent et dépendent continuement de x : elles définissent donc deux endomorphismes P et Q du fibré F, auxquels le corollaire précédent s'applique fibre à fibre. P et Q sont des projecteurs et $p(z)$ se décompose :

$$p_+(z) \oplus p_-(z) : P\,F \oplus (1-P)F \longrightarrow Q\,F \oplus (1-Q)F\,.$$

Usant des notations suivantes : $P\,F = F_+$, $(1-P)F = F_-$, $p_+(z) = a_+z + b_+$, $p_-(z) = a_-z+b_-$, considérons la famille de polynômes : $p_t(z) = (a_+z + b_+t) \oplus (ta_-z + b_-)$. C'est une homotopie d'isomorphismes. En effet :

- $p_1(z) = p(z)$

- si $t \in]0,1[$ $p_t(z) = t\, p_+(z/t) \oplus p_-(zt)$ est un isomorphisme d'après le corollaire précédent puisque $|z/t|>1$ et $|zt|<1$,
- si $t=0$: on applique à nouveau le corollaire : point à l'infini et origine du plan compactifié.

Par conséquent $[F\ p] = [F,p_o]$. Or ce dernier fibré est la somme de Whitney
- du recollement de $\sigma_1^*F_+$ et de σ_2^*QF par $z(\pi^*a_+)$
- du recollement de $\sigma_1^*F_-$ et de $\sigma_2^*(1-Q)F$ par π^*b_-

(σ_1 (resp. σ_2) désigne la projection canonique de $X \times D^+$ (resp. $X \times D^-$) sur X.)
Or $\sigma_2^* a_+$ est un isomorphisme entre $\sigma_2^* F_-$ et $\sigma_2^* QF$ dont la restriction au-dessus de $X \times S_1$ est $\pi^* a_+$: d'après la proposition du chap. le premier recollement est isomorphe à $[F_+ \; z]$. De même le second est isomorphe à $[F_- \; Id]$ et la proposition est démontrée.

Notations. Soient F un fibré de base X, p un polynôme de recollement de degré au plus n. $L^n(F,p)_+$ et $L^n(F,p)_-$ sont les deux fibrés que la construction précédente associe au fibré $L^n(F)$ et à l'isomorphisme $L^n(p)$.

Proposition 1. Soient F un fibré de base X et p un polynôme de recollement de degré $\leq n$.

a) $L^{n+1}(F,p)_+ \approx L^n(F,p)_+$ et $L^{n+1}(F,p)_- \approx L^n(F,p)_- \oplus F$

b) $L^{n+1}(F,zp)_+ \approx L^n(F,p)_+ \oplus F$ et $L^{n+1}(F,zp)_- \approx L^n(F,p)_-$

Nous nous limitons à la vérification de a) : celle de b) est entièrement semblable. Soit $P(n+1,p)$ le projecteur d'image $L^{n+1}(F,p)_+$ défini dans la démonstration du théorème 2 ; nous allons le comparer à $P(n,p)$.

$$L_{n+1}(p) = \left[\begin{array}{c|c} L_n(p) & \begin{matrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{matrix} \\ \hline 0 \; \ldots \; 0 \; -z & 1 \end{array}\right] \; ; \text{ donc } \; (L_{n+1}(p))^{-1} = \left[\begin{array}{c|c} (L_n(p))^{-1} & \begin{matrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{matrix} \\ \hline \frac{A_0}{z} \; \ldots \; \frac{A_n}{z} & 1 \end{array}\right]$$

(A_i est le $(i+1)^e$ élément de la dernière ligne de $(L_n(p))^{-1}$)

$P(n+1,p)_x$ est l'intégrale sur Γ de :

$$\frac{1}{2\pi i}\left[\begin{array}{ccc|c} & (L_n(p))_x^{-1} & & \begin{matrix}0\\ \vdots\\ 0\end{matrix} \\ \hline \frac{A_o}{z} & \cdots & \frac{A_n}{z} & 1 \end{array}\right] \left[\begin{array}{cccccc|c} 0 & & & & & & 0 \\ -1 & 0 & & & & & \vdots \\ & -1 & 0 & & & & \vdots \\ & & & & -1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \cdots & & & 0 & -1 & 0 \end{array}\right]$$

Donc :

$$P(n+1,p)_x = \left[\begin{array}{ccc|c} & P(n,p)_x & & \begin{matrix}0\\ \vdots\\ 0\end{matrix} \\ \hline B_o(x) & \cdots & B_n(x) & 0 \end{array}\right] \qquad (B_i \in \mathrm{Hom}(F,F))$$

$$\text{et} \quad 1 - P(n+1,p)_x = \left[\begin{array}{ccc|c} & 1 - P(n,p)_x & & \begin{matrix}0\\ \vdots\\ 0\end{matrix} \\ \hline -B_o(x) & \cdots & -B_n(x) & 1 \end{array}\right] .$$

Par conséquent $L^{n+1}(F,p)_+ \approx L^n(F,p)_+$ et

$$L^{n+1}(F,p)_- \approx L^n(F,p)_- \oplus F .$$

<u>Proposition 2</u>. Soient F un fibré de base compacte X , p_o et p_1 deux polynômes de recollement de degré au plus n reliés par une homotopie $p_t(z)$ telle que pour tout t compris entre 0 et 1 , p_t soit lui aussi un polynôme de recollement de degré n . Alors $L^n(F,p_o)_+$ est isomorphe à $L^n(F,p_1)_+$.

En effet $L^n(F,p_o)_+$ et $L^n(F,p_1)_+$ sont les restrictions à $X \times \{0\}$ et $X \times \{1\}$ du fibré $L^n(F \times I, p(t,z))_+$ de base $X \times I$.

Paragraphe 6 - ISOMORPHISME INVERSE

Faisons tout d'abord la synthèse des résultats obtenus précédemment quant à la nature des fibrés sur $X \times S_2$. Toute classe d'isomorphisme des fibrés vectoriels complexes sur $X \times S_2$ est représentée par un recollement $[F,f]$. A l'isomorphisme f est associée une suite de polynômes de Laurent $q_n = \sum_{-n}^{n} a_i z^i$ qui pour n suffisamment grand sont propres et homotopes à f : $[F,f] = [F,q_n]$. On peut écrire $q_n = z^{-n} p_n$ où p_n désigne un polynôme de degré $2n$.

$$[F,f] = [F,p_n] \otimes \pi_2^* H^n$$

Or dans $K(X \times S_2)$ qui est un groupe

$$[[F,p_n]] = [[L^{2n}(F),L^{2n}(p_n)]] - [[L^{2n-1}(F),Id]]$$

Appliquons la décomposition du §.5 :

$$[L^{2n}(F),L^{2n}(p_n)] = [L^{2n}(F,p_n)_+,z] \oplus [L^{2n}(F,p_n)_-,Id]$$

Puisque $[L^{2n}(F,p_n)_+,z] = \pi_1^*(L_+^{2n}) \otimes \pi_2^* H^{-1}$,

$$[[F,f]] = [\pi_1^*[L_+^{2n}] \otimes \pi_2^* h^{n-1}) + (\pi_1^*[L^{2n}] \otimes \pi_2^* h^n)$$

$$- (\pi_1^*[L_+^{2n}] \otimes \pi_2^* h^n) - (\pi_1^*[L^{2n-1}] \otimes \pi_2^* h^n)$$

$$\boxed{[[F,f]] = \pi_1 [L^{2n}(F,p_n)_+] \otimes \pi_2 (h^{n-1} - h^n) + \pi_1 [F] \otimes \pi_2 h^n}$$

Soient F et f les données de recollement d'un fibré sur $X \times S_2$. Il existe un entier N tel que si l'entier n est supérieur à N, $(tq_{n+1} + (1-t)q_n)$ et $(tf + (1-t)q_n)$ sont des isomorphismes pour tout $t \in [0,1]$

Si $n \geqslant N$, notons $\nu_n(F,f) = [L^{2n}(F,p_n)_+] \otimes (h^{n-1} - h^n) + [F] \otimes h^n$

C'est un élément de $K(X) \otimes K(S_2)$.

<u>Lemme 1</u>. $\nu_{n+1}(F,f) = \nu_n(F,f)$.

Puisque $tq_{n+1}+(1-t)q_n$ est un isomorphisme, la famille de polynômes $tp_{n+1}+(1-t)zp_n$ est une homotopie d'isomorphismes. Appliquons les propositions 1 et 2 du paragraphe précédent :

$$L^{2n}(F,p_{n+1})_+ = L^{2n}(F,zp_n)_+ = L^{2n}(F,p_n)_+ \oplus F$$

Le lemme en résulte.

Nous désignerons par $\nu(F,f)$ la valeur constante de la suite $\nu_n(F,f)$; ν est un morphisme de $K(X \times S_2)$ dans $K(X) \otimes K(S_2)$; il est clair, compte tenu de l'expression de $[[F,f]]$ que $\mu \circ \nu$ est l'identité de $K(X \times S_2)$. Il est très facile de vérifier que $\nu \circ \mu([F] \otimes 1) = [F] \otimes 1$ et $\nu \circ \mu([F] \otimes h) = [F] \otimes h$ (1 est la classe dans $K(X \times S_2)$ du fibré trivial θ de dimension 1). Le lemme ci-dessous permet d'affirmer que $\nu \circ \mu$ est l'identité de $K(X) \otimes K(S_2)$ ce qui achève la démonstration.

<u>Lemme 2</u>. $\{1,h\}$ est une base du groupe abélien $K(S_2)$.

Appliquons les résultats déjà acquis en choisissant pour espace X l'espace réduit à un point :
$K(S_2) = K(pt \times S_2) \xrightarrow{\nu} K(pt) \otimes K(S_2) \xrightarrow{\mu} K(S_2)$.
Soit $x \in K(S_2)$: $\nu(x)$ est de la forme $\sum n_i \otimes h^i$ où $n_i \in \mathbb{Z} \approx K(pt)$.
Or $\mu \circ \nu$ est l'application identique de $K(S_2)$; par conséquent

$$x = \mu \circ \nu(x) = \mu(\sum n_i \otimes h^i) = \sum n_i\, h^i \;;$$

h^i étant une combinaison linéaire de 1 et de h (ch.IV, §.4), $K(S_2)$ est engendré par $\{1,h\}$. Reste à montrer que ce système est libre ; une relation de dépendance est nécessairement de la forme $n\, h = n$ (dimension des fibres) : cela signifie qu'il existe un entier positif p tel que

$$n\, H \oplus p\, \theta = (n+p)\theta$$

D'après le théorème ch.III, §. , cela entraîne que les deux applications de S_1 dans $GL(n+p,\underline{C})$

$$z \longmapsto \mathrm{diag.}(z,\ldots z,\ 1\ \ldots\ 1) \qquad (n\ \text{"z"})$$

et
$$z \longmapsto \mathrm{diag.}(1,\ldots 1,\ 1\ \ldots\ 1)$$

sont homotopes. En composant avec l'application déterminant, on obtient que les deux applications de S_1 dans $\underline{C} - \{0\}$ définies par $z \mapsto z^n$ et $z \mapsto 1$ sont homotopes , ce qui entraîne que $n=0$ puisque le cercle n'est pas contractile. 1 et h sont donc linéairement indépendants.

--

CHAPITRE V - GROUPES DE GROTHENDIECK REDUITS ET RELATIFS. SUITE EXACTE.

Paragraphe 1 - GROUPES DE GROTHENDIECK REDUITS ET RELATIFS

Notations et conventions. Nous utiliserons dans ce chapitre les trois catégories suivantes :

$\mathcal{C}$: catégorie des espaces topologiques compacts et des classes d'homotopie d'applications continues.

$\mathcal{C}^+$: catégorie des espaces compacts pointés et des classes d'applications continues préservant le point de base.

$\mathcal{C}^2$: catégorie des paires d'espaces compacts et des classes d'applications continues de paires topologiques.

A l'objet (X,Y) de $\mathcal{C}^2$ on associe l'espace X/Y muni de son point de base canonique : c'est un objet de $\mathcal{C}^+$. Dans le cas où Y est vide, X/Y est par définition la somme topologique de X et de l'espace-point $\{x_0\}$, son point de base étant x_0 ; nous noterons X^+ cet objet de $\mathcal{C}^+$.

Définition du groupe de Grothendieck réduit.

Soit (X,x_0) un objet de $\mathcal{C}^+$; K étant un foncteur contravariant à la suite

$$\{x_0\} \xrightarrow{i} X \xrightarrow{c} \{x_0\} \quad \text{correspond :}$$
$$K(x_0) \xleftarrow{i^*} K(X) \xleftarrow{c^*} K(x_0)$$

Par définition le noyau de i^* est le groupe de Grothendieck réduit de (X,x_0). On le note $\tilde{K}(X,x_0)$ ou même, en commettant un abus, $\widetilde{K}(X)$. Puisque $i^* \circ c^*$ est l'application identique de $K(x_o)$, c^* est injectif, i^* surjectif et la petite suite exacte obtenue se scinde. D'où :

$$K(X) \approx \widetilde{K}(X,x_o) \oplus K(x_o)$$

Par conséquent, si l'on change de point de base, $\widetilde{K}(X,x_1)$ est isomorphe à $\widetilde{K}(X,x_o)$. L'interprétation ci-dessous met en évidence que si x_o et x_1 appartiennent à la même composante connexe, $\widetilde{K}(X,x_o)$ et $\widetilde{K}(X,x_1)$ sont un même sous-groupe de $K(X)$.

<u>Interprétation de</u> i^* <u>et</u> $\widetilde{K}$.

Soient E un fibré de base X, $[E]$ sa classe dans $K(X)$; $i^*[E] = [i^*E]$, élément de $K(x_o) \approx \underline{Z}$ est la dimension de la fibre de E au-dessus de x_o. Par $\underline{Z}$-linéarisation, on obtient l'interprétation géométrique de i^* : c'est l'application de $K(X)$ dans $\underline{Z}$ qui à un élément α associe sa dimension virtuelle au-dessus de x_o. Le groupe $\widetilde{K}(X,x_o)$ est donc la partie de $K(X)$ constituée des éléments de dimension virtuelle 0 en x_o.

Si $f : (X,x_o) \longrightarrow (Y,y_o)$ est un morphisme de $\mathcal{C}^+$, $f^* : K(Y) \longrightarrow K(X)$ préserve la dimension virtuelle : l'image de $\widetilde{K}(Y)$ est donc incluse dans $\widetilde{K}(X)$. D'où la proposition :

<u>Proposition 1</u>. $\widetilde{K}$ est un foncteur contravariant de $\mathcal{C}^+$ dans la catégorie des groupes. En outre la décomposition $K(X) = \widetilde{K}(X) \oplus K(x_o)$ est fonctorielle.

<u>Egalité dans</u> $\widetilde{K}(X)$ <u>des classes de deux fibrés</u>.

Soit X un espace compact :

$$\begin{array}{ccccc} \mathrm{Vect}(X) & \longrightarrow & K(X) & \longrightarrow & \widetilde{K}(X) \\ E & & \longrightarrow & & P(E) = [E] - \dim E \end{array}$$

$P(E) = P(F)$ c'est-à-dire $[E] + \dim F = [F] + \dim E$, équivaut à $[E \oplus (\dim F)\theta] = [F \oplus (\dim E)\theta]$ (θ est le fibré trivial de dimension 1).

$\Longleftrightarrow$ il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $E \oplus (\dim F+n)\theta = F \oplus (\dim E+n)\theta$

$\Longleftrightarrow$ il existe des entiers positifs p et q tels que $E \oplus p\theta = F \oplus q\theta$.

On déduit facilement de cette remarque :

<u>Proposition 2</u>. La relation d'équivalence sur Vect(X) définie par :

$$E \equiv F \Longleftrightarrow \exists p \text{ et } q \in \mathbb{N} \quad E \oplus p\theta = F \oplus q\theta$$

est régulière vis-à-vis de $\oplus$ et le quotient est isomorphe à $\widetilde{K}(X)$.

<u>Remarque 1</u>. Puisque $X^+ = X \amalg \{x_0\}$, $K(X^+) = K(X) \oplus K(x_0)$. Donc $K(X)$ est isomorphe à $\widetilde{K}(X^+)$.

<u>Remarque 2</u>. Un élément de $K(X)$ est de la forme $[E]-[F]$. Puisqu'à tout fibré F on peut associer G tel que $F \oplus G$ soit trivial, les éléments de $\widetilde{K}(X,x_0)$ sont de la forme $[E]-\dim_{x_0} E$.

<u>Définition du groupe de Grothendieck relatif</u>.

Soit (X,Y) un objet de $\mathscr{C}^2$. Le groupe $\widetilde{K}(X/Y)$ est par définition le groupe de Grothendieck relatif de la paire (X,Y) ; on le note plus simplement $K(X,Y)$.

On obtient ainsi un foncteur contravariant de $\mathscr{C}^2$ dans la catégorie des groupes abéliens. On vérifie sans peine les deux relations : $\widetilde{K}(X) = K(X,\{x_0\})$ $\qquad K(X,\phi) = K(X)$

<u>Définition du n^e groupe de Grothendieck</u>.

Pour les notations et propositions relatives aux suspensions on pourra se reporter

Pour tout entier positif n, on pose :

$$\widetilde{K}^{-n}(X) = \widetilde{K}(S^n X)$$

$$K^{-n}(X,Y) = \widetilde{K}^{-n}(X/Y) = \widetilde{K}(S^n(X/Y))$$

$$K^{-n}(X) = K^{-n}(X,\phi) = \widetilde{K}(S^n X^+)$$

On remarquera que $K(X) = K^0(X)$, $K(X,Y) = K^0(X,Y)$, $\widetilde{K}(X) = \widetilde{K}^0(X)$. On définit également les transformées des morphismes de $\mathcal{C}$, $\mathcal{C}^+$ et $\mathcal{C}^2$. K^{-n} , $\widetilde{K}^{-n}$ et $K^{-n}(.,.)$ sont des foncteurs contravariants.

Paragraphe 2 - LA SUITE EXACTE

Nous nous proposons de démontrer dans ce paragraphe le théorème suivant :

Théorème. Soient (X,Y) une paire d'espaces compacts pointés, i et j les applications canoniques $Y \xrightarrow{i} X \xrightarrow{j} X/Y$. A tout entier n strictement positif, on peut associer un homomorphisme δ_n de $\widetilde{K}^{-n-1}(Y)$ dans $K^{-n}(X,Y)$ tel que la suite ci-dessous soit exacte :

$$\cdots \longrightarrow \widetilde{K}^{-n-1}(Y) \xrightarrow{\delta_n} K^{-n}(X,Y) \xrightarrow{j_n^*} \widetilde{K}^{-n}(X) \xrightarrow{b_n^*} \cdots$$

$$\cdots \longrightarrow \widetilde{K}^0(X) \xrightarrow{i_0^*} \widetilde{K}^0(Y) .$$

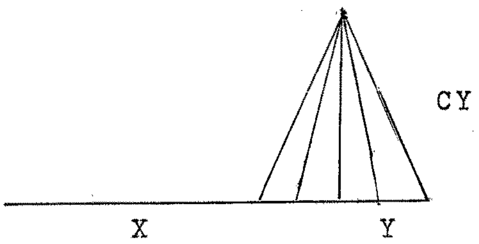
(i_n^* et j_n^* sont les transformés de i et j par $\widetilde{K}^{-n}$.)

Lemme 1. La suite $K(X,Y) \xrightarrow{j^*} \widetilde{K}(X) \xrightarrow{i^*} \widetilde{K}(Y)$ est exacte.

a) $\operatorname{Ker} i^* \supset \operatorname{Im} j^*$: soient en effet a et b les deux applications canoniques $Y \xrightarrow{a} Y/Y \xrightarrow{b} X/Y$. Le morphisme $i^* \circ j^*$ est égal à $a^* \circ b^*$, lui-même nul puisque $\widetilde{K}(Y/Y) = 0$.

b) Montrons que $\operatorname{Im} j^* \supset \operatorname{Ker} i^*$. Un élément $x = [E]-n$ de $\widetilde{K}(X)$ (E est une classe d'isomorphismes de fibrés sur X) appartient à $\operatorname{Ker} i^*$ si et seulement si $[i^*E]-n = 0$, cette égalité ayant lieu entre éléments de $\widetilde{K}(Y)$. De $[E|Y] = n$ on déduit qu'il existe un entier positif m tel que $(E \oplus m\theta)|Y$ soit trivial : notons α une trivialisation ; $(E \oplus m\theta)/\alpha$ est un élément de $\operatorname{Vect}(X/Y)$ et $y = [(E \oplus m\theta)/\alpha]-m-n$, de dimension virtuelle nulle, a pour image par j^* $[E \oplus m\theta]-m-n = x$. D'où l'inclusion recherchée.

<u>Construction de</u> $\delta_o : \tilde{K}^{-1}(Y) \longrightarrow \tilde{K}^o(X,Y)$



Soit CY le cône sur Y ; sa base $Y \times \{0\}$ est identifiée à Y . Ecrivons la suite exacte du lemme 1 relative à la paire $(X \cup CY, X)$:

$$\text{(I)} \quad K^o(X \cup CY, X) \longrightarrow \tilde{K}^o(X \cup CY) \longrightarrow \tilde{K}^o(X) .$$

Comme CY est contractile et que $(X \cup CY)/CY$ est homéomorphe à X/Y :

$$\text{(II)} \quad \tilde{K}^o(X \cup CY) \xleftarrow{\approx} \tilde{K}^o(X \cup CY/CY) \xleftarrow{\approx} \tilde{K}^o(X/Y) = K^o(X,Y)$$

Par ailleurs de l'homéomorphisme entre $(X \cup CY)X$ et $CY/Y \times \{0\} = \sum Y$, on déduit :

$$\text{(III)} \quad K^o(X \cup CY, X) = \tilde{K}^o(X \cup CY/X) \xleftarrow{\approx} \tilde{K}^o(\textstyle\sum Y) \xleftarrow{\approx} \tilde{K}^o(SY) = \tilde{K}^{-1}(Y)$$

Rassemblons les suites (I) (II) (III) et désignons par δ_o et α^* les morphismes rendant commutatif le diagramme :

$$\begin{tikzcd}
K^o(X \cup CY, X) \arrow[r] & \tilde{K}^o(X \cup CY) \arrow[r] & \tilde{K}(X) \\
\tilde{K}^{-1}(X) \arrow[u, "\wr"] \arrow[r, "\delta_o"] & K^o(X,Y) \arrow[u, "\wr"] \arrow[ur, "\alpha^*"] &
\end{tikzcd}$$

α^* est le transformé par $\tilde{K}^o$ de :

$$X \longrightarrow X \cup CY \longrightarrow (X \cup CY)/CY \longrightarrow X/Y$$

Cet homomorphisme est donc égal à j_o^* : nous avons construit δ_o et montré l'exactitude en $K^o(X,Y)$ de la suite exacte du foncteur K . Retenons le résultat suivant :

<u>Proposition</u>. δ_o est le morphisme $(\tilde{K}^o(b))^{-1} \circ \tilde{K}^o(a)$, a et b désignant les applications canoniques :

$$((X \cup CY)/X, pt) \xleftarrow{a} (X \cup CY, pt) \xrightarrow{b} (X/Y, pt) .$$

<u>Construction de</u> $\delta_n : \tilde{K}^{-n-1}(Y) \longrightarrow K^{-n}(X,Y)$

Des propriétés des suspensions signalées antérieurement, il résulte :

$$\tilde{K}^{-n-1}(Y) = \tilde{K}(S(S^nY)) = \tilde{K}^{-1}(S^nY) \quad \text{et} \quad K^o(S^nX,S^nY) = \tilde{K}^{-n}(X,Y) \ .$$

Nous définirons l'homomorphisme δ_n associé à la paire (X,Y) comme étant l'opérateur δ_o de la paire (S^nX,S^nY) . Il suffit donc de démontrer l'exactitude de la suite :

$$\tilde{K}^{-1}(X) \xrightarrow{i_1^*} \tilde{K}^{-1}(Y) \xrightarrow{\delta_o} K^o(X,Y) \xrightarrow{j_o^*} \tilde{K}^o(X) \xrightarrow{i_o^*} \tilde{K}^o(Y)$$

Seule l'exactitude en $\tilde{K}^{-1}(Y)$ n'a pas encore été vérifiée : nous allons y consacrer la fin de ce paragraphe.

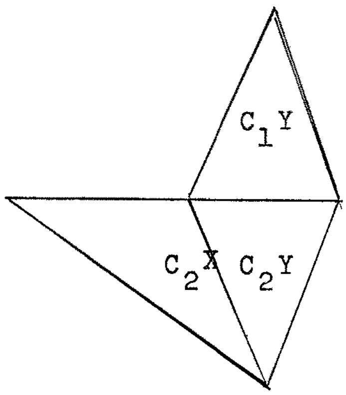
Précisons tout d'abord quelques notations. Soit X un espace topologique compact ; les cônes C_1X et C_2X sont les espaces quotient $(X \times [0,1])/X \times \{1\}$ et $X \times [-1,0]/X \times \{-1\}$; $X \times \{0\}$ y est identifié à X ; la suspension $\sum X$ est la réunion de ces deux cônes.

La fonction $I \longrightarrow I$ qui à t associe $1-t$ induit par identification de 0 et 1 une application T du cercle dans lui-même ; $T \times Id \quad S_1 \times X \longrightarrow S_1 \times X$ détermine des applications continues de $\sum X$ et S_1X dans eux-mêmes : nous les désignerons toutes deux par $T \wedge Id$.

Considérons le diagramme :

$$\begin{array}{ccccc}
K(C_1Y \cup C_2X, X \cup C_1Y) & \longrightarrow & \tilde{K}(C_1Y \cup C_2X) & \longrightarrow & \tilde{K}(X \cup C_1Y) \\
\wr\!\!\uparrow & & \wr\!\!\uparrow & & \uparrow\!\!\wr \\
\tilde{K}(C_2X/X) & & \tilde{K}(C_1Y/Y) & & \tilde{K}(X/Y) \\
\| & & \| & & \| \\
\tilde{K}^{-1}(X) & & \tilde{K}^{-1}(Y) & \xrightarrow{\delta_1} & K^o(X,Y)
\end{array}$$

Pour justifier ce diagramme remarquons que $C_1Y \cup C_2Y \ / \ X \cup C_1Y$,



$C_1Y \cup C_2X \,/\, C_2X$ $\quad X \cup C_1Y \,/\, C_1Y$ sont homéomorphes respectivement à C_2X/X , C_1Y/Y et X/Y . Soit α l'application de $\widetilde{K}^{-1}(X)$ dans $\widetilde{K}^{-1}(Y)$ définie par la partie gauche : nous allons montrer qu'elle est égale à $-i_1^*$; comme la ligne supérieure est exacte (lemme 1), il en résultera que $(i_1^* \; \delta_1)$ est également exacte.

Considérons l'ensemble d'applications continues défini ci-dessous :

$$\begin{tikzcd}
C_1Y \cup C_2X \arrow[rr, Rightarrow, "2"] \arrow[dd, "1"'] & & C_1Y/Y \arrow[r, Rightarrow, "3"] & S_1Y \arrow[dd, "T \wedge \mathrm{Id}"] \\
& C_1Y \cup C_2Y \arrow[ul, "6"'] \arrow[ur, Rightarrow, "7"] \arrow[dl, "9"'] \arrow[dr, Rightarrow, "8"] & & \\
C_2X/X & & C_2Y/Y \arrow[ll, "4"'] \arrow[r, Rightarrow, "5"] & S_1Y
\end{tikzcd}$$

Les flèches doubles ($\Longrightarrow$) représentent des applications continues induisant des isomorphismes entre groupes réduits. Les applications 1, 2, 3, 5, 7 sont des surjections canoniques ; 4 est une injection canonique. L'application 6 associe à la classe de (y,t) celle de $(y,-t)$; l'application 8 associe à la classe de (y,t) celle de $(y,-t)$ si t est positif, le point de base si t est négatif. Enfin l'application 9 est la composée de 8 et de 4. Il est facile de vérifier que ce diagramme est commutatif. Si on le transforme par le foncteur $\widetilde{K}$, des suites d'applications (1,2,3) et (4,5) on tire par composition α et i_1^* respectivement. Il suffit donc pour achever la démonstration du théorème de vérifier que $(T \wedge \mathrm{Id})^*$ est égal à $-\mathrm{Id}$ ce qui résulte du lemme suivant :

<u>Lemme 2</u>. Soit Y un espace topologique ; l'endomorphisme $(T \wedge \mathrm{Id})^*$ de $\widetilde{K}(\sum Y)$ est l'opposé de l'identité.

En effet soit $[E]-\dim E$ un élément de $\widetilde{K}(\sum Y)$. Le fibré $F = E \oplus (T\wedge \mathrm{Id})^{*}E$, étant trivial au-dessus de $C_1 Y$ et égal à $(T\wedge \mathrm{Id})^{*}F$, est trivial, (les sections continues formant une base dans toute fibre au-dessus de $C_1 Y$ se prolongent par symétrie). Donc :

$$[F] = 2 \dim E$$

$$[E]-\dim E = -(T\wedge \mathrm{Id})^{*}([E]-\dim E)$$

C.Q.F.D.

Paragraphe 3 - QUELQUES APPLICATIONS DE LA SUITE EXACTE

Suite exacte du foncteur K

Proposition 1. Soit (X,Y) une paire topologique d'espaces compacts. Il existe une suite $\{\delta_n\}$ d'homomorphismes telle que la suite ci-dessous soit exacte :

$$\cdots \longrightarrow K^{-n-1}(Y) \xrightarrow{\delta_n} K^{-n}(X,Y) \xrightarrow{j_n^{*}} K^{-n}(X) \xrightarrow{i_n^{*}} \cdots$$

$$\cdots \longrightarrow K^{o}(X) \xrightarrow{i_o^{*}} K^{o}(Y).$$

Il suffit d'appliquer le théorème à la paire (X^{+},Y^{+}).

Rétracte d'un espace topologique

Proposition 2. Soit (X,Y) un objet de $\mathcal{C}^2$ tel que Y soit rétracte de X. Alors pour tout entier positif n :

$$K^{-n}(X) \approx K^{-n}(X,Y) \oplus K^{-n}(Y).$$

Si X et Y ont un même point de base :

$$\widetilde{K}^{-n}(X) \approx K^{-n}(X,Y) \oplus \widetilde{K}^{-n}(Y).$$

Soient i l'injection canonique $Y \longrightarrow X$ et r la rétraction. Appliquons le théorème de la suite exacte :

$$\cdots \xrightarrow{\delta_n} K^{-n}(X,Y) \xrightarrow{j_n^*} K^{-n}(X) \xrightarrow{i_n^*} K^{-n}(Y) \xrightarrow{\delta_{n-1}} K^{-n+1}(X,Y)$$

Puisque $r \circ i = \mathrm{Id}_Y$, $i_n^* \circ r_n^*$ est l'application identique de $K^{-n}(Y)$; i_n^* est donc surjective pour toute valeur positive de n ; puisque $\mathrm{Ker}\ \delta_n = \mathrm{Im}\ i_{n+1}^* = K^{-n-1}(Y)$, l'image de δ_n est réduite à 0 . La petite suite

$$0 \longrightarrow K^{-n}(X,Y) \longrightarrow K^{-n}(X) \longrightarrow K^{-n}(Y) \longrightarrow 0$$

est exacte et scindée. La première formule en résulte ; la seconde de démontrer de la même manière.

Groupes de Grothendieck réduits d'un produit.

Proposition 3. Soient X et Y deux espaces compacts à point de base. Alors :

$$\widetilde{K}^{-n}(X \times Y) \approx \widetilde{K}^{-n}(X \wedge Y) \oplus \widetilde{K}^{-n}(X) \oplus \widetilde{K}^{-n}(Y)$$

En effet $X \times \{y_0\}$ est un rétracte de $X \times Y$. Par conséquent :

$$\text{(I)} \qquad \widetilde{K}^{-n}(X \times Y) \approx \widetilde{K}^{-n}(X \times Y / X \times \{y_0\}) \oplus \widetilde{K}^{-n}(X)$$

L'image canonique de $\{x_0\} \times Y$ dans $X \times Y / X \times \{y_0\}$ est un rétracte de cet espace. Puisqu'en outre $(X \times Y / Y \times \{y_0\}) / \{x_0\} \times Y$ est homéomorphe à $X \wedge Y$, il en résulte :

$$\text{(II)} \qquad \widetilde{K}^{-n}(X \times Y / X \times \{y_0\}) = \widetilde{K}^{-n}(X \wedge Y) \oplus \widetilde{K}^{-n}(Y)$$

Il suffit de rassembler (I) et (II) pour obtenir la proposition.

Second énoncé du théorème de Bott.

Théorème. Si X est un espace topologique compact, pour tout entier positif n , $\widetilde{K}^{-n}(X)$ est isomorphe à $\widetilde{K}^{-n-2}(X)$.

Le théorème de Bott sous la forme déjà rencontrée affirme que $K^o(X) \otimes K^o(S_2)$ est isomorphe à $K^o(X \times S_2)$. Par conséquent :

$$(\widetilde{K}^o(X) \oplus \underline{Z}) \otimes (\widetilde{K}^o(S_2) \oplus \underline{Z}) \approx \widetilde{K}^o(S_2X) \oplus \widetilde{K}^o(X) \oplus \widetilde{K}^o(S_2) \oplus \underline{Z}$$

$\widetilde{K}^{-2}(X)$ est donc isomorphe à $\widetilde{K}^o(X) \otimes \widetilde{K}^o(S_2)$ c'est-à-dire à $\widetilde{K}^o(X)$ puisque $\widetilde{K}^o(S_2) \approx \underline{Z}$ (cf. chapitre IV). On achève la démonstration en substituant S_nX à X .

<u>Application : groupes de Grothendieck des sphères.</u>

On sait déjà que $\widetilde{K}_o(S_2) \approx \widetilde{K}_o(S_o) \approx \underline{Z}$. Tous les fibrés complexes de base S_1 étant triviaux (cf. Théorème page III, $\widetilde{K}^o(S_1) = \widetilde{K}^{-1}(S_o) = 0$. Appliquons le théorème de périodicité:

$$\begin{array}{lll} n \text{ pair} & \widetilde{K}^o(S_n) \approx \underline{Z} & \widetilde{K}^1(S_n) = 0 \\ n \text{ impair} & \widetilde{K}^o(S_n) = 0 & \widetilde{K}^1(S_n) \approx \underline{Z} \end{array} .$$

--