Publications Mathématiques d'Orsay

COURS D'INITIATION A LA TOPOLOGIE ALGEBRIQUE ET DIFFERENTIELLE

André GRAMAIN

année 1969-1970

Mathématique
(Service des Publications)
Faculté des Sciences
91-ORSAY (France)

COURS D'INITIATION A LA TOPOLOGIE ALGEBRIQUE ET DIFFERENTIELLE

André GRAMAIN

année 1969-1970

Introduction

Cet ouvrage est la rédaction d'un cours professé à la Faculté des Sciences d'Orsay au cours de l'année 1969-70. Le cours était destiné à des étudiants de 3ème année d'Université et avait pour double but de leur montrer quelques méthodes de topologie algébrique et différentielle d'une part et, d'autre part, de démontrer des résultats élémentaires de topologie. Au premier objectif correspond l'étude des notions de groupe fondamental d'un espace et de fonction de Morse sur une variété ; au second la démonstration du théorème de classification des surfaces compactes, à l'aide des notions précédentes.

Les connaissances nécessaires à la lecture de cet ouvrage sont celles qui sont enseignées pendant les deux premières années d'Université. C'est ainsi qu'on n'a pas parlé d'espaces topologiques mais seulement d'espaces métriques, que (sauf au ch.7) la notion de connexité par arcs a remplacé celle de connexité, et que les variétés sont des sous-variétés d'un espace euclidien. Le choix, délibéré, de ce niveau a cependant quelques inconvénients. Il a fallu admettre l'existence d'une fonction de Morse sur une variété. Et le théorème de classification, au difféomorphisme près, des surfaces différentiables compactes n'est pas démontré, pas plus que le théorème de classification pour les surfaces "topologiques" ; on s'est contenté de la classification à l'homéomorphisme près des surfaces différentiables, pour éviter les questions de recollement des difféomorphismes.

Les chapitres 1 et 2 introduisent la notion de groupe fondamental et donnent des exemples de calcul de celui-ci à l'aide du théorème de van Kampen, notamment

pour les surfaces compactes.

Les chapitres 3 et 4 sont consacrés à la définition et à l'étude des variétés et des fonctions de Morse sur les variétés. L'existence de fonctions de Morse est le seul théorème "global" qu'on ait dû admettre.

La classification des surfaces est traitée au chapitre 5. C'est un exemple d'utilisation de fonctions de Morse. La technique de recollement des homéomorphismes est un peu fastidieuse, mais elle est plus susceptible de généralisation que les classiques méthodes combinatoires.

Enfin, le chapitre 7 contient une démonstration "élémentaire" du théorème de séparation de l'espace euclidien en deux composantes par une surface compacte connexe. Cette démonstration n'utilise pas la théorie de l'homologie. La dualité d'Alexander a été dissimulée par la bonne connaissance du groupe fondamental d'une surface et du groupe d'un noeud. C'est pourquoi le chapitre 6 donne quelques éléments de théorie des noeuds.

Le lecteur qui désirerait approfondir les sujets traités dans cet ouvrage, en restant encore à un niveau assez élémentaire (4e année d'Université) peut étudier :

pour la topologie algébrique, M. Greenberg, Lectures on algebraic topology, Benjamin Inc. (1967) ;

pour la topologie différentielle, J. Milnor, Topology from the differentiable view point, The University Press of Virginia (1965).

A.G.

Orsay, le 19 avril 1970.

Chapitre 1. Le groupe fondamental

On se propose d'associer à tout espace métrique X connexe par arcs un groupe $\pi(X)$, et à toute application continue $f : X \to Y$ un homomorphisme $\pi(f) : \pi(X) \to \pi(Y)$. Deux espaces X et X' homéomorphes (1) ont des groupes fondamentaux $\pi(X)$ et $\pi(X')$ isomorphes, de sorte que le groupe $\pi(X)$ rend compte de propriétés topologiques de l'espace X. On s'efforcera de dresser un catalogue des groupes $\pi(X)$ pour les espaces X connus.

§1. Connexité (par arcs).

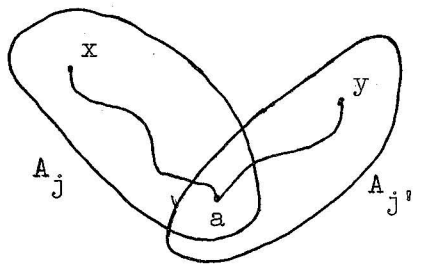
Soit X un espace métrique, un chemin dans X est une application continue $\gamma : [a,b] \to X$ où $a,b \in \underline{R}$, $a < b$. On suppose en général que $a=0$ et $b=1$; on peut toujours s'y ramener par l'unique application linéaire affine de $[a,b]$ sur $[0,1] = I$. On appelle alors origine du chemin γ le point $\gamma(0)$ et extrémité le point $\gamma(1)$. On dit que l'espace X est connexe par arcs si deux points quelconques $x,y \in X$ peuvent être joints par un chemin γ d'origine x et d'extrémité y.

Exemple 1. Toute partie convexe de $\mathbb{R}^n$ (en particulier toute boule) est connexe par arcs.

---

(1) On dit que X et X' sont homéomorphes s'il existe une application bijective $f : X \to X'$ continue ainsi que sa réciproque. On dit alors que f est un homéomorphisme.

PROPOSITION 1.- La réunion d'une famille $(A_j)_{j\in J}$ de parties connexes p.a. de X, ayant un point commun a, est connexe p.a.



Si $x \in A_j$ et $y \in A_{j'}$, on obtient un chemin qui joint x à y en mettant bout à bout un chemin de x à a et un chemin de a à y.

PROPOSITION 2.- La relation R(x,y) = "il existe un chemin qui joint x à y" est une relation d'équivalence. La classe d'équivalence (composante connexe p.a.) d'un point x est la plus grande partie connexe p.a. contenant x. (facile).

PROPOSITION 3.- L'image continue d'un espace connexe p.a. est connexe p.a.

En effet, si γ est un chemin qui joint x à y dans X, le chemin $f\circ\gamma$ joint f(x) à f(y) dans f(X).

On dit qu'un espace X est localement connexe p.a. si tout point x de X admet un système fondamental de voisinages connexes p.a. Par exemple, un ouvert de $\underline{R}^n$ est localement connexe p.a., et plus généralement une variété topologique (2).

PROPOSITION 4.- Dans un espace localement connexe par arcs, les composantes connexes p.a. sont ouvertes et fermées.

---

(2) On dit qu'un espace métrique X est une variété topologique de dimension n si tout point de X admet un voisinage homéomorphe à $\underline{R}^n$.

Elles sont ouvertes d'après la proposition 2 et fermées d'après la proposition 1.

*
Remarque 1.- Un espace connexe p.a. est connexe. Cela résulte du fait que le segment $[0,1]$ est connexe, donc aussi l'image de tout chemin.*

§2. Chemins, équivalence, composition.

Relation d'équivalence : On dit que deux chemins γ_0 et γ_1 dans X sont équivalents (ou homotopes à extrémités données), et on note $\gamma_0 \tilde{\gamma}_1$, s'il existe une application continue $\delta : I \times I \to X$ telle que :

$$\delta(t,0) = \gamma_0(t) \quad , \quad \delta(t,1) = \gamma_1(t) ,$$

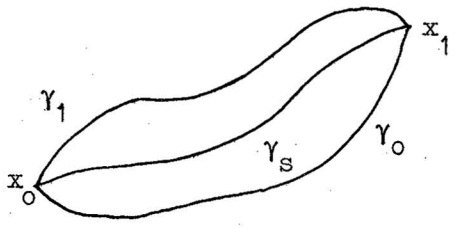
$$\delta(0,s) = \gamma_0(0) = \gamma_1(0) , \quad \text{pour} \quad 0 \leqslant s \leqslant 1 .$$

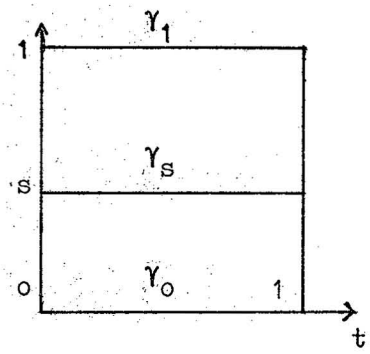
$$\delta(1,s) = \gamma_0(1) = \gamma_1(1) .$$

Deux chemins équivalents ont même origine x_0 et même extrémité x_1. Intuitivement, si l'on pose $\gamma_s(t) = \delta(t,s)$, la famille des chemins γ_s, d'origine x_0 et d'extrémité x_1, est une déformation continue de γ_0 en γ_1 lorsque s varie de 0 à 1. Plus précisément, l'application $s \mapsto \gamma_s$ est un chemin continu dans l'espace (métrique pour la convergence uniforme) des chemins d'origine x_0 et d'extrémité x_1. (3)

---

(3) Pour tout $\varepsilon > 0$, montrons qu'il existe α tel que $|s-s_0| \leqslant \alpha \Longrightarrow \sup_{t \in I} d(\gamma_s(t), \gamma_{s_0}(t)) \leqslant \varepsilon$. Supposons, par l'absurde, le contraire ; il existe ε, et pour tout $n \geqslant 0$ un point $(t_n, s_n) \in I \times I$ tel que $|s_n - s_0| \leqslant \frac{1}{n}$ et $d(\gamma_{s_n}(t_n), \gamma_{s_0}(t_n)) > \varepsilon$. Cette suite (t_n, s_n) admet un point adhérent (t_0, s_0) et la continuité de δ en (t_0, s_0) donne la contradiction.





Composition des chemins.- Il s'agit intuitivement de l'opération de mettre bout à bout deux chemins (déjà utilisée au §1). Soient γ' et γ'' deux chemins dans X tels que l'origine $\gamma''(0)$ coïncide avec l'extrémité $\gamma'(1)$. Le composé $\gamma = \gamma' \cdot \gamma''$ est défini par les formules suivantes

$$\gamma(t) = \begin{cases} \gamma'(2t) & \text{si } 0 \leqslant t \leqslant \frac{1}{2}, \\ \gamma''(2t-1) & \text{si } \frac{1}{2} \leqslant t \leqslant 1. \end{cases}$$

PROPOSITION 5.- La classe d'équivalence du chemin composé ne dépend que des classes des chemins composants.

Soient γ'_o et γ''_o des chemins composables (i.e. $\gamma'_o(1) = \gamma''_o(0)$), et δ' et δ'' des homotopies entre γ'_o et γ'_1 d'une part, γ''_o et γ''_1 d'autre part. Alors γ'_1 et γ''_1 sont composables et l'on a

$$\gamma'_o \cdot \gamma''_o \sim \gamma'_1 \cdot \gamma''_1 .$$

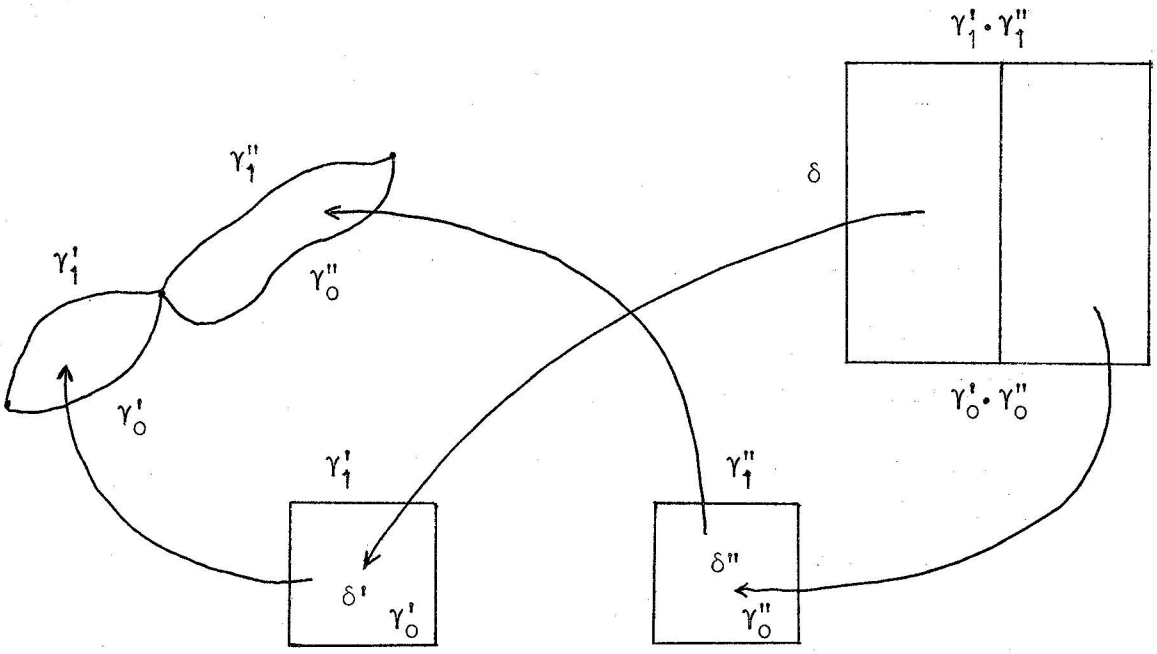
Posons, en effet,

$$\delta(t,s) = \begin{cases} \delta'(2t,s) & \text{si } 0 \leqslant t \leqslant \frac{1}{2} \\ \delta''(2t-1,s) & \text{si } \frac{1}{2} \leqslant t \leqslant 1. \end{cases}$$

L'application δ est une homotopie entre $\gamma'_o \cdot \gamma''_o$ et $\gamma'_1 \cdot \gamma''_1$. Pour vérifier que δ est continue (comme plus haut que $\gamma' \cdot \gamma''$ est continu) on a dû utiliser

le résultat suivant :

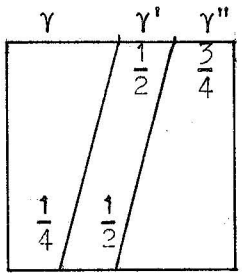
PROPOSITION 6.- Soit $f : X \to Y$ une application continue et soient A et B deux fermés de X tels que $X = A \cup B$. Si les restrictions $f|A$ et $f|B$ sc continues, alors f est continue



Associativité. La composition est associative pour les classes d'équivalences ; c'est-à-dire que l'on a

$$\gamma \cdot (\gamma' \cdot \gamma'') \sim (\gamma \cdot \gamma') \cdot \gamma''$$

si les chemins sont composables. On peut donner des formules explicites pour cette homotopie à partir du schéma suivant :



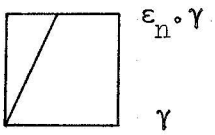
$\gamma \cdot (\gamma' \cdot \gamma'')$

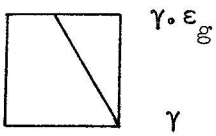
$(\gamma \cdot \gamma') \cdot \gamma''$

Eléments neutres et inverses. Notons ε_x le chemin constant d'image $x \in X$. Pour tout chemin γ, d'origine x et d'extrémité y, on a :

$$\varepsilon_x \circ \gamma \sim \gamma \quad , \quad \gamma \circ \varepsilon_y \sim \gamma \ .$$

On le démontre à l'aide des schémas suivants :





Notons $\bar{\gamma}^1$ le chemin défini par $\bar{\gamma}^1(t) = \gamma(1-t)$, on a alors :

$$\gamma \circ \bar{\gamma}^1 \sim \varepsilon_x \quad \text{et} \quad \bar{\gamma}^1 \circ \gamma \sim \varepsilon_y \ ,$$

et on dit que $\bar{\gamma}^1$ est l'inverse de γ.

§3. Lacets, groupe fondamental.

On dit qu'un chemin γ dans l'espace X est un lacet en $x \in X$ (ou de base x) si son origine $\gamma(0)$ et son extrémité $\gamma(1)$ sont confondues en x. Dans l'ensemble $L(X,x)$ des lacets de base x, la composition est toujours possible. On note $\pi(X,x)$ le quotient de $L(X,x)$ par la relation d'équivalence $\sim$, et on dit que c'est le groupe fondamental (ou de Poincaré) de X en x. C'est en effet un groupe (d'après le §2) pour la composition des classes de lacets. L'élément neutre est la classe du lacet constant, et l'inverse, la classe du lacet $\bar{\gamma}^1$. On note souvent ce groupe $\pi_1(X,x)$ et on dit que c'est le premier groupe d'homotopie de X.

Remarque 2.- Soit $\hat{X}$ la composante connexe par arcs du point x dans X. On a évidemment $L(X,x) = L(\hat{X},x)$ et la relation d'équivalence est la même, d'où

$\pi(X,x) = \pi(\hat{X},x)$. Le groupe fondamental n'a d'intérêt que si X est connexe p.a.

THEOREME 1.- Si X est connexe par arcs, $\pi(X,x) \simeq \pi(X,y)$.

Soit γ un chemin qui joint x à y. Si à tout lacet ℓ en y on associe le lacet ℓ' en x défini par $\ell' = \gamma.\ell.\bar{\gamma}^{-1}$, on définit une application $\Gamma : \pi(X,y) \to \pi(X,x)$. L'application Γ est un homomorphisme de groupes car $\gamma.\ell.\ell_1.\bar{\gamma}^{-1} \sim \gamma.\ell.\bar{\gamma}^{-1}.\gamma.\ell_1.\bar{\gamma}^{-1}$. Montrons que l'application $\Gamma' : \pi(X,x) \to \pi(X,y)$ définie à l'aide du chemin $\bar{\gamma}^{-1}$ est réciproque de Γ ; cela provient des équivalences $\ell \sim \gamma^{-1}.\gamma.\ell.\bar{\gamma}^{-1}.\gamma$ et $\ell' \sim \gamma.\bar{\gamma}^{-1}.\ell.\gamma.\bar{\gamma}^{-1}$. Ceci prouve que Γ est un isomorphisme.

Remarque 3.- Ainsi le groupe $\pi(X,x)$ "ne dépend pas" du point-base x choisi. On parle souvent de $\pi_1(X)$ sans autre précision. L'isomorphisme Γ ci-dessus dépend cependant du chemin γ choisi et il n'y a pas d'isomorphisme canonique entre $\pi(X,x)$ et $\pi(X,y)$. C'est pourquoi on prendra soin de ne pas oublier d'indiquer le point-base choisi.

On dit qu'un espace X est simplement connexe si $\pi(X,x)$ est réduit à l'élément neutre (en abrégé $\pi(X,x) = 0$). Ceci ne dépend pas de x. Par exemple l'espace X réduit à un point est simplement connexe (il y a un seul lacet).

Effet d'une application continue. Soit $f : X \to Y$ une application continue et $y = f(x)$. En associant à tout lacet $\gamma \in L(X,x)$ le lacet $f\circ\gamma \in L(Y,y)$

on définit, par passage aux classes, une application

$$\pi(f) : \pi(X,x) \to \pi(Y,y)$$

qui est un homomorphisme de groupes. [On note en général $f : (X,x) \to (Y,y)$ si $y = f(x)$].

PROPOSITION 7.- Soient $f : (X,x) \to (Y,y)$ et $g : (Y,y) \to (Z,z)$

on a : $\pi(fog) = \pi(f)o\pi(g)$.

De plus : $\pi(id(X)) = id(\pi(X,x))$. (facile).

COROLLAIRE.- Deux espaces homéomorphes ont des groupes fondamentaux isomorphes.

Soit $f : (X,x) \to (Y,y)$ un homéomorphisme et $g = \bar{f}^1$. Il résulte de la proposition 7 que $\pi(f)o\pi(g) = \pi(id(Y)) = id$ et que $\pi(g)o\pi(f) = id$; ce qui prouve que $\pi(f)$ est un isomorphisme.

Applications homotopes (avec point-base). Soient (X,x) et (Y,y) deux espaces avec point-base. Deux applications continues

$$f_o , f_1 : (X,x) \to (Y,y)$$

sont dites homotopes (basiquement) et on note $f_o \sim f_1$ s'il existe une application continue $F : X \times I \to Y$ telle que

$$F(\{x\} \times I) = y$$

$$F|(X \times \{0\}) = f_o \quad , \quad F|(X \times \{1\}) = f_1 .$$

THEOREME 2.- Des applications $f_o , f_1 : (X,x) \to (Y,y)$ homotopes induisent des homomorphismes égaux $\pi(f_o) = \pi(f_1) : \pi(X,x) \to \pi(Y,y)$.

En effet, si ℓ est un lacet de X en x, les lacets $f_0 o \ell$ et $f_1 o \ell$ sont homotopes : une homotopie entre ces lacets est définie par $(t,s) \mapsto F(\ell(t),s)$ où F est une homotopie entre f_0 et f_1.

On appelle <u>équivalence d'homotopie</u> une application continue $f : (X,x) \to (Y,y)$ qui possède une "inverse à homotopie près", c'est-à-dire une application $g : (Y,y) \to (X,x)$ telle que :

$$fog \sim id(Y) \quad , \quad gof \sim id(X) .$$

On dit alors que les espaces pointés (X,x) et (Y,y) sont <u>homéotopes</u>.

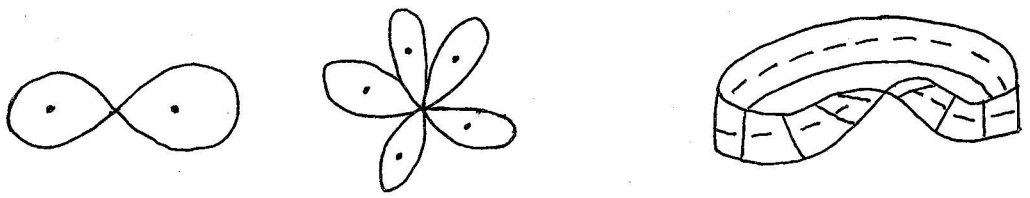
COROLLAIRE.- <u>Deux espaces homéotopes ont des groupes fondamentaux isomorphes</u>.

On a en effet $\pi(fog) = \pi(id(Y)) = id$ et $\pi(gof) = \pi(id(X)) = id$.

<u>Exemple</u> 2. Un espace homéotope à un point (on dit aussi espace <u>contractile</u>) est simplement connexe. C'est le cas de tout ensemble convexe de $\underline{R}^n$.

<u>Exemple</u> 3. Toute couronne plane $C = \{r_1 < |z| < r_2\}$ est homéotope au cercle. Si l'on prend pour cercle le cercle S de rayon $\frac{r_1+r_2}{2}$, l'injection $S \to C$ admet pour inverse à homotopie près la projection radiale.

<u>Exemple</u> 4. Le plan privé de deux points est homéotope à la figure 8. Le plan privé de n points est homéotope au bord de la pâquerette à n pétales.



Exemple 5. Le ruban de Moebius est homéotope au cercle axial.

§4. Premiers exemples : cercle, tore.

A) Groupe fondamental du cercle.

Soit S^1 le cercle d'équation $x^2+y^2=1$, et a le point $(1,0)$ de S^1.

THEOREME 3.- Le groupe fondamental du cercle est isomorphe à $\underline{Z}$.

On va construire un homomorphisme $d : \pi(S^1,a) \to \underline{Z}$ et montrer que c'est un isomorphisme. Pour définir d, on utilise une méthode de type différentiable : on montre que toute classe de $\pi(S^1,a)$ contient un lacet différentiable et on définit d pour les lacets différentiables.

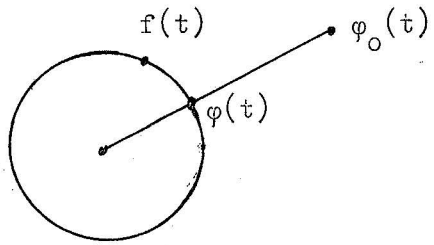
Notons $r : \mathbb{R}^2 - \{0\} \to \mathbb{R}^2$ la projection radiale de centre 0 sur le cercle S^1. Les formules $r(x,y) = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$ prouvent que c'est une application différentiable.

Lemme 1.- Deux lacets f_0 et f_1 de S^1, tels que $d(f_0,f_1) = \sup|f_0(t)-f_1(t)| \leqslant k < 1$ sont homotopes.

Pour tout $s \in [0,1]$, on a $sf_1(t)+(1-s)f_0(t) \neq 0$, et la déformation $f_0(t) = r((1-s)f_0(t)+sf_1(t))$ réalise l'homotopie.

Lemme 2.- Tout lacet f de S^1 est homotope à un lacet différentiable φ voisin de f.

Un lacet différentiable φ , c'est un lacet $\varphi : I \to S^1$ qui, considéré comme application dans le plan, est différentiable. D'après le théorème (4) de Stone-Weierstrass, en approchant les deux coordonnées de $f : I \to \mathbb{R}^2$ par un polynôme, on obtient une application différentiable $\varphi_o : I \to \mathbb{R}^2$ telle que $|f(t)-\varphi_o(t)| \leqslant \frac{\varepsilon}{4}$. Quitte à ajouter une fonction linéaire (partout inférieure à $\frac{\varepsilon}{4}$) on peut supposer que $\varphi_o(0) = \varphi_o(1) = a$, et que $|f(t)-\varphi_o(t)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$. Le lacet $\varphi(t) = r(\varphi_o(t))$ est différentiable. Il est homotope à f par la déformation $r(s.\varphi_o(t) + (1-s)f(t))$. Il suffit en effet de supposer $\varepsilon < 2$ pour que $s\varphi_o(t) + (1-s)f(t)$ soit non nul. En outre $|\varphi(t)-f(t)| \leqslant |\varphi(t)-\varphi_o(t)| + |\varphi_o(t)-f(t)| \leqslant 2\ |\varphi_o(t)-f(t)| \leqslant \varepsilon$, ce qui prouve que φ est aussi voisin de f qu'on veut.



<u>Degré d'un lacet différentiable</u>. Le degré d'un lacet différentaible φ est, par définition, $d(\varphi) = \frac{1}{2i\pi}\int_0^1 \frac{d\varphi}{\varphi}$. Posons $\theta(\varphi(t)) = \frac{1}{i}\int_0^t \frac{d\varphi}{\varphi}$; on voit, en comparant les dérivées, que $\varphi(t) = e^{i\theta(\varphi(t))}$. La fonction $\theta(\varphi(t))$ est une détermination, continue en t , de l'argument de $\varphi(t)$, qui

(4) D'autres théorèmes d'analyse sont bons à cet usage. On peut, par exemple, faire la convolution de f avec une fonction-cloche différentiable.

s'annule pour $t=0$. Le degré $d(\varphi) = \frac{\theta(\varphi(1))}{2\pi}$ est donc un entier qui est, intuitivement, le nombre de tours effectivement parcourus par $\varphi(t)$.

Lemme 3.- Deux lacets différentiables voisins, ont même degré.

Soient φ_0 et φ_1 deux lacets différentiables tels que $|\varphi_0(t)-\varphi_1(t)| \leqslant \varepsilon < 1$. Posons $\varphi_s(t) = r((1-s)\,\varphi_0(t) + s\varphi_1(t))$; la différentielle $d\varphi_s$ dépend continûment de s et donc aussi $d(\varphi_s) = \int_0^1 \frac{d\varphi_s}{\varphi_s}$. La fonction $d(\varphi_s)$, continue en s et à valeurs entières, est constante (th. des valeurs intermédiaires).

Si f est un lacet continu, on définit son degré $d(f)$ par le degré commun de tous les lacets différentiables voisins de f . Ce degré dépend continûment de f , car deux lacets voisins sont voisins d'un même lacet différentiable. Il ne dépend donc que de la classe d'homotopie de f (même raisonnement qu'au lemme 3).

a) L'application $d : \pi(S^1,a) \to \underline{Z}$ est un homomorphisme. On a en effet, pour des lacets différentiables, $d(\varphi.\varphi') = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{d\varphi(2\theta)}{\varphi(2\theta)} + \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{d\varphi'(2\theta-1)}{\varphi'(2\theta-1)} =$
$= \int_0^1 \frac{d\varphi(t)}{\varphi(t)} + \int_0^1 \frac{d\varphi'(t)}{\varphi'(t)} = d(\varphi) + d(\varphi')$.

b) L'homomorphisme d est surjectif : si $n \in \underline{Z}$, le lacet $t \mapsto e^{2i\pi nt}$ a pour degré n .

c) Il est injectif : Soit φ différentiable tel que $d(\varphi) = \frac{\theta(\varphi(1))}{2\pi} = 0$.

La déformation $\varphi_s(t) = e^{i\,s\,\theta(\varphi(t))}$ est une homotopie entre φ et le lacet constant : comme $\theta(\varphi(1)) = 0$, pour tout s, φ_s est bien un lacet.

Ceci achève la démonstration.

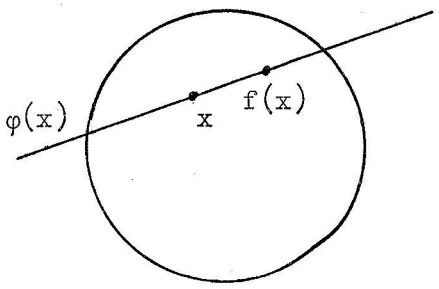
Remarque 4.- Le groupe $\pi_1(S^1)$ est commutatif. C'est toujours le cas pour le groupe fondamental d'un groupe topologique.

B) Application : Théorème du point fixe de Brouwer.

Soit D^2 le disque unité du plan :

THEOREME 4.- Toute application continue $f : D^2 \to D^2$ a un point fixe.

Supposons, par l'absurde, que, pour tout $x \in D^2$, on ait $x \neq f(x)$. La droite $(x,f(x))$ est alors définie et coupe le bord S^1 de D^2. Soit $\varphi(x)$ le point d'intersection qui est plus proche de x que de $f(x)$. L'application $\varphi : D^2 \to S^1$ est continue et $\varphi|S^1 = id(S^1)$. Je dis que ceci est impossible.



Soit A une partie de X et $x \in A$; une application $r : X \to A$ est une rétraction si $r|A = id(A)$.

PROPOSITION 8.- Soit $r : X \to A$ une rétraction et $i : A \to X$ l'injection canonique ; l'homomorphisme

$$\pi(i) : \pi(A,x) \to \pi(X,x)$$

a pour inverse à gauche $\pi(r)$; il est injectif.

En effet $r|A = id(A)$ signifie que $roi = id(A)$, donc $\pi(r)o\pi(i) = id(\pi(A,x))$.

Revenons au th.4 ; on a $\pi_1(S^1) = \underline{Z}$ (th.3) et $\pi_1(D^2) = 0$ (ex.2) et il n'y a pas d'injection de $\underline{Z}$ dans 0 .

C) Groupe fondamental du tore.

THEOREME 5.- Le groupe fondamental du tore est $\underline{Z} \times \underline{Z}$.

Soit $T = S^1 \times S^1$ le tore ; le th.5 résulte d'un théorème plus général. Soient (X,x) et (Y,y) deux espaces pointés et $p_X : (X\times Y,(x,y)) \to (X,x)$ et $p_Y : (X\times Y,(x,y)) \to (Y,y)$ les deux projections. Les homomorphismes $\pi(p_X) : \pi(X\times Y,(x,y)) \to \pi(X,x)$ et $\pi(p_Y) : \pi(X\times Y,(x,y)) \to \pi(Y,y)$ définissent un homomorphisme $p : \pi(X\times Y,(x,y)) \to \pi(X,x) \times \pi(Y,y)$.

THEOREME 6.- L'homomorphisme $p : \pi(X\times Y,(x,y)) \to \pi(X,x) \times \pi(Y,y)$ est un isomorphisme.

Il est en effet surjectif car la donnée d'un lacet en x de X et d'un lacet en y de Y définit un lacet en (x,y) de $(X\times Y)$ dont les projections sont les lacets donnés. Il est injectif car les homotopies dans X et dans Y sont les projections d'une homotopie dans $X\times Y$.

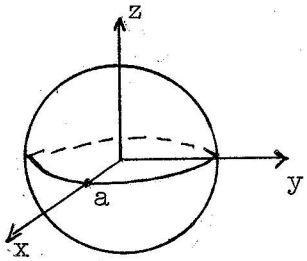
Chapitre 2. Le théorème de van Kampen

Si X est un espace qui est la réunion de deux ouverts connexes p.a. U_1 et U_2, d'intersection $U_1 \cap U_2$ connexe p.a., le théorème de Seifert-Van Kampen permet de calculer le groupe fondamental de X connaissant celui de U_1, U_2, $U_1 \cap U_2$. Dans la pratique, cela permet de calculer $\pi_1(X)$ pour de nombreux espaces X en se ramenant, par un choix judicieux de U_1 et U_2, à des calculs plus simples.

§1. Groupe fondamental de la sphère.

THEOREME 1.- La sphère est simplement connexe.

Soit $S^2 \subset \underline{R}^3$ la sphère d'équation $x^2+y^2+z^2 = 1$ et $a = (1,0,0)$.



Soit U_1 l'ensemble des points de S^2 de cote $z > -\frac{1}{2}$ et U_2 l'ensemble des points de S^2 de cote $z < \frac{1}{2}$. La sphère et la réunion de U_1 et U_2. Par projection stéréographique, on voit que U_1 et U_2 sont homéomorphes à un disque plan ouvert (donc simplement connexes) et $U_1 \cap U_2$ à une couronne (donc connexe). Le théorème 1 résulte alors du cas particulier suivant du théorème de van Kampen :

PROPOSITION 1.- Supposons que $X = U_1 \cup U_2$, où U_1 et U_2 sont des ouverts connexes et simplement connexes, d'intersection $U_1 \cap U_2$ connexe ; alors X est simplement connexe.

Démonstration de la proposition 1 :

Lemme 1.- Soient $f : Y \to X$ une application continue, et $(U_j)_{j\in J}$ un recouvrement ouvert de X, alors $(f^{-1}(U_j))_{j\in J}$ est un recouvrement ouvert de Y (évident).

Lemme 2 (nombre de Lebesgue).- Soit $(V_j)_{j\in J}$ un recouvrement ouvert d'un espace métrique compact Y. Il existe un nombre $\varepsilon > 0$ tel que toutes les boules de rayon $r \leqslant \varepsilon$ soient contenues dans un des ouverts du recouvrement.

Tout point $y \in Y$ est contenu dans un certain ouvert $V_{j(y)}$, et il existe donc un nombre $\alpha(y) > 0$ tel que $B(y,\alpha(y)) \subset V_{j(y)}$. On veut montrer qu'il existe une borne inférieure $\varepsilon > 0$ pour les $\alpha(y)$. Supposons (par l'absurde) le contraire, pour tout n il existe un point y_n tel que la boule de centre y_n, de rayon $\frac{1}{n}$, ne soit contenue dans aucun des V_j. Soit y un point adhérent (1) à la suite (y_n) (Y est métrique compact) et soit N tel que $d(y_N,y) < \frac{1}{2}\alpha(y)$ et $\frac{1}{N} < \frac{1}{2}\alpha(y)$. La boule $B(y_N,\frac{1}{N})$ est contenue dans $V_{j(y)}$, ce qui est contradictoire.

Soient maintenant $x \in U_1 \cap U_2$ et $f : I \to X$ un lacet en x. On veut montrer que f est homotope à 0. Pour cela, il suffit de montrer que f est homotope à un composé $\varphi_1.\varphi_2...\varphi_n$, où chaque φ_k est un lacet en x soit dans U_1, soit dans U_2. Comme U_1 et U_2 sont simplement connexes, chaque φ_k est homotope à 0 et leur composé aussi.

---

(1) Pour qu'un espace métrique soit compact, il faut et il suffit que toute suite admette un point adhérent, c'est-à-dire qu'il existe une sous-suite convergente.

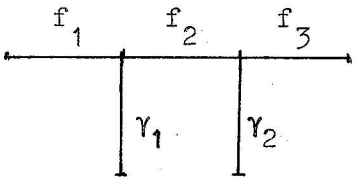
Les ouverts $\bar{f}^1(U_1)$ et $\bar{f}^1(U_2)$ recouvrent $I = [0,1]$. Pour n assez grand (lemme 2), les segments $[\frac{k-1}{n},\frac{k}{n}]$ $(1 \leqslant k \leqslant n)$ sont contenus dans l'un ou l'autre de ces deux ouverts. Pour chaque $k = 1,\ldots,n-1$, choisissons un chemin γ_k qui joigne x à $x_k = f(\frac{k}{n})$. Comme U_1, U_2 et $U_1 \cap U_2$ sont connexes p.a., on peut supposer γ_k dans U_1, U_2 ou $U_1 \cap U_2$ suivant que x_k est dans U_1, U_2 ou $U_1 \cap U_2$. On note alors f_k le chemin restriction de f à $[\frac{k-1}{n},\frac{k}{n}]$ et l'on pose

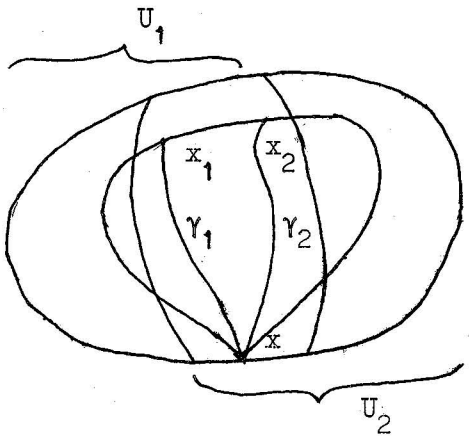
$$\varphi_1 = f_1 \cdot \bar{\gamma}_1^{-1} \quad ,$$

$$\varphi_k = \gamma_{k-1} \cdot f_k \cdot \bar{\gamma}_k^{-1} \quad \text{si} \quad 2 \leqslant k \leqslant n-1 \ ,$$

$$\varphi_n = \gamma_{n-1} \cdot f_n \ .$$

Si $[\frac{k-1}{n},\frac{k}{n}] \subset \bar{f}^1(U_j)$, alors φ_k est un lacet en x dans U_j. On a d'autre part $f = f_1 \cdot f_2 \cdot \ldots f_n \sim \varphi_1 \cdot \varphi_2 \cdot \ldots \varphi_n$, ce qui achève la démonstration.





Remarque 1.- La proposition 1 permet de démontrer, plus généralement, que la sphère $S^n \subset \underline{R}^{n+1}$, d'équation $x_1^2 + \ldots + x_{n+1}^2 = 1$, est simplement connexe pour $n \geqslant 1$.

Exemple 1.- Le complémentaire de 0 dans $\underline{R}^3$, homéotope à la sphère S^2, est simplement connexe.

§2. Notions sur les groupes. (2)

Groupe (non abélien) libre à deux générateurs.

Soit E l'ensemble de tous les mots finis (y compris le mot vide) qu'on peut former en juxtaposant les symboles a^p et b^q, p et q $\in \underline{Z}$. Etant donné un mot, on s'autorise à effectuer les réductions suivantes :

- remplacer un groupe de deux symboles consécutifs a^p, a^q par le symbole a^{p+q}, et de même avec b.

- supprimer a^0 et b^0.

Un mot sur lequel toute réduction est impossible est un mot réduit. Il est formé d'une suite de symboles alternativement de la forme a^p et b^q, avec des exposants non nuls. On vérifie sans peine que tout mot admet une unique réduction. On note $\underline{Z}*\underline{Z}$ l'ensemble des mots réduits muni de la loi de composition suivante : le produit $m.m'$ de deux mots est le mot réduit associé au mot (non nécessairement réduit) obtenu en écrivant bout à bout m et m'. Pour cette loi, $Z*Z$ est un groupe, le mot vide l'élément neutre, et $(a^{-p_n},b^{-q_n},\ldots,a^{-p_1},b^{-q_1})$ l'inverse de $(b^{q_1},a^{p_1},\ldots,b^{q_n},a^{p_n})$, etc...

Les applications $p \mapsto (a^b)$ et $q \mapsto (b^q)$ sont deux homomorphismes injectifs $\tilde{a},\tilde{b} : \underline{Z} \to \underline{Z}*\underline{Z}$. En outre, si G est un groupe, φ et $\Psi : \underline{Z} \to G$ des homomorphismes, il existe un unique homomorphisme $\theta : \underline{Z}*\underline{Z} \to G$ tel que $\theta\circ\tilde{a} = \varphi$, $\theta\circ\tilde{b} = \psi$. Il est défini par $\theta((a^p)) = \varphi(p)$, $\theta((b^q)) = \psi(q)$.

---

(2) Il s'agit de groupes non nécessairement commutatifs et l'on adopte en général une notation multiplicative, l'élément neutre étant noté 1. En particulier, le groupe additif $\underline{Z}$ sera représenté comme l'ensemble de a^n, n entier, avec pour loi la multiplication $a^n.a^{n'} = a^{n+n'}$.

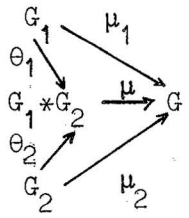
Groupe libre sur un ensemble S .

C'est une généralisation de la notion précédente. Au lieu de former des mots à l'aide des seules lettres a et b , on utilise tous les éléments $s \in S$. En particulier, si S est un ensemble fini à n éléments, on obtient le groupe libre à n générateurs.

Somme de deux groupes (on dit aussi produit libre).

C'est une autre généralisation de $\underline{Z}*\underline{Z}$. Soient G_1 et G_2 deux groupes ; on considère l'ensemble des mots finis contitués à l'aide d'éléments de G_1 et d'éléments de G_2 . On s'autorise à remplacer deux lettres consécutives g_1 , g_1', si elles sont dans le même groupe G_1 par l'unique lettre $g_1 . g_1' \in G_1$, et de même avec G_2 . D'autre part on supprime les éléments neutres. Comme précédemment, un mot réduit est une suite fini d'éléments provenant alternativement de G_1 et de G_2 . L'ensemble des mots réduits, muni de la loi de composition évidente constitue le groupe G_1*G_2 somme de G_1 et G_2 .

Les applications $g_1 \mapsto (g_1)$ et $g_2 \mapsto (g_2)$ sont des homomorphismes injectifs $\theta_1 : G_1 \to G_1*G_2$ et $\theta_2 : G_2 \to G_1*G_2$. On note souvent g_1 l'élément $(g_1) \in G_1*G_2$. De plus, si G est un groupe et $\mu_1 : G_1 \to G$, $\mu_2 : G_2 \to G$ des homomorphismes, il existe un unique homomorphisme $\mu : G_1*G_2 \to G$ tel que $\mu \circ \theta_1 = \mu_1$, $\mu \circ \theta_2 = \mu_2$, c'est-à-dire tel que le diagramme suivant soit commutatif :

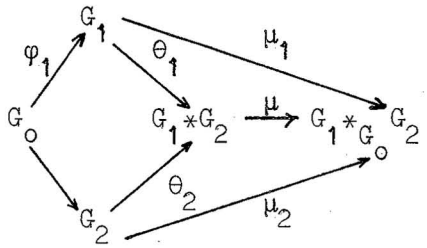


Remarque 2.- Une telle propriété "universelle" suffit à caractériser la somme $G_1 * G_2$ à un isomorphisme près.

Remarque 3.- Si G_2 est réduit à l'élément neutre 1, l'homomorphisme $\theta_1 : G_1 \to G_1 * (1)$ est un isomorphisme.

Somme amalgamée de deux groupes.

Soient G_o , G_1 , G_2 des groupes et $\varphi_1 : G_o \to G_1$, $\varphi_1 : G_o \to G_2$ des homomorphismes. Soit N le plus petit sous-groupe distingué (3) de $G_1 * G_2$ qui contienne tous les éléments de la forme $(\varphi_1(g), \varphi_2(g)^{-1})$ et $(\varphi_2(g), \varphi_1(g)^{-1})$ où $g \in G_o$, et soit $\mu : G_1 * G_2 \to (G_1 * G_2)/N$ la surjection canonique. On note $(G_1 * G_2)/N = G_1 *_{G_o} G_2$ et on dit que c'est la somme de G_1 et G_2 amalgamée par G_o .



(3) On dit qu'un sous-groupe N de H est distingué si tout automorphisme intérieur $x \mapsto h^{-1} x h$ de H envoie N dans N . Il est équivalent de dire que la loi de composition de H induit une loi de composition sur l'ensemble quotient H/N pour la relation d'équivalence $x\, y^{-1} \in N$. Il est équivalent de dire que N est le noyau d'un homomorphisme de H dans un autre groupe. Si K est un sous-groupe de H , l'intersection $\bar{K}$ de tous les sous-groupes distingués de H contenant K est constituée de tous les conjugués $h^{-1} k h$, $h \in H$, $k \in K$ et de leurs produits. C'est un sous-groupe distingué.

Les homomorphismes $\mu_1 = \mu o \theta_1$ et $\mu_2 = \mu o \theta_2$ satisfont à : $\mu_1 o \varphi_1 = \mu_2 o \varphi_2$ puisque les éléments $\theta_1 o \varphi_1(g)$ et $\theta_2 o \varphi_2(g)$ ont un quotient qui est dans le noyau N de μ. De plus, si H est un groupe et $\psi_1 : G_1 \to H$ et $\psi_2 : G_2 \to H$ des homomorphismes tels que $\psi_1 o \varphi_1 = \psi_2 o \varphi_2$, il existe un unique homomorphisme $\psi : G_1 *_{G_o} G_2 \to H$ tel que $\psi_1 = \psi o \mu_1$ et $\psi_2 = \psi o \mu_2$. Il existe en effet un unique homomorphisme $\psi' : G_1 * G_2 \to H$ tel que $\psi_1 = \theta_1 o \psi'$ et $\psi_2 = \theta_2 o \psi'$. Mais la propriété $\psi_1 o \varphi_1 = \psi_2 o \varphi_2$ montre que le noyau de ψ' contient les éléments de la forme $(\varphi_1(g), \varphi_2(g)^{-1})$, $g \in G_o$, et contient donc N ; l'homomorphisme ψ' passe au quotient par N.

Caractérisation des éléments de N.

Pour qu'un mot (non nécessairement réduit) représente un élément de $G_1 * G_2$ qui soit dans N, il faut et il suffit qu'on puisse le réduire à l'élément neutre (mot vide) par une succession de manipulations des deux types suivants :

A.- Remplacer une lettre $\varphi_1(g)$ par $\varphi_2(g)$, $g \in G_o$ et réciproquement.

B.- Remplacer deux lettres consécutives g_i, g_i' où g_i et $g_i' \in G_i$ $(i = 1,2)$ par la lettre $g_i'' = g_i . g_i' \in G_i$, et réciproquement décomposer une lettre g_i'' en une suite g_i, g_i' si $g_i'' = g_i . g_i'$. (Cette manipulation ne change pas l'élément de $G_1 * G_2$ correspondant. Elle permet d'atteindre le mot réduit).

Tout élément de N est un produit d'éléments de la forme $(a^{-1}, \varphi_1(g), \varphi_2(g)^{-1}, a)$, $a \in G_1 * G_2$, $g \in G_o$, ou de leurs inverses. Par une manipulation A et une manipulation B ou le réduit à (a^{-1}, a) qui se réduit à

( ) dans $G_1 * G_2$.

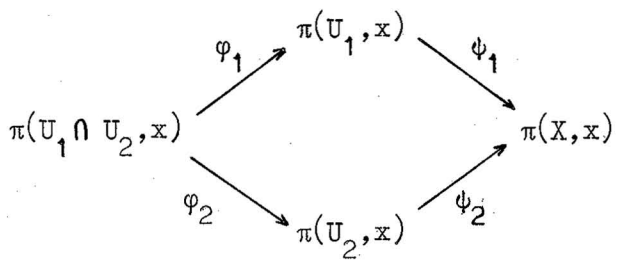
Inversement, montrons que si $(m_1, \varphi_1(g), m_2)$ est dans N , alors $(m_1, \varphi_2(g), m_2)$ est dans N . D'abord $(\varphi_2(g), m_2, m_1^{-1}) = (m_1^{-1})(m_1, \varphi_1(g), m_2)(m_1)$ est encore dans le sous-groupe distingué N . Par multiplication par $(\varphi_1(g), \varphi_2(g)^{-1}) \in N$, on obtient, après réduction B (qui ne change pas le mot réduit) $(\varphi_1(g), m_2, m_1^{-1})$, puis, de nouveau par conjugaison, $(m_1, \varphi_1(g), m_2)$ qui est donc dans N .

Remarque 4.- Si $G_o = \{1\}$, alors N est réduit à l'élément neutre et la somme amalgamée isomorphe à $G_1 * G_2$.

Remarque 5.- Si $G_2 = \{1\}$, alors N est le sous-groupe distingué engendré par les $\varphi_1(g)$, $g \in G_o$; de plus $G_1 * G_2$ est isomorphe à G_1 (remarque 2). La somme amalgamée est le quotient de G_1 par le plus petit sous groupe distingué $\overline{\varphi_1(G_o)}$ contenant $\varphi_1(G_o)$.

§3. Théorème de Seifert et van Kampen.

THEOREME 2.- Supposons que $X = U_1 \cup U_2$, où U_1 et U_2 sont des ouverts connexes p.a. ainsi que $U_o = U_1 \cap U_2$. Soit $x \in U_o$, alors $\pi(X,x)$ est la somme de $\pi(U_1,x)$ et $\pi(U_2,x)$ amalgamée par $\pi(U_o,x)$.



Les homomorphismes φ_1 , φ_2 , ψ_1 , ψ_2 sont induits par les inclusions. On a évidemment $\psi_1 \circ \varphi_1 = \psi_2 \circ \varphi_2$, et le théorème affirme que l'homomorphisme $\psi : \pi(U_1) *_{\pi(U_o)} \pi(U_2) \to \pi(X)$ associé (§2) à ψ_1 et ψ_2 est un isomorphisme. Pour cela, on va montrer que l'homomorphisme $\psi' : \pi(U_1) * \pi(U_2) \to \pi(X)$ associé (§2) à ψ_1 et ψ_2 est surjectif et que N contient son noyau. Pour ces deux propriétés, on va d'abord donner la traduction géométrique puis démontrer celle-ci.

1ère partie.- Soit f un lacet de X en x , il s'agit de montrer qu'il est équivalent (homotope) à un produit de lacets en x dont les images sont contenues dans les espaces U_1 ou U_2 . Ceci a été démontré au §1 dans la démonstration de la proposition 1.

2ème partie (traduction).- Soient $h_1, h_2 \ldots h_n$ des lacets en x dans les espaces U_1 et U_2 ; ils définissent un élément $(h_1, h_2, \ldots, h_n)$ de $\pi(U_1,x) * \pi(U_2,x)$, dont l'image par ψ' est le lacet $h_1 . h_2 . \ldots h_n$ de X en x . Si ce lacet f est homotope à 0 dans X , on va montrer qu'on peut

transformer le symbole $(h_1,h_2,\ldots,h_n)$ en le symbole (x), où x désigne le lacet constant, à l'aide des trois opérations suivantes :

- H.- Si h_k est un lacet dans U_i en x, on peut le remplacer par un lacet h'_k qui lui est homotope dans U_i.

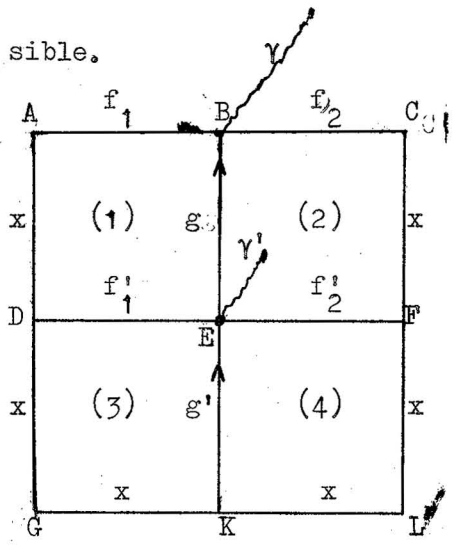
- A'.- Si h_k est un lacet dans U_1 dont l'image est dans $U_1 \cap U_2$, on peut le considérer comme un lacet dans U_2, et réciproquement.

- B'.- Si h_k est un lacet dans U_i tel que $h_k = h'_k.h''_k$ où h'_k et h''_k sont des lacets dans U_i, on peut remplacer h_k par h'_k, h''_k.

Cela suffit à démontrer le th.2 car, si $(h_1,\ldots,h_n)$ est dans le noyau de ψ', alors $h_1.h_2.\ldots h_n \sim (x)$ dans X. D'autre part les manipulations A' et B' sont les traductions géométriques des manipulations A et B, et la manipulation H correspond au fait que deux lacets homotopes définissent le même élément du groupe fondamental. Remarquons aussi que la manipulation A' passe inaperçue dans un raisonnement géométrique si l'on identifie un lacet dans U_1 d'image dans U_0, au lacet dans U_0 défini par la "même" application.

<u>2ème partie</u> (<u>Démonstration géométrique</u>).- Soit $(h_1,\ldots,h_n)$ comme plus haut et $H : I\times I \to X$ une homotopie dans X entre $h_1.h_2.\ldots.h_n$ et le lacet constant x. Les ouverts $H^{-1}(U_1)$ et $H^{-1}(U_2)$ recouvrent l'espace métrique compact $I\times I$. Soit $\varepsilon > 0$ un nombre de Lebesgue (§1, lemme 2) de ce recouvrement, et p un entier assez grand pour que $\frac{1}{pn} \leqslant \varepsilon$. L'image par H du carré $\left[\frac{k-1}{np}, \frac{k}{np}\right] \times \left[\frac{j-1}{np}, \frac{j}{np}\right]$, $1 \leqslant k \leqslant np$, $1 \leqslant j \leqslant np$ est entier contenu dans l'un des ouverts U_1 ou U_2 noté $U_{i(k,j)}$. <u>Nous allons nous borner au cas</u> $n=1$, $p=2$. Une démonstration rigoureuse du cas général s'en déduit aisément par

imitation, mais la complexité des notations qu'elle exige la rend incompréhensible.



Sur la figure, on a indiqué la notation qui représente le chemin dans X qui est égale à la restriction de H à chacun des carrés de côté $\frac{1}{2}$ contenus dans I×I . Si le carré (1) a son image par H contenue dans U_1 par exemple, tous ses côtés sont des chemins dans U_1 . On note enfin γ (resp. γ') un chemin qui joint x à H(B) (resp. H(E)) dans U_0 , U_1 ou U_2 suivant que H(B) (resp. H(A)) est contenu dans l'ouvert connexe U_0 , U_1 ou U_2 .

Le mot qu'on veut réduire à l'aide de H, A', B' est le mot (h_1) :

$\sim (f_1 \cdot \gamma^{-1} \cdot \gamma \cdot f_2)$ d'après H appliqué dans l'ouvert U_i qui contient h_1 ,

$\sim (f_1 \cdot \gamma^{-1}, \gamma \cdot f_2)$ d'après B',

$\sim (x \cdot f'_1 \cdot g \cdot \gamma^{-1}, \gamma \cdot f_2)$ d'après H appliqué dans l'ouvert U_i qui contient l'image du carré (1),

$\sim (x \cdot f'_1 \cdot \gamma'^{-1} \cdot \gamma' \cdot g \cdot \gamma^{-1}, \gamma \cdot f_2)$ pour la même raison,

$\sim (x, f'_1 \cdot \gamma'^{-1}, \gamma' \cdot g \cdot \gamma^{-1}, \gamma \cdot f_2)$ d'après B',

$\sim (x, x \cdot x \cdot g' \cdot \gamma'^{-1}, \gamma' g \gamma^{-1}, \gamma \cdot f_2)$ d'après H pour le carré (2),

$\sim (g' \cdot \gamma'^{-1}, \gamma' \cdot g \cdot \gamma^{-1}, \gamma \cdot f_2)$ d'après B'.

L'opération symétrique sur $\gamma \cdot f_2$ donne :

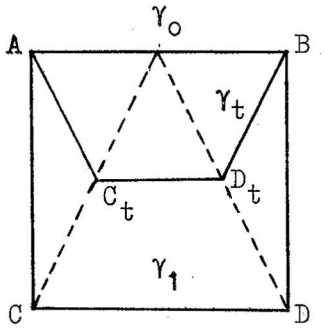
$\sim (g' \cdot \gamma'^{-1}, \gamma' \cdot g \cdot \gamma^{-1}, \gamma \cdot g^{-1} \cdot \gamma'^{-1}, \gamma' g'^{-1})$

et en appliquant deux fois B' et H, on obtient

$\sim (x)$, ce qui achève la démonstration.

Au cours de ces réductions on a utilisé le lemme suivant :

Lemme 3.- Si $\delta : I\times I \to X$ est une application continue, si γ_0 désigne le chemin restriction de δ au côté AB de $I\times I$, et γ_1 le composé des restrictions aux côtés AC, CD et DB, alors γ_0 et γ_1 sont équivalents (homotopes à extrémités $\delta(A)$ et $\delta(B)$ fixes).

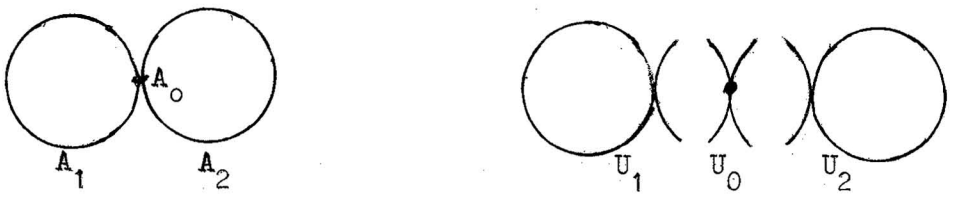


L'homotopie se déduit très facilement du schéma de la figure ci-contre.

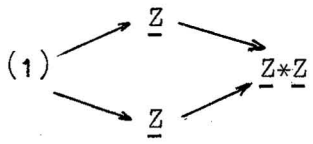
§4. Premières applications.

Remarque 6.- On applique souvent le théorème 2 lorsque $X = A_1 \cup A_2$, où A_1 et A_2 sont des parties connexes p.a. ainsi que $A_o = A_1 \cap A_2$, et que, de plus, A_1 et A_2 possèdent des voisinages ouverts U_1 et U_2 tels que les injections $A_o \subset U_o = U_1 \cap U_2$, $A_1 \subset U_1$ et $A_2 \subset U_2$ soient des homéotopies. Si $x \in A_o$, le groupe $\pi(X,x)$ est la somme de $\pi(A_1,x)$ et $\pi(A_2,x)$ amalgamée par $\pi(A_o,x)$.

PROPOSITION 2.- Le groupe fondamental de la figure 8 est un groupe libre à deux générateurs.



La figure 8 est la réunion de deux cercles A_1 et A_2 d'intersection réduite à un point A_o. On voit facilement qu'on est dans les conditions de la remarque 6 et le groupe fondamental est un groupe libre à deux générateurs, l'un étant un générateur de $\pi(A_1)$, l'autre un générateur de $\pi(A_2)$

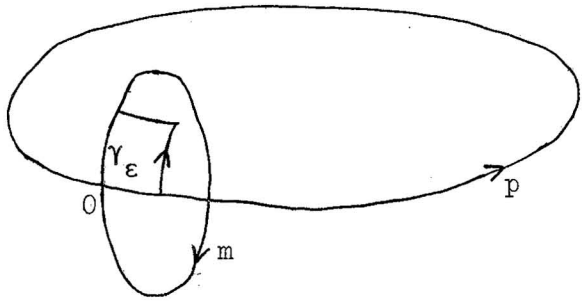


Plus généralement, on démontre, par récurrence sur n, que le groupe fondamental de la pâquerette à n pétales (ch.1, ex.4) est un groupe libre à n

générateurs.

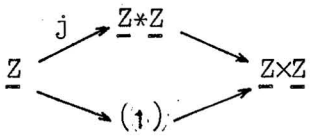
PROPOSITION 3.- Le groupe fondamental du tore percé d'un trou est un groupe libre à deux générateurs.

Soit $T_1 = S_1 \times S_1$ le tore paramétré par les couples (θ,φ) de nombres modulo 2π. Le cercle $\theta = 0$ est le méridien m (orienté φ croissant) et le cercle $\varphi = 0$ le parallèle p (orienté θ croissant). Le tore percé d'un trou est l'espace V_1 complémentaire d'un "carré" C : $0 < \theta < \varepsilon$, $0 < \varphi < \varepsilon$ (On obtient un espace homéomorphe en n'ôtant qu'un disque ouvert contenu dans le carré précédent). Cet espace est la réunion du cylindre $A_1 = (\varepsilon \leqslant \theta \leqslant 2\pi) = [\varepsilon,2\pi] \times m$ et du cylindre $A_2 = (\varepsilon \leqslant \varphi \leqslant 2\pi) = p \times [\varepsilon,2\pi]$, dont l'intersection est le carré $A_0 = [\varepsilon,2\pi] \times [\varepsilon,2\pi]$. Comme dans la prop.2, le groupe $\pi(V_1,0)$ est un groupe libre à deux générateurs, le générateur m de $\pi(A_1,0)$ et le générateur p de $\pi(A_2,0)$.



Le bord de V_1 est le bord γ_ε du carré $[0,\varepsilon] \times [0,\varepsilon]$. Parcouru dans le sens direct, γ_ε est un lacet en 0 dans V_1. La famille des bords γ_t des carrés $[0,t] \times [0,t]$, $\varepsilon \leqslant t \leqslant 2\pi$ est une homotopie entre γ_ε et le lacet $pm\,p^{-1}\,m^{-1}$. Une nouvelle application du th.2 à $T_1 = V_1 \cup C$ permet de

retrouver $\pi(T_1)$:



L'homomorphisme j envoie le générateur γ_ε de $\pi(V_1 \cap C)$ dans le commutateur $[p,m] = pm\,p^{-1}\,m^{-1}$. Le groupe $\pi(T_1) = \underline{Z}*Z/(pm\,p^{-1}\,m^{-1})$ (remarque 5) est le groupe abélien libre à deux générateurs m et p .

§5. Recollement d'espaces.

Soient X et Y deux espaces métriques, A une partie compacte de X et $f : A \to Y$ une isométrie. Sur $X \cup Y$, soit R la relation d'équivalence qui identifie a et f(a), $a \in A$. La classe $\bar{x}$ de $x \in X$ est $\{x,f(x)\}$ si $x \in A$, $\{x\}$ sinon ; la classe $\bar{y}$ de $y \in Y$ est $\{y,f^{-1}(y)\}$ si $y \in f(A)$, $\{y\}$ sinon. Sur l'espace $Z = (X \cup Y)/R$ on définit une distance par :

$$d(\bar{x},\bar{x}') = d(x,x') \qquad \text{si } x, x' \in X ,$$

$$d(\bar{y},\bar{y}') = d(y,y') \qquad \text{si } y, y' \in Y ,$$

$$d(\bar{y},\bar{x}) = d(\bar{x},\bar{y}) = \inf_{a \in A} (d(x,a)+d(f(a),y)) \qquad \text{si } x \in X , y \in Y .$$

Dans la dernière formule, la borne inférieure de la fonction continue $d(x,a)+d(f(a),y)$ est atteinte en un point a du compact A . Montrons qu'il s'agit d'une distance. Si $d(\bar{x},\bar{y}) = 0$, il existe un point $a \in A$ tel que $d(x,a) = 0$ et $d(f(a),y) = 0$, d'où $x = a$, $y = f(a)$ et $\bar{x} = \bar{y}$. La symétrie est évidente ; l'inégalité triangulaire se démontre différemment suivant les cas de figure. Si, par exemple, $x, z \in X$ et $y \in Y$, on a :

$$d(\bar{x},\bar{y}) = d(x,a)+d(f(a),y) \quad , \quad a \in A \ ,$$

$$d(\bar{y},\bar{z}) = d(y,f(a'))+d(a',z) \quad , \quad a' \in A \ ,$$

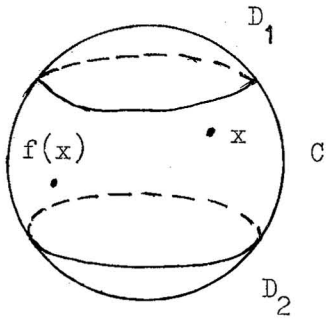
$$d(\bar{x},\bar{z}) = d(x,z) \leqslant d(x,a)+d(a,a')+d(a',z).$$

Mais $d(a,a') = d(f(a),f(a')) < d(f(a),y)+d(y,f(a'))$

puisque f est une isométrie ; d'où le résultat.

Les inclusions canoniques $i : X \to Z$ et $j : Y \to Z$ sont isométriques. En particulier $Z-j(Y) = i(X-A)$ est ouvert de sorte que $i(X)$ et $j(Y)$ sont fermés dans Z. La donnée d'une application continue $g : Z \to T$ est équivalente à la donnée d'applications continues $h : X \to T$ et $\ell : Y \to T$ telles que $h|A = \ell of$ et l'on a $h = goi$ et $\ell = goj$ (cf. ch.1, prop.6). D'autre part, si X et Y sont compacts, Z est compact.

On ne donnera pas de définition générale d'un espace obtenu en identifiant x et $f(x)$, où f est une application d'une partie A de X dans X lui-même. Dans les cas particuliers, des définitions adéquates sont faciles à trouver. Considérons, par exemple, la sphère S^2 et l'application $f : S^2 \to S^2$ de symétrie par rapport au centre. L'espace obtenu en identifiant x et $f(x)$ est <u>l'espace projectif</u> $P_2(\underline{R})$, espace des droites de $\underline{R}^3$. Si on munit P_2 de la métrique définie par $d(\bar{x},\bar{y}) = \inf d(x,y)$, $x \in \bar{x}$, $y \in \bar{y}$ l'application canonique $p : S_2 \to P_2$ est une application continue localement isométrique (elle conserve les distances inférieures à $\sqrt{2}$). De plus P_2 est un espace compact.

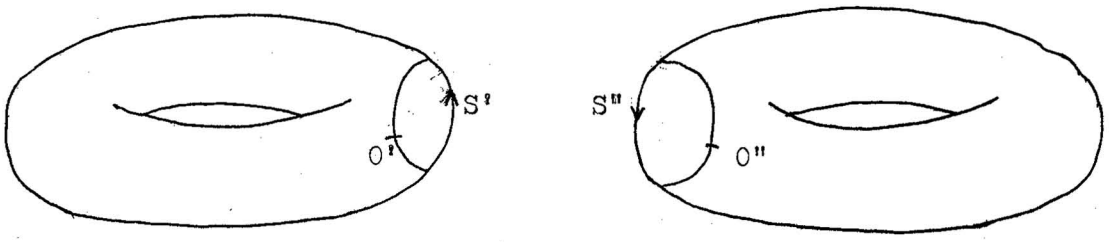


On remarque que S^2 s'obtient en recollant deux calottes D_1 et D_2 à une couronne tropicale C. La restriction de p à D_1 ou D_2 est une isométrie. L'image de C par p est une bande de Moebius M dont le bord est l'image isométrique du bord supérieur de C. L'espace P_2 est réunion de M et du disque $D = p(D_1)$, l'intersection de M et D étant leur bord commun homéomorphe à un cercle.

Le théorème de van Kampen permet souvent de calculer le groupe fondamental d'un espace obtenu par recollement.

§6. Les surfaces compactes.

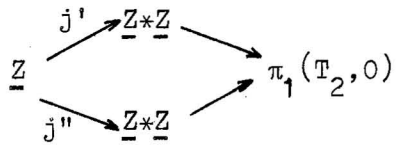
On note T_2 l'espace obtenu par recollement de deux exemplaires V_1' et V_1'' de V_1 le long de leurs bords circulaires S' et S" par l'homéomorphisme $(S',0') \to (S'',0'')$ qui renverse l'orientation. On note $S = \bar{S}' = \bar{S}''$ et on dit



que T_2 est la surface orientée de genre 2.

PROPOSITION 4.- Le groupe fondamental de la surface orientée de genre deux est le quotient du groupe libre à quatre générateurs a_1, b_1, a_2, b_2 par le sous-groupe distingué engendré par $[a_1,b_1][a_2,b_2] = a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} a_2 b_2 a_2^{-1} b_2^{-1}$.

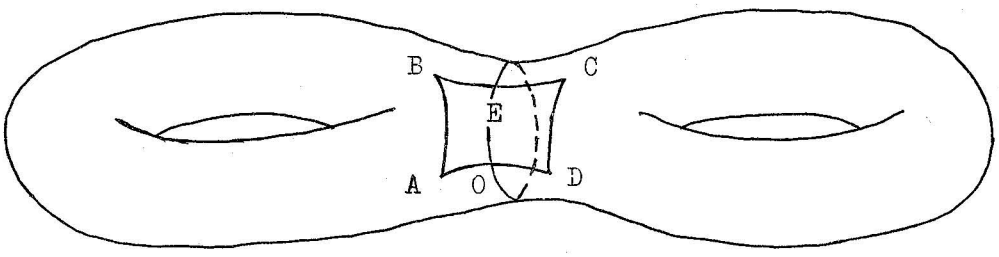
On applique de nouveau le théorème 2 avec $A_o = S$, $A_1 = V_1'$, $A_2 = V_1''$.



L'image du générateur S par j' est la classe de S', c'est-à-dire [p,m] (cf. §4) et par j" c'est le lacet inverse de S", c'est-à-dire $[p',m']^{-1} = m'\ p'\ m'^{-1}\ p'^{-1}$. Posant $a_1 = m$, $b_1 = p$, $a_2 = m'$, $b_2 = p'$, on voit que $\pi(T_2,0)$ est le quotient de $Z*Z*Z*Z$ par le sous-groupe distingué N correspondant à la relation $[a_1,b_1] = [a_2,b_2]^{-1}$. C'est le sous-groupe distingué engendré par $[a_1,b_1][a_2,b_2]$.

Désignons maintenant par V_2 l'espace obtenu en ôtant un petit carré à T_2.

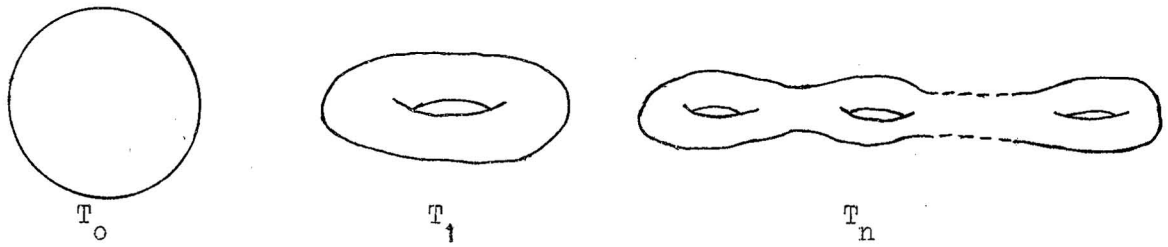
PROPOSITION 5.- Le groupe fondamental de V_2 est un groupe libre à quatre générateurs.



Supposons le carré C symétrique par rapport à S (voir figure), et soit $I = S \cap V_2$, c'est un espace homéomorphe à un segment. On a $V_2 = A' \cup A''$, où A' et A'' sont homéomorphes à V_1 et $A' \cap A'' = I$. Le théorème 2 montre que $\pi_1(V_2,0)$ est un groupe libre à quatre générateurs a_1, b_1, a_2, b_2 et le bord γ du carré C a pour classe $\bar{\gamma} = [a_1,b_1][a_2,b_2]$. En effet, le bord γ = OABECDO du carré C est un lacet en O dans V_2 homotope au composé des lacets OABEO et OECDO (le trajet EO et retour s'effectuant sur le segment I). Or on sait que la classe de OABEO est $[a_1,b_1]$ et que la classe de OECDO est $[a_2,b_2]$; d'où $\bar{\gamma} = [a_1,b_1].[a_2,b_2]$. On retrouverait $\pi_1(T_2)$ par une nouvelle application du théorème 2.

Nous admettrons pour V_2 comme pour V_1 que les résultats ci-dessus ne dépendent pas de l'endroit ou on a percé le petit trou, rond ou carré. On définit alors, par récurrence, la surface T_n orientée de genre n, ainsi que V_n:

DEFINITION.- Pour $n \geqslant 1$, V_n est l'espace obtenu en ôtant un petit disque de T_n , et T_{n+1} est obtenu en recollant V_n et V_1 le long de leurs bords. On pose $T_0 = S^2$ et $V_0 = D^2$.



PROPOSITION 6.- Le groupe fondamental de V_n est un groupe libre à $2n$ générateurs $a_1, b_1, \ldots a_n, b_n$, le bord γ de V_n a pour classe $\bar{\gamma} = [a_1, b_1][a_2, b_2]\ldots[a_n, b_n]$. Le groupe fondamental de T_n est isomorphe au quotient du précédent par le sous-groupe distingué engendré par $\bar{\gamma}$.

Démonstration par récurrence analogue à celle de la prop.5 .

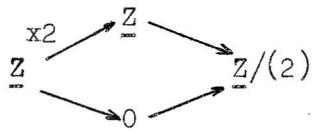
Remarque 7.- Etant données deux variétés V et V' de dimension n (ch.1, §1, note 2), un petit disque fermé D dans V est un disque de dimension n dans un ouvert de V homéomorphe à $\underline{R}^n$. On note $V \# V'$ l'espace obtenu en recollant $V-\text{int}(D)$ et $V'-\text{int}(D')$ par un homéomorphisme de leurs bords S et S' qui sont homéomorphes à la sphère S^{n-1}. On peut vérifier que $V \# V'$ est une variété de dimension n ; on dit que c'est la somme connexe des variétés V et V'. Ainsi $T_{n+1} = T_n \# T_1$. Si $n \geqslant 3$, la sphère S^{n-1} est simplement connexe (§1, remarque 1), de sorte que $\pi(V) = \pi(V-\text{int}(D)) * \pi(D) = \pi(V-\text{int}(D))$ d'après le th.2 et les remarques 4 et 5 du §2. Une nouvelle application du th.2 montre que $\pi(V \# V') = \pi(V) * \pi(V')$. Ceci est faux pour $n=2$ (prop.5 et 6).

§7. Les surfaces non orientables (4).

Le plan projectif réel P_2 est la réunion d'un disque D et d'une bande Moebius M d'intersection $S = D \cap M$ homéomorphe à un cercle (§5). Le groupe fondamental de M est infini cyclique (ch.1, §3, ex.5) et son bord S est un lacet homotope au double du générateur (en notation additive).

PROPOSITION 7.- Le groupe fondamental du plan projectif est un groupe à deux éléments.

Ceci résulte du th.2 et du diagramme :



En notation multiplicative, $\pi(P_2)$ est le quotient du groupe libre à un générateur α par le sous-groupe engendré par α^2.

La somme connexe de deux exemplaires de P_2 est le tore de Klein $U_2 = P_2 \# P_2$ qui est obtenu en recollant deux bandes de Moebius le long de leurs bords homéomorphes au cercle. En appliquant le th.2, on démontre que $\pi(U_2) = \underline{Z} * \underline{Z}/(\alpha^2\beta^2)$ où α et β sont les deux générateurs. Posons plus généralement $U_{n+1} = U_n \# P_2$, on dit que U_n est la surface non orientée de genre n, et l'on a, par récurrence :

PROPOSITION 8.- Le groupe fondamental de la surface U_n non orientée de genre n est le quotient du groupe libre à n générateurs $\alpha, \beta, \ldots, \nu$ par le sous-groupe distingué engendré par $\alpha^2\beta^2 \ldots \nu^2$.

---

(4) La notion d'orientabilité sera précisée plus loin.

Remarque 8.- On peut démontrer que $T_1 \# P_2$ est homéomorphe à $U_2 \# P_2$, d'où, par récurrence, que U_{2n+1} est homéomorphe à $T_n \# P_2$ et U_{2n+2} à $T_n \# U_2$.

Chapitre 3. Fonctions dérivables et variétés

Il est nécessaire d'indiquer la définition et quelques propriétés des fonctions dérivables pour étudier une classe particulièrement intéressante d'espaces métriques : les variétés différentiables. Plus précisément une variété différentiable est un sous-espace d'un espace euclidien $\underline{R}^n$ suffisamment "bon" pour qu'on puisse parler de fonction dérivable sur la variété (1). On s'intéresse surtout, ici, aux variétés de dimension 2 ou surfaces. Le lecteur peut trouver les démonstrations des résultats indiqués dans ce chapitre et des développements complémentaires dans J. Dieudonné, Fondements de l'analyse moderne (Gauthier-Villars, 1968) et H. Cartan, Calcul différentiel et Formes différentielles (Hermann, 1967).

§1. Applications dérivables.

Définition.- Soit U un ouvert de $\underline{R}^p$ et f une application continue de U dans $\underline{R}^q$. On dit que f est une application dérivable en $a \in U$ s'il existe une application linéaire $Df(a) : \underline{R}^p \to \underline{R}^q$ telle que :

$$\frac{\|f(x)-f(a) - Df(a).(x-a)\|}{\|x-a\|} \to 0 \quad \text{quand} \quad x \to a \quad (x \neq a).$$

L'application linéaire $Df(a) \in L(\underline{R}^p, \underline{R}^q)$, unique, si elle existe, à posséder cette propriété est l'application linéaire tangente à f en a. Le rang de

(1) On peut donner une définition intrinsèque d'une structure de variété différentiable sur un espace métrique sans supposer que c'est une partie de $\underline{R}^n$ (voir N. Bourbaki, Variétés différentielles et analytiques, Résultats §5) ; mais on peut démontrer que cette définition n'est pas plus générale que celle que nous donnons.

l'application linéaire $Df(a)$ (dimension de l'image) s'appelle le rang de f en a.

Une application linéaire $\varphi : \underline{R} \to \underline{R}$ est définie par le nombre $\varphi(1)$. La dérivée usuelle $f'(a)$ de $f : \underline{R} \to \underline{R}$ est précisément égale à $Df(a).1$. Si $f : \underline{R}^p \to \underline{R}^q$ est une application linéaire, elle est dérivable et, pour tout $a \in \underline{R}^p$, on a $Df(a) = f \in L(\underline{R}^p, \underline{R}^q)$.

Application de classe C^r.- Si f est dérivable en tout point $a \in U$, l'application $Df : U \to L(\underline{R}^p, R^q)$ qui, à $x \in U$, associe $Df(x)$ est l'application dérivée de f. Si Df est continue, on dit que f est de classe C^1, ou continuement dérivable. Si Df est dérivable, sa dérivée $D(Df)(a) \in L(\underline{R}^p, L(\underline{R}^p, \underline{R}^q))$ définit une application bilinéaire $D^2f(a) : \underline{R}^p \times \underline{R}^p \to \underline{R}^q$. Si Df est de classe C^1, on dit que f est de classe C^2 et (th. de Schwarz) $D^2f(a)$ est bilinéaire symétrique. Plus généralement, on dit, par récurrence, que f est de classe C^r si sa dérivée Df est de classe C^{r-1} ; on dit que f est de classe C^∞ si toutes ses dérivées successives D^rf sont continuement dérivables.

Dérivée d'une fonction composée.- Soient U un ouvert de $\underline{R}^p$, V un ouvert de $\underline{R}^q$ et $f : U \to \underline{R}^q$, $g : V \to \underline{R}^n$ des applications. Si f est dérivable en $a \in U$ et g en $f(a) \in V$, alors gof est dérivable en a et sa dérivée est $D(gof)(a) = Dg(f(a)) \circ Df(a) : \underline{R}^p \to \underline{R}^n$.

Dérivées partielles.- La donnée d'une application $f : U \to \underline{R}^q$ est équivalente à la donnée de q fonctions $f_1,\dots,f_q$ de p variables $x_1,\dots,x_p$. La dérivée partielle $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$ au point $a = (a_1,\dots,a_p)$ est la dérivée en $a_j \in \underline{R}$ de l'application composée $x_j \to (a_1,\dots,x_j,\dots,a_p) \to f_i(a_1,\dots,x_j,\dots,a_p)$.

D'après ce qui précède, si f est dérivable en a, elle possède des dérivées partielles et la matrice représentant $Df \in L(\underline{R}^p,R^q)$ sur les bases canoniques est la matrice jacobienne :

$$J(f) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_j} & \cdots \\ \vdots & & \vdots & \\ \frac{\partial f_i}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_i}{\partial x_j} & \cdots \\ \vdots & & \vdots & \end{pmatrix}$$

La réciproque est fausse ; cependant, pour que f soit de classe C^1 dans U, il faut et il suffit qu'elle admette dans U des dérivées partielles continues.

§2. Théorème de l'inversion locale.

Soit $f : U \to \underline{R}^q$ une application de classe C^r ; supposons que f soit une bijection de U sur un ouvert $V = f(U)$ et que son inverse f^{-1} soit dérivable. On dit alors que f est un C^r-difféomorphisme de U sur V ; on a nécessairement $p = q$, $Df^{-1}(f(a)) = (Df(a))^{-1}$ et f^{-1} est de classe C^r.

THEOREME 1 (inversion locale).- Soit $f : U \to \underline{R}^p$ une application de classe C^r ; si en un point $a \in U$ l'application tangente est de rang p (application linéaire inversible), il existe un voisinage ouvert A de a tel que la restriction $f|A$ soit un C^r-difféomorphisme de A sur $f(A)$.

Ainsi la dérivée d'une application dérivable rend compte des propriétés locales de celle-ci.

COROLLAIRE (fonctions implicites).- *Soit* U *un ouvert de* $\underline{R}^p \times \underline{R}^q$ *et* $f : U \to \underline{R}^q$ *une application de classe* C^r. *Si au point* $(a,b) \in U$ *la dérivée partielle* $D_2 f(a,b) : \underline{R}^q \to \underline{R}^q$ *est de rang* q, *il existe un voisinage* V *de* (a,b), *un voisinage* W *de* a *dans* $\underline{R}^p$ *et une application* $g : W \to \underline{R}^q$ *de classe* C^r *telle que les conditions suivantes soient équivalentes :*

(i) $(x,y) \in V$ *et* $f(x,y) = f(a,b)$,

(ii) $x \in W$ *et* $y = g(x)$.

En outre l'application $h : V \to \underline{R}^p \times \underline{R}^q$ *définie par* $h(x,y) = (x, f(x,y))$ *est un* C^r*-difféomorphisme de* V *sur* $h(V)$.

La dérivée partielle $D_2 f(a,b)$ est la dérivée de l'application $y \mapsto f(a,y)$ au point $y = b \in \underline{R}^q$. La deuxième assertion du corollaire résulte du th.1 car la dérivée $Dh(a,b) : \underline{R}^p \times \underline{R}^q \to \underline{R}^p \times \underline{R}^q$ s'exprime en matrice par blocs :

$$Dh(a,b) = \begin{pmatrix} \mathrm{id}(\underline{R}^p) & 0 \\ D_1 f(a,b) & D_2 f(a,b) \end{pmatrix}$$

C'est donc une application de rang $p+q$, et h est localement inversible. Son inverse s'écrit $h^{-1}(x,z) = (x, g(x,z))$ et il est facile de montrer que g convient pour la première assertion du corollaire.

§3. Variétés différentiables.

Définition.- Une partie M de $\underline{R}^n$ est une variété différentiable de dimension p, de classe C^r, si elle possède la propriété locale suivante :

(P) pour tout point $a \in M$, il existe un ouvert U de $\underline{R}^p$, un voisinage W de a dans $\underline{R}^n$ et une application $\varphi : U \to \underline{R}^n$ de classe C^r, de rang p, telle que $\varphi(U) = W \cap M$.

On dit que φ est une paramétrisation de M au voisinage de a. Quitte à faire une translation sur U, on peut supposer que $\varphi(0) = a$; on a alors une paramétrisation centrée en a.

La propriété (P) est équivalente à la suivante :

(P') pour tout point $a \in M$, il existe un ouvert X de $\underline{R}^n$ et un C^r-difféomorphisme ψ de X sur un voisinage W de a dans $\underline{R}^n$ tel que $\psi(X \cap \underline{R}^p) = W \cap M$, où $\underline{R}^p$ est le sous-espace $(y_{p+1} = \ldots = y_n = 0)$ de $\underline{R}^n$.

Il est clair que (P') entraîne (P) si l'on pose $U = X \cap \underline{R}^p$ et $\varphi = \psi|U$. La réciproque se déduit du lemme suivant :

LEMME.- *Si $\varphi : U \to \underline{R}^n$ est une paramétrisation de M centrée en a, il existe un voisinage X de 0 dans $\underline{R}^n$ et un C^r-difféomorphisme ψ de X sur un voisinage W' de a dans $\underline{R}^n$ tels que $X \cap \underline{R}^p = U'$ soit contenu dans U, que $\psi(U') = W' \cap M$ et que $\psi|U' = \varphi|U'$ soit une paramétrisation de M centrée en a.*

L'application φ est de rang p en 0 et l'on peut supposer, après permutation des coordonnées x_i de $\underline{R}^n$ que le déterminant de la matrice $\left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial y_j}\right)$,

$1 \leqslant i \leqslant p$, $1 \leqslant j \leqslant p$ est non nul. L'application $\psi : U \times \underline{R}^{n-p} \to \underline{R}^n$ définie par :

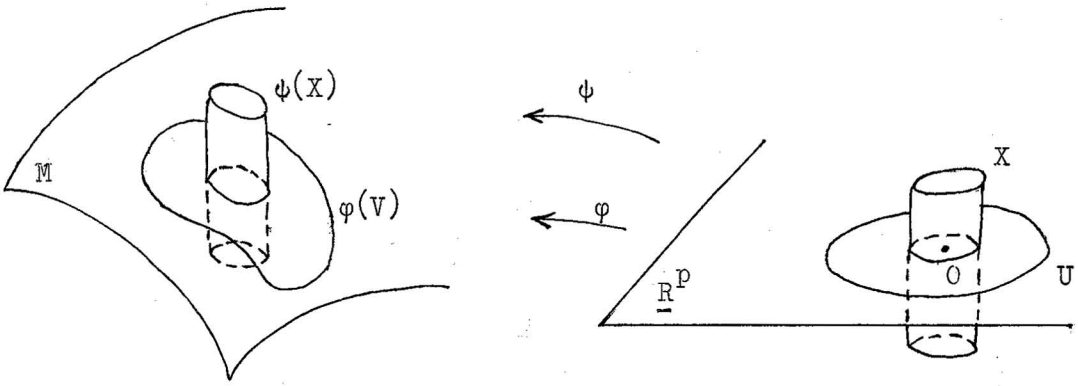
$$\psi_i(y_1,\ldots,y_n) = \varphi_i(y_1,\ldots,y_p) \quad , \quad 1 \leqslant i \leqslant p ,$$

$$\psi_{p+k}(y_1,\ldots,y_n) = y_{p+k} + \varphi_{p+k}(y_1,\ldots,y_p) \quad , \quad 1 \leqslant k \leqslant n-p ,$$

est de rang n en 0 car sa matrice jacobienne s'écrit :

$$J(\psi) = \left(\begin{array}{c|c} \dfrac{\partial \varphi_i}{\partial y_j} & \dfrac{\partial \varphi_{p+k}}{\partial y_j} \\ \hline 0 & \mathrm{id} \end{array}\right)$$

On prend pour X un voisinage de $0 \in \underline{R}^n$ assez petit pour que $\psi|X$ soit un difféomorphisme de X sur un voisinage W' de a contenu dans W.



Remarque 1.- Comme ψ est injective, il résulte du lemme qu'à condition de remplacer U par un voisinage de 0 plus petit, on peut supposer que la paramétrisation φ est injective. L'application φ^{-1} s'appelle un système de coordonnées locales au voisinage de a ou une carte centrée en a.

Remarque 2.- Une variété différentiable de dimension p est une variété de dimension p au sens de la note 2 du ch.1 puisqu'une paramétrisation est un homéomorphisme.

Exemple 1.- Une variété de dimension 1 est une courbe dans $\underline{R}^n$, une variété de dimension 2 une surface.

Exemple 2.- On vérifie que la sphère $x^2+y^2+z^2-1 = 0$ est une variété de dimension 2 dans $\underline{R}^3$. De même le tore d'équations paramétriques

$$x = (3 + \cos\varphi)\cos\theta ,$$

$$y = (3 + \cos\varphi)\sin\theta ,$$

$$z = \sin\varphi .$$

Changement de paramétrisation.- Si $\varphi : U \to \underline{R}^n$ est une paramétrisation de M au voisinage de a, U' un ouvert de $\underline{R}^p$ et $\theta : U' \to U$ un C^r-difféomorphisme, l'application $\varphi o\theta : U' \to \underline{R}^n$ est une paramétrisation de M au voisinage de a. Inversement, soit $\varphi' : U' \to \underline{R}^n$ une paramétrisation de M, montrons que $\varphi^{-1}o\varphi' = \theta$ est un C^r-difféormorphisme de U' sur U (on suppose φ et φ' injectives). L'application $\theta : U' \to U$ est bijective ; il suffit de montrer qu'elle est de rang p en tout point $y \in U'$. On peut supposer que φ est centrée en $\varphi'(y)$; soit alors $\phi : X \to \underline{R}^n$ associée à φ comme dans le lemme, et soit V un voisinage de y dans U' tel que $\varphi'(V) \subset \phi(X)$. L'application $\phi^{-1}o\varphi' : V \to \underline{R}^n$ est de rang p puisque ϕ est un difféomorphisme et son image est contenue dans R^p ; elle coïncide avec $\varphi^{-1}o\varphi$ qui est donc de rang p. Ainsi, tout changement de paramétrisation provient d'un C^r-difféomorphisme de la source.

Application dérivable de variété dans variété.- Soit $f : M \to M'$ une application continue. On dit que f est dérivable en $a \in M$ si, pour toute

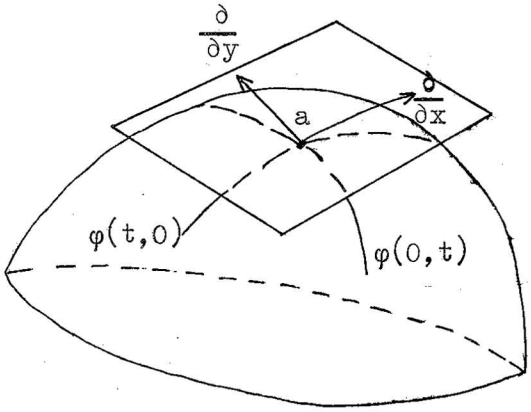
paramétrisation φ de M centrée en a, l'application $f\circ\varphi' : U \to M' \subset \underline{R}^{n'}$ est différentiable en 0. Ceci ne dépend pas du choix de φ (voir ci-dessus). On dit que f est dérivable si elle est dérivable en tout point de M. Le rang de f en a est le rang, indépendant de φ, de $f\circ\varphi$ en 0. Si f est bijective et si f^{-1} est dérivable, on dit que f est un difféomorphisme. Il est équivalent de dire que f est bijective et de rang égal à la dimension de M. En particulier, si $\varphi : U \to M$ est un paramétrage, $\varphi^{-1} : \varphi(U) \to U$ est un difféomorphisme.

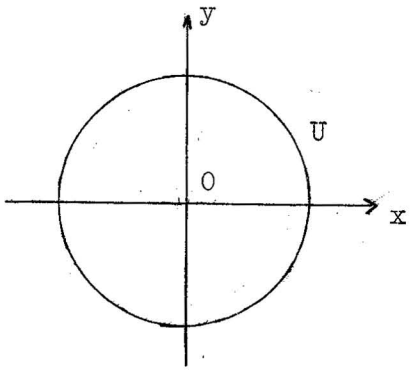
Plan tangent (cas des surfaces).- Soit $\varphi : U \to \underline{R}^n$ un paramétrage de M centré en a. L'image de l'application linéaire affine de rang deux $a + D\varphi : \underline{R}^2 \to \underline{R}^n$ est un plan passant par a qu'on appelle le plan tangent $T_a(M)$. Il est indépendant du paramétrage φ. Tout autre paramétrage s'écrit $\varphi\circ\theta$ où θ est un difféomorphisme, et l'image de $D(\varphi\circ\theta) = D\varphi\circ D\theta$ est celle de $D\varphi$. Soit $x = x(t)$, $y = y(t)$ une courbe dérivable dans $\underline{R}^2$, passant par 0 pour $t=0$. Le vecteur tangent en a à la courbe $\varphi(x(t),y(t))$ tracée sur la surface M est le vecteur d'origine a et d'extrémité $a + D\varphi(x'(0),y'(0))$; il est dans le plan tangent $T_a(M)$. Notons $\frac{\partial}{\partial x}$ le vecteur tangent à $\varphi(t,0)$ et $\frac{\partial}{\partial y}$ le vecteur tangent à $\varphi(0,t)$; ces vecteurs engendrent $T_a(M)$ et un vecteur tangent A s'écrit de façon unique $\alpha \frac{\partial}{\partial x} + \beta \frac{\partial}{\partial y}$; c'est le vecteur vitesse de $\varphi(\alpha t, \beta t)$. Si $x = x(u,v)$, $y = y(u,v)$ est un changement de coordonnées locales de dérivée $D\theta = \begin{pmatrix} x'_u & x'_v \\ y'_u & y'_v \end{pmatrix}$ on a :

$$\frac{\partial}{\partial u} = x'_u \frac{\partial}{\partial x} + y'_u \frac{\partial}{\partial y} ,$$

$$\frac{\partial}{\partial v} = x'_v \frac{\partial}{\partial x} + y'_v \frac{\partial}{\partial y} ,$$

d'où $A = \alpha \frac{\partial}{\partial x} + \beta \frac{\partial}{\partial y} = \alpha' \frac{\partial}{\partial u} + \beta' \frac{\partial}{\partial v}$ avec $(\alpha,\beta) = D\theta(\alpha',\beta')$.





Application tangente.- Soit $f : M \to M'$ une application différentiable et φ un paramétrage de M au voisinage de a. L'application qui au vecteur tangent $A = \alpha \frac{\partial}{\partial x} + \beta \frac{\partial}{\partial y}$ associe le vecteur d'origine $b = f(a)$, d'extrémité $b + D(f\circ\varphi)(\alpha,\beta)$ est une application du plan $T_a(M)$ dans le plan $T_b(M')$. Elle ne dépend pas du paramétrage choisi car $D(f\circ\varphi\circ\theta)(\alpha',\beta') = D(f\circ\varphi)\circ D(\theta)(\alpha',\beta') = D(f\circ\varphi)(\alpha,\beta)$. Cette application, notée Df, s'appelle l'application tangente à f en a.

§4. Valeurs régulières d'une fonction dérivable.

Soit $f : M \to \underline{R}$ une fonction dérivable sur une variété de dimension p. Un point $a \in M$ est un point critique de f si $Df(a) : T_a(M) \to \underline{R}$ est nulle. On dit que $f(a)$ est une valeur critique de f. Une valeur régulière est un nombre qui n'est pas valeur critique (pour aucun point critique $a \in M$).

PROPOSITION 1.- Si y est une valeur régulière de $f : M \to \underline{R}$, alors $f^{-1}(y) = N$ est une variété de dimension $p-1$.

Pour la démonstration, on suppose que M est une surface ([2]). Supposons que N n'est pas vide et soit $a \in N$. Si l'on trouve un voisinage V de a dans M et un système de coordonnées locales $\phi^{-1}(x) = (f(x),v(x))$ dans V, l'une d'elles étant la fonction f, alors N est une variété (une courbe) ; elle est paramétrée par $\phi(y,v)$, puisque N est l'ensemble des points x tels que $f(x) = y$.

Soit $\varphi(u,v)$ une paramétrisation de M centrée en a. Comme $Df(a) \neq 0$ on peut supposer, quitte à intervertir u et v, que $Df.\frac{\partial}{\partial u} = \frac{d}{du}(f\circ\varphi(u,0))$ n'est pas nul pour $u=0$. Il résulte alors du corollaire du théorème 1 que $\theta(u,v) = (f\circ\varphi(u,v),v)$ est de rang 2 en 0 et que $(f(x),v(x)) = (\varphi\circ\theta)^{-1}(x)$ est un système de coordonnées locales sur M au voisinage de a.

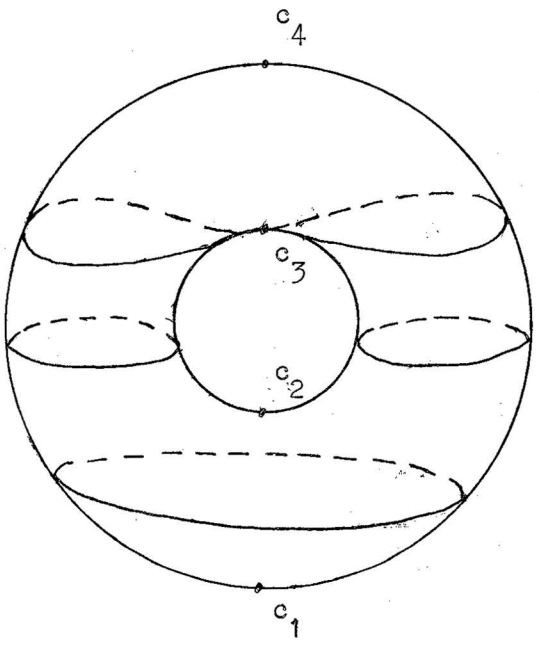
Exemple 3.- La valeur 0 est régulière pour une fonction $f(x,y,z)$ sur $\underline{R}^3$ si $f(x,y,z) = 0$ entraîne qu'au moins une des dérivées partielles f'_x, f'_y,

---

([2]) La proposition 1 est néanmoins valable pour toute dimension p.

f'_z n'est pas nulle. L'équation $f(x,y,z) = 0$ définit alors une surface (cf. exemple 2).

Exemple 4.- Sur une surface M dans $\underline{R}^3$, la projection sur l'axe Oz définit la fonction cote z. Sa dérivée Dz est la projection du plan tangent. Elle s'annule aux points critiques : ce sont les points à plan tangent horizontal. La figure montre un tore d'axe Ox et quatre points critiques de la fonction cote. Les valeurs critiques sont les cotes des sections horizontales qui ne sont pas des courbes.



§5. Points critiques.

Soient M une surface, $f : M \to \underline{R}$ une fonction de classe C^r $(r \geqslant 3)$ et $c \in M$ un point critique de f, c'est-à-dire que $Df(c) = 0$. Soit $\varphi(x,y)$ un paramétrage de M centré en a ; la fonction $g(x,y) = f(\varphi(x,y))$ a un point critique en 0. La dérivée seconde en 0 de g est un élément $D(D(g))(0)$ de $L(\underline{R}^2, L(\underline{R}^2, \underline{R}))$ auquel est associée canoniquement une application bilinéaire symétrique $D^2g \in Bil(\underline{R}^2 \times \underline{R}^2, \underline{R})$. Elle est représentée par la matrice (Hessienne) :

$$H(g) = \begin{pmatrix} g''_{x^2} & g''_{xy} \\ g''_{yx} & g''_{y^2} \end{pmatrix}$$

Soit θ un changement de paramétrage $x = x(u,v)$, $y = y(u,v)$. Après le changement de paramétrage θ, on a :

$$\frac{\partial h}{\partial u} = \frac{\partial}{\partial u}(g(\theta(u,v))) = g'_x\, x'_u + g'_y\, y'_u ,$$

$$\frac{\partial^2 h}{\partial u^2} = g''_{x^2}(x'_u)^2 + 2\, g''_{xy}\, x'_u\, y'_u + g''_{y^2}(y'_u)^2 + g'_x\, x''_{u^2} + g'_y\, y''_{u^2} ,$$

et de même pour les autres dérivées secondes, d'où, l'application bilinéaire

$$D^2h(A'',B'') = D^2g(D\theta.A'', D\theta.B'') + Dg.D^2\theta(A'',B'') , \quad \text{avec } A'' \text{ et } B'' \in \underline{R}^2 .$$

Lorsque le point 0 est critique pour g, on a $Dg = 0$ d'où

$$(1) \qquad D^2h(A'',B'') = D^2g(D\theta.A'', D\theta.B'')$$

soit $$H(h) = {}^tJ(\theta).H(g).J(\theta).$$

Dans ce cas, on définit une forme bilinéaire symétrique sur le plan tangent $T_c(M)$ en posant :

$$D^2f(A,B) = D^2g(A',B')$$

si $A = D\varphi(A')$ et $B = D\varphi(B')$. D'après (1), ceci ne dépend pas du choix du paramétrage.

Remarque 3.- Il est essentiel que le point c soit critique, afin que dans la formule (1) n'intervienne que la dérivée première du changement de paramétrage θ. En général, on ne peut pas parler de dérivée seconde sur une variété sans préciser les coordonnées locales, tandis que la dérivée première (§3) est toujours définie.

Les caractéristiques de la forme bilinéaire D^2f en un point critique c, et de la forme quadratique associée sont indépendantes du paramétrage. On dit que le point critique est non-dégénéré si D^2f est non-dégénérée, c'est-à-dire si le déterminant Hessien n'est pas nul. L'indice du point critique non-dégénéré c est l'indice de la forme quadratique associée à D^2f : c'est la dimension du plus grand sous-espace où la forme quadratique est définie négative. L'indice est 0, 1 ou 2 suivant que D^2f est positive, hyperbolique, ou négative.

THEOREME 2 (Morse 1932) ([3]).- Soit c un point critique non-dégénéré de $f : M \to R$, de classe C^r $(r \geqslant 3)$. Il existe un paramétrage φ par des coordonnées locales (X,Y) d'un voisinage $\varphi(U)$ de c tel que

([3]) Il y a un analogue de ce théorème pour les fonctions sur une variété de dimension p quelconque.

$$f(\varphi(X,Y)) = f(c) + \begin{cases} X^2+Y^2 & \text{si l'indice est } 0\ , \\ X^2-Y^2 & \text{si l'indice est } 1\ , \\ -X^2-Y^2 & \text{si l'indice est } 2\ . \end{cases}$$

Soit ψ un paramétrage de M centré en c par des coordonnées locales (x,y) et soit $g(x,y) = f(\psi(x,y))$. Il suffit de montrer :

LEMME.- Soit $g : U \to \underline{R}$ une fonction de classe C^r $(r \geqslant 3)$ définie dans un voisinage U de 0 dans $\underline{R}^2$, pour laquelle 0 est un point critique non-dégénéré d'indice i. Il existe un difféomorphisme $(x,y) = \theta(X,Y)$ d'un voisinage V de 0 dans $\underline{R}^2$ sur un voisinage $\theta(V)$ de 0 dans U tel que

$$g(\theta(X,Y)) = g(0) + \begin{cases} X^2+Y^2 & \text{si } i=0\ , \\ X^2-Y^2 & \text{si } i=1\ , \\ -X^2-Y^2 & \text{si } i=2\ . \end{cases}$$

Avec les notations classiques $\frac{1}{2}\, g''_{x^2}(0) = r$, $\frac{1}{2}\, g''_{xy}(0) = s$, $\frac{1}{2}\, g''_{y^2}(0) = t$, le point 0 est non dégénéré si $rt-s^2 \neq 0$. La formule de Taylor avec reste intégral s'écrit :

$$g(x,y) - g(0) = R(x,y)x^2 + 2S(x,y)x_y + T(x,y)y^2$$

où
$$R(x,y) = \int_0^1 (1-t)\, g''_{x^2}(tx)dt \quad , \quad R(0) = r\ ,$$

$$S(x,y) = \int_0^1 (1-t)\, g''_{xy}(tx)dt \quad , \quad S(0) = s\ ,$$

$$T(x,y) = \int_0^1 (1-t)\, g''_{y^2}(tx)dt \quad , \quad T(0) = t\ .$$

1er cas : $rt-s^2 > 0$, r et $t > 0$. Au voisinage de 0 , on a R et $T > 0$.

$$g(x,y) - g(0) = R(x,y)\left(x + y\, \frac{S(x,y)}{R(x,y)}\right)^2 + y^2\, \frac{R(x,y)T(x,y)-S(x,y)^2}{R(x,y)}$$

Posons : $\begin{cases} X = \sqrt{R}\,(x + y\,\frac{S}{R}) \\ Y = y\sqrt{\frac{RT-S^2}{R}} \end{cases}$,

on a $g(x,y) - g(0) = X^2+Y^2$; l'indice du point critique est 0 . Le couple (X,Y) est un système de coordonnées locales si la matrice jacobienne $\frac{D(X,Y)}{D(x,y)}$ est de rang 2 à l'origine. Or on a, à l'origine :

$$\frac{\partial X}{\partial x} = \sqrt{r} \quad , \quad \frac{\partial Y}{\partial x} = 0 \quad , \quad \frac{\partial Y}{\partial y} = \sqrt{\frac{rt-s^2}{r}}$$

et le déterminant jacobien est $\sqrt{rt-s^2} \neq 0$.

2ème cas : $rt-s^2 > 0$, r et $t < 0$. On se ramène au premier cas en considérant $-g$. D'où $g(x,y)-g(0) = -X^2-Y^2$; l'indice du point critique est 2 .

3ème cas : $rt-s^2 < 0$. On raisonne comme au premier cas si r ou t n'est pas nul. Sinon, on se ramène à cette hypothèse par un changement linéaire de coordonnées. On trouve alors $g(x,y)-g(0) = X^2-Y^2$; l'indice du point critique est 1.

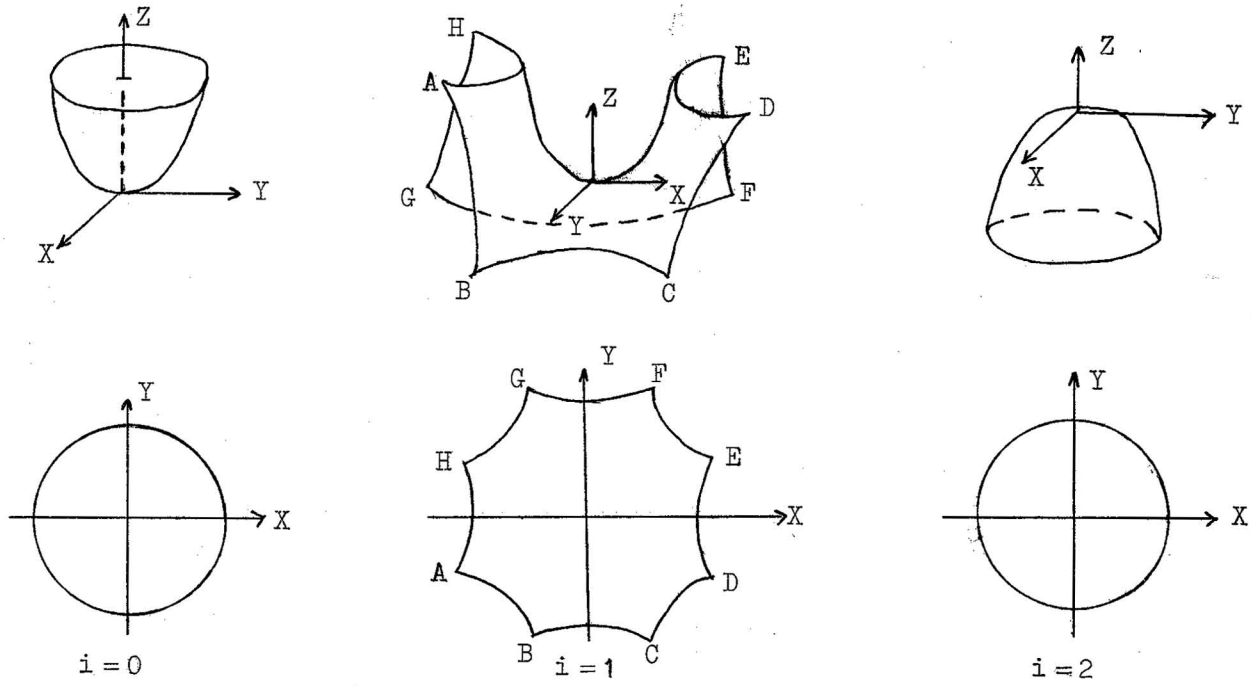
Etude des modèles.- D'après le théorème 2, il existe au voisinage d'un point critique non dégénéré c des coordonnées locales (X,Y) avec lesquelles f s'exprime comme la somme d'une constante et d'une forme quadratique. Les fonctions modèles sont : $g_0(X,Y) = X^2+Y^2$,

$$g_1(X,Y) = X^2-Y^2 ,$$

$$g_2(X,Y) = -X^2-Y^2 .$$

Les surfaces représentatives des fonctions $Z = g_i(X,Y)$, $i = 0,1,2$ sont respectivement un paraboloïde de révolution d'axe OZ , un paraboloïde hyperbo-

lique équilatère de direction principale $Z=0$, et un paraboloïde de révolution d'axe OZ .



Un voisinage modèle pour la fonction g_i , c'est un voisinage $U(s)$, $s > 0$, de 0 dans $\underline{R}^2$ défini comme suit :

<u>$i=0$</u> : $U(s)$ est le disque de rayon $\sqrt{s}$; c'est l'ensemble des points où $g_o(X,Y) \leqslant s$. Il est limité par la ligne de niveau $g_o(X,Y) = s$.

<u>$i=1$</u> : les lignes de niveau de g_1 sont les hyperboles $X^2-Y^2 = c^{te}$, leurs trajectoires orthogonales les hyperboles $XY = c^{te}$. Le voisinage $U(s)$ est l'ensemble des points où $|X^2-Y^2| \leqslant s$ et $|XY| \leqslant s$. Il est limité par les arcs

BC et FG de l'hyperbole $X^2-Y^2 = -s$ (ligne de niveau inférieure),

AH et DE de l'hyperbole $X^2-Y^2 = s$ (ligne de niveau supérieure),

AB et EF de l'hyperbole $XY = s$,

CD et GH de l'hyperbole $XY = -s$.

Il est clairement homéomorphe à un octogone.

$\underline{i=2}$: $U(s)$ est le disque de rayon $\sqrt{s}$; c'est l'ensemble des points où $g_2(X,Y) \geqslant -s$. Il est limité par la ligne de niveau $g_2(X,Y) = -s$.

Voisinage canonique.- Un voisinage canonique U d'un point critique non-dégénéré c de $f : M \to \underline{R}$ est la donnée d'une paramétrisation $\varphi : U(s) \to M$ de M centrée en c , d'image notée U par abus de langage, et telle que $f(\varphi(X,Y)) = f(c) + g_i(X,Y)$ si i est l'indice du point critique c .
Le théorème 2 assure l'existence de voisinages canoniques.

COROLLAIRE.- Les points critiques non-dégénérés sont des points critiques isolés.

On vérifie pour $i = 0,1,2$ que 0 est le seul point critique de la fonction g_i . Il en résulte que c est le seul point critique de f dans un voisinage canonique U de c .

Chapitre 4. Fonctions de Morse sur les surfaces

La donnée sur une surface compacte M d'une fonction de Morse (définie ci-dessous) nous permettra au chapitre suivant de reconstituer la structure topologique globale de l'espace M, c'est-à-dire de déterminer M à homéomorphisme près. Le présent chapitre est consacré à l'étude du comportement d'une fonction de Morse au voisinage des points réguliers et des points critiques. On pourrait développer cette théorie pour les variétés de dimension p quelconque on se bornera au cas des surfaces. Dans tout le chapitre, on désigne par M une surface compacte.

§1. Fonction de Morse sur une surface compacte.

Soit $f : M \to \underline{R}$ une fonction de classe C^r $(r \geqslant 3)$ dont tous les points critiques sont non-dégénérés. Il résulte du corollaire du th.2 (ch.3, §5) qu'une telle fonction a un nombre fini de points critiques. En effet, comme M est compacte, s'il y avait une infinité de points critiques, il y aurait un point $x \in M$ qui serait point d'accumulation de points critiques. En un tel point, $Df(x) = 0$ car Df est continue et le point x serait critique, ce qui est impossible car il résulte de l'hypothèse sur f que les points critiques sont isolés.

Une fonction de Morse $f : M \to \underline{R}$ est une fonction dont tous les points critiques sont non-dégénérés et les valeurs critiques correspondantes (en nombre

fini) toutes distinctes. Nous admettrons le théorème suivant (1) :

THEOREME 1.- Soit M une surface compacte et $g : M \to \underline{R}$ une fonction continue. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une fonction (2) de Morse $f : M \to \underline{R}$ telle que $\|f-g\| \leqslant \varepsilon$.

C'est le premier théorème global que nous rencontrions : le chapitre 3 ne concerne que des propriétés locales des variétés. Ce théorème est, pour les surfaces, une propriété globale assez forte pour qu'on puisse en déduire la classification de toutes les surfaces compactes.

§2. Champ de vecteurs et groupe à un paramètre de difféomorphismes.

Un groupe à un paramètre de difféomorphismes de classe C^r d'une variété M est une application $\varphi : \underline{R} \times M \to M$, notée $(t,x) \mapsto \varphi_t(x)$, telle que

(i) pour tout t, l'application $\varphi_t : M \to M$ est un C^r-difféomorphisme,

(ii) pour tous s et t, on a $\varphi_{s+t} = \varphi_t \circ \varphi_s$, en particulier $\varphi_o = id(M)$.

Pour $x \in M$, le vecteur vitesse au point $t=0$ du chemin différentiable $t \mapsto \varphi_t(x)$ est un vecteur $X(x) = \left[\frac{\partial}{\partial t} \varphi_t(x)\right]_{t=0}$, tangent à M au point x. Ses coordonnées locales sont fonctions de classe C^{r-1} de x. Une telle donnée, pour tout $x \in M$, d'un vecteur tangent en x à M, fonction de classe C^{r-1} de X est un champ de vecteurs tangents à M, de classe C^{r-1}. Dans le cas qui nous intéresse, on dit que le champ $X(x)$ engendre le groupe à un

(1) On en trouve une démonstration "élémentaire" dans J. Milnor, Morse theory, notes by M. Spivack et R. Wells, Princeton University Press, 1963.

(2) Dans la suite, si l'on ne précise pas la classe d'une fonction dérivable, c'est qu'elle est de classe C^∞.

paramètre φ . Remarquons que $X(\varphi_t(x)) = \left[\frac{\partial}{\partial u}\ \varphi_u(x)\right]_{t=u}$ car, si $u = t+h$, $\frac{\partial}{\partial u}\ \varphi_u(x) = \frac{\partial}{\partial h}\ \varphi_{t+h}(x) = \frac{\partial}{\partial h}\ \varphi_h(\varphi_t(x))$ (d'après (ii).

THEOREME 2.- Soit M une surface compacte et X un champ de vecteurs tangents à M , de classe C^r . Il existe un unique groupe à un paramètre de difféomorphismes de M , de classe C^r , engendré par X .

Cherchons d'abord pour chaque $x \in M$ une courbe paramétrée sur M , de la forme $y = \varphi_t(x)$, telle que

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\ (\varphi_t(x)) = X(\varphi_t(x)) & (1) \\ \varphi_o(x) = x & (2) \end{cases}$$

Avec des coordonnées locales (x_1,x_2) sur M , pour lesquelles $X(x) = X_1(x_1,x_2)\frac{\partial}{\partial x_1} + X_2(x_1,x_2)\frac{\partial}{\partial x_2}$, on cherche deux fonctions $y_1(t)$, $y_2(t)$ solutions du système

$$\frac{dy_1}{dt} = X_1(y_1,y_2) \quad , \quad \frac{dy_2}{dt} = X_2(y_1,y_2)$$

satisfaisant à $y_1(0) = x_1$ et $y_2(0) = x_2$. Pour un tel système, on a un théorème d'existence et d'unicité locale des solutions :

THEOREME 3.- Pour tout point $x_o \in M$, il existe un voisinage U de x_o dans M et un nombre $\varepsilon > 0$ tel que l'équation (1,2) ait une solution unique $y = \varphi_t(x)$ définie pour $|t| < \varepsilon$, quel que soit $x \in U$, et dépendant de classe C^r de (x,t).

Prenons un recouvrement fini du compact M par des ouverts U donnés par le th.3, et soit η le plus petit des ε correspondants. On a donc une application $\varphi :]-\eta,\eta[\times M \to M$ de classe C^r définie par $(t,x) \mapsto \varphi_t(x)$.

Si $|t|$, $|s|$ et $|s+t| < \eta$, on a $\varphi_{t+s}(x) = \varphi_t(\varphi_s(x))$. En effet, supposant s constant, $\varphi_{t+s}(x)$ et $\varphi_t(\varphi_s(x))$ sont des solutions de (1) qui, pour $t=0$, valent $\varphi_s(x)$. Elles sont égales d'après le th.3. Du fait que $\varphi_o(x) = x$, il résulte que $\varphi_t \circ \varphi_{-t} = \varphi_{-t} \circ \varphi_t = id(M)$ et que φ_t est un difféomorphisme. On a un "noyau de groupe à un paramètre". Il reste à l'étendre à toutes les valeurs de $t \in \underline{R}$. Pour cela, on pose

$$\varphi_{nt} = \varphi_t \circ \varphi_t \circ \ldots \circ \varphi_t \quad (n \text{ fois})$$

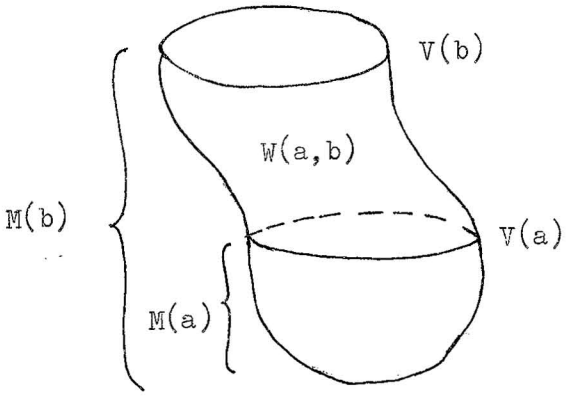
et l'on vérifie sans peine qu'on a défini un groupe à un paramètre.

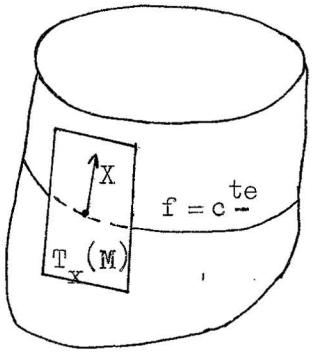
§3. Valeurs régulières d'une fonction de Morse.

Soit $f : M \to \underline{R}$ une fonction de Morse. Si a est une valeur régulière (non critique), on note $V(a)$ la courbe (ch.3, §4, prop.1) $f^{-1}(a)$, courbe de niveau a de la fonction f, et on note $M(a) = f^{-1}(]-\infty,a])$ l'ensemble des points de M tels que $f(x) \leqslant a$. L'intérieur de $M(a)$ est l'ensemble des points où $f(x) < a$; sa frontière est $V(a)$. Si $b < a$ est une autre valeur régulière, on note $W(a,b)$ le compact $M(b)-\text{int}(M(a)) = f^{-1}([a,b])$.

PROPOSITION 1.- *Supposons que la fonction de Morse $f : M \to \underline{R}$ n'ait pas de valeur critique comprise entre a et b, alors $V(a)$ est difféomorphe à $V(b)$, $M(a)$ est difféomorphe à $M(b)$ et $W(a,b)$ est difféomorphe à $V(a) \times [a,b]$.*

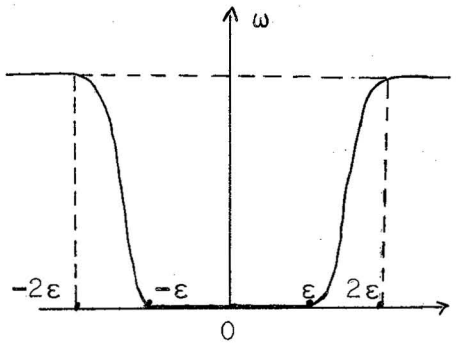
Pour donner un sens aux deux dernières assertions, il faudrait élargir la notion d'application dérivable et de variété aux variétés à bord. Nous nous contenterons de trouver un homéomorphisme de $M(a)$ sur $M(b)$ qui induise un difféomorphisme des intérieurs et un difféomorphisme des frontières (qui sont des courbes).





Pour tout point $x \in M$ non critique, choisissons un vecteur tangent $X(x) \in T_x(M)$, transversal à la courbe de niveau $f(x) = c^{te}$ et dirigé dans le sens de la croissance de f ; c'est-à-dire un vecteur $X(x) = \alpha \frac{\partial}{\partial u} + \beta \frac{\partial}{\partial v}$ tel que $Df.X(x) = \alpha \frac{\partial f}{\partial u} + \beta \frac{\partial f}{\partial v} > 0$. On peut choisir $X(x)$ dépendant différentiablement de x , par exemple en choisissant $X(x)$ de longueur 1 et orthogonal aux courbes de niveau de f .

On aura besoin d'une fonction dérivable $\alpha : M \to \underline{R}$ nulle au voisinage des points critiques de f et égale à 1 hors d'un voisinage de ces points critiques. On peut la construire de la manière suivante. Dans $\underline{R}^2$ soit ω une fonction dérivable égale à 0 dans la boule $D(\varepsilon)$ de rayon ε et à 1 hors de la boule $D(2\varepsilon)$ de rayon 2ε . Si $\varphi : D(2\varepsilon) \to M$ est une paramétrisation centrée au



point critique c , on pose, pour $x \in \varphi(D(2\varepsilon))$, $\alpha(x) = \omega(\varphi^{-1}(x))$. Si les voisinages $\varphi(D(2\varepsilon))$ des divers points critiques (isolés) sont assez petits pour être disjoints, on prolonge α par 1 en dehors de ces voisinages.

Posons :

$$Y(x) = \frac{\alpha(x)}{Df.X(x)} \cdot X(x) \quad \text{si } x \text{ n'est pas critique,}$$

$$Y(x) = 0 \quad \text{si } x \text{ est critique.}$$

Le champ de vecteurs $Y(x)$ est différentiable et l'on a $Df.Y(x) = \alpha(x)$. Comme il n'y a pas de points critiques dans le compact $W(a,b)$, on peut supposer que α vaut 1 dans cette partie. Soit φ_t le groupe à un paramètre de difféomorphismes de M associé au champ $Y(x)$. On a :

$$\frac{d}{dt}(f(\varphi_t(x))) = Df.X(\varphi_t(x)) = \alpha(\varphi_t(x)).$$

La fonction $t \mapsto f(\varphi_t(x))$ est linéaire de dérivée 1 pourvu que $\alpha(\varphi_t(x)) = 1$; c'est le cas si $f(\varphi_t(x)) \in [a,b]$. En particulier, le difféomorphisme φ_{b-a} envoie $M(a)$ sur $M(b)$ et $V(a)$ sur $V(b)$. L'application $\psi : V(a) \times [a,b] \to W(a,b)$ définie par $\psi(x,t) = \varphi_{t-a}(x)$ est un "difféomorphisme" dont l'inverse est $\psi^{-1}(y) = (\varphi_{a-f(y)}(y), f(y))$.

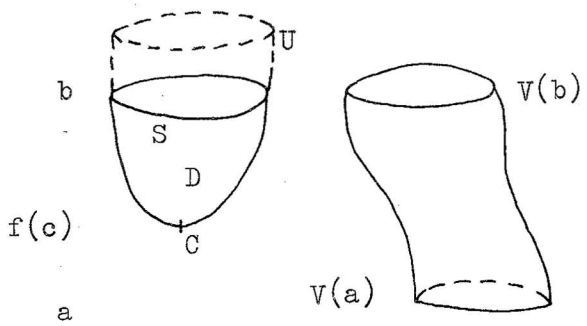
Ainsi lorsque a varie continuement dans l'ensemble des valeurs régulières de f , les variétés $M(a)$ et $V(a)$ sont invariantes à difféomorphismes près. La courbe $V(a)$ est compacte (fermée dans M compacte). Nous

admettons qu'elle est réunion d'un nombre fini de cercles (à difféomorphisme près) qui sont ses composantes connexes par arcs (cf. ci-dessous ch.5). Le nombre des composantes de $V(a)$ ne varie pas tant que a ne franchit pas de valeur critique.

§4. Franchissement d'une valeur critique.

Si a et b sont des valeurs régulières de f entre lesquelles il n'y a qu'une valeur critique $f(c)$ correspondant à un point critique c, les variétés $M(a)$ et $M(b)$ ne sont pas homéomorphes, et $V(a)$ peut-être différent de $V(b)$. Nous allons étudier les changements produits par le franchissement d'une valeur critique. Il résulte du §3 qu'on peut supposer a et b aussi voisins de $f(c)$ qu'on veut. On prendra $a = f(c)-\varepsilon$, $b = f(c)+\varepsilon$ en s'autorisant à choisir $\varepsilon > 0$ aussi petit qu'on veut.

1er cas : indice 0. Si c est un point critique d'indice 0, alors $M(b)$ est difféomorphe à l'union disjointe de $M(a)$ et d'un disque D (de dimension 2) ; et $V(b)$ à l'union de $V(a)$ et du cercle S, bord du disque D.



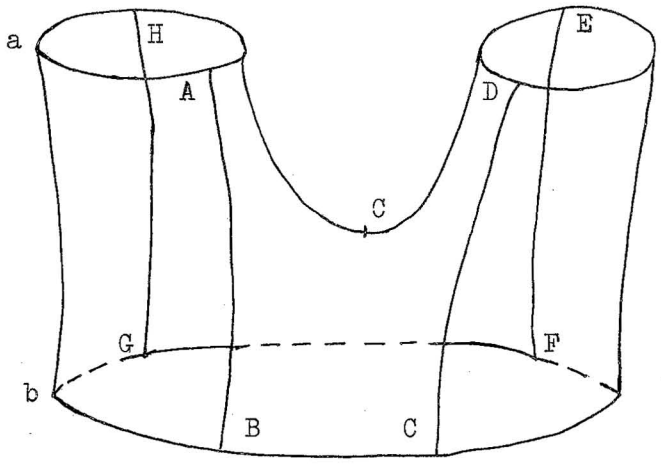
Soit U un voisinage canonique de c limité par la courbe de niveau $f(c)+2\varepsilon$; l'intersection $D = M(b) \cap U$ est difféomorphe au disque $X^2+Y^2 \leqslant \varepsilon$, et sa frontière $S = V(b) \cap U$ au cercle $X^2+Y^2 = \varepsilon$, cependant que $V(a) \cap U$ et $M(a) \cap U$ sont vides.

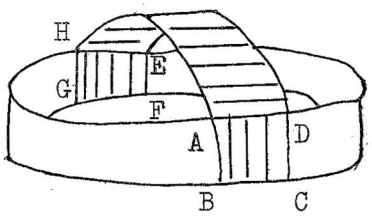
On raisonne alors comme au §3, avec une fonction α nulle dans un voisinage du disque D . On obtient un difféomorphisme φ_{b-a} de M(b)-D sur M(a) qui induit un difféomorphisme de V(b)-S sur V(a).

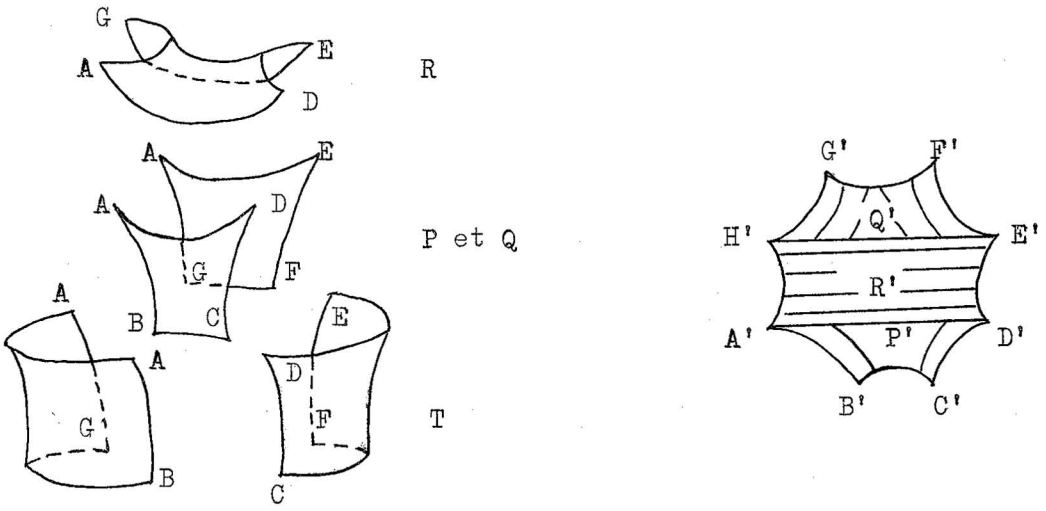
2ème cas : indice 2. Si c est un point critique d'indice 2, alors M(b) est homéomorphe à l'espace obtenu en collant à M(a) un disque D le long d'une composante S (circulaire) de V(a) et V(b) est difféomorphe à V(a)-S.

Il suffit d'appliquer le 1er cas à la fonction -f en échangeant les rôles de a et b .

3ème cas : indice 1. Si c est un point critique d'indice 1, alors M(b) est homéomorphe à l'espace obtenu en collant à M(a) un rectangle, par deux de ses côtés opposés, le long de deux segments disjoints I et J contenus dans V(a) ; la transformation de V(a) en V(b) dépend des cas de figures : le nombre des composantes connexes (circulaires) de V(b) diffère de celui de V(a) de -1, 0 ou 1.







Soit $U' = \varphi(U(2\varepsilon))$ un voisinage canonique de c et $U = \varphi(U(\varepsilon))$ un voisinage canonique plus petit, compris entre les niveaux $a = f(c)-\varepsilon$ et $b = f(c)+\varepsilon$. L'espace $M(b)$ est obtenu en collant $W(a,b)$ à $M(a)$ le long de $V(a)$. L'espace $W(a,b)$ s'obtient par recollement de U et de $T = \overline{W(a,b)-U}$. On décomposera enfin U en trois morceaux P, Q et R, et c'est ainsi qu'on reconstruira $M(b)$ avec beaucoup de collages. L'intersection de U et $V(a)$ est constituée de deux segments $I = BC$ et $J = FG$. L'intersection de T et $V(a)$ est l'adhérence K de $V(a)-(I \cup J)$.

Montrons d'abord que T est homéomorphe à $K \times [a,b]$. Cela se fait encore à l'aide d'un groupe à un paramètre φ_t de difféomorphismes de M. On raisonne comme au §3 avec une fonction α nulle au voisinage de c et égale à 1 dans T. On voudrait que l'application $\psi : K \times [a,b] \to M$ définie par $\psi(x,t) = \varphi_{b-a}(x)$ soit un homéomorphisme sur T. Ceci est réalisé si les courbes intégrales du champ $X(x)$ issues des points $x \in K$ restent dans K entre les niveaux a et b ; il revient au même de dire que les courbes intégrales issues des points de U restent dans U entre les niveaux a et b.

Construisons un champ $X(x)$ ayant cette propriété. Soit $Z(x)$ le champ sur $U' = \varphi(U(2\varepsilon))$ image par $D\varphi$ du champ $(X,-Y)$ de $\underline{R}^2$. Il est nul en c et, hors de c, transversal aux lignes de niveau et dirigé f croissante (vérification immédiate dans la carte φ^{-1}). Ses courbes intégrales sont les images par φ des hyperboles $XY = c^{te}$; celles qui sont issues d'un point de U sont en entier dans U entre les niveaux a et b. Soit $\beta : M \to \underline{R}$ une fonction dérivable égale à 1 dans U et à 0 hors de $\varphi(U(\frac{3}{2}\varepsilon))$. (construction dans la carte et prolongement par 0 à M). Soit enfin $X_o(x)$ un champ arbitraire sur M, transversal aux lignes de niveau de f, défini sauf aux points critiques. Posons :

$$X(x) = \beta(x)Z(x) + (1-\beta(x))X_o(x) \quad \text{si} \quad x \in U' ,$$

$$= X_o(x) \quad \text{si} \quad x \notin U' .$$

Il est clair que $X(x)$ est transversal aux lignes de niveau de f, sauf aux points critiques. Dans U, on a $\beta = 1$ donc $X(x) = Z(x)$ et $X(x)$ a bien la propriété demandée.

Découpons par deux horizontales la modèle $U(\varepsilon)$ en trois parties $P' = (A'B'C'D')$, $Q' = (E'F'G'H')$, $R' = (A'D'E'H')$ (voir figure) toutes trois homéomorphes à des rectangles. Soient P, Q, R leurs images dans M par la paramétrisation φ. L'espace $M(b)$ est le produit du recollement de $M(a)$, T, P, Q et R ; le dessin vaut mieux que de longues explications.

Les espaces P et Q sont homéomorphes à des rectangles, par exemple $I \times [a,b]$ et $J \times [a,b]$ respectivement, de sorte que ces homéomorphismes se

recollent (ch.2, §5) à l'homéomorphisme $\phi^{-1} : T \to K \times [a,b]$ pour donner un homéomorphisme de $T \cup P \cup Q$ sur $(K \cup I \cup J) \times [a,b] = V(a) \times [a,b]$. Il en résulte que $M(b)-\text{int}(R) = M(a) \cup T \cup P \cup Q$ s'obtient en collant le cylindre $V(a) \times [a,b]$ à $M(a)$ le long de $V(a)$; cet espace est donc homéomorphe à $M(a)$ (cf. §3). De plus $M(b)$ est homéomorphe au recollement de R et $M(a)$ obtenu en collant AD sur I et EH sur J, ce qu'il fallait démontrer.

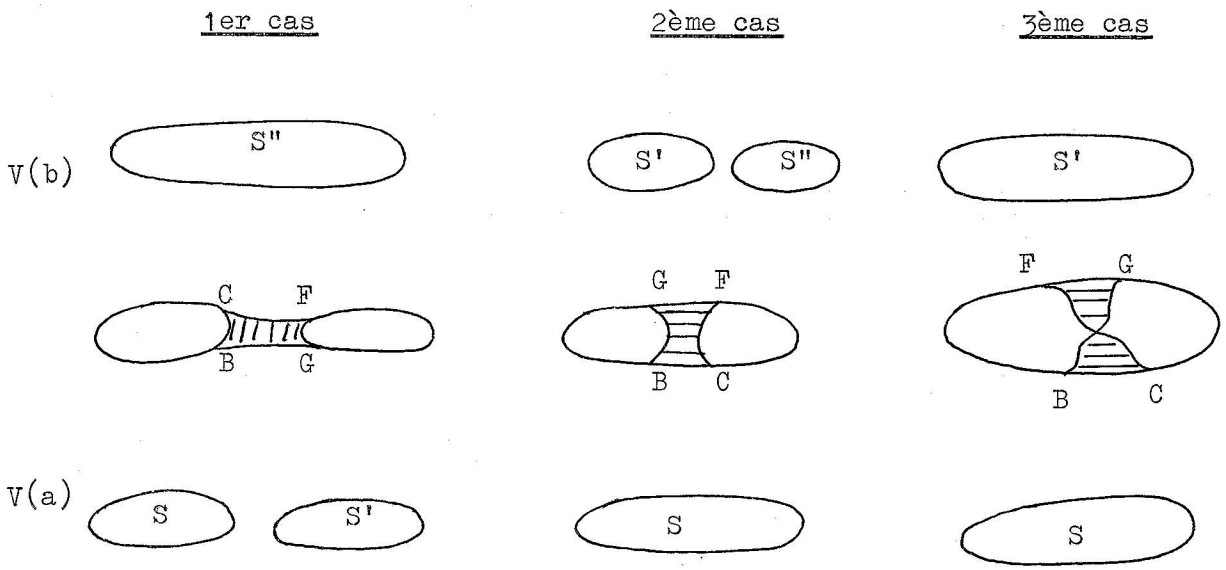
Transformation de $V(a)$ en $V(b)$. Des constructions précédentes, il résulte qu'on obtient $V(b)$ à partir de $V(a)$, à homéomorphisme près, par le procédé suivant : on ôte à $V(b)$ les intérieurs de deux petits segments disjoints $I = BC$ et $J = FG$, puis on recolle à l'espace K obtenu deux segments BG et CF. La transformation décrite dépend des positions relatives de B, C, F et G sur $V(a)$.

1er cas : I et J ne sont pas dans la même composante connexe de $V(a)$. Soient S la composante de I et S' celle de J. L'espace $\overline{S-I}$ est un segment BC, l'espace $\overline{S'-J}$ est un segment FG ; quand on les recolle par des segments BG et CF on obtient un espace homéomorphe à un cercle S''. L'espace $V(b)$ est obtenu à partir de $V(a)$ en remplaçant $S \cup S'$ par S''.

2ème cas : I et J sont dans la même composante connexe S de $V(a)$ et les arcs $\overset{\frown}{BC} = I$ et $\overset{\frown}{FG} = J$ ont même orientation sur S. L'espace $\overline{S-(I \cup J)}$ est la réunion de deux segments BG et CF. Lorsqu'on recolle deux autres segments BG et CF, on obtient deux cercles S' et S''. L'espace $V(b)$

est obtenu à partir de $V(a)$ en remplaçant S par $S' \cup S''$.

3ème cas : I et J sont dans la même composante connexe S de $V(a)$ et les arcs $\overset{\frown}{BC} = I$ et $\overset{\frown}{FG} = J$ sont d'orientations opposées sur S. L'espace $\overline{S-(I \cup J)}$ est la réunion de deux segments BF et CG. Lorsqu'on recolle deux segments BG et CF, on obtient un cercle S'. L'espace $V(b)$ est obtenu à partir de $V(a)$ en remplaçant S par S'.



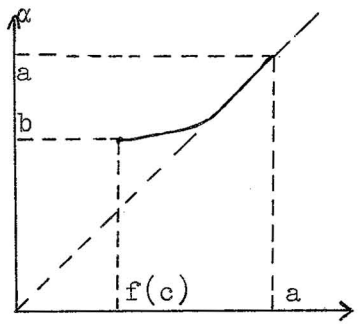
Nous verrons que les trois situations peuvent effectivement se produire.

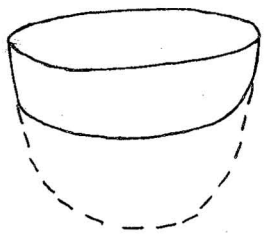
§5. Changement de fonction de Morse dans un voisinage canonique.

On va montrer que, si U est un voisinage canonique d'un point critique c d'une fonction de Morse f, il existe une nouvelle fonction de Morse g coïncidant avec f hors de U et n'ayant dans U que le point critique c, mais avec une valeur critique $g(c)$ qu'on peut imposer entre certaines limites.

PROPOSITION 2.- Soient c un point critique d'indice 0 de la fonction de Morse f et U un voisinage canonique de c limité par la courbe de niveau $f(x) = a$. Quel que soit $b < a$, il existe une fonction de Morse g ayant les mêmes points critiques que f avec même indice, coïncidant avec f hors de U et telle que $g(c) = b$.

Il existe une fonction $\alpha : [f(c),a] \to \underline{R}$ dérivable, de dérivée strictement positive, telle que $\alpha(f(c)) = b$ et que $\alpha(t) = t$ si t est voisin de





g

f (en pointillé)

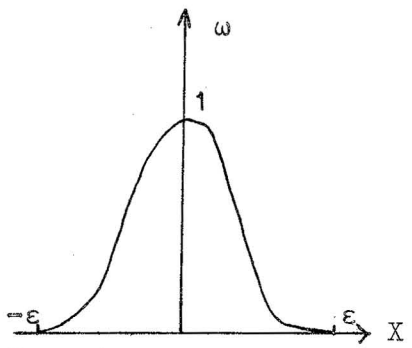
a. Si φ est la paramétrisation du voisinage canonique U, posons, pour $x \in U$, $g(x) = \alpha(f(c) + g_o(\varphi^{-1}(x)))$ où g_o est la fonction modèle X^2+Y^2. Le seul point critique g dans U est c car la dérivée de α n'est pas nulle. On a $g(c) = \alpha(f(c)) = b$. Lorsque $\alpha(t) = t$, on a $g(x) = f(c) + g_o(\varphi^{-1}(x)) = f(x)$. C'est le cas au voisinage de la frontière de

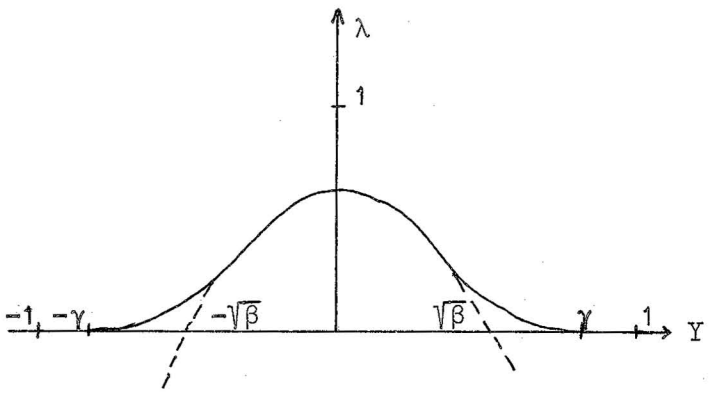
U , ce qui prouve que cette fonction g sur U se recolle à f sur M-U pour donner la fonction de Morse g cherchée.

Pour un point d'indice 2, la proposition 2 appliquée à la fonction -f montre qu'on peut choisir g(c) arbitraire strictement supérieur au niveau du bord d'un voisinage canonique.

PROPOSITION 3. Soient c un point critique d'indice 1 de la fonction de Morse f et U un voisinage canonique de c limité au niveau inférieur $f(x) = a$ et au niveau supérieur $f(x) = b$. Quel que soit $d \in]a,b[$, il existe une fonction de Morse g , ayant les mêmes points critiques que f avec même indice, coïncidant avec f hors de U et telle que $g(c) = d$.

Il suffit comme précédemment d'effectuer une transformation de la fonction modèle $g_1 = X^2-Y^2$ à l'intérieur du voisinage modèle. Supposons que le voisinage modèle est U(1) et montrons qu'il existe une fonction h(X,Y) coïncidant avec $g_1(X,Y)$ au voisinage du bord de U(1), dont le seul point critique est 0 et dont la valeur critique correspondante est $h(0) = -\beta \in]-1,0]$ (si β est négatif la démonstration est analogue en intervertissant X et Y).





Soit $\omega : \underline{R} \to \underline{R}$ une fonction dérivable positive à support dans $[-\varepsilon,\varepsilon]$, telle que $\omega(0) = 1$ et que $X.\omega'(X) \leqslant 0$. Soit $\lambda : \underline{R} \to \underline{R}$ une fonction dérivable positive, à support dans $[-\gamma,\gamma]$ avec $\gamma \in]\sqrt{\beta},1[$ telle que $\lambda(0) = \beta$ et dont la dérivée $\lambda'(Y)$ satisfasse à $2Y+\lambda'(Y) > 0$ si $Y > 0$ et $2Y+\lambda'(Y) < 0$ si $Y < 0$. La fonction $\mu(Y) = \beta - Y^2 + \eta Y^2$ satisfait, pour $\eta > 0$, à $\mu(0) = \beta$ et aux conditions sur la dérivée. Si η est assez petit, $\mu(Y)$ est positive dans $]-\gamma,\gamma[$; pour construire λ, il suffit d'arrondir la fonction μ au voisinage de ses zéros $Y = \pm\sqrt{\frac{\beta}{1-\eta}}$.

Si ε est assez petit, le rectangle $[-\varepsilon,\varepsilon] \times [-\gamma,\gamma]$ est contenu dans l'intérieur de $U(1)$ de sorte que la fonction

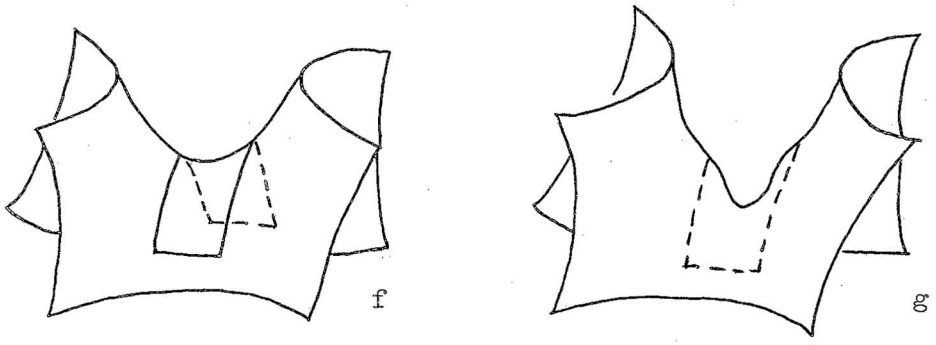
$$h(X,Y) = X^2 - Y^2 - \omega(X)\lambda(Y)$$

coïncide avec g_1 au voisinage de la frontière de $U(1)$. On a $h(0) = -\omega(0)\lambda(0) = -\beta$ et il reste à montrer que 0 est le seul point critique de h dans $U(1)$. Les dérivées partielles sont :

$$h'_X = 2X - \omega'(X)\lambda(Y) ,$$

$$h'_Y = -2Y - \omega(X)\lambda'(Y).$$

Du fait que $\lambda(Y) \geqslant 0$ et que $\omega'(X)$ est du signe de $-X$, la dérivée h'_X ne s'annule que si $X = 0$. Dans ce cas on a $h'_Y = -2Y - \lambda'(Y)$; la dérivée h'_Y ne s'annule que pour $Y = 0$ étant donné le choix qu'on a fait pour la fonction λ. Ceci démontre la proposition 3.



Voici une conséquence de la proposition 2 et du théorème 1. On dit qu'une fonction de Morse est ordonnée si les indices des points critiques sont fonction croissante des valeurs critiques (les valeurs critiques d'indice 0 sont inférieures aux valeurs critiques d'indice 1, etc...).

THEOREME 4.- Sur une surface compacte, il existe une fonction de Morse ordonnée.

Soit f une fonction de Morse sur M (th.1) et soient a et b les bornes inférieure et supérieure des valeurs critiques (en nombre fini) d'indice 1. D'après la proposition 2, on peut trouver une fonction g ayant mêmes points critiques que f, avec même indice, dont les valeurs critiques d'indice 0 sont inférieures à a et les valeurs critiques d'indice 2 supérieures à b.

Chapitre 5. La classification des surfaces

Soit M une variété différentiable compacte connexe de dimension 2 (surface). Par l'étude d'une fonction de Morse sur M, on va montrer que M est homéomorphe à l'un des espaces T_n $(n \geqslant 0)$ ou U_n $(n \geqslant 1)$ décrits au chapitre 2. Inversement, chacun de ces espaces est homéomorphe à une variété différentiable de sorte que l'on a un dénombrement complet, à homéomorphisme près de toutes les surfaces différentiables compactes connexes. Ce fait est particulier à la dimension 2 et n'a pas d'analogue pour les variétés de dimension $p \geqslant 3$.

§1. Classification des courbes.

Montrons d'abord que l'étude des variétés compactes se ramène à l'étude des variétés compactes connexes.

THEOREME 1.- *Une variété (topologique) compacte de dimension p a un nombre fini de composantes connexes par arcs. Ces composantes sont des variétés compactes de dimension p.*

Les composantes connexes par arcs d'une variété sont ouvertes (ch.1, prop.4). S'il y en a une infinité, en choisissant un point dans chaque composante, on peut construire une suite qui n'a pas de point adhérent : tout point de la variété possède un voisinage, sa composante connexe p.a., qui ne contient qu'un point de la suite. Ceci prouve qu'il y a un nombre fini de composantes. Chacune d'elle, ouverte, est une variété de dimension p et, fermée dans un espace compact, est compacte.

THEOREME 2.- Toute variété différentiable compacte connexe de dimension 1 est homéomorphe au cercle. (1)

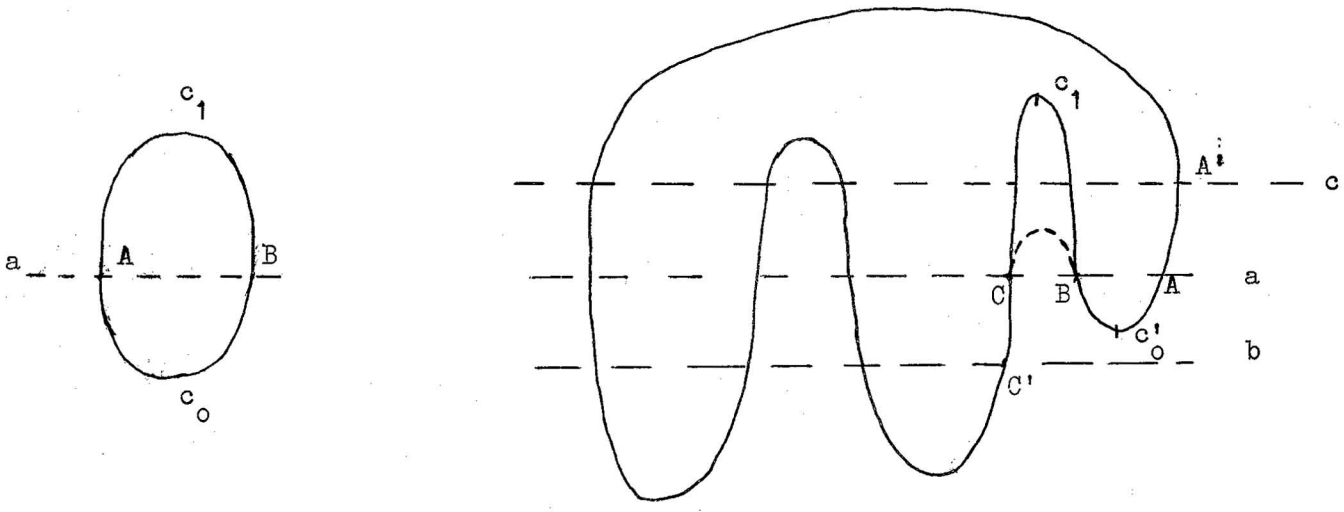
Soit M une courbe différentiable compacte connexe et $f : M \to \underline{R}$ une fonction de Morse ordonnée (ch.4, th.4). Puisque M est compacte, la fonction f a nécessairement un minimum c_0 qui est un point critique d'indice 0, et un maximum c_1 qui est un point critique d'indice 1.

Supposons d'abord que ce sont les seuls points critiques de f et soit a un niveau intermédiaire entre celui de c_0 et celui de c_1, c'est-à-dire : $f(c_0) < a < f(c_1)$. L'espace $M(a) = f^{-1}(]-\infty, a])$ est homéomorphe à un segment fermé (ch.4, prop.1 et §4) et sa frontière $V(a) = f^{-1}(a)$ est constituée de deux points A et B. De même, l'espace $M'(a) = f^{-1}([a, +\infty[)$ est homéomorphe à un segment fermé et possède la même frontière. L'espace M s'obtient en recollant $M'(a)$ et $M(a)$ le long de $V(a)$. Remarquons que le cercle s'obtient aussi en recollant deux segments. Il en résulte, par recollement d'homéomorphismes (ch.2, §5) que M est homéomorphe au cercle.

Dans le cas général où il y a n points critiques d'indice 0, si a est un niveau intermédiaire séparant les niveaux des points critiques d'indice 0 de ceux d'indice 1, l'espace $M(a)$ est homéomorphe à l'union disjointe de n segments (ch.4, §4) et $V(a)$ est constitué de $2n$ points. Il en résulte que $M'(a)$ est constitué de n segments et qu'il y a n points critiques d'indice 1.

---

(1) Il est même vrai que toute variété topologique compacte connexe de dimension 1 est homéomorphe au cercle et que toute courbe différentiable compacte connexe est difféomorphe au cercle.



Soit c'_0 le point critique d'indice 0 de niveau le plus élevé ; il est situé sur une composante d'extrémités **A** et B de M(a). Dans M'(a), la composante D_1 qui contient B contient un point critique d'indice 1 noté C_1. La deuxième extrémité C de D_1 est un point de niveau a distinct de **A**, sinon M ne serait pas connexe. En la modifiant dans le segment D_1, on peut remplacer f par une fonction de Morse f' pour laquelle c_1 est le point critique d'indice 1 de plus bas niveau et $f'(c_1) > a$ (ch.4, §5, prop.2). Soient b et c des niveaux tels que $b < f'(c'_0) < a < f'(c_1) < c$ et tels que c'_0 et c_1 soient les seuls points critiques de f' dont les niveaux sont compris entre b et c. Montrons que M(b) est homéomorphe à M(c). L'espace M(b) est homéomorphe à l'union de (n-1) segments. Pour obtenir M(c), on prolonge un peu (n-2) d'entre eux ; quant au dernier, on le prolonge un peu à l'une de ses extrémités et on colle à l'autre, successivement, les segments C'C , CB , BA et AA' (voir figure). Par suite M(c) est aussi homéomorphe à l'union de (n-2) segments.

La variété M s'obtient en recollant $M'(c)$ et $M(c)$ qui est homéomorphe à $M(b)$. Les points critiques c'_o et c_1 ne jouent plus aucun rôle ([2]). La variété M, obtenue en collant deux familles de $(n-1)$ segments est donc homéomorphe à une courbe M' sur laquelle il existe une fonction de Morse avec $(2n-2)$ points critiques (recollement des homéomorphismes). Ceci montre, par récurrence sur n, que M est homéomorphe à un cercle.

§2. Préliminaires à la classification des surfaces.

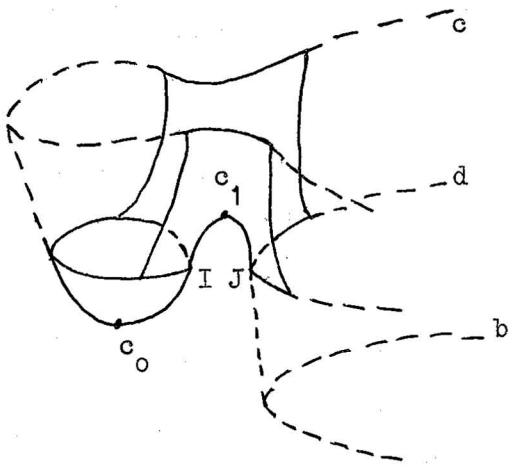
On établit la classification des surfaces par une démonstration analogue à celle du th.2, mais évidemment plus compliquée car il y a des points critiques d'indice 0, 1 et 2. Dans toute la suite, M désigne une surface compacte connexe et $f : M \to \underline{R}$ une fonction de Morse ordonnée. Voici d'abord un analogue du procédé d'élémination utilisé dans la démonstration du th.2.

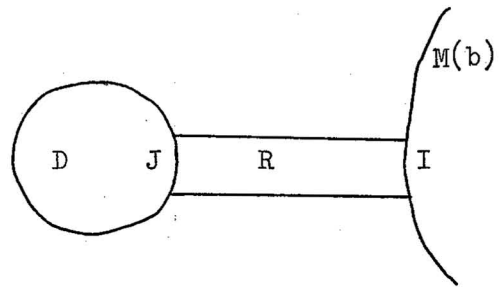
Supposons qu'entre les niveaux b et c, la fonction f a exactement deux points critiques c_o et c_1 d'indices 0 et 1 respectivement. On dit que les points critiques c_o et c_1 sont *en bonne position* si c_o possède un voisinage canonique U_o de niveau supérieur d et c_1 un voisinage canonique U_1 niveau inférieur d de telle sorte que, dans la courbe de niveau $V(d)$, un des deux segments qui composent $U_1 \cap V(d)$ (et un seul) soit contenu dans le cercle qui constitue $U_o \cap V(d)$.

([2]) On peut démontrer qu'on peut modifier f' sur le segment $A'C'$ et la transformer en une fonction de Morse qui n'a plus de point critique sur le segment $A'C'$.

PROPOSITION 1.- Avec les notations ci-dessus, si les points critiques c_0 et c_1 sont en bonne position, l'espace $M(c)$ est homéomorphe à l'espace $M(b)$.

D'après le §4 du ch.4, l'espace $M(d)$ est difféomorphe à l'union disjointe de $M(b)$ et d'un disque D. De même, l'espace $M(c)$ est homéomorphe à l'espace obtenu en recollant $M(b)$ et D à l'aide d'un rectangle R, en identifiant un des côtés du rectangle à un segment I contenu dans $V(b)$, et le côté opposé à un segment J contenu dans la frontière de D. Il est facile de voir que $M(c)$ est homéomorphe à $M(b)$ ([3]).





On va désormais étendre la dénomination de voisinage canonique d'un point critique d'indice 1. Au §5 du ch.3, on avait pris des voisinages modèles $U(s)$ définis par les inégalités $|X^2-Y^2| \leqslant s$ et $|XY| \leqslant s$. On acceptera pour voisinages modèles les voisinages de 0 définis par $-r \leqslant X^2-Y^2 \leqslant s$ et $|XY| \leqslant t$, où $r,s,t > 0$. Il est facile de voir que la prop.3 du ch.4 est encore valable

([3]) On peut montrer qu'il existe une fonction de Morse f' coïncidant avec f sauf pour les niveaux compris entre b et c et qui n'a pas de points critiques dans la partie $f^{-1}([b,c])$. Autrement dit, deux points critiques en bonne position peuvent-être éléminés sans changer les autres points critiques.

avec cette nouvelle définition.

Soit a un niveau supérieur à celui de tous les points critiques d'indice 0 et inférieur à celui de tous les points critiques d'indice 1, et de même b un niveau compris entre les niveaux des indices 1 et 2. L'espace $M(a) = f^{-1}(]-\infty,a])$ est une union disjointe de disques (ch.4, §4) et chacun d'eux est un voisinage canonique d'un point critique d'indice 0. De même pour $M^1(b) = f^{-1}([b,+\infty[)$ et les points critiques d'indice 2. Pour les points critiques d'indice 1, nous admettons le résultat suivant :

PROPOSITION 2.- Il existe, pour tout point critique d'indice 1, un voisinage canonique de niveau inférieur a , de niveau supérieur b de telle sorte que tous ces voisinages canoniques soient deux à deux disjoints. (4).

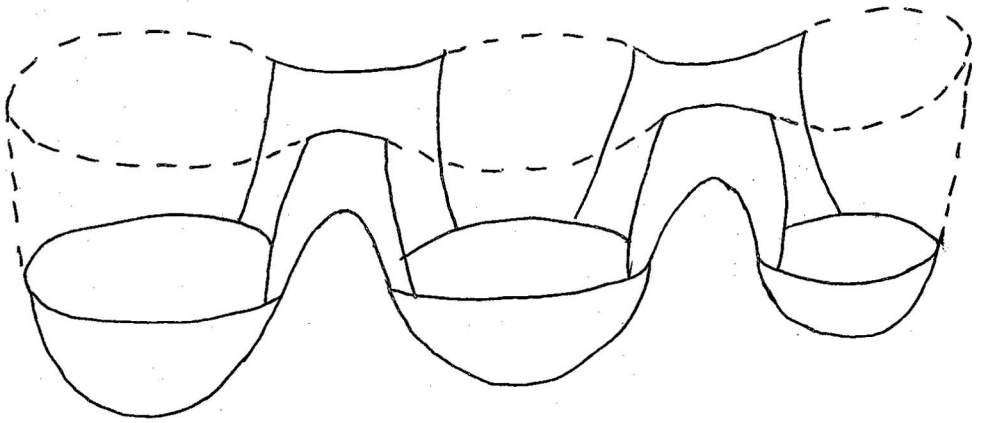
Compte tenu de la prop.3 du ch.4, on peut donc changer l'ordre des valeurs de f aux points critiques d'indice 1, en modifiant f dans les voisinages canoniques dont la prop.2 affirme l'existence.

---

(4) La démonstration n'est pas difficile, mais fastidieuse ; voici son principe. On se donne de "petits" voisinages canoniques de tous les points critiques, disjoints deux à deux. On essaye de les prolonger à l'aide d'un champ de vecteur analogue au champ X de (ch.4, §4, 3e cas) pour tous voisinages canoniques à la fois. Le prolongement échoue si les courbes intégrales de X issues d'un voisinage canonique U viennent à pénétrer dans un autre voisinage canonique U' entre les niveaux a et b . On montre alors qu'on peut toujours modifier X pour éviter ce phénomène.

§3. Début de la démonstration.

On considère la surface M compacte connexe et la fonction de Morse $f : M \to \underline{R}$. La fonction f possède $n(0)$, $n(1)$ et $n(2)$ points critiques d'indice 0, 1 et 2 respectivement. Il y a au moins un point critique d'indice 0 (minimum de f) et un point critique d'indice 2 (maximum de f). On note comme ci-dessus a et b des niveaux séparant les points critiques d'indice 0, 1 et 2. L'espace $M(a)$ est union disjointe d'une famille de disques D_i $(1 \leqslant i \leqslant n(0))$, voisinages canoniques des points critiques c_i d'indice 0. L'espace $M'(b)$ est union disjointe d'une famille de disques D''_k $(1 \leqslant k \leqslant n(2))$ voisinages canoniques des points c''_k d'indice 2. On choisit (prop.2) des voisinages canoniques <u>disjoints</u> U_j $(1 \leqslant j \leqslant n(1))$ des points critiques c'_j d'indice 1, de niveau supérieur b et inférieur a. Il résulte du §4 du ch.4 que l'espace $M(b)$ est homéomorphe à la réunion $\hat{M}(b)$ des D_i et des U_j ; il suffit d'appliquer la règle de franchissement d'un point critique d'indice 1 successivement à chacun des c'_j. Autrement dit $M(b)$ est homéomorphe au recollement de $n(0)$ disques et $n(1)$ rectangles (les octogones U_j sont homéomorphes à des rectangles). Puis on obtient M en recollant encore $n(2)$ disques. On va simplifier cette construction jusqu'à ce qu'on puisse en reconnaître le résultat.



D'abord on se ramène à une situation analogue à celle d'une fonction qui n'aurait, pour l'indice 0 comme pour l'indice 2, qu'un seul point critique ; c'est-à-dire que M se construit à l'aide de deux disques et de rectangles.

LEMME 1.- *Il existe sur M une fonction de Morse g ayant mêmes points critiques que f, avec même indice, et deux niveaux c et d, avec $c < d$ tels que :*

- l'espace $M(c) = g^{-1}(]-\infty,c])$ contient $n(0)$ points critiques d'indice 0 et $n(0)-1$ points critiques d'indice 1 ; de plus $M(c)$ est homéomorphe à un disque ;

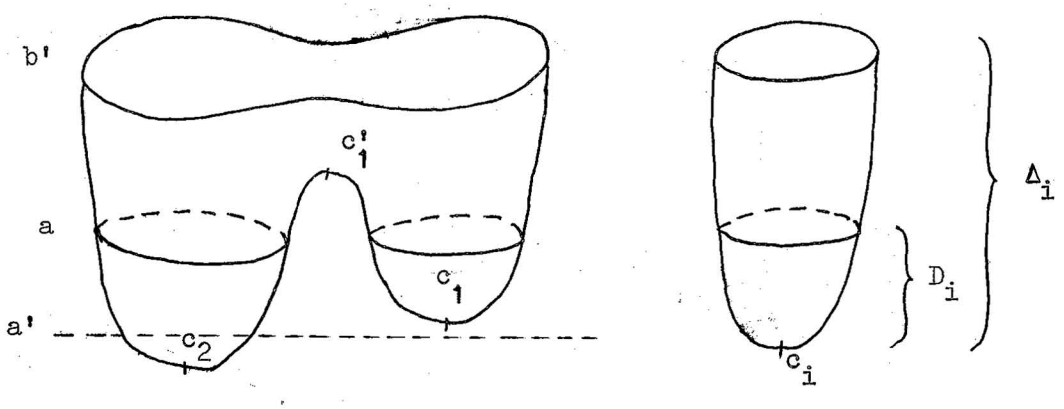
- l'espace $M'(d) = g^{-1}([d,+\infty[)$ contient $n(2)$ points critiques d'indice 2 et $n(2)-1$ points critiques d'indice 1 ; de plus $M'(d)$ est homéomorphe à un disque ;

- l'espace $W(c,d) = g^{-1}([c,d])$ contient $n(1)-n(0)-n(2)+2$ points critiques d'indice 1.

Ceci montre en particulier que $n(0)-n(1)+n(2) \leqslant 2$.

Démonstration du lemme. Pour démontrer le lemme, il suffit de montrer qu'on peut, en modifiant f uniquement au-dessous du niveau b, trouver une fonction g et un niveau c satisfaisant à la première assertion du lemme. En effet, il suffit alors d'appliquer de nouveau le procédé en permutant les rôles des indices 0 et 2 (penser à la fonction $-g$) pour obtenir la deuxième assertion sans rien modifier en-dessous du niveau c.

Si $n(0) = 1$, le résultat est démontré avec $f = g$ et $c = a$. Supposons $n(0) \geqslant 2$ et soit c_1 le point critique d'indice 0 de niveau le plus élevé. L'espace $M(b)$ est le complémentaire, dans la variété connexe M, de disques ouverts disjoints en nombre $n(2)$. Il en résulte facilement que $M(b)$ est connexe par arcs. Comme $M(a)$ a plusieurs composantes connexes D_i, il existe nécessairement un octogone, U_1 par exemple, qui relie D_1 à une autre composante, D_2 par exemple. Les points critiques c_1 et c'_1 sont en bonne position, car U_1 rencontre deux composantes de $V(a)$, pourvu toutefois qu'il n'y ait pas de valeur critique dans l'intervalle $]f(c_1), f(c'_1)[$. On peut se ramener à ce cas en modifiant f à l'intérieur de U_1 (ch.4, prop.3) et abaissant $f(c'_1)$ jusqu'à ce que ce soit la plus petite des valeurs critiques d'indice 1.



Soient alors a' et b' deux niveaux tels que $f(c_1)$ et $f(c_1')$ soient les seules valeurs critiques de l'intervalle $]a',b'[$. D'après la proposition 1, l'espace $M(b')$ est homéomorphe à l'espace $M(a')$ qui est constitué de voisinages canoniques des points $c_2,c_3,\ldots,c_{n(0)}$. L'espace $M(b')$ a donc $n(0)-1$ composantes homéomorphes à des disques. L'une d'entre elles, soit Δ_1 contient les 3 points critiques c_1 , c_1' et c_2 . Les autres, $\Delta_3,\ldots,\Delta_{n(0)}$ sont des voisinages canoniques des points $c_3,\ldots,c_{n(0)}$.

Pour pouvoir continuer ce processus de réduction du nombre de disques, il suffit alors de modifier f dans $\Delta_3,\ldots,\Delta_{n(0)}$ de telle sorte que les valeurs critiques $f(c_3),\ldots,f(c_{n(0)})$ soient supérieures à $f(c_1')$ (ch.4, prop.2). Si $n(0)-1 \geqslant 2$, l'espace $M(b)$ étant connexe, il existe un octogone U_j rencontrant à la fois Δ_3 (où c_3 est le plus élevé des points d'indice 0) est un autre disque Δ_i , et on procède avec c_3 et c_j' comme précédemment avec c_1 et c_1' . D'où le lemme, par récurrence.

§4. Surfaces orientables et non-orientables.

On dit qu'on a orienté une surface différentiable si on a choisi dans chaque plan tangent $T_a(M)$ une orientation, celle-ci dépendant continuement du point a . Cela signifie que si X et Y sont deux champs (continus) de vecteurs tangents à M , définis au voisinage de a , et si les vecteurs $X(a)$ et $Y(a)$ forment un repère orienté positivement dans $T_a(M)$ il en est de même de $X(x)$ et $Y(x)$ dans $T_x(M)$ pour x voisin de a . On dit qu'une surface est orientable si on peut l'orienter.

Supposons que la surface M possède une famille de paramétrisations $\varphi_i : U_i \to M$ (où U_i est un ouvert de $\underline{R}^2$ et i un indice parcourant un ensemble I) qui constitue un système complet (tout point de M est dans l'image d'une des paramétrisations) et telle que tous les changements de cartes $\theta_{ij} = \varphi_i^{-1} o \varphi_j$ soient des difféomorphismes d'un ouvert de $\underline{R}^2$ dans un ouvert de $\underline{R}^2$ qui conservent l'orientation (déterminant jacobien positif). En tout point a de M, l'orientation de $T_a(M)$ définie par le repère $(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y})$ associé à une paramétrisation φ_i (ch.3, §3) est indépendante de φ_i ($i \in I$) et dépend continuement de a : la surface M est orientée par le système (φ_i).

Inversement, si M est orientée, il existe, pour tout point $a \in M$, une paramétrisation φ d'un voisinage de a telle que $D\varphi$ envoie l'orientation canonique de $\underline{R}^2$ dans l'orientation de $T_x(M)$ (x voisin de a). La famille de toutes ces paramétrisations, pour a parcourant M, constitue un système complet où les changements de paramétrisation conservent évidemment l'orientation.

Exemple 1. L'intérieur d'une bande de Moebius est une surface (non compacte) non-orientable.

PROPOSITION 3.- Une surface qui contient une partie difféomorphe à l'intérieur de la bande de Moebius n'est pas orientable.

Evident d'après l'exemple 1.

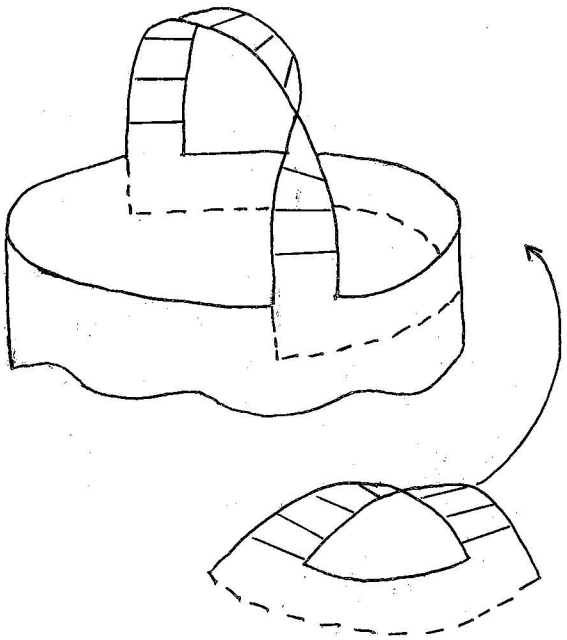
PROPOSITION 4.- Une surface dans $\underline{R}^3$ qui possède un champ continu de vecteurs normaux non nuls est orientable.

Soit $M \subset \underline{R}^3$ une surface. Un champ continu de vecteurs normaux est la donnée pour tout $a \in M$ d'un vecteur $N(a)$ d'origine a, normal au plan tangent $T_a(M)$ et dépendant continuement de a. Il est clair qu'une telle donnée, avec $N(a) \neq 0$, définit une orientation de $T_a(M)$ dépendant continuement de a.

Remarque 1.- On montrera au ch.7 que toute surface compacte dans $\underline{R}^3$ possède un champ continu de vecteurs normaux et, par suite, est orientable.

On a vu (ch.4, §4) que trois cas se présentent pour la transformation de la courbe de niveau due au franchissement d'un point critique d'indice 1. Si l'on est dans le premier ou le second cas, où le nombre de composantes de la courbe de niveau change d'une unité, on dit que le point critique est de type I, sinon qu'il est de type II.

PROPOSITION 5.- Soit M une surface et f une fonction de Morse sur M. Si f possède un point critique d'indice 1 de type II, alors M n'est pas orientable.



Il suffit de démontrer (prop.3) que M contient une partie difféomorphe à l'intérieur d'une bande de Moebius. Il est facile de le voir sur la figure ; c'est plus compliqué à expliciter, mais cela ne pose aucun problème sérieux.

PROPOSITION 6.- Soit M une surface compacte et f une fonction de Morse sur M ; soit g la fonction de Morse associée par le lemme 1. Entre les niveaux c et d, les points critiques de type I sont en nombre pair. Tous les points critiques dont le niveau est hors de $[c,d]$ sont de type I.

La deuxième assertion résulte de la construction de la fonction g. La première est conséquence du fait que $V(c)$ et $V(d)$ ont une seule composante et d'autre part que les points de type I sont ceux qui changent la parité du nombre de composantes de la courbe de niveau.

§5. Un cas particulier.

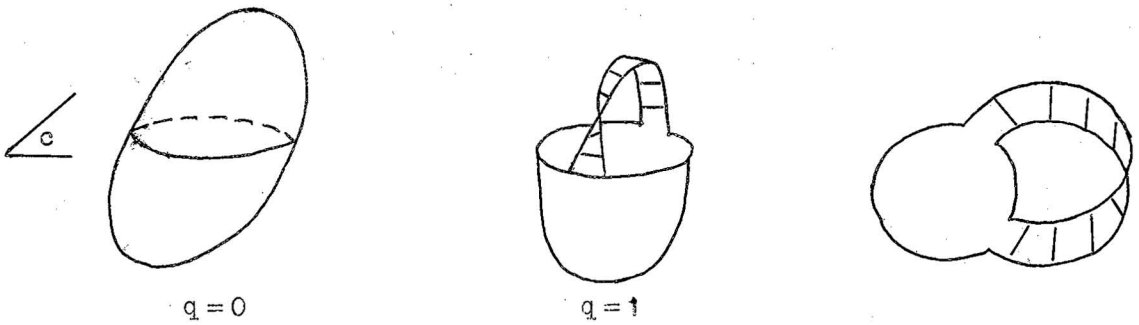
Dans la suite, vu le lemme 1, on fera l'abus de langage suivant : on reprend les notations f, a et b pour désigner g, c et d et l'on dit que f a un point critique d'indice 0, qu'elle a $n(1)-n(0)-n(2)+2$ points critiques d'indice 1 et un point critique d'indice 2. Du point de vue de la construction de M par recollements, cet abus de langage est justifié. En outre, on peut démontrer l'existence d'une telle fonction de Morse sur M.

THEOREME 3.- Si, sur la surface compacte connexe M, la fonction f a un point d'indice 0, un point d'indice 2 et des points critiques d'indice 1, en nombre q, tous de type II, l'espace M est homéomorphe à l'espace U_q. (ch.2, §7).

Rappelons que l'espace U_q est la somme connexe itérée de p exemplaires du plan projectif $P_2 = U_1$. En outre, on pose $U_0 = S^2$.

Le cas où $q=0$. Remarquons que, sur la sphère $x^2+y^2+z^2-1=0$, la fonction cote z est une fonction de Morse sans point critique d'indice 1. La sphère $S^2 = U_o$ est obtenue par recollement des deux hémisphères $(z \geqslant 0)$ et $(z \leqslant 0)$ qui sont des voisinages canoniques des deux points critiques.

Pour la surface M , considérons un niveau c intermédiaire entre les niveaux a et b . La surface M s'obtient par recollement de $M(c)$, homéomorphe à $M(a)$, et de $M'(c)$, homéomorphe à $M'(b)$. Par recollement des homéomorphismes (ch.2, §5 et ch.5, §7 ci-dessous), il en résulte que M est homéomorphe à U_o .



$q=0$ $q=1$

Le cas où $q=1$. Dans ce cas, l'espace $M(b)$ s'obtient en recollant à un disque un rectangle avec orientations non compatibles. Il est facile de voir que $M(b)$ est homéomorphe à la bande de Moebius. Alors M , qui s'obtient en collant les disques $M'(b)$ et $M(b)$ le long de leurs bords circulaires, est homéomorphe au plan projectif $P_2 = U_1$.

Le cas où $q \geqslant 2$. Supposons (par récurrence) le théorème démontré pour une fonction de Morse ayant $q-1$ points critiques d'indice 1. Considérons maintenant le cas de q points critiques notés $c'_1,\ldots,c'_q$, dans l'ordre croissant des

valeurs critiques. Soit c un niveau compris entre $f(c'_1)$ et $f(c'_2)$. Il résulte de l'étude du cas $q=1$ que $M(c)$ est homéomorphe à la bande de Moebius et il résulte de l'hypothèse de récurrence que $M'(c)$ est homéomorphe à U_{q-1} privé d'un disque (la fonction $-f$ a $q-1$ points critiques d'indice 1 en-dessous du niveau $-c$). Par recollement, M est homéomorphe à $U_1 \# U_{q-1} = U_q$.

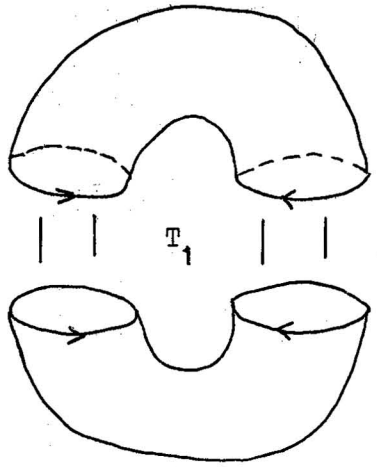
§6. Le cas général.

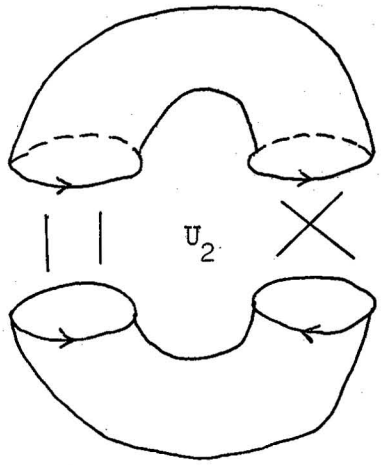
THEOREME 4.- Toute surface compacte connexe est homéomorphe soit à un espace U_q $(q \geqslant 0)$ soit à un espace T_p $(p \geqslant 0)$.

On va démontrer, par récurrence sur q, l'assertion suivante. Si, sur M, la fonction de Morse a un point critique d'indice 0, un point critique d'indice 2 et q points critiques d'indice 1, l'espace M est homéomorphe à U_q si q est impair, homéomorphe soit à U_q soit à T_p si $q = 2p$. Le cas où $q=0$ a déjà été vu au §5 ; le cas où $q=1$ aussi car, dans ce cas, le point critique est de type II (prop.6).

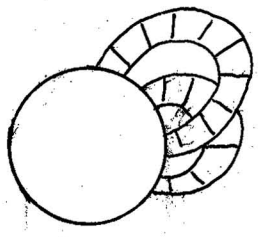
Le cas où $q=2$. Si les deux points critiques sont de type II, M est homéomorphe à U_2 d'après le th.3. Sinon, les deux points critiques sont de type I (prop.6). Pour le tore T_1 (ch.3, §4, ex.4), on a une fonction de Morse qui a deux points critiques d'indice 1, un point d'indice 0 et un point d'indice 2. Soient a', c', b' des valeurs qui séparent les quatre valeurs critiques. L'espace $T_1(c')$ est homéomorphe à un cylindre $S \times I$; on peut aussi l'obtenir en recollant au disque $T_1(a')$ un rectangle par deux côtés opposés, avec orientations compatibles.

Pour la surface M , soit c une valeur intermédiaire entre $f(c'_1)$ et $f(c'_2)$. L'espace M(c) est homéomorphe à $T_1(c')$ puisqu'on l'obtient en collant un rectangle à M(a) avec orientations compatibles. De même M'(c), homéomorphe à $T'_1(c')$, est homéomorphe à un cylindre $S \times I$. Pour obtenir M , on doit recoller ces cylindres. Il y a deux manières : avec orientations compatibles, on obtient le tore T_1 ; avec orientations opposées, on obtient le tore de Klein U_2.

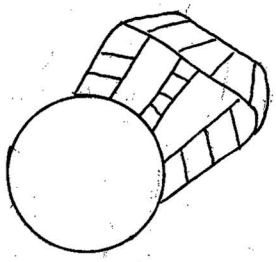




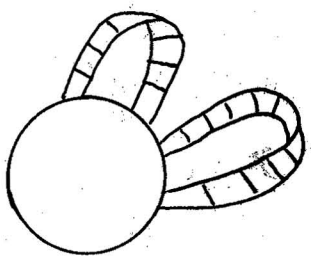
On obtient le même résultat en étudiant l'espace M(b). Celui-ci est obtenu en collant deux rectangles à un disque. Pour coller le premier, il n'y a, à homéomorphisme près, qu'une manière pour que le bord de M(c) soit deux cercles. Pour le deuxième, dont deux côtés opposés sont collés chacun à l'un de ces cercles, il y a deux manières.



M(b)
1ère manière



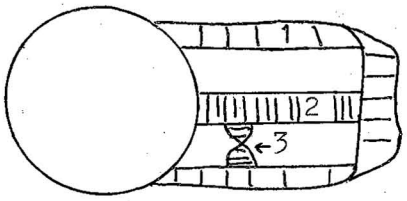
M(b)
2ème manière



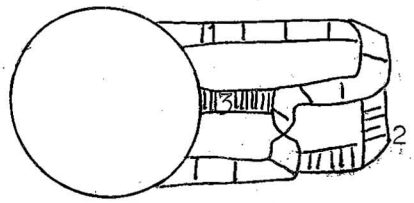
U_2 moins un disque

La première donne $M(b)$ homéomorphe à V_1. La deuxième est homéomorphe à U_2 privé d'un disque (cf §5).

Le cas où $q=3$. Il peut y avoir trois points de type II et M est homéomorphe à U_3 (th.3), ou bien un point de type II et deux points de type I car les points de type I sont en nombre pair entre les niveaux a et b (prop.6). Dans ce cas l'un des points de type I est soit le plus haut, soit le plus bas. On peut toujours supposer que c'est le point le plus bas c_1' (en changeant éventuellement f en $-f$). Soient c et d des niveaux tels que $f(c_1') < c < f(c_2') < d < f(c_3')$. Supposons que c_2' soit de type I, alors $V(d)$ a une composante et $M(d)$ est homéomorphe à T_1 ou U_2 privés d'un disque d'après le cas où $q=2$. D'autre part, d'après le §5, $M'(d)$ est une bande de Moebius. Dans le second cas $M = U_2 \# U_1$ est homéomorphe à U_3. Montrons qu'il en est de même dans le premier, c'est-à-dire que $T_1 \# U_1$ est homéomorphe à U_3. Pour cela, comparons dans les deux cas les espaces $M(b)$ qui sont obtenus en collant trois rectangles à un disque. Il suffit de montrer qu'ils sont homéomorphes ; les espaces M, obtenus à partir de $M(b)$ en collant un disque le seront aussi. On démontre aisément que les deux espaces $M(b)$ sont homéomorphes en étudiant les dessins ci-dessous :

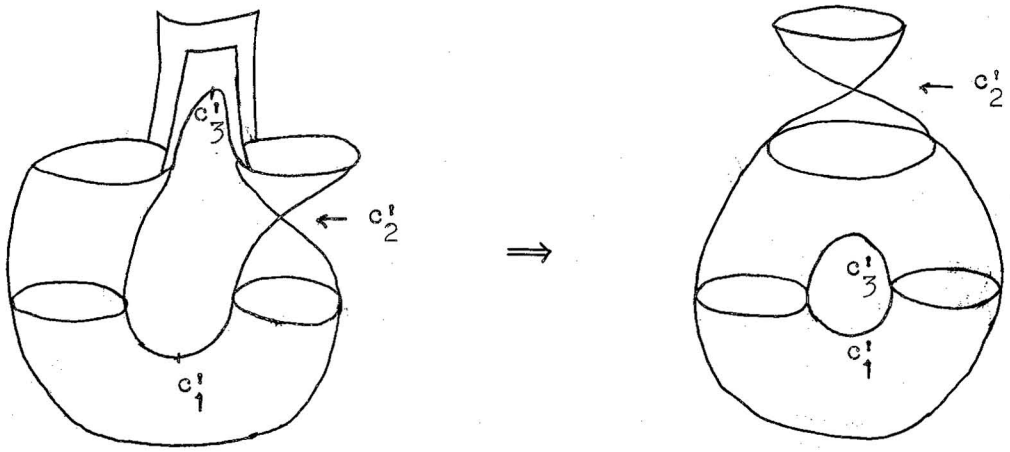


1er cas $U_2 \# U_1$



2ème cas $T_1 \# U_1$

Si maintenant le point c'_2 est de type II, montrons qu'on peut modifier f pour se ramener au cas précédent. Le point c'_3 est de type I et son voisinage canonique U_3 rencontre les deux composantes de $V(d)$ puisque $V(b)$ n'a qu'une composante. Il rencontre donc aussi les deux composantes de $V(c)$. Si l'on modifie la fonction f dans V_3 (ch.4, prop.3) de façon que $f(c'_3)$ devienne inférieur à $f(c'_1)$, le point critique c'_3 devient un point dont le franchissement réunit les deux composantes de $V(c)$ et l'on est ramené au cas précédent.



Plus généralement dans le cas d'un nombre arbitraire q de points critiques, on peut supposer, par ce procédé, que les courbes de niveau ont au plus deux composantes et que chaque point critique c'_j de type I, dont le franchissement sépare en deux une composante, est immédiatement suivi par un point critique c'_{j+1} qui regroupe ces deux composantes en une seule.

Le cas général. Supposons que f ait q points critiques d'indice 1 sur M ; d'après ce qui précède, on peut supposer les points de type I rangés par couples de deux points consécutifs. Il y a des couples de la 1ère manière et des couples de la deuxième manière (cf. le cas où $q=2$). L'assertion qu'on va démontrer,

par récurrence sur q , est la suivante :

Si tous les points sont de type I et forment des couples de la 1ère manière, alors M est homéomorphe à T_p où $q=2p$ (il n'y a que des couples), sinon M est homéomorphe à U_q .

Si tous les points sont de type I et tous les couples de la première manière, soit c un niveau compris entre $f(c'_2)$ et $f(c'_3)$. Il résulte de l'étude du cas $q=2$ que $M(c)$ est homéomorphe à V_1 (i.e. T_1 privé d'un disque). Mais il résulte de l'hypothèse de récurrence, en considérant la fonction $-f$, que $M'(c)$ est homéomorphe à V_{p-1} . Donc M est, par recollement, homéomorphe à $T_p = T_{p-1} \# T_1$; d'où la première partie de l'assertion.

Démontrons la seconde partie. Supposons d'abord que les deux plus bas points c'_1 et c'_2 ne constituent pas un couple de la 1ère manière, pas plus que les deux plus hauts points c'_3 et c'_4 . Dans ces conditions, si c'_1 est de type II, en notant d un niveau compris entre $f(c'_1)$ et $f(c'_2)$, l'espace $M(d)$ est homéomorphe à U_1 privé d'un disque (d'après le cas $q=1$) et $M'(d)$ à U_{q-1} privé d'un disque (d'après l'hypothèse de récurrence). L'espace M est donc homéomorphe à $U_1 \# U_{q-1} = U_q$. Si le point c'_1 est de type I , alors c'_2 aussi et ils forment un couple de la 2ème manière. Si $f(c'_2) < c < f(c'_3)$, l'espace $M(c)$ est homéomorphe à U_2 privé d'un disque $(q=2)$ et l'espace $M'(c)$ à U_{q-2} privé d'un disque (hypothèse de récurrence), donc M est homéomorphe à $U_2 \# U_{q-2} = U_q$.

Si, maintenant, les points c'_1 et c'_2 constituent un couple de la première manière, l'espace $M(c)$ est homéomorphe à T_1 privé d'un disque (cas $q=2$) et $M'(c)$ à U_{q-2} privé d'un disque (hypothèse de récurrence). L'espace M est homéomorphe à $T_1 \# U_{q-2}$. On vérifie facilement, par récurrence sur $q \geqslant 3$, que cet espace est homéomorphe à U_q ; le premier pas de la récurrence a été fait dans le cas $q=3$, où l'on a montré que $T_1 \# U_1$ est homéomorphe à U_3.

Ceci achève la démonstration.

Remarque 2.- Pour préciser le th.4, il reste à montrer qu'il existe des surfaces différentiables homéomorphes à T_p $(p \geqslant 0)$ ou à U_q $(q \geqslant 0)$; il reste aussi à montrer que, hormis U_o et T_o qui sont homéomorphes, dans l'ensemble de tous les espaces T_p $(p \geqslant 0)$ et U_q $(q \geqslant 0)$, il n'y a pas d'autre couple d'espaces homéomorphes. On démontrera cela au chapitre 7.

Remarque 3.- Si la fonction f possède sur M un couple de points critiques de type I de la 2ème manière, il existe une partie de M difféomorphe à l'intérieur d'une bande de Moebius. Il suffit de démontrer que, pour un tore de Klein $(q=2)$ il existe une telle bande de Moebius entre les niveaux a et b, et c'est facile. Une telle surface M n'est pas orientable (prop.3).

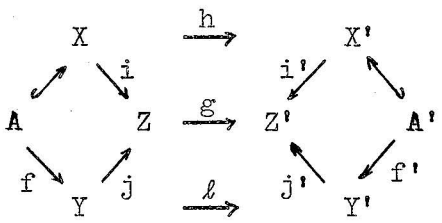
§7. Précisions et remords sur le recollement des homéomorphismes.

Soient X et Y deux espaces métriques, $\mathbf{A}$ une partie compacte de X et $f : \mathbf{A} \to Y$ une isométrie. On a défini, au ch.2, §5, l'espace métrique Z recollé de X et Y par f. Il est muni de deux isométries (inclusions canoniques) $i : X \to Z$ et $j : Y \to Z$. Soient X', Y', $\mathbf{A}'$ et f' d'autres données, Z' leur recollement et i' et j' les inclusions associées. Il résulte du ch.2 que la donnée d'un homéomorphisme $g : Z \to Z'$ est équivalente à la donnée de deux homéomorphismes $h : X \to X'$ et $\ell : Y \to Y'$ tels que :

(1) $\qquad h(\mathbf{A}) = \mathbf{A}'$

(2) $\qquad f' \circ h|\mathbf{A} = \ell \circ f$

et l'on a alors le diagramme commutatif suivant



C'est le théorème de recollement d'homéomorphismes qu'on a utilisé dans les paragraphes précédents pour prouver que deux recollés Z et Z' sont homéomorphes. Pour cela, on a toujours exhibé les homéomorphismes h et ℓ, mais on n'a pas vérifié (1) et (2). Montrons qu'on peut remplacer h et ℓ par des homéomorphismes satisfaisant à (1) et (2) dans les deux cas où nous avons fait des recollements ([5]).

([5]) Ce résultat n'est pas général. La conclusion dépend essentiellement du fait qu'on recolle des morceaux de surfaces.

1er cas : A est homéomorphe à un cercle.

PROPOSITION 7.- Soit k un homéomorphisme, préservant l'orientation, du cercle S sur lui-même. Il existe un homéomorphisme $K : S \times [0,1] \to S \times [0,1]$ tel que :

$K(S \times \{0\}) = S \times \{0\}$ et $K|S \times \{0\}$ soit l'application identique,

$K(S \times \{1\}) = S \times \{1\}$ et $K|S \times \{1\} : S \times \{1\} \to S \times \{1\}$ soit l'application déduite de k .

Soit a le point $(1,0)$ sur le cercle S d'équation $x^2+y^2 = 1$. Supposons que $k(a) = a$. Comme k est un homéomorphisme, l'homomorphisme $\pi(k) : \pi(S,a) \to \pi(S,a)$ est un isomorphisme. Il y a deux automorphismes du groupe $\underline{Z}$, l'identité et la symétrie (multiplication par -1). On dit que k préserve l'orientation si $\pi(k)$ est l'identité. On sait alors (ch.1, §4) que, si x est le point de S d'angle polaire $2\pi t$, $t \in [0,1]$, on peut écrire :

$$k(x) = e^{2i\pi\,\theta(t)}$$

où $\theta : [0,1] \to [0,1]$ est une fonction continue telle que $\theta(0) = 0$ et $\theta(1) = 1$. Comme k est injective, la fonction θ aussi ; c'est donc une fonction strictement croissante. Pour $s \in [0,1]$, la fonction $\theta_s(t) = s\,\theta(t) + (1-s)t$ est une fonction strictement croissante de t et l'on a $\theta_s(0) = 0$, $\theta_s(1) = 1$. On pose alors

$$k_s(x) = e^{2i\pi\,\theta_s(t)} ,$$

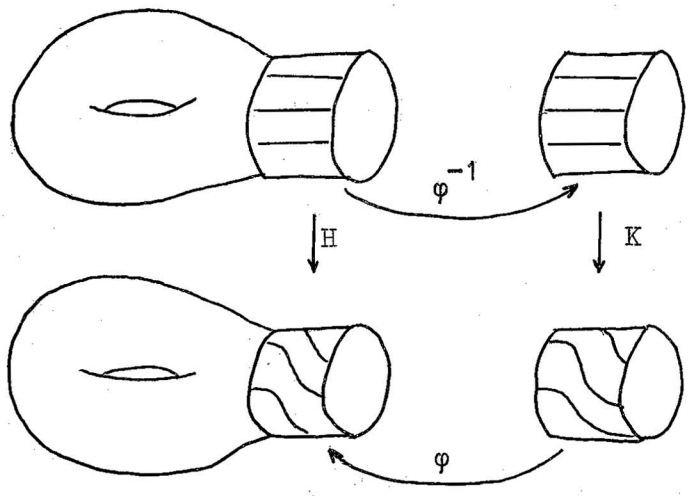
$$K(x,s) = (k_s(x),s) .$$

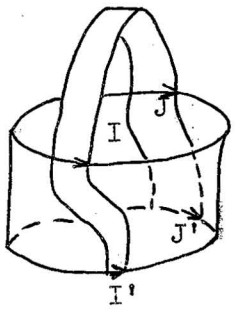
Si l'on n'a pas $k(a) = a$, et si $u \in [0,2\pi[$ est l'angle polaire du point $k(a)$, on a $k(x) = r_u o k'(x)$ où $r_u : S \to S$ est la rotation d'angle u et $k' : S \to S$ un homéomorphisme tel que $k'(a) = a$. On dit que k préserve l'orientation si k' la préserve. Soit $R : S \times [0,1] \to S \times [0,1]$ l'homéomorphisme défini par

$$R(x,s) = (r_{su}(x),s) .$$

L'homéomorphisme $K = RcK'$ convient.

Dans les cas de recollement d'homéomorphismes où $\mathbf{A}$ est homéomorphe au cercle S , on a toujours vérifié que $h(A) = \mathbf{A}'$ et que l'homéomorphisme $k_o = f^{-1} o \ell^{-1} o f' o h | \mathbf{A} : A \to \mathbf{A}$ préserve l'orientation. Montrons qu'on peut remplacer h par un homéomorphisme h' tel que $f^{-1} o \ell^{-1} o f' o h$ soit l'identité sur A . C'est possible parce que, dans les cas étudiés, X est de la forme $M(c)$ et $\mathbf{A}$ est alors $V(c)$. Il résulte de la proposition 1 du ch.4 que $\mathbf{A}$ possède un voisinage homéomorphe à $S \times [0,1]$. Plus précisément, il existe une application continue injective $\varphi : S \times [0,1] \to X$ telle que $\varphi(S \times \{1\}) = \mathbf{A}$ et telle que la frontière de $\varphi(S \times [0,1])$ soit $\varphi(S \times \{0\})$. Soit $k = \varphi^{-1} o k_o c \varphi | S \times \{0\}$. C'est un homéomorphisme, préservant l'orientation, de $S \times \{0\}$. Soit K l'homéomorphisme de $S \times [0,1]$ associé (prop.7). Alors $\varphi o K o \varphi^{-1}$ est un homéomorphisme de $\varphi(S \times [0,1])$ qui coïncide avec k_o sur $\varphi(S \times \{1\})$ et avec l'identité sur $\varphi(S \times \{0\})$. Prolongé par l'identité sur le complémentaire de $\varphi(S \times [0,1])$ c'est un homéomorphisme h_o de X sur lui-même (ch.1, prop.6). L'homéomorphisme $h' = h o R_o^{-1}$ répond à la question.





2ème cas : φ est un rectangle et $f(A)$ est formé de deux côtés opposés.

Il s'agit de recoller un rectangle en identifiant deux côtés (opposés) à des arcs disjoints I et J contenus dans un cercle V(c). On doit montrer que si I' et J' sont deux autres arcs disjoints, de même orientation respectivement que I et J , il existe un homéomorphisme h_o de X sur lui-même tel que $h' = h o h_o^{-1}$ satisfasse à (1) et (2). Comme précédemment, V(c) a un voisinage homéomorphe à $S \times [0,1]$ et il suffit donc, pour se ramener au cas précédent, de démontrer :

PROPOSITION 8.- Soient γ , δ , γ', δ' : $[0,1] \to S$ des applications continues injectives d'images I , J , I', J'. On suppose que I et J (resp. I' et J') sont disjoints et que I et I' (resp. J et J') ont même orientation. Il existe un homéomorphisme $k : S \to S$ préservant l'orientation et tel que :

$$k o \gamma = \gamma' \quad \text{et} \quad k(I) = I' ,$$

$$k o \delta = \delta' \quad \text{et} \quad k(J) = J' .$$

Très facile.

Chapitre 6. Noeuds

La théorie des noeuds est actuellement assez développée, bien que très compliquée. Il s'agit de l'étude de la figure formée par une courbe fermée simple dans l'espace de dimension 3 ; ceci constitue la représentation mathématique des figures qu'on peut former avec une ficelle. Les problèmes posés se généralisent à l'étude d'une sphère de dimension p plongée dans l'espace de dimension n. On se bornera à donner quelques définitions et résultats élémentaires de la théorie des noeuds comme exemple d'utilisation du groupe fondamental. Pour plus de détails, on peut consulter l'ouvrage de R. Crowell et R. Fox : An introduction to knot theory, Ginn and Co, 1964.

§1. Définitions.

Un noeud est l'image K d'une application continue et injective $f : S^1 \to \underline{R}^3$. Deux noeuds K et K' sont équivalents s'il existe un homéomorphisme $h : \underline{R}^3 \to \underline{R}^3$, préservant l'orientation (1), et tel que $h(K) = K'$. On a alors $h(\underline{R}^3-K) = \underline{R}^3-K'$. Une condition nécessaire (mais pas suffisante) pour que deux noeuds soient équivalents est que leurs complémentaires soient homéomorphes et, en particulier, que les groupes fondamentaux de ceux-ci soient isomorphes. On appelle groupe du noeud K, et on note $G(K)$, le groupe fondamental $\pi(\underline{R}^3-K, x_o)$, où x_o est un point-base arbitraire. Vérifier que $G(K)$

(1) On ne précisera pas cette notion.

n'est pas isomorphe à $G(K')$ est un critère très efficace pour montrer que K n'est pas équivalent à K' ; il y a cependant des noeuds dont les groupes sont isomorphes et qui ne sont pas équivalents.

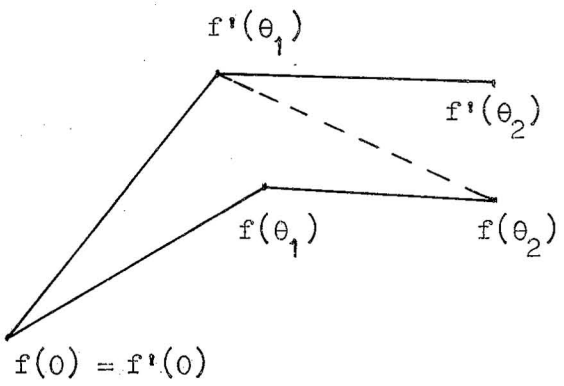
On ne s'intéressera ici qu'aux noeuds K qui sont équivalents à des noeuds polygonaux. Un noeud K est polygonal s'il est l'image d'une application polygonale injective $f : S^1 \to \underline{R}^3$; pour une telle application, il existe une décomposition $0 = \theta_o < \theta_1 < \ldots < \theta_n = 2\pi$ du segment $[0,2\pi]$ telle que, sur chaque segment $[\theta_i,\theta_{i+1}]$, l'application $\theta \mapsto f(\theta)$ soit linéaire affine.

Remarque 1. On pourrait s'intéresser aux noeuds qui sont images d'une application continuement dérivable $f : S^1 \to \underline{R}^3$ injective et de rang 1. On démontre qu'un tel noeud est équivalent à un noeud polygonal. Dans la suite, on ne considérera des noeuds différentiables que s'ils sont évidemment équivalents à un noeud polygonal.

PROPOSITION 1.- *Soit K un noeud polygonal, les noeuds polygonaux assez voisins de K sont équivalents à K.*

Soit K' un noeud, image de $f' : S^1 \to \underline{R}^3$ polygonale. Ce noeud est voisin de K si les applications f et f' sont voisines, au sens de la convergence uniforme sur S^1. On peut, par translation, supposer que $f(0) = f'(0)$.

On peut, en la raffinant au besoin, supposer que la subdivision $\theta = \theta_o,\theta_1,\ldots,\theta_n = 2\pi$ est adaptée à la fois aux deux applications polygonales f et f'. Considérons l'application polygonale $g : S^1 \to R^3$ qui coïncide avec



f' sur $[\theta_o,\theta_1]$, avec f sur $[\theta_1,\theta_2]$ (et qui est linéaire affine sur $[\theta_1,\theta_2]$). Si f' est assez voisin de $f(\theta_1)$, l'application g est injective. On construit facilement un homéomorphisme de $\underline{R}^3$ qui laisse fixe $f([\theta_2,\theta_n])$ et qui transporte $f([0,\theta_2])$ sur $g([0,\theta_2])$, pourvu que $f'(\theta_1)$ soit assez voisin de $f(\theta_1)$. Donc le noeud défini par f est équivalent au noeud défini par g ; et g et f' coïncident sur $[\theta_o,\theta_1]$. Il n'y a qu'à itérérer le procédé pour prouver l'équivalence de f et f'.

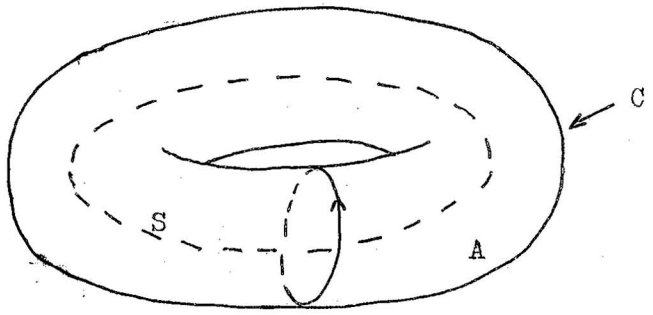
THEOREME 1.- Deux noeuds polygonaux isotopes sont équivalents.

Deux noeuds polygonaux K_o et K_1 sont isotopes s'il existe une application continue $F : S^1 \times [0,1] \to \underline{R}^3$ telle que, si l'on note $F(t,x) = f_t(x)$, l'application $f_t : S^1 \to \underline{R}^3$ soit polygonale injective pour toute valeur de $t \in [0,1]$, et telle que $f_o(S^1) = K_o$, $f_1(S^1) = K_1$.

De la prop.1, il résulte que, pour $t_o \in [0,1]$, il existe $\varepsilon > 0$ tel que le noeud $f_t(S^1)$ soit équivalent à $f_{t_o}(S^1)$ si $|t-t_o| \leqslant \varepsilon$. Les intervalles $]t_o-\varepsilon, t_o+\varepsilon[$, lorsque t_o parcourt $[0,1]$, recouvrent $[0,1]$. Soit $\frac{1}{n}$ un nombre de Lebesgue (ch.2, §1) de ce recouvrement. Si $|t-t'| \leqslant \frac{1}{n}$, alors $f_t(S^1)$ est équivalent à $f_{t'}(S^1)$ car t et t' sont contenus dans un même intervalle $]t_o-\varepsilon, t_o+\varepsilon[$. On en déduit que $K_1 = f_1(S^1)$ est équivalent à $K_o = f_o(S^1)$ en passant par les intermédiaires f_t où $t = \frac{p}{n}$, $p = 1,2,\ldots,n-1$.

Le noeud trivial est le cercle $x^2+y^2-1 = 0$ du plan $z=0$. Tout cercle de $\underline{R}^3$ est évidemment équivalent au noeud trivial. De même, tout triangle dans $\underline{R}^3$ est équivalent au noeud trivial.

PROPOSITION 2.- Le groupe du noeud trivial est isomorphe à $\underline{Z}$.



Soit S un cercle du plan $z=0$, et A un tore plein d'âme S, de frontière un tore C. Soit B le complémentaire de l'intérieur de A, l'inclusion $B \to \underline{R}^3-S$ est une homéotopie. On va montrer que le groupe fondamental de B est infini cyclique de générateur un cercle méridien de C.

Considérons la sphère S^3 qui, dans $\underline{R}^4$, a pour équation $X^2+Y^2+Z^2+T^2 = 1$. La projection stéréographique de S^3 sur le plan $T=0$, de centre le point P de S^3 tel que $T=-1$ est un homéomorphisme $h : S^3-P \to \underline{R}^3$. Le point de coordonnées (x,y,z) de $\underline{R}^3$ est l'image du point de S^3 de coordonnées :

$$X = \frac{2x}{1+x^2+y^2+z^2} \quad , \quad Y = \frac{2y}{1+x^2+y^2+z^2} \quad ,$$

$$Z = \frac{2z}{1+x^2+y^2+z^2} \quad , \quad T = \frac{1-x^2-y^2-z^2}{1+x^2+y^2+z^2} \quad .$$

Considérons les deux parties A' et B' de S^3 définies respectivement par les inéquations :

(A') $\quad X^2+Y^2 \geqslant Z^2+T^2$,

(B') $\quad X^2+Y^2 \leqslant Z^2+T^2$.

Leur intersection C' est définie par $X^2+Y^2=\frac{1}{2}$, $Z^2+T^2=\frac{1}{2}$; produit de deux cercles, c'est un tore. Les espaces A' et B' sont clairement homéomorphes entre eux ; montrons que A' est homéomorphe à un tore plein. L'espace A' ne contient pas le centre P de la projection et A' est homéomorphe à l'espace $A = h(A')$ qui est défini par l'inéquation

$$(x^2+y^2+z^2)^2 - 6(x^2+y^2) + 2z^2 + 1 \leqslant 0 .$$

On reconnait un tore plein d'axe Oz dont les cercles parallèles du plan $z=0$ ont pour rayons $\rho = \sqrt{3\pm\sqrt{2}}$. Il a pour frontière le tore $C = h(C')$.

Le groupe fondamental de B , complémentaire de l'intérieur de A , est donc isomorphe au groupe fondamental de $h(B) = B'-\{P\}$. L'injection canonique $B'-\{P\} \to B'$ induit un isomorphisme des groupes fondamentaux (on applique le th. de van Kampen à $B'-\{P\}$ et à un disque de centre P comme dans ch.2, §6, remarque 7). Le groupe fondamental du tore plein B' est isomorphe à $\underline{Z}$ avec pour générateur un méridien de C'. Le groupe fondamental de B est donc isomorphe à $\underline{Z}$ avec pour générateur un cercle méridien du tore C .

§2. Le groupe d'un noeud.

Voici comment, dans le cas général, on peut calculer le groupe d'un noeud polygonal.

Représentation plane du noeud et notations. D'abord, on choisit un plan P tel que la projection orthogonale du polygone K sur P soit "en position générale", c'est-à-dire n'ait aucune des particularités suivantes :

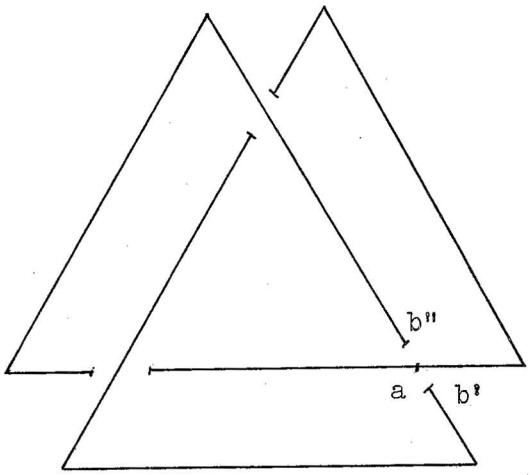
(a) un côté de K se projette en un point,

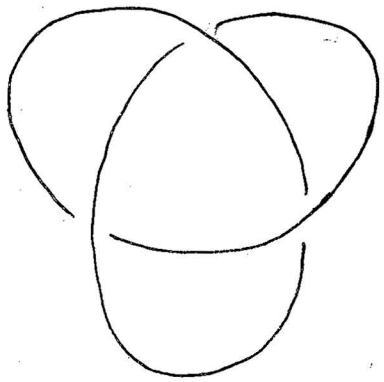
(b) un sommet a sa projection contenue dans celle de l'intérieur d'un côté,

(c) trois points distincts ont même projection.

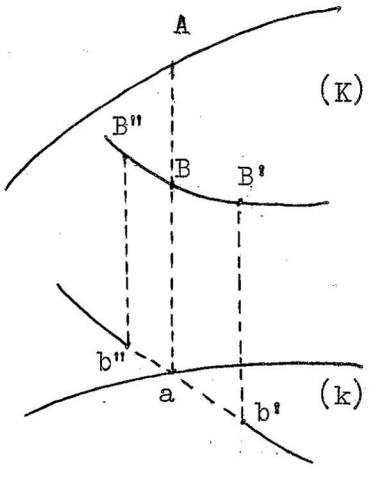
Pour choisir une droite D issue de O et orthogonale à P, la condition (a) exclut un nombre fini de droites, les parallèles aux côtés de K ; la condition (b) exclut les droites d'un nombre fini de plans, parallèles aux plans définis par un sommet et un côté de K ; la condition (c) exclut les droites d'un nombre fini de cones du second ordre, les cones directeurs des quadriques contenant trois côtés de K. On peut donc bien choisir une droite D et un plan P convenables. La projection k de K est une ligne polygonale fermée qui a, pour seules singularités, des points doubles isolés intérieurs aux côtés. On convient alors que P est le plan $z=0$; par translation verticale éventuelle, on se ramène au cas où K est situé dans le demi-espace $z > 1$ et on donne la représentation graphique suivante de k. Soit a un point double de k, projection de A et $B \in K$. Si B est plus bas que A, soit $[B',B'']$ un petit segment de K dont B est le centre. On supprime dans k la projec-

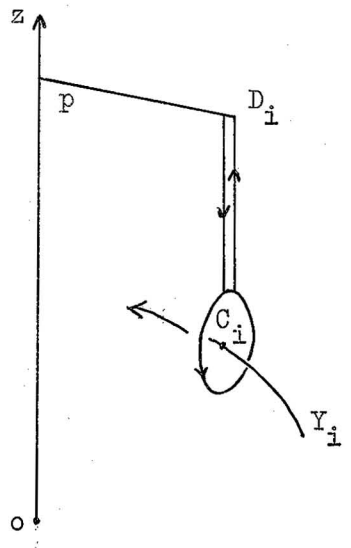
tion $]b',b''[$ de l'intervalle $]B',B''[$ (cf. figure) (on représente souvent, pour simplifier, k par une courbe différentiable).





Le noeud K' équivalent à K . Par isotopie (th.1), le noeud K est équivalent au noeud K' obtenu en remplaçant le segment B' B" par la suite des trois segments B' b',b' b" et b" B". Choisissons un sens de parcours arbitraire sur K et numérotons dans l'ordre $B_1,\ldots,B_n$ les points B rencontrés; on suppose que l'orientation de K coïncide avec celle de $B'_i\ B''_i$ et on note $Y_1,\ldots,Y_n$ les arcs polygonaux $B''_1\ B'_1,\ldots,B''_n\ B'_1$ respectivement.





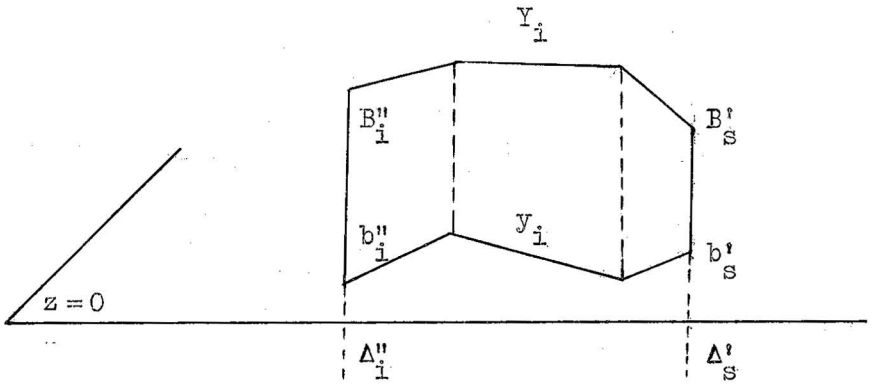
Les générateurs de $G(K)$. Soit p un point de l'axe Oz, de cote supérieure à celle du point le plus élevé de K. Définissons certains éléments $x_1,\ldots x_n$ de $\pi_1(\underline{R}^3-K,p)$. L'élément x_i est représenté par un chemin γ_i composé de la manière suivante : un segment horizontal joignant p à un point D_i situé à la verticale d'un point C_i de l'arc Y_i, un segment vertical descendant de D_i jusqu'au voisinage de C_i, un tour complet autour de l'arc Y_i au voisinage et le retour p en empruntant les deux segments du trajet aller. On suppose que le tour autour de Y_i s'effectue, par rapport à l'orientation de Y_i, dans le même sens que sur la figure.

THEOREME 2.- Le groupe $G(K)$ du noeud K est isomorphe au quotient du groupe $L(x_1,\ldots,x_n)$, groupe libre à n générateurs $x_1,\ldots,x_n$, par le sous-groupe distingué engendré par les n éléments $r_i = x_i\, x_k\, x_{i'}^{-1}\, x_k^{-1}$ correspondant aux n points doubles de k (a_i est un point double, projection de $A_i \in Y_k$ et Y_i et $Y_{i'}$ sont les deux arcs issus de B_i). Si k n'a pas de point double, le groupe $G(K)$ est isomorphe à $\underline{Z}$.

a) Supposons d'abord que k n'a pas de point double, alors k lui-même est noeud polygonal : si $f : S^1 \to \underline{R}^3$ est l'application polygonale qui définit K et $\pi : \underline{R}^3 \to P$ la projection, alors $\pi o f$ est polygonale injective d'image k. En outre $\pi o f$ est isotope à f (isotopie le long des droites projetantes) et k est équivalent à K. Il est facile de voir que k, polygone plan, est équivalent au noeud trivial.

b) S'il y a des points doubles, on calcule le groupe du noeud K', équivalent à K à l'aide du théorème de van Kampen. Considérons le demi-espace E_1 défini par $z > 0$ et $K_1 = K' \cap E_1$ et le demi-espace E_2 défini par $z < 1$ ainsi que $K_2 = K' \cap E_2$.

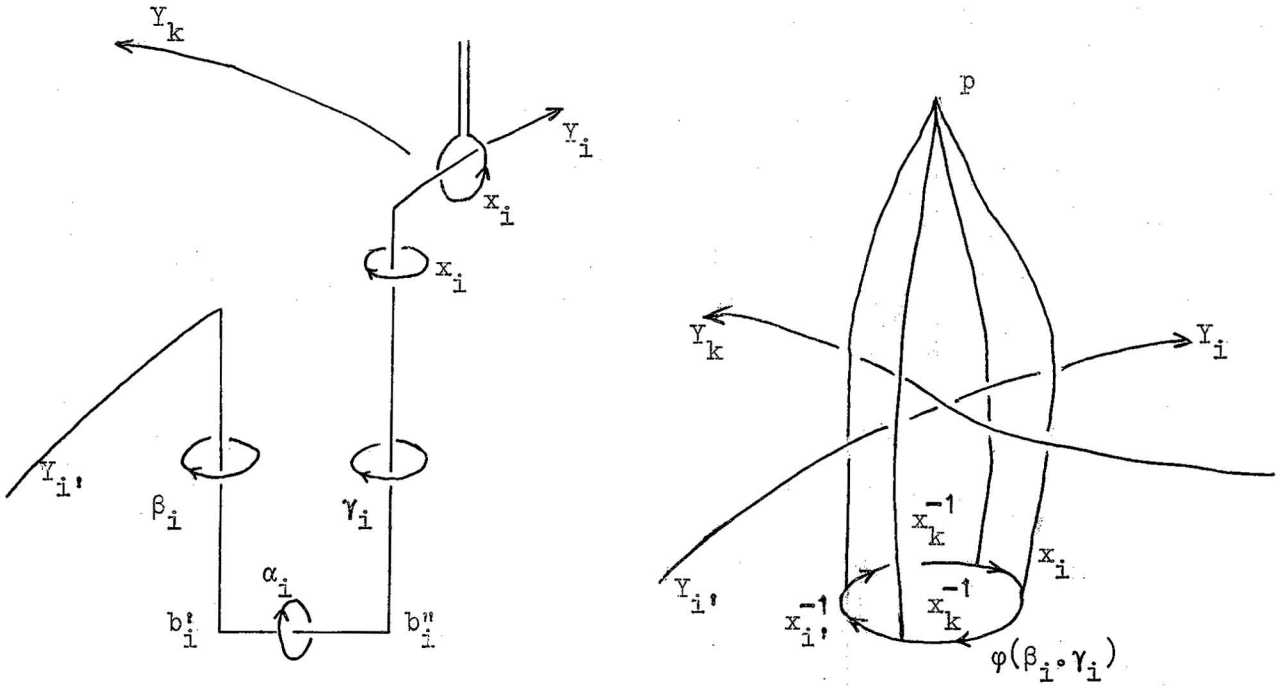
LEMME.- Le groupe $\pi(E_1 - K_1, p)$ est le groupe libre à n générateurs $x_1, \ldots, x_n$.



L'espace K_1 possède n composantes F_i formée chacune d'un arc polygonal Y_i (dont la projection horizontale y_i est sans point double) avec à chacune de ses extrémités un segment vertical, $[B''_i, b''_i[$ et $[B'_s, b'_s[$. En outre les arcs y_i sont disjoints. Il existe un homéomorphisme conservant la projection horizontale, de E_1 sur $\underline{R}^3$ qui envoie chaque F_i sur la réunion F'_i de l'arc y_i et des deux demi-droites verticales descendantes Δ''_i et Δ'_s issues de b''_i et b'_j . Le complémentaire $\underline{R}^3 - (\cup F'_i)$ est homéomorphe au complémentaire de n droites parallèles dans $\underline{R}^3$. On peut le voir en déformant, par "isotopie" l'arc polygonal en un segment, les droites Δ''_i et Δ'_s restant les verticales des extrémités ; puis en rabattant ces droites et en raisonnant comme dans le théorème 1. La même opération peut s'effectuer de façon disjointe

pour toutes les F'_i . Le complémentaire de n droites parallèles de $\underline{R}^3$ est homéotope au complémentaire de n points de $\underline{R}^2$. Son groupe fondamental est libre à n générateurs, chacun correspondant à un tour complet autour d'une des n droites et d'une seule. En remontant à E_1-K_1 , on voit qu'on a démontré le lemme.

c) D'après le lemme, le groupe fondamental de E_2-K_2 est analogue car K_2 est constitué de n composantes G_i , formée chacune du segment $[b'_i,b''_i]$ et de deux petits segments verticaux ; notons α_i les générateurs de $\pi(E_2-K_2)$. Enfin, $(E_2-K_2)\cap(E_1-K_1)$, complémentaire de 2n segments verticaux dans $E_1\cap E_2$, a un groupe fondamental à 2n générateurs, les β_i qui entourent les Δ'_i et les γ_i qui entourent les Δ''_i . On peut alors appliquer le théorème de van Kampen (ch.2, th.2). Le groupe de K', groupe fondamental de R^3-K' est la somme du groupe libre $L((x_i))$ et du groupe libre $L((\alpha_i))$, amalgamée par deux homomorphismes φ et ψ venant du groupe libre $L((\beta_i),(\gamma_i))$. Choisissons les orientations de α_i , β_i , γ_i , x_i comme sur la figure. On a alors $\psi(\beta_i)=\alpha_i^{-1}$, $\psi(\gamma_i)=\alpha_i$. On obtient donc $G(K')$ en faisant le quotient du groupe libre $L((\alpha_i),(x_i))$ par le sous-groupe N engendré par les éléments $\varphi(\beta_i).\alpha_i$, $\varphi(\gamma_i).\alpha_i^{-1}$. Les relations $\varphi(\beta_i).\alpha_i=1$ et $\varphi(\gamma_i)\alpha_i^{-1}=1$ sont équivalentes à $\alpha_i=\varphi(\gamma_i)$ et $\varphi(\beta_i).\varphi(\gamma_i)=1$. Il en résulte un isomorphisme entre $L((\alpha_i),(x_i))/N$ et $L((x_i))/N'$, où N' est engendré par les éléments $\varphi(\beta_i).\varphi(\gamma_i)=\varphi(\beta_i.\gamma_i)$. Le lacet $\beta_i.\gamma_i$ fait une fois le tour des deux droites Δ'_i et Δ''_i dans le même sens. Il est facile de voir que $\varphi(\beta_i.\gamma_i)=x_i\,x_k\,x_i^{-1},x_k^{-1}$. D'où le théorème.



Remarque 2.- L'un quelconque des relateurs $r_i = x_i\, x_k\, x_{i'}^{-1}\, x_k^{-1}$ est produit de conjugués des $(n-1)$ autres, et $(n-1)$ relateurs suffisent donc à définir $G(K)$. On peut s'en convaincre dans le cas où $n=1$; il n'y a qu'un point double, qu'un arc Y_1, qu'un générateur x_1 et le relateur $r_1 = x_1\, x_1\, x_1^{-1}\, x_1^{-1}$ est trivial.

Remarque 3.- Considérons l'unique homomorphisme du groupe libre à n générateurs (x_i) sur le groupe infini cyclique de générateur x, tel que $\Phi(x_i) = x$. On a $\Phi(r_i) = 1$ et Φ passe au quotient pour donner un homomorphisme $\varphi : G(K) \to \underline{Z}$ qui envoie chaque générateur x_i sur le générateur x.

Chapitre 7. Surfaces dans l'espace euclidien de dimension 3

Si M est une surface compacte connexe dans $\underline{R}^3$, on va montrer qu'elle sépare l'espace en deux parties. Le résultat est en fait général pour les variétés compactes connexes de dimension n dans $\underline{R}^{n+1}$. La démonstration exposée ici utilise essentiellement les résultats des chapitres 2, 5 et 6. Elle est tout-à-fait particulière au cas des variétés de dimension 2 (1). La fin du chapitre est consacrée à des exemples de surfaces dans $\underline{R}^3$ et $\underline{R}^4$.

§1. Séparation de $\underline{R}^3$ par une surface compacte connexe.

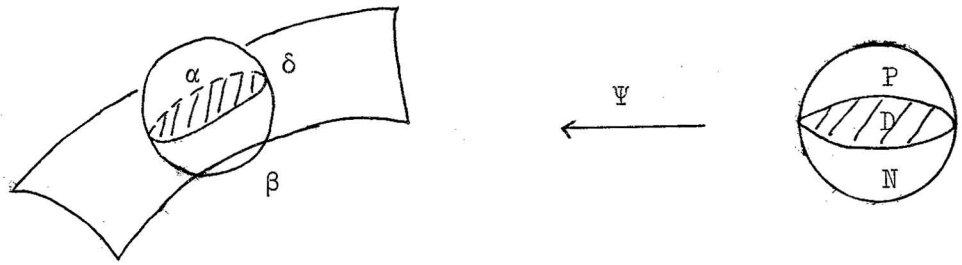
THEOREME 1.- (Alexander) *Soit M une surface différentiable compacte connexe dans $\underline{R}^3$. Le complémentaire U de M possède deux composantes connexes par arcs. Elles ont toutes deux M pour frontière et l'une d'entre elles est bornée.*

a) *Il y a au plus deux composantes.*

De la propriété (P') (ch.3, §3) de définition des variétés, on déduit, en restreignant éventuellement X, le résultat suivant. Soit B la boule unité ouverte de $\underline{R}^3$ et D le disque ouvert qui est l'intersection de B et du plan $z=0$. Pour tout point $m \in M$, il existe un difféomorphisme ϕ de B sur un voisinage W de m dans $\underline{R}^3$ tel que $\phi(D) = W \cap M$. L'espace B-D a deux composantes connexes p.a. qui sont les demi-boules P et N, parties de

(1) Pour les variétés de dimension n, on utilise la théorie de l'homologie qui joue le rôle tenu ici par le groupe fondamental, et théorème de dualité d'Alexander dont la remarque 3 du ch.6 est un cas particulier.

B situées respectivement dans les demi-espaces $z > 0$ et $z < 0$. Les images $\alpha = \psi(P)$ et $\beta = \psi(N)$ sont les deux composantes de $W - (W \cap M)$. Tous les points de $\delta = \psi(D)$ adhèrent à α et à β, comme les points de D adhèrent à P et N.



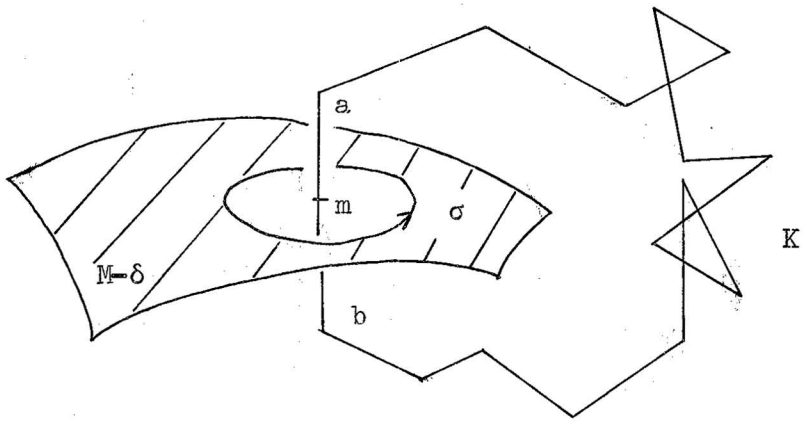
Comme M est compacte, le complémentaire $U = \underline{R}^3 - M$ est ouvert et ses composantes connexes p.a. sont ouvertes et fermées dans U (ch.1, prop.4). Soit A une composante connexe de U ; elle est ouverte dans $\underline{R}^3$ et ses points frontières (dans $\underline{R}^3$) sont situés dans M. Il y a de tels points frontières sinon A serait ouverte et fermée dans $\underline{R}^3$ ce qui est impossible puisque $\underline{R}^3$ est connexe ([2]). L'ensemble Fr(A) des points frontières de A est une partie de M, fermée et non vide. Si $m \in Fr(A)$ et ψ est, comme ci-dessus, un difféomorphisme de B sur un voisinage W de m, alors W rencontre A et l'une des composantes (α par exemple) de $W - (W \cap M)$ est contenue dans A. Il en résulte que Fr(A) contient le voisinage $W \cap M$ de m dans M. La frontière de A est une partie non vide, ouverte et fermée de l'espace connexe M, donc $Fr(A) = M$. Ainsi, un point $m \in M$ est adhérent à

([2]) Un espace connexe est un espace qui n'a d'autre partie à la fois ouverte et fermée que la partie vide et lui-même. Nous admettons que $\underline{R}^3$ est connexe ainsi qu'une variété connexe par arcs (cf. ch.1, remarque 1).

toutes les composantes de U ; comme $W \cap U$ n'a que deux composantes α et β , contenues chacune dans une composante de U , l'espace U a au plus deux composantes connexes par arcs.

b) Il y a au moins deux composantes.

Reprenons un point $m \in M$ et un difféomorphisme ψ de la boule de rayon 2 de $\underline{R}^3$ sur un voisinage W de m , tel que $\psi(0) = m$ et que $W \cap M$ soit l'image du plan $z = 0$. Soit S le cercle de rayon 1 de ce plan (c'est le bord de D) et soit $\sigma = \psi(S)$. Soit Y un segment de droite de milieu m , normal à M en m . Si Y est assez petit, son origine a est dans la composante $\alpha = \psi(P)$, son extrémité b dans la composante $\beta = \psi(N)$, et m est le seul point commun avec M . Supposons (par l'absurde) que $U = \underline{R}^3 - M$ n'a qu'une composante connexe par arcs ; il existe un arc continu dans U qui joint a à b . Comme les ouverts connexes par arcs de $\underline{R}^3$ sont connexes par arcs polygonaux, il existe même un arc polygonal H dans U joignant a à b . Soit K l'arc polygonal fermé réunion de H et Y . L'arc K est contenu dans $U \cup \delta$ (le seul point de K qui n'est pas dans U est le point m). Par des manipulations assez simples, on peut remplacer K par un arc polygonal sans point double qui soit contenu dans $U - \delta$, qui contienne encore le segment Y et dont le seul point d'intersection avec M soit m . On le note encore K.



Comme $K \subset U \cup \delta$, on a une inclusion $i : M-\delta \to \underline{R}^3-K$ des complémentaires. Si x_o est un point base sur le cercle $\sigma = \phi(S)$, ce cercle est un lacet dans $M-\delta$, notons s sa classe dans $\pi(M-\delta,x_o)$; c'est aussi un lacet dans $\underline{R}^3-K$, notons s' sa classe. On a $s' = \pi(i)(s)$, si $\pi(i) : \pi(M-\delta,x_o) \to \pi(\underline{R}^3-K,x_o)$ est l'application naturelle.

D'après le th.4 du ch.4, l'espace M est homéomorphe soit à T_p soit à U_q. Dans tous les cas, le groupe fondamental de $M-\delta$ est un groupe libre (ch.2, prop.6 et 8) et la classe s de σ est, dans ce groupe, un produit de commutateurs si M est homéomorphe à T_p, un produit de carrés si M est homéomorphe à U_q (3). Il en est donc de même de $s' = \pi(i)(s)$ dans le groupe $\pi(\underline{R}^3-K,x_o)$ qui est isomorphe au groupe $G(K)$ du <u>noeud</u> K (polygone fermé sans point multiple). D'après le §2 du ch.6, l'élément $s' \in G(K)$ peut-être pris comme générateur de $G(K)$ car le lacet σ fait juste un tour du côté Y du polygone K, et c'est tout. Soit $\varphi : G(K) \to \underline{Z}$ l'homomorphisme de la

---

(3) On verra au §3 qu'il n'y a pas de surface homéomorphe à U_q dans $\underline{R}^3$; mais ce résultat se pose sur le théorème 1. Il est donc nécessaire d'envisager ce cas uniquement pour des raisons techniques de démonstration.

remarque 3 du ch.6. L'élément $x = \varphi(s')$ est un générateur de $\underline{Z}$. Mais, si s' est un produit de commutateurs, $\varphi(s')$ est l'élément neutre car $\underline{Z}$ est commutatif, et si s' est un produit de carrés, alors $\varphi(s')$ est un nombre pair (pour la notation additive de $\underline{Z}$). Dans les deux cas, ce ne peut-être le générateur de $\underline{Z}$. Ceci prouve, par l'absurde, que U a deux composantes connexes par arcs.

c) L'une des composantes est bornée.

Soit n un nombre assez grand pour que la boule $B(n)$ de centre 0, de rayon n dans $\underline{R}^3$ contienne le compact M. Le complémentaire de $B(n)$ est connexe par arcs et contenu dans U. Il est contenu dans l'une des composantes connexes par arcs de U. L'autre composante connexe par arcs de U, contenue dans $B(n)$ est bornée. Soit A cette composante bornée, l'adhérence $\bar{A} = A \cup Fr(A) = A \cup M$ est compacte.

Remarque 1.- Une surface compacte dans $\underline{R}^3$ qui a n composantes sépare l'espace en $n+1$ composantes et une seule d'entre elles n'est pas bornée.

THEOREME 2.- Une surface différentiable compacte connexe dans $\underline{R}^3$ est orientable.

D'après la prop.4 du ch.5, il suffit de montrer que M possède un champ continu $N(m)$ de vecteurs normaux. Soit m un point de M, il y a deux vecteurs normaux opposés N_1 et N_2 de longueur 1 en m. Au départ de leur origine m, l'un se dirige dans la composante α et l'autre dans la compo-

sante β . Le point m adhère à la fois à la composante bornée **A** de U et à la composante non bornée **A'**. Notons N(m) celui des vecteurs N_1 et N_2 qui, au départ, se dirige vers **A'**. On obtient ainsi un champ continu de vecteurs normaux à M , de longueur 1.

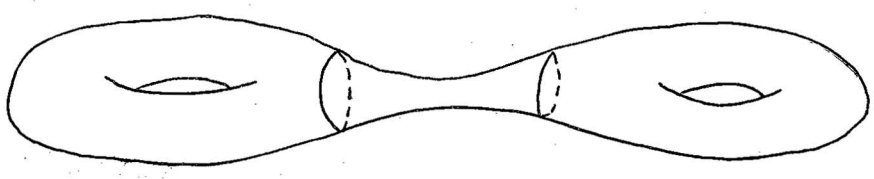
§2. Les surfaces orientables se plongent dans $\underline{R}^3$.

PROPOSITION 1.- Pour tout entier $p \geqslant 0$, il existe une surface différentiable M dans $\underline{R}^3$ qui est homéomorphe à T_p (4).

Nous savons déjà (ch.3, §3, ex.2) ce résultat pour $p=0$ (sphère) et $p=1$ (tore). Pour p quelconque, on le déduit du lemme suivant qu'on ne démontrera pas :

LEMME.- Soient M_1 et M_2 deux variétés de dimension n dans $\underline{R}^q$, il existe une variété M dans $\underline{R}^q$ qui est homéomorphe à la somme connexe $M_1 \# M_2$.

L'idée de la démonstration du lemme est la suivante : après translation éventuelle de M , on suppose que M et M' sont disjointes. On ôte une boule dans M et une boule dans M' et on joint les bords ainsi créés par un cylindre. Il reste à montrer qu'on peut faire cela de telle sorte que le résultat soit différentiable.



(4) On sait en réalité que deux surfaces homéomorphes sont difféomorphes ; par suite, toute surface homéomorphe à T_p est difféomorphe à une surface dans $\underline{R}^3$.

PROPOSITION 2.- Si $p \neq p'$, l'espace T_p n'est pas homéomorphe à l'espace $T_{p'}$.

Le groupe fondamental $\pi(T_p)$ est le quotient d'un groupe libre à $2p$ générateurs par un produit de commutateurs. Si on le rend abélien en divisant par le sous-groupe (distingué) engendré par tous les commutateurs, on obtient le groupe abélien libre à $2p$ générateurs $\underline{Z}^{2p}$. Il est donc impossible que $\pi(T_p)$ et $\pi(T_{p'})$ soient isomorphes si $p \neq p'$.

PROPOSITION 3.- Si $q \neq 0$, l'espace U_q n'est homéomorphe à aucun espace T_p.

Pour démontrer cela, il suffit de montrer qu'en rendant abélien $\pi_1(U_q)$, on obtient un groupe isomorphe à $\underline{Z}^{q-1} \times (\underline{Z}/(2))$. Ceci démontre en même temps la proposition suivante :

PROPOSITION 4.- Si $q \neq q'$, l'espace U_q n'est pas homéomorphe à l'espace $U_{q'}$.

D'abord, pour $q=1$, $\pi(U_q) = \underline{Z}/(2)$ (ch.2, prop.7). Pour $q=2$, on a $\pi(U_2) = L(\alpha,\beta)/(\alpha^2\beta^2)$. Si l'on pose $\rho = \alpha\beta$, on a un isomorphisme $L(\alpha,\beta) \to L(\alpha,\rho)$, qui donne, par passage au quotient, un isomorphisme $L(\alpha,\beta)/(\alpha^2\beta^2) \to L(\alpha,\rho)/(\alpha\,\rho\,\alpha^{-1}\rho)$. Si l'on rend $\pi_1(U_2)$ abélien, on obtient le quotient du groupe abélien libre de générateurs α et ρ par le sous-groupe engendré par ρ^2, d'où encore le résultat. Dans le cas général, si $q = 2p+1$, l'espace U_q est homéomorphe à $T_p \# U_1$ et si $q = 2p+2$, l'espace U_q est homéomorphe à $T_p \# U_2$. Le résultat s'obtient alors à partir des précédents à l'aide du théorème de van Kampen.

§3. Les surfaces non-orientables se plongent dans R^4, mais pas dans R^3. (5)

Soit M une surface homéomorphe à U_q $(q \neq 0)$. D'après la prop.3, elle n'est homéomorphe à aucune T_p. Il résulte alors du §6 du ch.5 qu'une fonction de Morse sur M possède un point critique de type II ou a un couple de points critiques de type I de la 2ème manière. Une telle surface n'est pas orientable (ch.5, §4, prop.5 et §6, remarque 3). La surface M ne peut donc être une surface dans R^3 (§1, th.2).

PROPOSITION 5.- Pour tout entier $q \geq 1$, il existe une surface différentiable M dans R^4 homéomorphe à U_q.

En vertu du lemme du §2, il suffit de démontrer la proposition pour $q = 1$. On va définir explicitement une surface $M \subset R^4$, homéomorphe au plan projectif P_2.

Soit $F : R^3 \to R^4$ l'application dérivable définie par

$$u = x^2 - y^2 \quad , \quad v = xy \quad , \quad w = yz \quad , \quad t = zx \quad ,$$

où (x,y,z) sont les coordonnées de R^3 et (u,v,w,t) celles de R^4. Soit S^2 la sphère d'équation $x^2+y^2+z^2 = 1$ de R^3 et $f : S^2 \to R^4$ la restriction de F.

LEMME 2.- (a) L'application $f : S^2 \to R^4$ est une application dérivable de rang 2 en tout point.

---

(5) C'est un problème important de déterminer, pour une variété M de dimension n, la dimension minimum q de R^q pour laquelle M peut-être une variété dans R^q. En 1944, H. Whitney a démontré que toute variété de dimension n est difféomorphe à une variété dans R^{2n}. Pour une variété M donnée, le problème du calcul de q n'est pas entièrement résolu.

(b) Pour que deux points A et A' de S^2 soient diamétralement opposés, il faut et il suffit que $f(A) = f(A')$.

LEMME 3.- Si l'application $f : S^2 \to \underline{R}^4$ possède les propriétés (a) et (b) ci-dessus, son image M est une surface différentiable compacte homéomorphe à P_2.

Démonstration du lemme 1. La matrice jacobienne de F est

$$J(F) = \begin{pmatrix} 2x & -2y & 0 \\ y & x & 0 \\ 0 & z & y \\ z & 0 & x \end{pmatrix}$$

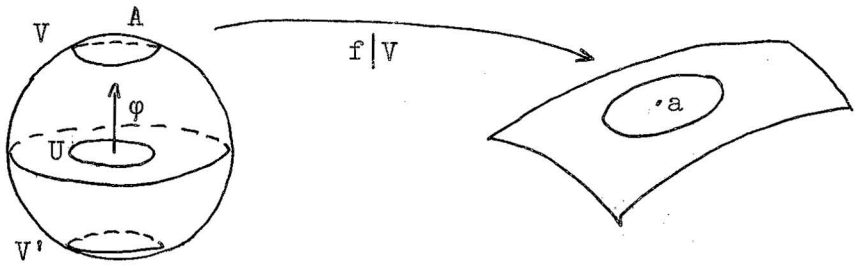
Les déterminants d'ordre 3 extraits de $J(F)$ sont respectivement :

$$2xyz\ ,\ 2z(x^2-y^2)\ ,\ 2x(x^2+y^2)\ ,\ 2y(x^2+y^2)\ ;$$

ils ne sont tous nuls que pour $x=y=0$. En dehors des points $(0,0,\pm 1)$, l'application f est de rang 2 car F est de rang 3. Si $x=y=0$, et $z\neq 0$, DF est de rang 2 et son noyau est le sous-espace $x=y=0$; comme il n'est pas tangent à la sphère S^2 aux points $(0,0,\pm 1)$, l'application f est, en ces points, de rang 2. L'assertion (b) est évidente car la donnée de (v,w,t) détermine la droite OA .

Démonstration du lemme 2. D'après la définition de l'espace P_2 (ch.2, §5) et la propriété (b), l'application continue $f : S^2 \to \underline{R}^4$ induit une application continue et injective $\tilde{f} : P_2 \to \underline{R}^4$. L'espace P_2 est compact. Soit, en effet, $(\tilde{x}_n)$ une suite de points de P_2 et soit $x_n \in S^2$ l'un des deux points d'image $\tilde{x}_n$ par l'application canonique $p : S^2 \to P_2$; la suite (x_n) admet un point adhérent x , et $p(x)$ est adhérent à $(\tilde{x}_n)$. Les fermés de

P_2 sont compacts, leurs images par $\tilde{f}$ sont compactes donc fermées dans $\underline{R}^4$. L'application $\tilde{f}$ continue injective et fermée est un homéomorphisme de P_2 sur $M = f(S^2)$.



Montrons que M est une variété. Soit $a \in M$ et A, $A' \in S^2$ les deux points image réciproque de a par f. Soit V un disque ouvert de centre A sur S^2, de rayon inférieur à $\frac{1}{2}$ et V' le disque de centre A' déduit par la symétrie de centre 0. L'image $f(S^2 - (V \cup V'))$ est un compact qui ne contient pas a (propriété (b)). Soit W le complémentaire de $f(S^2 - (V \cup V'))$; c'est un voisinage ouvert de a et $W \cap M = f(f^{-1}(W)) = f(V)$. Soit $\varphi : U \to S^2$ un paramétrage de S^2 d'image V ; par exemple, U est le disque ouvert projection de V sur le plan perpendiculaire à OA en O, et φ l'application réciproque de cette projection (si A est le point $(0,0,1)$, φ est définie par $(x,y) \mapsto (x,y,\sqrt{1-x^2-y^2})$). L'application $f\circ\varphi : U \to \underline{R}^4$ est de rang 2, et son image $f\circ\varphi(U)$ est précisément $f(V) = W \cap M$.

Remarque 2.- Considérons la fonction $g : M \to \underline{R}$ qui à $a \in M$ associe $g(a) = u(x,y,z) = x^2-y^2$, où (x,y,z) sont les coordonnées d'un des deux points A, $A' \in f^{-1}(a)$. Cette fonction est bien définie. Elle est dérivable. On vérifie facilement que c'est une fonction de Morse dont les points critiques

sont les points :

$f(0,1,0)$, indice 0 (minimum) , $u(x,y,z) = -1+2x^2+z^2$;

$f(0,0,1)$, indice 1 , $u(x,y,z) = x^2+y^2$,

$f(1,0,0)$, indice 2 (maximum) , $u(x,y,z) = 1-2y^2-z^2$.

Les couples (x,y) , (x,y) et (y,z) sont des coordonnées locales au voisinage de chacun de ces points respectivement.

INDEX

Alexander (th.d') 105
Application de classe C^r 38
Application dérivable 37,43
Application dérivée 38
Application linéaire tangente 37,45

Brouwer (th. de) 13

Carte locale 42
Cercle 10
Champ de vecteurs tangents 55
Champ de vecteurs normaux 81
Chemin 1
Compact (espace métrique) 16
Composante connexe par arcs 2
Composition des chemins 4
Connexe (espace) 3,106
Connexe par arcs (espace) 1
Contractile (espace) 9
Coordonnées locales 42
Courbe 41,70
Courbe de niveau 57

Degré (d'un lacet de S^1) 11,12
Dérivée partielle 39
Difféomorphisme 39,44

Equivalence d'homotopie 9
Espace projectif 30,112

Fonction de Morse 54
Fonction ordonnée 69
Fonctions implicites (th. des) 40

Groupe à un paramètre (de difféomorphismes) 55
Groupe d'un noeud 94,99
Groupe libre 18,19
Groupe fondamental 6

Hessienne (matrice) 48
Homéomorphe 1
Homéotope 9
Homotopes (chemins) 3
Homotopes (applications) 8

Indice d'un point critique 49
Inversion locale (th. de l') 39

Jacobienne (matrice) 39

Klein (tore de) 35

Lacet 6
Lebesgue (nombre de) 16
Localement connexe p.a. 2

Moebius (bande de) 10
Morse (fonction de) 54
Morse (th. de) 49
Mot réduit 18

Noeud 94
Noeud polygonal 95
Noeud trivial 97
Noeuds équivalents 94
Noeuds isotopes 96

Pâquerette 9,27

Paramétrisation différentiable 41

Plan projectif 30,112

Plan tangent 44

Poincaré (groupe de) 6

Point critique 46

Point non-dégénéré 49

Point fixe (th. du) 13

Points critiques en bonne position 73

Rang d'une application dérivable 38,44

Rétraction 13

Recollement d'applications 30,90

Recollement d'espaces 29

Seifert et van Kampen (th. de) 23

Simplement connexe 7

Somme amalgamée de groupes 20

Somme connexe 34

Somme de groupes 19

Sous-groupe distingué 20

Sphère 15

Surface compacte 32

Surface différentiable 41,73

Surface orientable 79

Système différentiel (existence et unicité des solutions) 56

Tore 14

Tore de Klein 35

Van Kampen (th. de Seifert et) 23

Variété différentiable 41

Variété topologique 2

Voisinage canonique (d'un point critique) 53,74

Table des matières

INTRODUCTION..... i

CHAPITRE 1. LE GROUPE FONDAMENTAL..... 1

1. Connexité (par arcs)..... 1
2. Chemins, équivalence, composition..... 3
3. Lacets, groupe fondamental..... 6

CHAPITRE 2. LE THEOREME DE VAN KAMPEN..... 15

1. Groupe fondamental de la sphère..... 15
2. Notions sur les groupes (2)..... 18
3. Théorème de Seifert et van Kampen..... 23
4. Premières applications..... 27
5. Recollement d'espaces..... 29
6. Les surfaces compactes..... 32
7. Les surfaces non orientables (4)..... 35

CHAPITRE 3. FONCTIONS DERIVABLES ET VARIETES..... 37

1. Applications dérivables..... 37
2. Théorème de l'inversion locale..... 39
3. Variétés différentiables..... 41
4. Valeurs régulières d'une fonction dérivable..... 46
5. Points critiques..... 48

CHAPITRE 4. FONCTIONS DE MORSE SUR LES SURFACES..... 54

1. Fonction de Morse sur une surface compacte..... 54
2. Champ de vecteurs et groupe à un paramètre de difféomorphismes.. 55
3. Valeurs régulières d'une fonction de Morse..... 57
4. Franchissement d'une valeur critique..... 60
5. Changement de fonction de Morse dans un voisinage canonique..... 66

CHAPITRE 5. LA CLASSIFICATION DES SURFACES..... 70

1. Classification des courbes..... 70
2. Préliminaires à la classification des surfaces..... 73
3. Début de la démonstration..... 76
4. Surfaces orientables et non-orientables..... 79
5. Un cas particulier..... 82

6. Le cas général..... 84
7. Précisions et remords sur le recollement des homéomorphismes.... 90

CHAPITRE 6. NOEUDS..... 94
1. Définitions..... 94
2. Le groupe d'un noeud..... 99

CHAPITRE 7. SURFACES DANS L'ESPACE EUCLIDIEN DE DIMENSION 3..... 105
1. Séparation de $\underline{R}^3$ par une surface compacte connexe..... 105
2. Les surfaces orientables se plongent dans $\underline{R}^3$..... 110
3. Les surfaces non-orientables se plongent dans R^4, mais pas dans $\underline{R}^3$ 112

INDEX..... 117

TABLE DES MATIERES..... 119