

PUBLICATIONS

MATHEMATIQUES

D'ORSAY

81 - 05

LES FONCTIONS RESURGENTES
(en trois parties)

Jean ECALLE

Tome I : Les algèbres de fonctions résurgentes.

Université de Paris-Sud
Département de Mathématique

Bât. 425

91405 **ORSAY** France

PUBLICATIONS

MATHEMATIQUES

D'ORSAY

81 - 05

LES FONCTIONS RESURGENTES
(en trois parties)

Jean ECALLE

Tome I : Les algèbres de fonctions résurgentes.

Université de Paris-Sud
Département de Mathématique

Bât. 425

91405 **ORSAY** France

LES FONCTIONS RESURGENTES

et leurs applications

par Jean Ecalle

en trois parties :

- I - Les algèbres de fonctions résurgentes.
- II - Les fonctions résurgentes appliquées à l'itération.
- III - Les fonctions résurgentes appliquées aux équations fonctionnelles et à l'analyse de Lie.

TABLE DES MATIERES GENERALES

Introduction générale.

PREMIERE PARTIE : LES ALGEBRES DE FONCTIONS RESURGENTES

Table des matières de la première partie - Introduction.

- Chapitre 1 : Les algèbres $\mathcal{A}$ et π et la convolution des germes.
Chapitre 2 : Les algèbres $\mathcal{A}(\mathbb{Q})$ et $\pi(\mathbb{Q})$ et la convolution des fonctions résurgentes.
Chapitre 3 : Les divers modèles des algèbres de résurgence.
Chapitre 4 : Dérivations étrangères et pseudovariabiles. Moules et comoules.
Chapitre 5 : Les algèbres à la frontière.
Chapitre 6 : Représentations des pseudovariabiles et calcul différentiel étranger.
Chapitre 7 : Les algèbres de résurgence générales et les moules hyperlogarithmiques.

DEUXIEME PARTIE : LES FONCTIONS RESURGENTES APPLIQUEES A L'ITERATION

Table des matières de la deuxième partie - Introduction.

- Chapitre 8 : Le groupe $\mathcal{G}^o$ et les groupes apparentés.
Chapitre 9 : L'itération continue dans $\mathcal{G}^o$ et les groupes apparentés. Le phénomène de la résurgence.
Chapitre 10 : Les algèbres de résurgence réduites.
Chapitre 11 : Le phénomène de l'enrichissement algébrique et les théorèmes d'indépendance.
Chapitre 12 : L'analyse harmonique sur $\mathcal{G}^o$ et les groupes apparentés.
Chapitre 13 : La synthèse harmonique sur $\mathcal{G}^o$ et les groupes apparentés.

TROISIEME PARTIE : LES FONCTIONS RESURGENTES APPLIQUEES AUX EQUATIONS FONCTIONNELLES ET A L'ANALYSE DE LIE

Table des matières de la troisième partie - Introduction.

- Chapitre 14 : Equations fonctionnelles ou différentielles linéaires.
Chapitre 15 : Equations fonctionnelles ou différentielles générales.
Chapitre 16 : Représentations des groupes et algèbres de Lie.
Chapitre 17 : Analyse harmonique sur les groupes pleins. Enrichissement algébrique.
Chapitre 18 : Les "métamorphoses" des séries de Taylor, de Fourier, de Dirichlet.

Exercices et problèmes sur les parties I, II, III

Tables et appendices

Conclusion générale - Questions ouvertes.

AVERTISSEMENT

La Partie I de ce travail présente une théorie que nous croyons nouvelle et qui tourne autour de la notion de "résurgence". Plutôt éclectique dans ses méthodes, elle relève autant de l'algèbre que de l'analyse.

La Partie II applique cette théorie à l'itération continue dans divers groupes (de germes ou de séries) puis aux problèmes de l'analyse et de la synthèse harmoniques sur ces mêmes groupes. Chronologiquement, ce sont ces problèmes qui ont conduit à la théorie de la résurgence.

La Partie III expose de nouvelles applications, groupées autour de plusieurs thèmes comme : équations différentielles, équations fonctionnelles, analyse de Lie, groupes pleins, métamorphoses. Elle est indépendante de la Partie II.

L'ensemble est précédé d'un foreword en anglais qui, sans vraiment détailler le contenu de l'ouvrage, s'efforce d'en dégager les idées-force et de justifier l'articulation générale. Pour une présentation plus systématique, mais moins explicite quant au "pourquoi", le lecteur pourra se reporter aux introductions qui précèdent chacune des trois parties ou aux résumés qui closent chaque chapitre.

Les appendices, formulaires, tables, exercices, etc...., qu'ils se rapportent aux Parties I, II ou III, sont tous regroupés à la fin de l'ouvrage. Chacune des trois parties se présente sous forme d'un tome séparé, mais la pagination et la numérotation des chapitres sont unitaires.

FOREWORD

This foreword merely delineates the main themes around which the present work revolves. For a more systematic survey, the reader is referred to the introductions which precede each of the three parts, or to the summaries appended to each chapter. Besides, the foreword suggests tentative English renderings for some of the new technical words used in the book.

1. Resurgence.

The one unifying thread which runs through all the chapters of this work is the concept of "resurgence". A resurgent function, in essence, is an analytic function with only isolated singularities, and a resurgence algebra is a space of such functions that is closed under an appropriate convolution product. Of course, if there was nothing more to resurgence theory, one could rightfully ask : Why all the fuss ? Fortunately, two rather unexpected circumstances combine to add substance to the theory :

(i) First, there is the existence, on resurgence algebras, of a rich array of derivations, the so-called alien derivations. These, in turn, give rise to a rather weird "alien calculus" which exhibits properties, and calls for methods, markedly different from those of classical calculus.

(ii) Second, there is the fact that an important subclass of resurgent functions display at each of their singular points a behaviour closely related to their behaviour at the "origin". These are the resurgent functions par excellence, which alone fully deserve that name and, incidentally, include most of the cases actually encountered in applications. Loosely speaking, these functions resurrect, or surge up - in a slightly altered guise, as it were - at their singularities. Hence the label of "resurgent functions" initially bestowed on them and later extended to the whole class.

2. Five sources of resurgent functions.

Resurgent functions (proper), once one starts looking for them, crop up in all nooks and corners of mathematics. Still, to date, the main purveyors of such functions are the following five sectors :

(i) differential equations, even innocent-looking ones like :

$$(0.1) \quad \varphi'(z) = P_0(1/z) + \varphi(z) P_1(1/z) + \varphi^2(z) P_2(1/z)$$

with, say, polynomial P_0, P_1, P_2 .

(ii) functional equations, like Abel's equation

$$(0.2) \quad \varphi \circ f = 1 + \varphi \quad (\varphi \text{ unknown ; } f \text{ analytic germ})$$

which arises in iteration theory.

(iii) differential-cum-functional equations, mainly of the local type and with analytic coefficients.

(iiii) representations of Lie groups or algebras, mainly in function spaces.

(iiiii) the so-called metamorphoses, which to convergent Fourier series (or Dirichlet series, or power series) :

$$(0.3) \quad \varphi(z) = \sum_{\omega} A_{\omega} e^{\omega z}$$

associate (usually) divergent series :

$$(0.4) \quad \underline{\underline{M}} \cdot \varphi(z) = \sum_{\omega_1, \dots, \omega_n} A_{\omega_1} \dots A_{\omega_n} M^{\omega_1, \dots, \omega_n} \Gamma_{\omega_1, \dots, \omega_n} e^{(\omega_1 + \dots + \omega_n)z}$$

with auxiliary coefficients $M^{\omega_1, \dots, \omega_n}, \Gamma_{\omega_1, \dots, \omega_n}$ derived from moulds and comoulds (see below).

3. Algebraic apparatus.

Though anchored in analysis, resurgence theory leads to unexpected algebraic developments and this is one of its endearing features. Indeed, the theory renders possible the partial, and sometimes total, algebraization of certain matters (like the independence theorems of chapter 11) which at first sight would seem to lie entirely within the preserve of analysis.

The reason for this, of course, lies with the alien derivations. As already pointed out, resurgence algebras, though consisting of one-variable analytic functions, are operated upon by infinitely many alien derivations Δ_ω , with the index ω running through an enumerable or non enumerable set (depending on each case). Moreover, the various Δ_ω are totally independent. Under the Lie bracket, they generate a free Lie algebra. Their non-commutativity is essential (that is to say, it cannot be removed through replacing the Δ_ω by $\mathcal{D}_\omega = \sum_\eta \varphi_{\omega,\eta} \Delta_\eta$ with resurgent functions as coefficients $\varphi_{\omega,\eta}$) and it accounts for the peculiarities of "alien calculus".

This teeming profusion of alien derivations is somehow suggestive of "hidden variables". The idea, if followed up and worked out, leads to the construction of so-called pseudovariables. These obey precise rules and, together with related tools such as ordered boundaries, boundary algebras, moulds and comoulds, they crown the algebraic apparatus of resurgence theory.

4. Causes for neglect.

One may wonder why resurgence theory, which after all starts from fairly elementary observations, has not been developed earlier. Part of the blame can perhaps be laid at the door of fashion : at the outset, the way to resurgence theory passes through the Borel transform and some researchers may have been loath to tread this outmoded path. More seriously, research along our lines must have been inhibited by the wide-spread, but unwarranted

suspicion that after the pioneering work by Hadamard, Hurwitz, Fabry, Lindelöf et al., the "composition of singularities" was a closed chapter. Those earlier studies, however, dealt with singularities in very different spirit from resurgence theory. They were concerned with the location (*) of product-singularities, not with their actual analysis in terms of the factor-singularities. Furthermore, the various "products" used, be they of the Hadamard or Hurwitz type (**), by their very nature (***) concealed the whole algebraic side of resurgence theory. Indeed, it may be argued that mathematicians were side-tracked by their excessive preoccupation with the Hadamard-Hurwitz products and that they overlooked, as far as singularity theory was concerned, the other two convolutions :

$$(0.5) \quad \int_0^z \varphi(z-\zeta) \psi(\zeta) d\zeta \quad (\text{additive convolution})$$

$$(0.6) \quad \int_0^z \varphi(z/\zeta) \psi(\zeta) \frac{d\zeta}{\zeta} \quad (\text{multiplicative convolution})$$

which alone can lead to "Leibniz rules", "operator bigebras", "alien derivations" and the like.

(*) Or rather, with their location on $\mathbb{C}$, for the Riemann-surface aspect of the matter received little attention, as one may gather from the long persistence of a certain error, which was first pointed out by S. Mandelbrojt. For a survey of the question, see Schottländer's thesis, printed in Math. Nachr. t.11, 1954 (pp 239-294).

(**) See Schottländer.

(***) In the case of the Hadamard product, because it has zero-divisors, and for other reasons as well.

5. Iteration theory.

Let us call G^o the group consisting of all germs (at a given point, taken to be ∞ for greater convenience) of analytic applications tangent to the identity :

$$(0.7) \quad G^o = \left\{ f ; f(\infty) = \infty ; f'(\infty) = 1 \right\}$$

or more explicitly :

$$(0.8) \quad G^o = \left\{ f ; f(z) = z \left(1 + \sum_{n \geq 1} a_n z^{-n} \right) ; \lim_{n \rightarrow \infty} |a_n|^{1/n} < \infty \right\}$$

with composition as the group law : $f, g \rightarrow f \circ g = f(g)$.

This group, in spite of its great intrinsic interest and challenging outward simplicity, has received as little attention as the phenomenon of resurgence itself. Indeed, both neglects are linked, for any deeper study of G^o must of necessity lead to resurgence theory whilst, conversely, resurgence theory finds in G^o one of its most convincing fields of application.

The fact is that both the iteration equation (*)

$$(0.9) \quad \overset{w}{f} \circ f = f \circ \overset{w}{f} \quad \left(\text{with } (\overset{w}{f}(z) - z) / (f(z) - z) = w + o(1) \right)$$

and the conjugacy equation :

$$(0.10) \quad f \circ h = h \circ g \quad \left(\text{with } f \text{ and } g \text{ formally conjugate} \right)$$

have formal solutions $\overset{w}{f}$ and h which, as a rule, do diverge. Their Borel transforms, however, do not merely converge, but also define resurgent functions of a very special sort, which taken together, generate the so-called reduced

(*) $\overset{w}{f}$ is called formal iterate of ordre w ($w \in \mathbb{C}$)

resurgent algebras. These algebras, along with their pseudovariables, enable one to investigate the extensions of G° obtained through adding "alien elements" like $\overset{w}{f}$ and h . It turns out that such extensions are endowed with an algebraic structure far richer than that of G° itself. In the same way, one proves a number of independence theorems which, roughly speaking, assert that "alien elements" are linked by no other relations than the predictable ones.

6. Harmonic analysis and synthesis.

The group G° has non-elementary conjugacy classes and this is another feature that makes it worth studying. Indeed, the conjugacy equation (0.10) admits of formal solutions h as soon as f and g share three elementary (*) invariants (μ, α, ρ) , but these solutions do not belong to G° unless f and g have in common an infinite number of non-elementary (*) invariants.

The construction of such invariants, the investigation of their dependence on f , the description of their growth properties, their regrouping into invariant systems (preferably complete and free)... all this is subsumed under the heading of harmonic analysis. Here, too, resurgence theory comes in handy, for to each element f of G° one may associate two resurgent functions, the so-called iterators f^* (direct) and *f (inverse), both of which verify resurgence equations :

$$(0.11) \quad \Delta_\omega f^*(z) = -A_\omega e^{-\omega(f^*(z)-z)} \quad (\forall \omega \in \Omega)$$

$$(0.12) \quad \Delta_\omega {}^*f(z) = A_\omega \frac{d}{dz} {}^*f(z) \quad (\forall \omega \in \Omega)$$

(*) Here (non)elementary means : expressible in terms of (in)finitely many Taylor coefficients of f .

where the Δ_ω are alien derivations indexed on a discrete subgroup Ω of $\mathbb{C}$. The scalar coefficients $A_\omega = A_\omega(f)$ in these equations happen to be invariant :

$$(0.13) \quad A_\omega(\bar{h} \circ f \circ h) = A_\omega(f) \quad (\forall h \in G^\circ; \mu(h) \geq \mu(f))$$

and they are numerous enough to characterize conjugacy classes on G° .

The converse problem, that of finding f starting from the invariants $A_\omega(f)$, is called, for short, harmonic synthesis (*). Harmonic synthesis on G° is dominated by two facts :

- (i) The existence, on each conjugacy class, of canonical representatives f_t which depend on a complex parameter t . Hence a canonical synthesis on G° .
- (ii) The existence, alongside the invariants A_ω , of so-called coinvariants B_ω . Invariants and coinvariants are paired in a fascinating duality.

Canonical synthesis on G° , relying as it does on alien calculus (**) and the interplay between invariants and coinvariants, leads to rather long-winded developments. Depending on the number of non-vanishing invariants (coinvariants) one distinguishes between four cases of increasing generality, to wit : the unitary, binary, unilateral and bilateral cases. In the first two cases, one arrives at completely explicit solutions f_t .

(*) Since G° doesn't possess anything resembling true characters, one cannot set any other goal to harmonic synthesis on this group.

(**) via the resolution of the infinite system (0.11)

7. Kinships of tight groups. Basic triads $\{G^0, G', G^\infty\}$

By cautiously relaxing in (0.8) the growth condition on the a_n , while at the same time imposing a tightness condition (*) meant to eliminate certain unwanted groups, one obtains a large number of groups G which, in an obvious sense, are akin to G^0 . All these kindred groups, taken together, are said to constitute a kinship. In particular, the growth condition :

$$(0.14) \quad \limsup_n n^{-t} |a_n|^{1/n} < \infty \quad (\text{with } t \gg 0)$$

leads to the kindred groups G^t . Three of these play an outstanding part :

- (i) G^0 itself, which is the smallest group of the kinship
- (ii) G' , which is the smallest Lie group of the kinship (**)
- (iii) G^∞ , which is the largest group of the kinship.

The above study of G^0 (iteration, harmonic analysis etc...) can be duplicated for the kindred groups G . It turns out that the behaviour of G is largely determined by its position relative to the basic triad $\{G^0, G', G^\infty\}$. The kinship thus splits into three parts :

- (i) the Lie interval $[G', G^\infty]$ consisting of groups G that behave exactly like G^∞ .
- (ii) the critical interval $[G^0, G']$ consisting of groups G that behave more or less like G^0 .
- (iii) the groups G astride G' (i.e. $G \not\subset G'$ and $G' \not\subset G$) which are very irregular and elusive.

(*) see section 8a.

(**) Here a Lie group means a group, every element of which is embeddable in a continuous one-parameter subgroup.

The corresponding developments are scattered throughout Part II.

There exist of course many tight groups (*) which are not akin to G° . Amongst these, the many-variable counterparts of G° are the most conspicuous, but by no means the most interesting. Every general tight group $\mathcal{G}$ can be assigned to a definite kinship, every such kinship possesses a basic triad $\{\mathcal{G}^\circ, \mathcal{G}', \mathcal{G}^\infty\}$, and the properties of $\mathcal{G}$ hinge on its position vis-à-vis $\mathcal{G}'$. The interesting case is when $\mathcal{G}$ belongs to the critical interval $[\mathcal{G}^\circ, \mathcal{G}']$, for $\mathcal{G}$ then possesses non-elementary invariants and is amenable to alien analysis. Furthermore, such groups $\mathcal{G}$, however shapeless and unstructured they may be by themselves, undergo algebraic enrichment when enlarged through the adjunction of alien iterates, alien iterators, alien conjugators etc...

The main method for dealing with general tight groups $\mathcal{G}$ is by sending them (homomorphically) into groups G that are akin to G° and by using the fairly well-developed theory of these latter groups. For instance, given an homomorphism $h: \mathcal{G} \rightarrow G$, any invariant on G induces an invariant on $\mathcal{G}$. As often as not, one can construct homomorphisms h in large enough quantity to arrive at a complete description of $\mathcal{G}$ and its properties.

General tight groups are investigated in chapter 17.

8. Moulds and comoulds.

Parallel to the dual notions of alien derivation and pseudovariation, one introduces the dual notions of mould and comould, the latter pair relating to the former as matrices do to linear applications. Outwardly, a mould M°

(*) For a proper definition, see section 8a.

(comould $M_{\bullet}$) is nothing but a table of scalars $M^{\omega_1, \dots, \omega_n}$ (resp. $M_{\omega_1, \dots, \omega_n}$) with multiple indexes ranging through a subgroup (resp. subset) of $\mathbb{C}$. Both moulds and comoulds constitute composition algebras, which is to say that three operations $(+, \times, \circ)$ are defined on them and that they enjoy properties similar to those of their name-sakes (addition, multiplication, composition) as defined on functions or power series.

The more important notion is that of mould. Moulds fall into various types (symmetric or alternate; flat or polar; difference-like or sum-like, etc....) which allow an orderly classification. The present work uses a host of moulds, chief amongst which are :

- (i) the eight basic moulds, so-called because of their many applications, which make them nearly ubiquitous.
- (ii) the five zeta moulds, so-called because they generalize the zeta function. They are of use in harmonic analysis on G° , for expressing the invariants $A_\omega(\mathfrak{g})$ in terms of the Taylor coefficients of $\mathfrak{g}$.
- (iii) the six hyperlogarithmic moulds, so-called because of the type of their dependence on the indices. They serve in harmonic synthesis on G° , for expressing the invariants in terms of coinvariants and vice versa.

The comoulds used in this work are less numerous. They are chiefly the three gamma comoulds. One often has to contract them with moulds.

The main reason behind the importance of moulds is as follows. In nearly all problems of alien calculus, one has to rely heavily on representations of pseudovariables, that is to say, on homomorphisms of the pseudovari-
 algebra into the corresponding resurgence algebra. As it happens, such representations fall into two main types : the Δ -stable representations, which behave nicely under alien differentiation, and the ∂ -stable representations,

which behave nicely under ordinary differentiation. Both types are in duality (the duality between the invariants and coinvariants of $\mathbb{G}^\circ$ is but a partial aspect of this larger duality). Now, one cannot study the representations of pseudovariables nor understand the underlying duality, without resorting at every step to the above-mentioned hyperlogarithmic moulds. These, in turn, when submitted to the Fourier transform, indirectly yield the so-called basic moulds, which basic moulds are found after the event to be relevant to a large number of questions.

9. Further applications of resurgence theory.

Although, space-wise, these applications account for no less than five chapters (the whole of Part III) we must limit ourselves to a few cursory indications.

First, there is the topic of differential-cum-functional equations. Resurgence theory gives an accurate description of the solutions' asymptotic behaviour (which the Borel transform translates into singularity-behaviour). In several cases, it yields explicit solutions. More significantly, it leads to a classification of such equations, based on the type of resurgence algebras which their solutions generate. It also sheds light on the so-called resurgence coefficients (*), especially when the equation under consideration has only polynomial coefficients.

Next, there is Lie analysis. Resurgence theory is found to have a bearing on the study of the classical "special functions", nearly all of which are connected with representations of Lie groups or algebras (**)

(*) These generalize the scalars A_ω of (0.11) or (0.12)

(**) See for instance I.M. Gel'fand and M.A. Neumark: "Unitary Representations of Classical Groups".

Resurgence theory also leads to novel types of representations and thus to more "special functions". For example, any finite Lie algebra can be made to operate, via the alien derivations, on certain finitely generated resurgence algebras. Since, in the so-called Poincaré model (**), resurgent functions become defined on the upper half-plane and alien derivations become expressible as combinations of homographies, one ends with periodical functions that enjoy invariance properties somewhat reminiscent of (though less stringent than) those encountered in automorphic forms. One may add that it is in this field of "Lie analysis" that moulds really come into their own.

Lastly, there is the many-sided question of metamorphoses, of which we have already caught a glimpse in (0.4). Be it enough for us to say that remarkable moulds $M^\bullet$, such as the ones listed above, tend to yield remarkable metamorphoses $\underline{M}^\bullet$. By "remarkable metamorphoses" we mean either one that preserves converge, but alters the global properties of functions (such as analytic prolongability, location of singularities, etc...) according to a definite pattern, or one that exchanges convergence for resurgence, the resurgence belonging in each case to a well-defined type.

10. Conclusion.

Any mathematical theory worth its salt must justify itself on at least one of three grounds : internal coherence or harmony; applicability to other branches of mathematics; applicability to extra-mathematical disciplines.

(i) We do feel (though it is not for us to say...) that resurgence theory is not devoid of coherence. It is strongly structured, replete with

(**) See section 3c.

all manner of symmetries and dualities, and some of its branches (like alien calculus, the eight basic moulds, the reduced algebras) ooze an unmistakable harmony. Nor is it a closed theory : it raises as many problems as it answers (a list of open questions may be found at the end of Part III). Also, resurgence theory has one peculiarity which in mathematics is usually indicative of health : namely, a constant intermingling and crossfertilization of analysis with algebra.

(ii) Resurgence theory can definitely be applied to other branches of mathematics. In a sense it is even application-born, since it was initially invented to meet the demands of harmonic analysis on $\mathbb{G}^\circ$ and other kindred groups. In some applications, resurgence theory does more quickly or systematically things which could be done otherwise. In most cases, however, it does things which could hardly be done - except, precisely, by introducing (overtly or covertly) resurgent functions, alien derivations and the other paraphernalia of the theory. - And it is perhaps not rash to hope that, in due course of time, the theory will be brought to bear on yet more branches of mathematics.

(iii) As for applications outside mathematics, at present there are none. Is this state of affairs likely ever to change ? It appears rather doubtful. For one thing, one is at a loss to say precisely which features an extramathematical object ought to display in order to qualify for treatment at the hands of resurgence theory - the more so, since resurgent functions might a priori be used under any of their several guises or "models". Somehow, the sought-after object or phenomenon ought to be describable in terms of analytic functions, while at the same time possessing a built-in mechanism that counteracts the usual "erosion" of local properties under analytic continuation and provides instead for their spot-wise "resurgence". Or one might perhaps take one's cue from the algebraic side of the theory and look in Nature for "non-commutative situations" or "hidden variables". But all this,

admittedly, is very very vague. So, rather than to exhaust the reader's patience, we prefer to confess ignorance and to end on an honest question mark.

Two remarks on terminology.

Some clarifications are in order here, to forestall possible misunderstandings.

1. Many authors equivalently use the terms "convolution" and "composition" to denote various products like (0.5) or (0.6) or like the Hadamard-Hurwitz products. In the present work, on the other hand, we abide by the following conventions :

- (i) convolution, noted $\ast$, always means (0.5).
- (ii) multiplicative convolution, also noted $\ast$, always means (0.6). It is but rarely used.
- (iii) composition, noted $\circ$ (light ring), always means substitution :

$$f, g \rightarrow f \circ g = f(g)$$

- (iiii) convolutive composition, noted $\bullet$ (heavy ring) is what becomes of composition (i.e. substitution) under the Borel transform $\mathcal{B}$:

$$f, g \rightarrow f \bullet g = \mathcal{B}(f \circ g) \quad (\text{with } f = \mathcal{B}f, g = \mathcal{B}g)$$

- (iiiii) Mould algebras also have two compositions, noted $\circ$ and $\hat{\circ}$, but these are a category unto themselves and need not bother us here.

2. The second remark is about the tight groups (groupes pleins in French). In spite of the different connotations of "tight" and "plein", both epithets are used here as convenient opposites to "discrete", since the expression "continuous groups" clearly wouldn't do ! For instance, in the case of G^0 and his kinship, the tightness condition is there to rid us of the groups of algebraic germs; the groups of algebrico-differential germs; the groups of power series with coefficients in a subring of $\mathbb{C}$; etc... All these non-tight groups have nothing irregular or nasty about them; yet we discard them, because their presence would only obscure the phenomena in which we are primarily interested and which have to do with coefficient growth.

Addition :

As this text was going to press, Mr. A. Voros has drawn our attention to a most interesting source of resurgent functions, which may be added to the five sources listed on page 5 . These new functions are connected with the partition function $\text{tr} \exp(-z H)$ of the hamiltonian $H = -d^2/dq^2 + V(q)$. In particular, the quartic oscillator, for $V(q) = q^4$, gives rise to a function verifying resurgence equations of the type :

$$\Delta_{m+ni} \varphi(z) = - A_{m+ni} \exp(-m\varphi(z) - n\varphi(iz))$$

with constant A_ω and with $\omega = m+ni$ running through $\Omega = \mathbb{Z} + i\mathbb{Z}$.

LES FONCTIONS RESURGENTES

et leurs applications

Première partie :

LES ALGEBRES DE FONCTIONS RESURGENTES

(Chapitres 1 à 7)

TABLE DES MATIERES DE LA PREMIERE PARTIE

Introduction à la première partie.

p 22

Chapitre 1 : Les algèbres $\mathcal{A}$ et $\bar{\mathcal{A}}$ et la convolution des germes.

- 1a : L'algèbre $\mathcal{A}$. p 29
- 1b : L'algèbre auxiliaire $\mathcal{A}_{gen} / \mathcal{A}_{neg}$. p 31
- 1c : L'algèbre $\bar{\mathcal{A}}$. p 46
- 1d : Les algèbres $\mathcal{A}(\mu)$ et $\bar{\mathcal{A}}(\mu)$. p 49
- 1e : La transformation de Laplace. p 50
- 1f : Résumé. p 52

Chapitre 2 : Les algèbres $\mathcal{A}(\Omega)$ et $\bar{\mathcal{A}}(\Omega)$ et la convolution des fonctions résurgentes

- 2a : L'algèbre $\mathcal{A}_{com}(\Omega)$ et les relations de Leibniz p 54
- 2b : Les algèbres $\mathcal{A}(\Omega)$ et $\bar{\mathcal{A}}(\Omega)$ et la notion de fonction résurgente. p 69
- 2c : Les algèbres $\mathcal{A}(\mu, \Omega)$ et $\bar{\mathcal{A}}(\mu, \Omega)$. p 80
- 2d : L'exponentiation des fonctions résurgentes. p 84
- 2e : La composition des fonctions résurgentes. p 87
- 2f : Résumé. p 92

Chapitre 3 : Les divers modèles des algèbres de résurgence.

- 3a : Le modèle additif. p 95
- 3b : Le modèle multiplicatif. p 96
- 3c : Le modèle de Poincaré. p 97
- 3d : Les modèles sectoriels. p 99
- 3e : Le modèle formel. p 100
- 3f : Le cas $\dim \Omega = 2$. p 101
- 3g : Résumé. p 102

Chapitre 4 : Dérivations étrangères et pseudovariables. Moules et comoules.

4a : Les algèbres de pseudovariables.	p 106
4b : Les moules et les comoules.	p 113
4c : Les huit moules fondamentaux.	p 121
4d : Les trois comoules fondamentaux.	p 138
4e : Interaction entre moules et comoules. La notion de métamorphose.	p 142
4f : Résumé.	p 146

Chapitre 5 : Les algèbres à la frontière.

5a : Introduction. Les trois frontières ordonnées.	p 149
5b : L'algèbre à la frontière neutre.	p 150
5c : Les algèbres aux frontières positive et négative.	p 152
5d : Les algèbres à la frontière et la convolution des irrégularités.	p 154
5e : Calculs pratiques dans les algèbres à la frontière.	p 155
5f : Résumé.	p 170

Chapitre 6 : Représentation des pseudovariables et calcul différentiel étranger.

6a : Introduction. Notion de représentation ∂ -stable et Δ -stable.	p 171
6b : Représentations des pseudovariables de $\mathcal{A}(\mathcal{Q})$. La dualité $\mathcal{U} \leftrightarrow \mathcal{V}$.	
6c : Représentations des pseudovariables de $\mathcal{A}(p, \mathcal{Q})$.	p 183 \ p 172
6d : Le cas $p = 1$ et les moules auxiliaires canoniques.	p 185
6e : Aperçu sur le calcul différentiel étranger.	p 210
6f : Résumé.	p 217

Chapitre 7 : Les algèbres de résurgence générales et les moules hyperlogarithmiques

7a : Les algèbres $\mathcal{A}(\mathbb{C})$ et $\overline{\mathcal{A}}(\mathbb{C})$.	p 219
7b : Propriétés différentielles des moules hyperlogarithmiques. La dualité $\mathcal{U} \leftrightarrow \mathcal{V}$.	p 224
7c : Transformées de Fourier des moules hyperlogarithmiques.	p 234
7d : Résumé.	p 247

INTRODUCTION A LA PREMIERE PARTIE

Cette Partie I regroupe les principales définitions et résultats relatifs aux fonctions résurgentes. Elle sert principalement de préparation aux Parties II et III, où ces notions seront appliquées à d'autres sujets. Mais les fonctions résurgentes forment un tout homogène et peuvent aussi être étudiées pour elles-mêmes. D'où la semi-isolation donnée ici à la présentation du sujet.

1. Les algèbres de résurgence.

S'occupant au départ de la "convolution des singularités", la théorie de la résurgence suppose le choix d'une bonne convolution, d'une bonne mesure des singularités et d'un bon ensemble de points singuliers.

(i) Le bon produit de convolution est sans hésitation possible

$$(I.1) \quad (\varphi * \psi)(z) = \int_0^z \varphi(z-\zeta) \psi(\zeta) d\zeta$$

Outre que les applications l'imposent quasiment, il présente sur les autres définitions possibles l'avantage de conduire seul (*) à des lois de Leibniz simples (voir ci-après).

(ii) Calculables pour tous germes analytiques φ et ψ réguliers à l'origine, le produit de convolution s'étend immédiatement aux germes multiformes, pourvu qu'ils soient intégrables à l'origine. Ce n'est toutefois pas suffisant et l'on doit s'affranchir de la condition d'intégrabilité, afin de pouvoir convoler des germes quelconques. On est ainsi conduit à la

(*) avec son analogue multiplicatif.

notion de germe qualifié qui, après coup, se trouve décrire commodément le comportement des fonctions analytiques en leurs points singuliers. On tient donc là le moyen cherché de "mesurer" les singularités.

(iii) Reste à fixer l'ensemble Ω au-dessus duquel on admet des singularités. Ce peut être n'importe quel semi-groupe additif de $\mathbb{C}$, y compris $\mathbb{C}$ lui-même. Pourtant, on a intérêt au début à se limiter à des groupes discrets, c'est-à-dire à prendre pour Ω un réseau du type $\omega_1 \mathbb{Z}$ ou $\omega_1 \mathbb{Z} + \omega_2 \mathbb{Z}$.

Ce cadre étant fixé, on nomme $\mathcal{R}$ la surface de Riemann recouvrement universel de $\mathbb{C} \div \Omega$, puis on introduit plusieurs espaces, notés $\mathcal{A}(\Omega)$, $\bar{\mathcal{A}}(\Omega)$, $\bar{\mathcal{A}}(\mu, \Omega)$ etc..., formés de fonctions holomorphes (éventuellement "qualifiées") sur la surface $\mathcal{R}$ et appelés algèbres de résurgence. Algèbres - parce qu'ils sont stables pour la convolution, que l'on calcule ici à partir d'un point de ramification Q_0 situé au-dessus de 0 et tenant lieu "d'origine" à la surface $\mathcal{R}$. De résurgence - pour des raisons qui apparaîtront plus loin.

Soit maintenant Γ le groupe des automorphismes de $\mathcal{R}$ qui, en projection sur $\mathbb{C}$, donnent des translations, et soit R l'élément de Γ qui correspond à la "rotation" de $+2\pi i$ autour de l'origine Q_0 . Le groupe Γ ainsi que l'algèbre

$$(I.2) \quad \mathcal{D}(\Omega) = \mathbb{C} \oplus (1-R) \mathbb{C}[\Gamma] \quad (\mathbb{C}[\Gamma] = \text{algèbre de groupe de } \Gamma)$$

opèrent chacun d'une manière naturelle sur les fonctions holomorphes définies sur la surface $\mathcal{R}$:

$$(I.3) \quad \begin{cases} \Gamma & : \varphi \rightarrow \varphi \circ \Gamma^{-1} & (\gamma_i \in \mathbb{C}, \Gamma_i \in \Gamma) \\ \gamma_0 + (1-R) \sum_i \gamma_i \Gamma_i & : \varphi \rightarrow \gamma_0 \varphi + \sum_i \gamma_i (\varphi \circ \Gamma_i^{-1} - \varphi \circ \Gamma_i^{-1} \circ R^{-1}) \end{cases}$$

De plus, et c'est là l'important, les éléments D de $\mathcal{D}(\Omega)$, dès qu'on les fait agir dans les algèbres de résurgence, donnent lieu à des relations de Leibniz, c'est-à-dire à des relations du type

$$(I.4) \quad D(\varphi * \psi) = \sum_j (D_j \varphi) * (D'_j \psi) \quad (\forall \varphi, \psi)$$

avec des éléments D_j, D'_j de $\mathcal{D}(\Omega)$ qui ne dépendent que de D . Ceci induit sur $\mathcal{D}(\Omega)$ une loi de coalgèbre (commutative)

$$(I.5) \quad D \rightarrow \sum_j D_j \otimes D'_j \quad (\text{somme finie})$$

qui, jointe au produit d'algèbre (non commutatif), fait de $\mathcal{D}(\Omega)$ une bigèbre.

D'autre part, puisque $(1-R) \Gamma \varphi$ mesure le "défaut de régularité" de φ au point de ramification $Q = \Gamma^{-1} Q_0$, les identités (I.4) permettent d'exprimer les défauts de régularité, en tout point donné Q , d'un produit $\varphi * \psi$ en fonction des défauts de régularité des facteurs φ et ψ en des points Q_j et Q_R qui ne dépendent que de Q .

Par ce biais, on voit s'introduire une certaine structure - en fait, une structure d'ordre - sur l'ensemble $\mathcal{D}^0 \mathcal{R}$ des points de ramification de $\mathcal{R}$ ainsi que sur deux ensembles analogues, $\mathcal{D}^+ \mathcal{R}$ et $\mathcal{D}^- \mathcal{R}$, formés de points à l'infini. L'interprétation géométrique de ces trois ordres, à l'aide des notions de contractibilité symétrique et d'homotopie symétrique, conduit à des développements intéressants.

Enfin, aux modèles usuels des algèbres de résurgence, dits modèles additifs (parce qu'ils utilisent la convolution additive) il est souvent avantageux d'adjoindre d'autres modèles : modèles multiplicatifs (avec la convolution multiplicative), modèles de Poincaré (avec le demi-plan de Poincaré

pour surface de base) modèles formels et modèles sectoriels (définis via la transformation de Laplace).

2. Dérivations étrangères et pseudovariables.

Il est naturel de chercher à engendrer la bigèbre $\mathbb{D}(\Omega)$ au moyen de la rotation R , qui est évidemment un isomorphisme

$$(I.6) \quad R(\varphi * \psi) = (R\varphi) * (R\psi)$$

et d'un certain nombre de dérivations, c'est-à-dire d'opérateurs Δ pour lesquels (I.4) revêt la forme :

$$(I.7) \quad \Delta(\varphi * \psi) = (\Delta\varphi) * \psi + \varphi * (\Delta\psi)$$

C'est toujours possible. Par exemple, sur les algèbres de résurgence les plus simples - celles qui sont invariantes par R - il existe un choix naturel de dérivations Δ_ω , dites dérivations étrangères, qui sont indexées sur l'ensemble Ω et que ne lient aucune relation, ni linéaire, ni du type $[\Delta_{\omega_1}, \Delta_{\omega_2}] = \sum_i \gamma_i \Delta_{\omega_i}$, ni d'aucune espèce.

D'où une situation paradoxale : les algèbres de résurgence, bien que formées de fonctions holomorphes d'une seule variable, n'en admettent pas moins une infinité dénombrable de dérivations indépendantes. Ceci suggère la présence de "variables cachées". On peut effectivement poursuivre cette idée et construire, pour chaque algèbre de résurgence, des pseudovariables :

- (i) qui obéissent à des lois (de multiplication, de composition, de dérivation naturelle, de dérivation étrangère) bien précises;
- (ii) qui entrent dans la définition des formes déployées (où l'on adjoint à la vraie variable l'infinité des pseudovariables) et des formes restreintes

(où l'on supprime la vraie variable après adjonction des pseudovariables);

(iii) qui se révèlent indispensables - parce qu'elles ont la vertu d'algebraiser les difficultés - dans presque tous les problèmes d'analyse où interviennent les fonctions résurgentes.

Signalons que les fonctions résurgentes les plus intéressantes, tant en soi que du point de vue des applications, sont celles qui sont liées simplement à leurs dérivées étrangères :

$$(I.8) \quad \Delta_{\omega} \varphi = \text{fonction simple de } \omega \text{ et de } \varphi \quad (\forall \omega \in \Omega)$$

De telles équations, dites équations de résurgence, expriment que la fonction φ "resurgit", quelque peu modifiée, en ses singularités. Ces φ là sont les fonctions résurgentes par excellence. Elles ont donné leur nom à toute la famille.

3. Représentations des pseudovariables. Moules et comoules.

Plusieurs questions apparemment extérieures à la théorie de la résurgence (*) peuvent avantageusement se ramener à des problèmes de calcul différentiel étranger, c'est-à-dire à la résolution de systèmes du type (I.8) ou un peu plus complexes. Or, pour traiter ces problèmes, il faut savoir représenter les pseudovariables dans les algèbres de résurgence, autrement dit, savoir construire des familles $w^{\omega_1, \dots, \omega_n}$ de fonctions résurgentes qui vérifient la même table de multiplication que les pseudovariables fondamentales $z^{\omega_1, \dots, \omega_n}$:

$$(I.9) \quad w^{\omega^1} * w^{\omega^2} = \sum_{\omega^1, \omega^2 < \omega} w^{\omega} \quad (\omega^1, \omega^2, \omega \text{ multindices})$$

(*) voir chapitres 13, 16, 17.

(Pour le sens de la notation $\omega^1, \omega^2 < \omega$, voir section 4a).

Les représentations les plus utiles sont les représentations Δ -stables, qui se comportent simplement par rapport à la différentiation étrangère, et les représentations ∂ -stables, qui se comportent simplement par rapport à la différentiation ordinaire. Il existe une certaine dualité entre ces deux types de représentations et une dualité plus nette encore entre la représentation Δ -stable canonique $Z^\omega \rightarrow \mathcal{U}^\omega$ et la représentation ∂ -stable canonique $Z^\omega \rightarrow \mathcal{V}^\omega$ (ω multiindice).

On ne peut pas approfondir la question des représentations sans introduire deux notions auxiliaires, celles de moule et comoule, qui après coup se révèlent applicables à bien d'autres domaines. Bornons-nous ici aux moules. Ce sont des tableaux $A^\bullet = \{A^{\omega_1, \dots, \omega_n}\}$ de scalaires multi-plement indexés sur Ω et soumis, outre la banale addition, à une multiplication $\times$:

$$(I.10) \quad C^\bullet = A^\bullet \times B^\bullet \iff C^{\omega_1, \dots, \omega_n} = \sum_j A^{\omega_1, \dots, \omega_j} B^{\omega_{j+1}, \dots, \omega_n}$$

et surtout à une composition $\circ$:

$$(I.11) \quad C^\bullet = A^\bullet \circ B^\bullet \iff C^{\omega_1, \dots, \omega_n} = \sum A^{\omega_1, \dots, \omega_{n_1}, \omega_{n_1+1}, \dots, \omega_{n_1+n_2}, \dots} B^{\omega_1, \dots, \omega_{n_1}} B^{\omega_{n_1+1}, \dots, \omega_{n_1+n_2}} \dots$$

avec la distributivité à droite :

$$(I.12) \quad (A^\bullet \times B^\bullet) \circ D^\bullet = (A^\bullet \circ D^\bullet) \times (B^\bullet \circ D^\bullet)$$

S'il n'y avait que l'addition et la multiplication, les moules formeraient évidemment une algèbre non commutative isomorphe à l'algèbre libre engendrée par les éléments de Ω et la séparation des deux notions ne se

justifierait ni plus ni moins que, disons, la séparation des notions de matrice et d'application linéaire. Ce n'est qu'en joignant la composition $\circ$ qu'on obtient une notion nouvelle et vraiment utile.

La plupart des moules usuels rentrent d'ailleurs dans diverses sous-catégories, qui en permettent une classification harmonieuse. Ainsi a-t-on les notions de moule symétrique (stables respectivement par rapport à la multiplication et la composition, et sans rapport aucun avec les applications symétriques ou alternées); les moules de type polaire ou plat; les moules de type somme ou différence; les moules de type séparé; etc... Le présent travail utilise une trentaine de moules, dont certains reviennent constamment. Ce sont :

(i) les huit moules fondamentaux, tabulés à la section 4e et aux rapports mutuels figurés sur le quadrant (4c1).

(ii) le moule zêta $(\zeta^\bullet)$ qui généralise la fonction du même nom et qui intervient dans l'analyse harmonique sur $G^\bullet$.

(iii) les six moules hyperlogarithmiques $(U^\bullet, U_+^\bullet, U_-^\bullet, V^\bullet, V_+^\bullet, V_-^\bullet)$ qui permettent d'étudier la dualité entre les deux représentations canoniques des pseudovariabiles. Cette dualité, d'ailleurs, se précise considérablement lorsque, élargissant les algèbres de résurgence, on passe à des groupes continus, qui autorisent différentiation et transformation de Fourier.

Les comoules $A_\bullet = \{A_{\omega_1, \dots, \omega_n}\}$ sont eux aussi soumis à trois opérations $(+, \times, \circ)$, mais la multiplication est commutative. Les plus utiles sont les trois comoules gamma $(\Gamma_\bullet, \Gamma_{\langle \bullet \rangle}, \Gamma_{[\bullet]})$. On est souvent amené à les contracter avec les moules.

Chapitre 1 : Les algèbres $\mathcal{A}$ et $\bar{\mathcal{A}}$ et la convolution des germes.

Section 1a : L'algèbre $\mathcal{A}$.

Ce chapitre étudie différentes sortes de convolutions locales, sur divers espaces de germes analytiques. Son seul but est de préparer aux chapitres 2 et 3, où l'on étudiera la convolution globale de fonctions holomorphes définies sur des surfaces de Riemann fixes.

Soit $\mathcal{C}_\infty$ la surface de Riemann de $\log z$ et Q_0 son point de ramification. On note P le point courant de $\mathcal{C}_\infty$ et $z = \dot{P}$ sa projection sur $\mathbb{C}$. R désigne la rotation de $+2\pi$ autour de Q_0 et dP la forme différentielle sur $\mathcal{C}_\infty$ qui relève la forme dz de $\mathbb{C}$. Par voisinage de Q_0 , on entend toute partie de $\mathcal{C}_\infty$ qui contient un ensemble $V_r = \{ P; 0 < |\dot{P}| < r \}$.

$\mathcal{A}_{gen}$ désigne l'espace des germes sur $\mathcal{C}_\infty$, au point Q_0 , de fonctions holomorphes, c'est-à-dire l'espace de toutes les fonctions définies holomorphes au voisinage de Q_0 .

$\mathcal{A}_{int}$ désigne le sous-espace des germes intégrables en Q_0 , c'est-à-dire l'espace des φ tels que $\int_{Q_0}^P |\varphi(M)| dM$ soit fini et converge vers 0 uniformément quand $P \rightarrow Q_0$ dans un secteur donné $\theta_1 < \arg P < \theta_2$.

$\mathcal{A}_{reg}$, enfin, désigne le sous-espace des germes réguliers en Q_0 , c'est-à-dire de la forme

$$\varphi(P) = \sum_{n \geq 0} a_n z^n \quad (z = \dot{P}, \lim |a_n|^{1/n} < \infty)$$

Proposition 1 a 1.

La loi $\varphi, \psi \rightarrow \varphi * \psi$ avec $\varphi * \psi(P) = \int_{Q_0}^P \varphi(M) \psi(M') dM$ où l'intégrale est prise le long du segment $Q_0 P$ et où M' est le symétrique de M

par rapport au milieu P^* de $Q_0 P$, fait de $\mathcal{A}_{int}$ une algèbre commutative.

En effet, $\varphi * \psi(P)$ est bien holomorphe en P , car c'est la limite uniforme, sur tout compact voisin de Q_0 , des fonctions holomorphes de P :

$$\int_{M_2}^{M_2'} \varphi(M) \psi(M') dM$$

où M_2 et M_2' sont les deux points du segment $Q_0 P$ situés à la distance ε de Q_0 et P respectivement. D'autre part :

$$\int_{Q_0}^P |\varphi * \psi(M)| dM \leq \int_{Q_0}^P |\varphi(M)| dM \int_{Q_0}^P |\psi(M)| dM$$

ce qui assure l'uniforme intégrabilité de $\varphi * \psi$ en Q_0 . La loi $*$ est donc bien interne sur $\mathcal{A}_{int}$ et elle est manifestement commutative et associative.

En pratique, il est indispensable d'ajouter une unité à l'algèbre $\mathcal{A}_{int}$, qui n'en possède pas. On assimile cette unité à la distribution de Dirac de masse +1 au point de ramification Q_0 et on le note δ .

C'est l'algèbre unitarisée $\mathbb{C} \delta \oplus \mathcal{A}_{int}$ qu'on notera $\mathcal{A}$.

Elle suffit pour la plupart des applications, mais pas pour toutes : nous aurons parfois à considérer les germes holomorphes les plus généraux, c'est-à-dire les éléments de $\mathcal{A}_{gen}$.

Pour pouvoir définir une convolution $*$ sur de tels germes, en l'absence de toute hypothèse d'intégrabilité, nous allons construire une algèbre $\overline{\mathcal{A}}$, qui apparaîtra comme la complétée de l'algèbre $\mathcal{A}$ par rapport à une topologie adéquate. Cette construction, effectuée à la section suivante, peut être négligée dans une première lecture.

Section 1b : L'algèbre auxiliaire

$$\mathcal{A}_{\text{gen}} / \mathcal{A}_{\text{reg}}$$

L'idée centrale, pour convoler deux germes φ et ψ non intégrales en Q_0 , consiste à leur associer deux antécédents, c'est-à-dire deux germes Φ et Ψ tels que

$$\left. \begin{aligned} (1b1) \quad \varphi &= (1-R)\Phi = \Phi - \Phi \circ R^{-1} \\ (1b2) \quad \psi &= (1-R)\Psi = \Psi - \Psi \circ R^{-1} \end{aligned} \right\} \quad (R = \text{rotation d'angle } +2\pi)$$

puis à définir $(\varphi * \psi)(p)$ au moyen des intégrales $I_1 + I_2 + I_3$ (voir (1b13) ci-après) prises chacune sur des chemins qui évitent le point Q_0 . On verra que les équations (1b1) et (1b2) possèdent toujours des solutions Φ et Ψ qui sont déterminées, modulo un germe du type

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} a_n z^n \quad (z = \dot{P}, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} |a_n|^{1/n} < \infty, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} |a_{-n}|^{1/n} = 0)$$

par les données φ et ψ . D'autre part, il s'avérera que le produit de convolution $\varphi * \psi$, défini au moyen des intégrales $I_1 + I_2 + I_3$, ne dépend à son tour que des valeurs de Φ et Ψ modulo un germe du type

$$\sum_0^{+\infty} a_n z^n \quad (z = \dot{P}, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} |a_n|^{1/n} < \infty)$$

Ce ne sont donc pas les germes φ et ψ tels quels que nous convo-
lerons, mais ces mêmes germes qualifiés par la donnée d'antécédents Φ et Ψ
définis modulo un germe régulier. D'où l'idée de construire une convolution sur
l'espace quotient $\mathcal{A}_{\text{gen}} / \mathcal{A}_{\text{reg}}$. Nous obtiendrons ainsi une algèbre $\bar{\mathcal{A}}$
et nous réaliserons un plongement dense de $\mathcal{A}$ dans $\bar{\mathcal{A}}$. C'est au détail de cette
construction que sera consacrée toute la suite de cette section.

Soit donc $\mathcal{A}_{\text{gen}}$ l'espace introduit à la section précédente. On
le munit de la topologie dont les fermés F sont caractérisés par la propriété
suivante : pour toute suite $\varphi_n \in F$, s'il existe $\varepsilon > 0$ tel que chaque

φ_n se prolonge analytiquement à $V_n = \{0 < |\dot{P}| < n\}$ et si la suite φ_n converge uniformément vers une limite φ sur tout compact de V_n , alors $\varphi \in F$.

Dans cette topologie, 0 admet pour base de voisinages les ensembles $O_{H,K}$, où $H = \{H_n\}$ parcourt l'ensemble des suites réelles qui convergent vers 0, où $K = \{K_n\}$ parcourt l'ensemble des suites de compacts $K_n \subset V_{1/n}$ et où $O_{H,K}$ désigne l'ensemble des φ qui sont uniformément bornés par H_n sur K_n dès lors que φ se prolonge analytiquement à $V_{1/n}$ tout entier, mais pas à $V_{1/n-1}$ tout entier.

En fait, tout se ramène à la convergence séquentielle. Une suite φ_n de $\mathcal{A}_{gen}$ converge si et seulement si il existe $n > 0$ tel que les φ_n se prolongent chacun à V_n et y convergent uniformément sur tout compact. De plus, une application h de $\mathcal{A}_{gen}$ dans un espace topologique est continue si et seulement si elle est séquentiellement continue, i.e. si $h(\varphi_n)$ converge vers $h(\varphi)$ chaque fois que φ_n converge vers φ .

Cette topologie est donc bien compatible avec la structure d'espace vectoriel et on vérifie que $\mathcal{A}_{int}$ est un sous-espace partout dense de $\mathcal{A}_{gen}$. Au contraire, $\mathcal{A}_{reg}$ est un sous-espace fermé de $\mathcal{A}_{gen}$, ce qui permet de considérer l'espace topologique quotient $\mathcal{A}_{gen} / \mathcal{A}_{reg}$. Pour tout $\Phi \in \mathcal{A}_{gen}$, la classe de Φ dans $\mathcal{A}_{gen} / \mathcal{A}_{reg}$ sera notée $\widetilde{\Phi}$.

Munissons maintenant $\mathcal{A}_{gen} / \mathcal{A}_{reg}$ d'une loi associative. Soient Φ et Ψ deux éléments de $\mathcal{A}_{gen}$, définis holomorphes sur un voisinage $V_{2n} = \{0 < |\dot{P}| < 2n\}$ de Q_0 . Pour tout $P_0 \in V_n$ et tout P dans l'ensemble $V_{P_0} = \{P; 0 < |\dot{P}| < |\dot{P}_0|, 0 < \arg P - \arg P_0 < \pi\}$, posons:

$$(1b3) \quad (\Phi *_{P_0} \Psi)(P) = \int_{P_0}^{P_0'} \Phi(M) \Psi(M') dM$$

où P'_0 (resp M') est le symétrique de P_0 (resp M) par rapport au milieu P^* du segment $Q_0 P$ et où M parcourt le segment $P_0 P'_0$ (voir fig. 1b1)

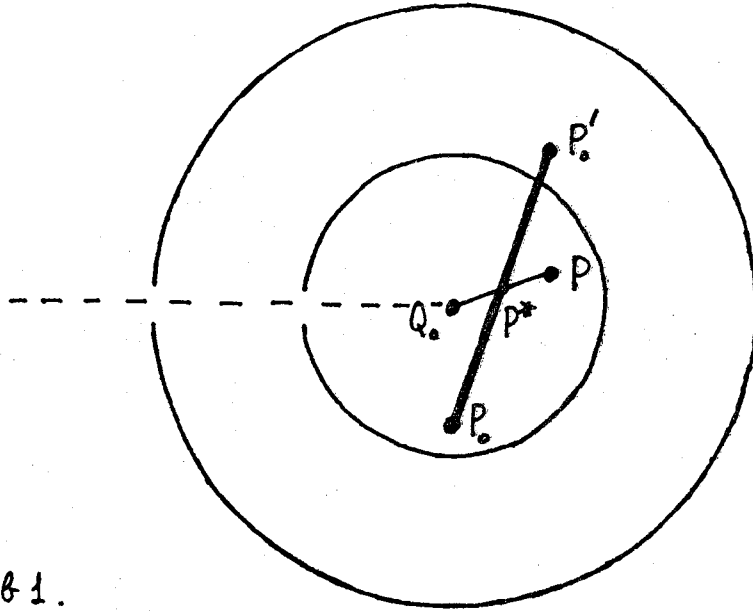


Figure 1b1.

$(\Phi *_{P_0} \Psi)(P)$ est holomorphe en P dans V_n . Pour deux points voisins $P_0, P_1 \in V_n$ et pour $P \in V_n^P \cap V_n^{P_1}$, on a :

$$(1b4) \quad (\Phi *_{P_0} \Psi)(P) - (\Phi *_{P_1} \Psi)(P) = \int_{P_0}^{P_1} \Phi(M) \Psi(M') dM$$

comme on le voit en remplaçant, dans le calcul de $(\Phi *_{P_1} \Psi)(P)$, le chemin $P_1 P'_1$ par le chemin $P_1 P_0 \cup P_0 P'_0 \cup P'_0 P'_1$. Or le second membre de (1b4), considéré comme fonction holomorphe de P , se prolonge manifestement à tout le voisinage V_ρ de Q_0 , pour $\rho = \inf \{ |\dot{P}_0|, |\dot{P}_1| \}$. De plus, il est régulier en Q_0 .

Par suite, si $P_0, P_1, \dots, P_n$ sont des points tels que $|\dot{P}_j| = \rho < n$ et que $0 < \arg P_{j+1} - \arg P_j < \pi$, on voit, grâce aux relations (1b4) relatives

aux diverses paires (P_i, P_{i+1}) , que $(\Phi *_{P_0} \Psi)(P)$, comme fonction de P , se prolonge holomorphiquement à $V^{P_0} \cup V^{P_1} \cup \dots \cup V^{P_n}$ et donc à V_P tout entier.

En résumé, $\Phi *_{P_0} \Psi$ est un élément de $\mathcal{A}_{gen}$ et sa classe $\widetilde{\Phi *_{P_0} \Psi}$ ne dépend pas de P_0 . Montrons que $\widetilde{\Phi *_{P_0} \Psi}$ ne dépend en fait que des classes $\widetilde{\Phi}$ et $\widetilde{\Psi}$. Vu la linéarité et la symétrie de la loi $*_{P_0}$, il suffit de montrer que $\Phi *_{P_0} \Psi \in \mathcal{A}_{reg}$ chaque fois que $\Phi \in \mathcal{A}_{gen}$ et $\Psi \in \mathcal{A}_{reg}$. Or c'est bien vrai, car dans ce cas on peut, lorsque P tend vers Q_0 , modifier arbitrairement, de manière à éviter Q_0 , le chemin d'intégration dans

$$\int_{P_0}^{P'_0} \Phi(M) \Psi(M') dM \quad (P_0 \text{ fixe, } P'_0 \text{ fonction de } P)$$

sans craindre que le point M' ne rencontre une singularité de Ψ . Enfin si Φ_n et Ψ_n tendent vers Φ et Ψ uniformément sur tout compact de V_{2n} , $\Phi_n *_{P_0} \Psi_n$ tend manifestement vers $\Phi *_{P_0} \Psi$ sur tout compact de V_n . On peut donc énoncer:

Proposition 1b2 :

Pour toute paire de germes $\Phi, \Psi \in \mathcal{A}_{gen}$ et tout point P_0 assez proche de Q_0 , la relation (1b3) définit, moyennant prolongation analytique, un nouveau germe $\Phi *_{P_0} \Psi$. La classe $\widetilde{\Phi *_{P_0} \Psi}$ est indépendante de P_0 et ne dépend que des classes $\widetilde{\Phi}$ et $\widetilde{\Psi}$. On peut donc la noter $\widetilde{\Phi} \otimes \widetilde{\Psi}$ ce qui munit l'espace $\mathcal{A}_{gen} / \mathcal{A}_{reg}$ d'une loi $\otimes$ bilinéaire, symétrique et continue.

Il serait pénible de démontrer directement l'associativité de la convolution $\otimes$ que nous venons de construire sur $\mathcal{A}_{gen} / \mathcal{A}_{reg}$. Heureusement, cette associativité va résulter d'un argument de densité : nous allons en effet construire un plongement π de $\mathcal{A}$ dans $\mathcal{A}_{gen} / \mathcal{A}_{reg}$ qui sera dense et qui

transposera la convolution de $\mathcal{A}$ en celle de $\mathcal{A}_{\text{gen}}/\mathcal{A}_{\text{reg}}$ (bien entendu, π n'aura rien à voir avec la projection naturelle de $\mathcal{A}_{\text{int}}$ dans $\mathcal{A}_{\text{gen}}/\mathcal{A}_{\text{reg}}$, car cette projection annule les germes réguliers et ne saurait donc préserver la convolution).

Soit φ un élément de $\mathcal{A}_{\text{int}}$, défini holomorphe sur tout un voisinage $V_{2r} = \{0 < |\dot{P}| < 2r\}$ de Q_0 . Soit P_0 un point quelconque de V_r et soit V_{P_0} l'ensemble $\{P; 0 < |\dot{P}| < |\dot{P}_0|; 0 < \arg P_0 - \arg P < \pi\}$. Pour tout $P \in V_{P_0}$, posons (voir fig. 1b.) :

$$(1b5) \quad \Phi_{P_0}(P) = \int_{Q_0}^{Q'_0} \varphi(M) U(M') dM$$

où Q'_0 (resp. M') désigne la symétrique de $Q_0(M)$ par rapport au milieu P^* du segment PP_0 , où l'intégrale est prise le long de $Q_0Q'_0$, et où le germe U est défini par $U(P) = \frac{1}{2\pi i} \frac{1}{z - z_0}$ ($z = \dot{P}$, $z_0 = \dot{P}_0$)

Proposition 1b3 :

Moyennant prolongement analytique, l'intégrale (1b5) associe à tout germe $\varphi \in \mathcal{A}_{\text{int}}$, pour P_0 assez proche de Q_0 , un germe $\Phi_{P_0} \in \mathcal{A}_{\text{gen}}$ dont la classe $\widehat{\Phi}_{P_0}$ ne dépend pas de P_0 . En notant $\pi(\varphi)$ cette classe, on définit une injection linéaire π de $\mathcal{A}_{\text{int}}$ dans $\mathcal{A}_{\text{gen}}/\mathcal{A}_{\text{reg}}$ qui vérifie :

$$\pi(\varphi * \psi) = \pi(\varphi) \otimes \pi(\psi) \text{ pour tous } \varphi, \psi \in \mathcal{A}_{\text{int}}$$

La démonstration repose sur les cinq lemmes qui suivent.

Lemme 1b1 :

$\Phi_{P_0}(P)$, considérée comme fonction de P , se prolonge analytiquement à V_{ρ} tout entier (pour $\rho = |\dot{P}_0|$).

En effet, à tout point P de V_p , on peut associer un chemin $\mathcal{J}(P)$ tel que :

(1b6) $\mathcal{J}(P)$ varie continûment en fonction de P .

(1b7) Pour au moins un point P de V_p , $\mathcal{J}(P)$ est le segment $Q_0 Q'_0$.

(1b8) Pour tout point P de V_p , $\mathcal{J}(P)$ est rectifiable, est entièrement contenu dans $V_{2,1}$, est symétrique par rapport au milieu P^* du segment PP_0 , a pour origine Q_0 , a pour extrémité Q'_0 , et évite le point P_0 .

Il suffit alors de prendre l'intégrale (1b5) le long du chemin $\mathcal{J}(P)$ pour voir que $\Phi_{P_0}(P)$ se prolonge analytiquement à tout V_p .

Lemme 1b2 :

Pour tout $\varphi \in \mathcal{A}_{int}$ et tout P_0 voisin de Q_0 , Φ_{P_0} est un antécédent de φ :

$$(1b9) \quad (1-R) \Phi_{P_0} = \varphi$$

Rappelons que R est la rotation de centre Q_0 et d'angle $+2\pi$ sur $\mathcal{C}_\infty$ et qu'à tout germe $\varphi \in \mathcal{A}_{gen}$, R associe le germe $R\varphi = \varphi \circ R^{-1} \in \mathcal{A}_{gen}$. Pour établir (1b9), il suffit de prouver que pour tout $P \in V_p$:

$$\Phi_{P_0}(P) - \Phi_{P_0}(R^{-1}P) = \varphi(P)$$

Or $\Phi_{P_0}(P)$ est égal à l'intégrale $\int \varphi(M) U(M') dM$ prise le long du chemin $\mathcal{J}(P)$ de la figure 1b2 ci-dessous, ou encore le long du chemin $\mathcal{J}'(P)$ de la figure 1b3. Quant au point $R^{-1}P$, il n'est plus dans V_{P_0} , mais toujours dans V_p , et on vérifie, en soumettant

$\mathcal{J}(P)$ à des déformations continues du type (1b6,7,8), que $\Phi_{P_0}(R^{-1}P)$ est égal à l'intégrale $\int \varphi(M) U(M') dM'$ prise le long du chemin $\mathcal{J}(R^{-1}P)$ de la figure 1b4. Finalement, $\Phi_{P_0}(P) - \Phi_{P_0}(R^{-1}P)$ est égal à l'intégrale prise le long du chemin $C_1 \cup C_2$ de la figure 1b5. Or la contribution du cercle C_1 est nulle et celle du cercle C_2 est exactement $\varphi(P)$ car, lorsque M parcourt C_2 dans le sens négatif, M' parcourt C_1 dans le sens positif et la fonction $U(M')$ possède un pôle simple de résidu $\frac{1}{2\pi i}$ au point P_0 . Ceci prouve le lemme.

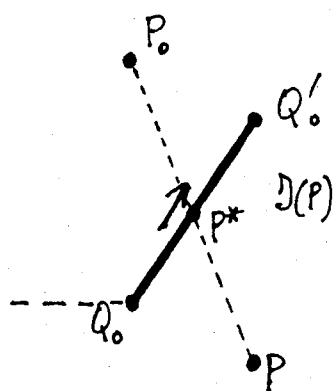


figure 1b2

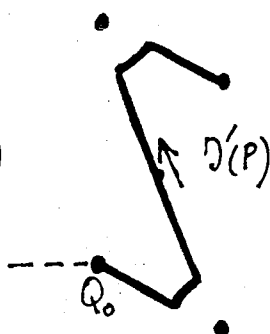


figure 1b3

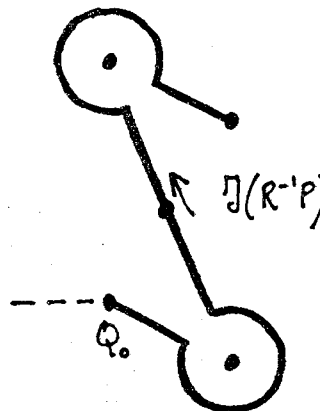


figure 1b4

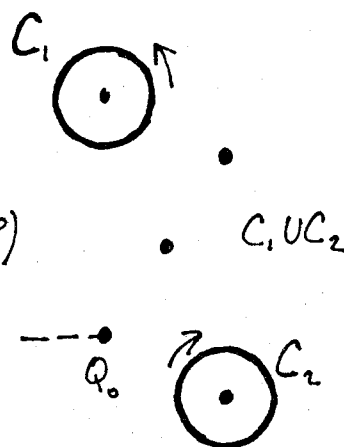


figure 1b5

Lemme 1b3 :

$\Phi_{P_0}(P)$ est un $O(|z|^{-1})$, avec $z = \dot{P}$, uniformément sur tout secteur $\theta_1 \leq \arg P \leq \theta_2$.

Il est possible d'associer à tout P de V_P un arc de Jordan $\mathcal{J}(P)$ qui vérifie, outre (1b6), (1b7), (1b8), les trois conditions suivantes.
 $\mathcal{J}(P)$ est la somme de deux arcs $\mathcal{J}_1(P)$ et $\mathcal{J}_2(P)$ tels que l'on ait, uniformément sur tout secteur $\theta_1 \leq \arg P \leq \theta_2$:

(1b10) $\mathcal{I}_1(P)$ est de longueur $O(|z|^{1/2})$

(1b11) si $M \in \mathcal{I}_1(P)$, la distance de M à P est $\gg |z|$ et par suite $|U(M')| \leq \frac{1}{2\pi} |z|^{-1}$

(1b12) si $M \in \mathcal{I}_2(P)$, la distance de M à P est $\gg |z|^{1/2}$ et par suite $|U(M')| \leq \frac{1}{2\pi} |z|^{-1/2}$

L'intégrale $\Phi_P(P) = \int_{\mathcal{I}(P)} \varphi(M) U(M') dM$ se scinde alors en deux morceaux $\int_{\mathcal{I}_1(P)} + \int_{\mathcal{I}_2(P)}$, dont chacun est manifestement un $O(|z|^{-1})$

Lemme 1b4 :

Si deux germes $\Phi, \Psi \in \mathcal{A}_{\text{gen}}$ sont des $O(|z|^{-1})$ uniformément sur tout secteur $\theta_1 \leq \arg P \leq \theta_2$, il en est de même du germe $\Phi *_{P_0} \Psi$.

Pour toute application $k: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ telle que $\lim_{t \rightarrow \infty} t^{-1} k(t) = 0$, on vérifie que $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon \int_{-1}^1 k\left(\frac{1}{t^2 + \varepsilon^2}\right) dt = 0$ (couper l'intégrale en deux morceaux $|t| \gg \eta$ et $|t| < \eta$ pour un η judicieusement choisi en fonction de ε et de k).

A partir de là, en se reportant à l'expression intégrale de $(\Phi *_{P_0} \Psi)(P)$ donnée en (1b3), on voit facilement que, sous les hypothèses du lemme 1b4, $(\Phi *_{P_0} \Psi)(P)$ est un $O(|z|^{-1})$ uniformément dans tout le secteur $\arg P_0 \leq \arg P \leq \pi + \arg P_0$. Pour un autre point P_1 , proche de P_0 , on obtiendrait de même que $(\Phi *_{P_1} \Psi)(P)$ est un $O(|z|^{-1})$ uniformément dans tout le secteur $\arg P_1 \leq \arg P \leq \pi + \arg P_1$. Or on a vu que la différence $\Phi *_{P_0} \Psi - \Phi *_{P_1} \Psi$ était un germe régulier. Par suite, en faisant varier $\arg P_1$, on voit finalement que $(\Phi *_{P_0} \Psi)(P)$ est un $O(|z|^{-1})$ uniformément dans tout secteur $\theta_1 \leq \arg P \leq \theta_2$ sans restriction.

Lemme 1b5 :

Pour toute paire de germes $\Phi, \Psi \in \mathcal{A}_{gen}$, on a, dès que $|\dot{P}| < |\dot{P}_0|$ et pour toute paire M_0, M'_0 de points de $Q_0 P$ symétriques par rapport au milieu P^* de ce segment :

$$(1b13) \quad (1-R) \left(\Phi *_{P_0} \Psi \right) (P) = I_1 + I_2 + I_3$$

avec

$$\begin{cases} I_1 = \int_{M_0}^{M'_0} ((1-R) \Phi(M)) ((1-R) \Psi(M')) dM \\ I_2 = \int_{R^{-1}M_0}^{M_0} \Phi(M) ((1-R) \Psi(M')) dM \\ I_3 = \int_{R^{-1}M_0}^{M_0} \Psi(M) ((1-R) \Phi(M')) dM \end{cases}$$

Il suffit de prouver (1b13) pour un P du secteur $\arg P_0 < \arg P < \pi + \arg P_0$. Pour un tel P , $(\Phi *_{P_0} \Psi)(P)$ est donné par l'intégrale $\int \Phi(M) \Psi(M') dM$ prise le long du chemin $\eta(P)$ de la figure 1b6 ci-dessous ou du chemin $\eta'(P)$ de la figure 1b7.

D'autre part, par déformation continue du chemin d'intégration on peut montrer que $(\Phi *_{P_0} \Psi)(R^{-1}P)$ est donné par l'intégrale $\int \Phi(M) \Psi(M') dM$ prise le long du chemin $\eta(R^{-1}P)$ de la figure 1b8. Par suite $\int_{\eta(P)} - \int_{\eta(R^{-1}P)} = \int_{\eta^*(P)}$, où $\eta^*(P)$ est le chemin de la figure 1b9, et on en tire la décomposition

$\int_{\eta^*(P)} = I_1 + I_2 + I_3$ en recensant soigneusement la contribution des cercles (dont on suppose les rayons égaux) et des quatre segments (qu'il faut se représenter superposés).

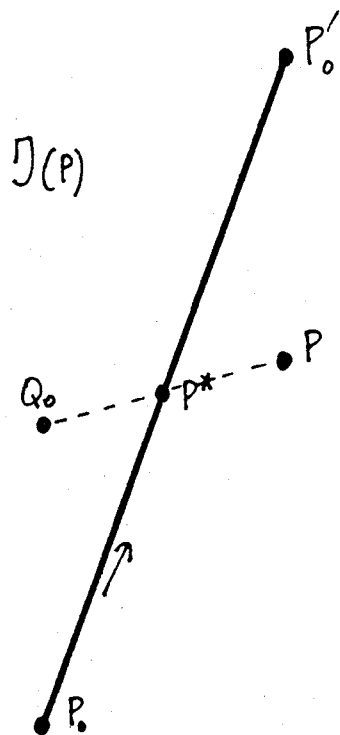


figure 166

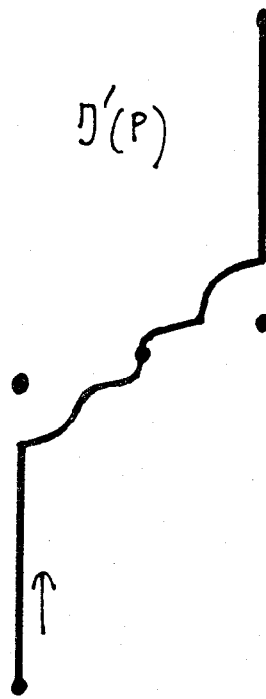


figure 167

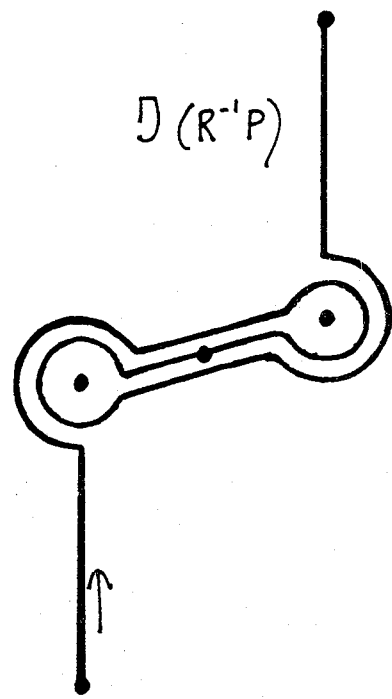


figure 168

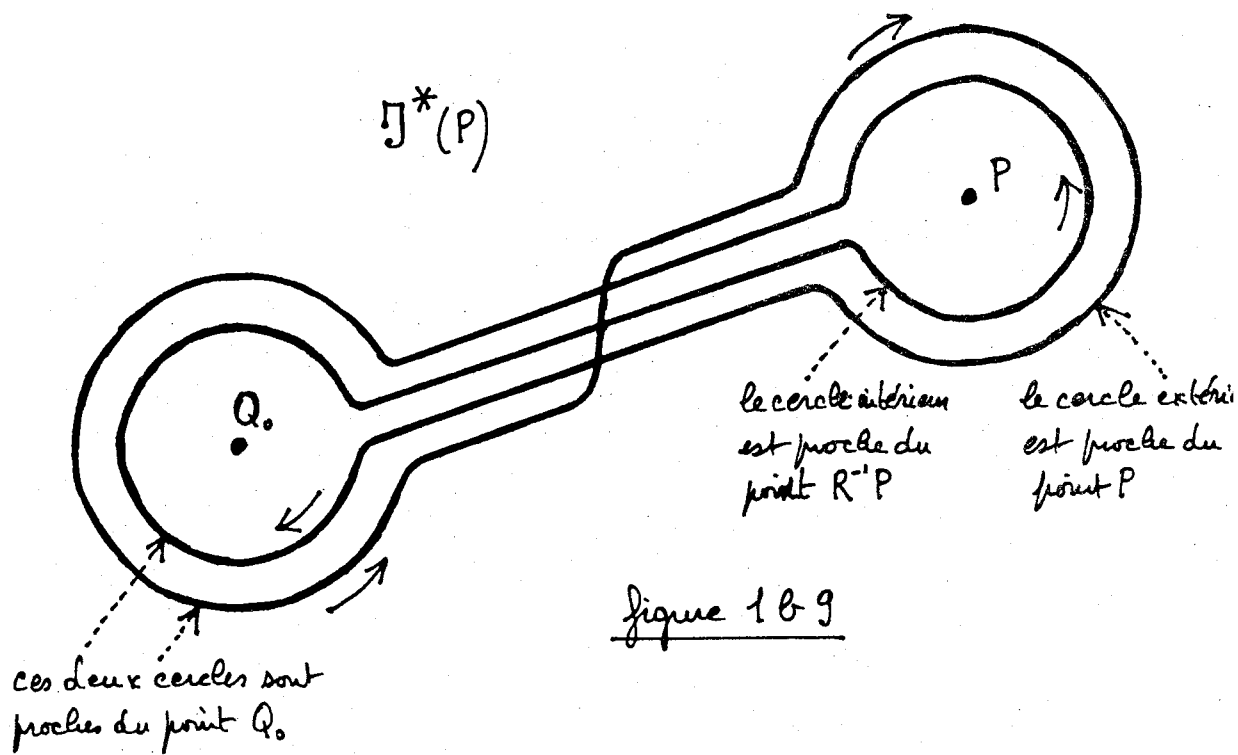


figure 169

Grâce aux cinq lemmes qui précèdent, nous pouvons maintenant démontrer la proposition 1a3. Soit en effet $\varphi \in \mathcal{A}_{int}$. D'après le lemme 1 à 1, Φ_{P_0} se prolonge à V_ρ tout entier, pour $\rho = |\dot{P}_0|$. C'est donc bien un germe analytique en Q_0 sur $\mathbb{C}_\infty$. Soient maintenant deux points $P_0, P_1 \in \mathbb{C}_\infty$ proches de Q_0 . D'après le lemme 1a2 :

$$(1-R) (\Phi_{P_0} - \Phi_{P_1}) = 0$$

Par suite :

$$(1b14) \quad \Phi_{P_0}(P) - \Phi_{P_1}(P) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n z^n \quad (z = \dot{P})$$

Mais d'après le lemme 1a3, $\Phi_{P_0}(P)$ et $\Phi_{P_1}(P)$ sont chacun des $\mathcal{O}(|z|^{-1})$ uniformément dans tout secteur. Par suite, dans (1b14), les coefficients a_n sont nuls pour chaque n négatif. Autrement dit, Φ_{P_0} et Φ_{P_1} ne diffèrent que d'un germe régulier et définissent une même classe dans l'espace

$$\mathcal{A}_{gen} / \mathcal{A}_{reg} : \quad \pi(\varphi) = \widetilde{\Phi}_{P_0} = \widetilde{\Phi}_{P_1}$$

Inversement, les représentants Φ de la classe $\pi(\varphi)$ sont caractérisés par les relations

$$(1b15) \quad (1-R) \Phi = \varphi$$

$$(1b16) \quad \Phi(P) = \mathcal{O}(|z|^{-1}) \quad (\text{uniformément sur tout secteur})$$

qui montrent l'injectivité de l'application $\varphi \rightarrow \pi(\varphi)$ de $\mathcal{A}_{int}$ dans $\mathcal{A}_{gen} / \mathcal{A}_{reg}$.

Il ne reste plus qu'à établir $\pi(\varphi * \psi) = \pi(\varphi) \otimes \pi(\psi)$. Soient Φ et Ψ deux représentants des classes $\pi(\varphi)$ et $\pi(\psi)$. Si P_0 est un point de $\mathbb{C}_\infty$ voisin de Q_0 , d'après la proposition 1a2, la

classe $\pi(\varphi) * \pi(\psi)$ admet pour représentant le germe $\Phi *_{P_0} \Psi$.

Montrons que :

$$(1b17) \quad (1-R) (\Phi *_{P_0} \Psi) = \varphi * \psi.$$

Appliquons pour cela le lemme 1a5 en faisant tendre le point M_0 vers Q_0 .
Puisque Φ et Ψ sont des $O(|z|^{-1})$ uniformément sur tout secteur, les intégrales I_2 et I_3 tendent vers 0 et l'intégrale I_1 tend vers $(\varphi * \psi)(P)$ lorsque M_0 tend vers Q_0 .

D'autre part, d'après le lemme 1a4, on a :

$$(1b18) \quad (\Phi *_{P_0} \Psi)(P) = O(|z|^{-1}) \quad (\text{uniformément sur tout secteur}).$$

Soit maintenant Θ_{P_0} l'antécédent de $\theta = \varphi * \psi$ relatif au point P_0 . D'après les lemmes 1a2 et 1a3 :

$$(1b19) \quad (1-R) \Theta_{P_0} = \varphi * \psi$$

$$(1b20) \quad \Theta_{P_0}(P) = O(|z|^{-1}) \quad (\text{uniformément sur tout secteur}).$$

En rapprochant (1b18) de (1b19) et (1b20) de (1b17) on voit que les germes $\Phi *_{P_0} \Psi$ et Θ_{P_0} définissent une même classe de $\mathcal{A}_{\text{gen}} / \mathcal{A}_{\text{reg}}$.

Or :

$$\widetilde{\Phi *_{P_0} \Psi} = \pi(\varphi) \otimes \pi(\psi) \quad \text{et} \quad \widetilde{\Theta_{P_0}} = \pi(\varphi * \psi)$$

et ceci achève la démonstration de la proposition 1a3.

Nous pouvons maintenant régler la question principale, à savoir

l'associativité de la convolution $\otimes$.

Corollaire de la proposition 1b3 :

α) La convolution $\otimes$ munit l'espace $\mathcal{A}_{\text{gen}} / \mathcal{A}_{\text{neg}}$ d'une structure
d'algèbre topologique et associative.

β) Le plongement π de l'algèbre $\mathcal{A}_{\text{int}}$ dans l'algèbre $\mathcal{A}_{\text{gen}} / \mathcal{A}_{\text{neg}}$
s'étend à l'algèbre $\mathcal{A}$, unitarisée de $\mathcal{A}_{\text{int}}$, à condition de faire corres-
pondre à l'unité δ de $\mathcal{A}$ l'unité I° de $\mathcal{A}_{\text{gen}} / \mathcal{A}_{\text{neg}}$, avec

$$I^\circ = \left(\frac{1}{2\pi i z} \right) \quad (z = \dot{p})$$

γ) le plongement π est continu et son image $\pi(\mathcal{A})$ est dense dans
 $\mathcal{A}_{\text{gen}} / \mathcal{A}_{\text{neg}}$.

Démonstration : D'après Stone-Weierstrass, tout élément Φ de $\mathcal{A}_{\text{gen}}$,
défini sur un voisinage V de Q_0 , est limite uniforme, sur tout compact
de V , d'une suite Φ_n , où les Φ_n sont des polynômes en $\log z$
($z = \dot{p}$). Or de tels Φ_n sont des $o(|z|^{-1})$ et mêmes des $o(|z|^{-2})$
uniformément sur tout secteur. De plus, ce sont les antécédents de germes

$\varphi_n = (1-R) \Phi_n$, qui sont eux-mêmes des polynômes en $\log z$, puisque
 $R \log z = -2\pi i + \log z$, et qui par conséquent appartiennent à $\mathcal{A}_{\text{int}}$.

Par suite, en passant aux classes d'équivalence, on voit que tout

$\tilde{\Phi} \in \mathcal{A}_{\text{gen}} / \mathcal{A}_{\text{neg}}$ est limite d'une suite $\pi(\varphi_n) = \tilde{\Phi}_n$, où
 $\varphi_n \in \mathcal{A}_{\text{int}}$. D'où la densité de $\pi(\mathcal{A}_{\text{int}})$ dans $\mathcal{A}_{\text{gen}} / \mathcal{A}_{\text{neg}}$.

D'autre part, en se reportant à la définition de $\pi(\varphi) = \tilde{\Phi}_{p_0}$ au
moyen de l'intégrale (1b5), on voit que l'application π est séquentielle-
ment continuée, et donc continue, de $\mathcal{A}_{\text{int}}$ dans $\mathcal{A}_{\text{gen}} / \mathcal{A}_{\text{neg}}$.

De même, en se reportant à la définition de la convolution
 $\tilde{\Phi} \otimes \tilde{\Psi} = \tilde{\Phi} *_{p_0} \tilde{\Psi}$, où le second membre est donné par l'intégrale (1b3),
on voit que la convolution $\otimes$ est une application séquentiellement continue
de $(\mathcal{A}_{\text{gen}} / \mathcal{A}_{\text{neg}}) \times (\mathcal{A}_{\text{gen}} / \mathcal{A}_{\text{neg}})$ dans $\mathcal{A}_{\text{gen}} / \mathcal{A}_{\text{neg}}$. Mais

comme cette convolution est associative sur une partie dense de $\mathcal{A}_{\text{gen}} / \mathcal{A}_{\text{reg}}$ à savoir $\pi(\mathcal{A}_{\text{int}})$, elle est associative sur $\mathcal{A}_{\text{gen}} / \mathcal{A}_{\text{reg}}$ tout entier.

Il ne reste plus qu'à montrer que la classe $\mathbf{I}^\circ = \left(\frac{1}{2\pi i z} \right)$ est l'unité de $\mathcal{A}_{\text{gen}} / \mathcal{A}_{\text{reg}}$. Par raison de densité, il suffit de montrer que $\pi(\varphi) * \mathbf{I}^\circ = \pi(\varphi)$ pour tout $\varphi \in \mathcal{A}_{\text{int}}$.

Pour cela, appliquons le lemme 1b5, en prenant pour Φ l'antécédent Φ_{P_0} de φ relatif à un point P_0 voisin de Q_0 et pour Ψ le germe $\frac{1}{2\pi i z} (z = \dot{P})$. Puisque $(1-R)\Psi = 0$, la contribution des intégrales I_1 et I_2 est nulle, et puisque l'intégrande $\Psi(M)((1-R)\Phi(M'))$ de I_3 comporte le résidu $\frac{1}{2\pi i} (1-R)\Phi(P) = \frac{1}{2\pi i} \varphi(P)$ au point $M = Q_0$, on a $I_3 = \varphi(P)$. Par suite

$$(1b21) \quad (1-R) (\Phi *_{P_0} \Psi) = \varphi = (1-R)\Phi$$

D'autre part, en adaptant légèrement le raisonnement du lemme 1a4, on verrait que $\Phi *_{P_0} \Psi$ est un $O(|z|^{-1})$ uniformément sur tout secteur. Ce fait, joint à (1b21), montre que $\Phi * \Psi$ ne diffère de Φ qu'au plus d'un germe régulier. Par suite, en passant aux classes d'équivalence, il vient $\widehat{\Phi} \otimes \widehat{\Psi} = \widehat{\Phi}$, c'est-à-dire $\pi(\varphi) \otimes \mathbf{I}^\circ = \pi(\varphi)$ et ceci achève la démonstration du corollaire.

Pour montrer que nous avons réalisé notre programme initial, qui était de convoler deux germes quelconques φ et ψ , il ne reste plus qu'à examiner si tout germe $\varphi \in \mathcal{A}_{\text{gen}}$ possède bien un antécédent $\Phi \in \mathcal{A}_{\text{gen}}$.

Lemme 1b6 :

Pour tout $\varphi \in \mathcal{A}_{\text{gen}}$, l'équation

$$(1b22) \quad \varphi = (1-R) \Phi$$

possède toujours des solutions $\Phi \in \mathcal{A}_{\text{gen}}$.

Soient sur $\mathbb{C}_\infty$ deux points P_0 et P_1 , proches de Q_0 et tels que $0 < \arg P_0 - \arg P_1 < \pi$. On peut toujours trouver une fonction entière $F(z)$ telle qu'en posant $G(P) = \exp(-F(z'))$, avec $z = \dot{P}$, le germe $G(P) \varphi(P)$ tende vers 0 lorsque P tend vers Q_0 le long du segment $Q_0 P_1$.

Ceci permet de poser :

$$(1b23) \quad \Phi_{P_0}(P) = \frac{1}{G(P)} \int_{Q_0}^{Q'_0} G(M) \varphi(M) U(M') dM$$

où U, Q'_0, M' sont définis comme en (1b5), où P est pris dans la même région, mais où l'on a soin d'intégrer non plus sur le segment $Q_0 Q'_0$, mais sur un chemin γ voisin, joignant Q_0 à Q'_0 , symétrique par rapport au milieu P^* de $Q_0 P$ et porté au départ par l'axe $Q_0 P_1$ (pour assurer la convergence de l'intégrale).

A partir de là, en remarquant que $RG = G$ et en adaptant la démonstration du lemme 2, on prouve facilement que $\Phi_{P_0}(P)$, comme fonction de P , se prolonge analytiquement à tout un voisinage de Q_0 et que le germe $\Phi = \Phi_{P_0}$ satisfait à l'équation (1b22).

On notera bien que (sauf lorsque $\varphi \in \mathcal{A}_{int}$ et dans quelques autres cas particuliers) il n'existe pas de classe antécédente $\tilde{\Phi}$ privilégiée, et encore moins de germe antécédent $\tilde{\Phi}$ privilégié.

Relations entre $*$ et $\otimes$.

Lorsque $\Phi, \Psi \in \mathcal{A}_{int}$, on peut définir séparément $\tilde{\Phi} \otimes \tilde{\Psi}$ et $\tilde{\Phi} * \tilde{\Psi}$, mais il est essentiel de voir que $\tilde{\Phi} \otimes \tilde{\Psi} \neq \tilde{\Phi} * \tilde{\Psi}$ en général, puisque :

$$(1-R) (\tilde{\Phi} \otimes \tilde{\Psi}) = ((1-R)\tilde{\Phi}) * ((1-R)\tilde{\Psi})$$

A ce propos, il faut noter que lorsque P_0 tend vers Q_0 , le germe $\Phi *_{P_0} \Psi$ ne converge jamais selon la topologie de $\mathcal{A}_{gen}$, puisqu'il n'existe pas de voisinage fixe de Q_0 auquel tous les germes $\Phi *_{P_0} \Psi$ puissent se prolonger analytiquement. Toutefois, lorsque $\Phi, \Psi \in \mathcal{A}_{int}$, le scalaire $(\Phi *_{P_0} \Psi)(P)$ tend vers une limite, lorsque P est fixe et que P_0 tend vers Q_0 selon un rayon fixe et ne reconstruit pas P . La limite en question dépend précisément du rayon. Lorsque $0 < \arg P - \arg P_0 < \pi$ elle vaut $(\Phi * \Psi)(P)$, mais cela ne contredit pas l'inégalité $\widehat{\Phi} \otimes \widehat{\Psi} \neq \widehat{\Phi * \Psi}$, car on aurait une autre limite pour $n\pi < \arg P - \arg P_0 < (n+1)\pi$.

Section 1c : L'algèbre $\bar{\mathcal{A}}$.

Définition 1c1 :

- α) On note $\bar{\mathcal{A}}$ l'algèbre image de l'algèbre $\mathcal{A}_{gen} / \mathcal{A}_{reg}$ par l'injection $\tilde{\Phi} \rightarrow (\varphi, \tilde{\Phi})$ où $\varphi = (1-R)\tilde{\Phi}$.
- β) Dans le couple $(\varphi, \tilde{\Phi})$, le terme φ est dit mineur et le terme $\tilde{\Phi}$ est dit classe antécédente. La classe antécédente détermine le mineur, mais l'inverse n'est pas vrai. Comme d'autre part φ parcourt $\mathcal{A}_{gen}$ quand $\tilde{\Phi}$ parcourt $\mathcal{A}_{gen} / \mathcal{A}_{reg}$, l'espace $\bar{\mathcal{A}}$ apparaît comme l'ensemble des germes φ qualifiés par une classe antécédente. En pratique, les éléments de $\bar{\mathcal{A}}$ sont souvent désignés par leur seul mineur, la donnée d'une classe antécédente étant sous-entendue.

γ) La loi de $\bar{\mathcal{A}}$ est notée $*$. On a donc :

$$(\varphi, \tilde{\Phi}) * (\psi, \tilde{\Psi}) = (\theta, \tilde{\Theta}) \text{ avec } \tilde{\Theta} = \tilde{\Phi} \otimes \tilde{\Psi} \text{ et } \theta = (1-R)\tilde{\Theta}$$

Par abus de langage, on écrit souvent :

$$\varphi * \psi = 0$$

ce qui n'a évidemment de sens que relativement à un choix donné de classes antécédentes.

Le remplacement de $\mathcal{A}_{\text{gen}} / \mathcal{A}_{\text{reg}}$ par $\bar{\mathcal{A}}$ est une simple affaire d'écriture, mais il présente l'avantage de donner un plongement $\varphi \rightarrow (\varphi, \pi(\varphi))$ de $\mathcal{A}$ dans $\bar{\mathcal{A}}$ qui fait figure d'inclusion, et une convolution $*$ de $\bar{\mathcal{A}}$ qui apparaît comme une extension de la convolution $*$ de $\mathcal{A}$ (alors que $*$ et $(*)$ n'ont rien à voir, ainsi qu'il a été remarqué à la fin de la section précédente).

En fait, $\mathcal{A}_{\text{int}}$ n'est pas le seul sous-espace de $\mathcal{A}_{\text{gen}}$ qui se plonge naturellement dans $\bar{\mathcal{A}}$. Pour pouvoir définir et étudier ces autres sous-espaces, commençons par introduire deux sous-groupes multiplicatifs de l'algèbre $\bar{\mathcal{A}}$.

Proposition 1c1 :

α) Les relations

$$(1c1) \quad \mathbf{I}^{-\alpha} = \left(\frac{z^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}, \frac{z^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)(1-e^{-2\pi i \alpha})} \right) = \left(\frac{z^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}, \frac{e^{i\pi\alpha}}{2\pi i} \Gamma(1-\alpha) z^{\alpha-1} \right) \quad \text{si} \quad \alpha \in \mathbb{C} \div \mathbb{Z}$$

$$(1c2) \quad \mathbf{I}^{-n} = \left(\frac{z^{n-1}}{(n-1)!}, \frac{\log z}{2\pi i} \cdot \frac{z^{n-1}}{(n-1)!} \right) \quad \text{si} \quad n \in \mathbb{N}^*$$

$$(1c3) \quad \mathbf{I}^n = \left(0, \frac{(-1)^n}{2\pi i} \cdot \frac{n!}{z^{n+1}} \right) = \delta^{(n)} \quad \text{si} \quad n \in \mathbb{N}$$

définissent une application holomorphe $\alpha \rightarrow \mathbf{I}^\alpha$ de $\mathbb{C}$ dans $\bar{\mathcal{A}}$ et l'on a

$$(1c4) \quad \mathbf{I}^\alpha * \mathbf{I}^\beta = \mathbf{I}^{\alpha+\beta}$$

β) Il est naturel d'assimiler I^0 , unité de l'algèbre $\bar{\mathcal{A}}$, au Dirac δ de masse 1 en Q_0 et, pour $n \in \mathbb{N}^*$, d'assimiler I^n à la distribution dérivée $\delta^{(n)}$, car on a

$$(1c5) \quad I^n * \varphi = (-1)^n \varphi^{(n)} \quad \text{pour tout } \varphi \in \bar{\mathcal{A}}$$

γ) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la relation

$$(1c6) \quad J^n = \left(\frac{\partial^n}{\partial \alpha^n} I^\alpha \right)_{\alpha=0}$$

définit un élément J^n de $\mathcal{A} \subset \bar{\mathcal{A}}$ et on a :

$$(1c7) \quad J^m * J^n = J^{m+n}$$

Démonstration : Une famille $\{\varphi_\alpha\} \in \bar{\mathcal{A}}$ est dite holomorphe par rapport au paramètre complexe α si, pour tout $\alpha_0 \in \mathbb{C}$, on peut trouver un voisinage V de α_0 dans $\mathbb{C}$, un voisinage V_n de Q_0 dans $\mathbb{C}_\infty$ et un antécédent Φ_α de φ_α , appartenant à la classe antécédente de φ_α et tel que l'application $(\alpha, P) \rightarrow \Phi_\alpha(P)$ soit holomorphe en α et P sur $V \times V_n$.

Tel est bien le cas pour l'application $\alpha \rightarrow I^{-\alpha}$. La seule difficulté se présente pour $\alpha_0 = n \in \mathbb{N}^*$ et on la tourne en prenant, pour α voisin de n , comme antécédent de $I^{-\alpha}$, non pas $\frac{z^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)(1-e^{-2\pi i \alpha})}$ mais l'antécédent équivalent $\frac{z^{\alpha-1} - z^{n-1}}{\Gamma(\alpha)(1-e^{-2\pi i \alpha})}$ (il n'y a pas d'antécédent partout holomorphe en α).

Quant à la relation (1c4), elle se vérifie élémentairement pour

$\operatorname{Re} \alpha < 0$ et $\operatorname{Re} \beta < 0$, car alors $I^\alpha, I^\beta \in \mathcal{A}_{\text{int}}$ et on est

ramené à la convolution classique de la section 1a. On passe ensuite au cas de α, β quelconques par prolongation analytique des identités.

Enfin, on déduit (1c7) de (1c4) par dérivation répétée par rapport à α et β .

Section 1d : Les algèbres $\mathcal{A}(\tau)$ et $\bar{\mathcal{A}}(\tau)$.

Définition 1d1 :

$\alpha)$ Pour p entier > 0 , on note respectivement $\mathcal{A}(\tau)$ et $\bar{\mathcal{A}}(\tau)$ les sous-algèbres de $\mathcal{A}$ et $\bar{\mathcal{A}}$ invariantes par R^p .

$\beta)$ On note de même $\mathcal{A}(\infty)$ et $\bar{\mathcal{A}}(\infty)$ les sous-algèbres de $\mathcal{A}$ et $\bar{\mathcal{A}}$ moyenne-périodiques par rapport à R , c'est-à-dire formées des φ tels que $R^t \varphi$ dépende moyenne-périodiquement (*) du réel t .

Les éléments de $\mathcal{A}(\tau)$ et $\bar{\mathcal{A}}(\tau)$ sont aisément représentables. En effet, pour $\tau < \infty$, tout φ de $\mathcal{A}(\tau)$ admet un développement convergent

$$\varphi = \sum_n a_n I^{-n} \quad \text{où } n \text{ parcourt } \tau^{-1} \mathbb{N} \text{ et où } |a_n|^{1/n} = O(n)$$

et tout φ de $\bar{\mathcal{A}}(\tau)$ admet un développement convergent

$$\varphi = \sum_n a_n I^{-n} \quad \text{où } n \text{ parcourt } \tau^{-1} \mathbb{Z} \text{ et où } |a_n|^{1/n} = O(n), |a_{-n}|^{1/n} = O(n^{-1}) \quad (n > 0)$$

En particulier, les φ de $\mathcal{A}(1)$ et $\bar{\mathcal{A}}(1)$ peuvent respectivement être représentés sous la forme :

$$\varphi(z) = a_0 \delta + \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n \quad \text{avec} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} |a_n|^{1/n} < \infty$$

$$\varphi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{-n} \delta^{(n)} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n \quad \text{avec} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} |a_n|^{1/n} < \infty, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} |a_{-n}|^{1/n} = 0$$

Enfin, les φ de $\mathcal{A}(\infty)$ (resp. $\bar{\mathcal{A}}(\infty)$) admettent des développements

(*) Au sens de J.-P. Kahane, Lectures on Mean-Periodic Functions.

convergençs du type :

$$\varphi = \sum_{\alpha} \mathbf{I}^{\alpha} * P_{\alpha}(\mathbf{J})$$

où chaque P_{α} est un polynôme en $\mathbf{J}$ et où la somme est étendue à une partie au plus dénombrable de $\{ \operatorname{Re} \alpha > 0 \}$ (resp. de $\mathbb{C}$ tout entier).

Notons pour finir que les barres ne doivent pas induire en erreur : si $\mu < \infty$, $\mathcal{A}(\mu)$ et $\overline{\mathcal{A}}(\mu)$ sont chacun fermés dans $\overline{\mathcal{A}}$ et $\mathcal{A}(\mu)$ n'est donc pas dense dans $\overline{\mathcal{A}}(\mu)$, et si $\mu = \infty$, $\mathcal{A}(\infty)$ et $\overline{\mathcal{A}}(\infty)$ sont chacun denses dans $\overline{\mathcal{A}}$ si bien qu'ici encore $\overline{\mathcal{A}}(\infty)$ n'est pas la complétée de $\mathcal{A}(\infty)$.

Bien sûr, si l'on n'avait eu en vue que les algèbres $\mathcal{A}(\mu)$ et $\overline{\mathcal{A}}(\mu)$, il aurait été beaucoup plus simple (*) de les définir directement à partir des développements convergençs ci-dessus, sans passer par la construction de la section 1b. Toutefois, ces algèbres ne suffisent pas dans toutes les applications : il faut parfois recourir à l'algèbre $\overline{\mathcal{A}}$ elle-même (**).

Section 1c : La transformation de Laplace.

Il y a deux cas importants où on peut définir la transformation de Laplace d'un élément $(\varphi, \tilde{\Phi}) \sim \varphi$ de $\overline{\mathcal{A}}$.

Premier cas : Le mineur φ est prolongeable analytiquement le long d'un axe $Q_0 Q$ de $\mathbb{C}_0$ et de croissance au plus exponentielle sur cet axe. On peut alors trouver, dans sa classe antécédente, un $\tilde{\Phi}$ qui présente les mêmes propriétés quant aux axes $Q_0 Q$ et $R^{-1}(Q_0 Q)$ et on pose :

(*) Encore que l'on rencontrerait des difficultés pour montrer la stabilité de $\overline{\mathcal{A}}(\infty)$ par rapport à la convolution *.

(**) Voir par exemple aux chapitres 9 et 14

$$(1e1) \quad (\mathcal{L}_Q \varphi)(z) = \int_{R^{-1}Q}^Q \Phi(M) e^{-z\zeta} dM \quad (\zeta = \dot{M})$$

où le chemin d'intégration part du point à l'infini $R^{-1}Q$, s'approche radialement du point Q_0 , contourne celui-ci une fois dans le sens positif, puis s'éloigne radialement vers le point à l'infini Q . $\mathcal{L}_Q \varphi$ ne dépend pas du choix de Φ dans $\tilde{\Phi}$, pourvu qu'on ait croissance exponentielle. C'est un germe holomorphe défini dans un voisinage sectoriel de l'infini. Si φ et ψ sont prolongeables et exponentielles le long d'un même axe $Q_0 Q$, on a

$$\mathcal{L}_Q (\varphi * \psi) = (\mathcal{L}_Q \varphi) (\mathcal{L}_Q \psi)$$

Enfin, si $\varphi \in \mathcal{A}$, la définition ci-dessus équivaut à la définition classique :

$$(1e2) \quad (\mathcal{L}_Q \varphi)(z) = \int_{Q_0}^Q \varphi(M) e^{-z\zeta} dM \quad (\zeta = \dot{M})$$

Deuxième cas : La définition (1e1) s'applique aux éléments I^α et J^n de $\bar{\mathcal{A}}$ introduits à la section 1c et on trouve

$$(1e3) \quad (\mathcal{L}_Q I^\alpha)(z) = z^\alpha ; \quad (\mathcal{L}_Q J^n)(z) = (\log z)^n$$

où le choix de la direction $Q_0 Q$ n'influe que sur la détermination de z^α et $(\log z)^n$.

Ceci suggère donc d'associer à tout élément φ de $\bar{\mathcal{A}}(\mu)$, de développement (nécessairement convergent) :

$$\sum a_\alpha I^{-\alpha} \quad \text{si } \mu < \infty \quad (\text{resp. } \sum a_{\alpha,n} I^{-\alpha} * J^n \quad \text{si } \mu = \infty)$$

une transformée de Laplace formelle

$$\mathcal{L}\varphi = \sum a_\alpha z^{-\alpha} \quad (\text{resp. } \sum a_{\alpha,n} z^{-\alpha} \log^n z)$$

Ces séries formelles sont généralement divergentes, mais on a toujours

$$\mathcal{L}(\varphi * \psi) = (\mathcal{L}\varphi)(\mathcal{L}\psi)$$

Les images de $\mathcal{A}(\mu)$ et $\overline{\mathcal{A}}(\mu)$ par $\mathcal{L}$ sont désignées par les mêmes symboles en caractère maigre, soit $\mathcal{A}(\mu)$ et $\overline{\mathcal{A}}(\mu)$. Leurs éléments sont eux aussi désignés par des lettres maigres : $\mathcal{L}\psi = \varphi$

Section 1f : Résumé du chapitre 1.

Ce chapitre est consacré à l'étude locale de la convolution, en préparation à l'étude globale des chapitres ultérieurs.

On part de la banale convolution additive sur les germes holomorphes au point 0 de $\mathbb{C}$:

$$(\varphi * \psi)(z) = \int_0^z \varphi(z-\zeta) \psi(\zeta) d\zeta$$

Cette convolution se relève sans difficulté à l'espace des germes holomorphes sur $\mathbb{C}_0$ (surface de Riemann de $\log z$) au voisinage du point de ramification Q_0 , moyennant l'intégrabilité en Q_0 des facteurs. Après adjonction des Diracs au point Q_0 , on obtient ainsi une algèbre unitaire, notée $\mathcal{A}$.

On cherche ensuite à se passer de la condition d'intégrabilité, afin de pouvoir convoler des germes quelconques (ce qu'on a besoin de faire dans certaines applications). C'est l'objet des sections 1b et 1c. A chaque germe on associe un antécédent Φ , c'est-à-dire un germe solution de l'équation

$$\varphi(p) \equiv \Phi(p) - \Phi(R^{-1}p) \quad (R = \text{notation de } +2\pi \text{ autour de } Q_0)$$

ou plus exactement une classe antécédente Φ , c'est-à-dire un antécédent Φ défini modulo un germe régulier en Q_0 . On considère alors l'espace $\overline{\mathcal{A}}$ des germes φ qualifiés par une classe antécédente Φ et on y construit une convolution dont on montre qu'elle possède toutes les propriétés désirables.

Chaque germe possède une infinité de classes antécédentes, mais les germes de $\mathcal{A}$ possèdent chacun une classe antécédente privilégiée, ce qui permet de plonger l'algèbre $\mathcal{A}$ dans l'algèbre $\bar{\mathcal{A}}$. Pour une topologie adéquate, ce plongement est dense.

Enfin, on étend à $\bar{\mathcal{A}}$ plusieurs notions relatives à $\mathcal{A}$, en particulier la "transformation de Laplace".

Chapitre 2 : Les algèbres $A(\Omega)$ et $\bar{A}(\Omega)$ et la convolution des fonctions
résurgentes.

Section 2a : L'algèbre $A_{\text{com}}(\Omega)$ et les relations de Leibniz.

Le présent chapitre étudie, d'un point de vue global, la convolution de fonctions holomorphes définies sur des surfaces de Riemann fixes.

La surface $\mathcal{R}$.

Soit Ω un sous-groupe additif discret de $\mathbb{C}$. On se limitera dans ce chapitre aux sous-groupes de dimension 1, donc de la forme $\Omega = \omega_* \mathbb{Z}$ avec $\omega_* \in \mathbb{C}^*$. Soit $\mathcal{R} = \widetilde{\mathbb{C} \div \Omega}$ la surface de Riemann recouvrement universel de $\mathbb{C} \div \Omega$ et soit $\dot{P}$ la projection sur $\mathbb{C}$ du point courant P de $\mathcal{R}$.

On désigne par Γ le groupe des automorphismes $\Gamma : P \rightarrow \Gamma P$ de $\mathcal{R}$ qui se projettent en des translations $\dot{\Gamma} : z \rightarrow \dot{\Gamma}(z) = z + \omega$ de $\mathbb{C} \div \Omega$. Alors ω appartient à Ω et on peut assimiler la translation $\dot{\Gamma}$ à son pas ω , ce qui donne un homomorphisme $\Gamma \rightarrow \omega = \dot{\Gamma}$ du groupe Γ dans le groupe Ω .

Les frontières $\partial^0 \mathcal{R}, \partial^+ \mathcal{R}, \partial^- \mathcal{R}$ et les demi-feuillets $\mathcal{R}(Q)$.

On appelle frontière neutre de $\mathcal{R}$, et on note $\partial^0 \mathcal{R}$, l'ensemble des points de ramification de $\mathcal{R}$, tous situés au dessus de Ω .

On appelle frontière positive de $\mathcal{R}$, et on note $\partial^+ \mathcal{R}$, l'ensemble des "points-frontière" de $\mathcal{R}$ situés au dessus du point à l'infini $(*)$ du demi-plan $\text{Im}(z/\omega_*) < 0$ de $\mathbb{C}$.

On appelle frontière négative de $\mathcal{R}$, et on note $\partial^- \mathcal{R}$, l'ensemble des "points-frontière" de $\mathcal{R}$ situés au dessus du point à l'infini $(*)$ du demi-plan $\text{Im}(z/\omega_*) > 0$ de $\mathbb{C}$.

Enfin, pour tout $Q \in \partial^\pm \mathcal{R}$, on note $\mathcal{R}(Q)$ l'unique demi-feuillet de la surface $\mathcal{R}$ qui se projette sur le demi-plan $\text{Im}(z/\omega_*) \lessgtr 0$ et

$(*)$ considéré comme unique.

auquel le point Q est adhérent.

Le groupe Γ .

Le groupe d'automorphismes Γ introduit plus haut est fuchsien, sans éléments elliptiques. On peut trouver dans Γ trois éléments paraboliques R, S, T

- (i) de projections $\dot{R} = 0, \dot{S} = -\omega_*, \dot{T} = \omega_*$
- (ii) soumis à la seule relation $RST = 1_\Gamma$
- (iii) engendrant, ensemble, le groupe Γ .

On note respectivement Q_0, Q_+, Q_- l'unique point-frontière invariant par l'automorphisme parabolique R, S, T . Ce point appartient à $\partial^0 R, \partial^+ R, \partial^- R$. Le point Q_0 est adhérent aux demi-feuillets $R(Q_+)$ et $R(Q_-)$.

A un automorphisme interne près dans le groupe Γ , le triplet R, S, T est déterminé par les conditions (i) (ii) (iii). Choisissons-le (ce qui est possible) de manière que l'automorphisme R soit une rotation d'angle $+2\pi$ et de point fixe Q_0 situé au dessus de 0 (i.e. $\dot{Q}_0 = 0$). C'est toujours à ce choix-là que nous nous référerons dans la suite.

Notons pour finir que l'action de Γ s'étend naturellement aux trois frontières $\partial^0 R, \partial^+ R, \partial^- R$ et qu'elle est transitive sur chacune d'elles. En particulier : $\Gamma Q_0 = \partial^0 R, \Gamma Q_+ = \partial^+ R, \Gamma Q_- = \partial^- R$.

La construction de la surface R et de ses éléments est élucidée sur la figure 3gl ci-après pour le cas $R = 2\pi i \mathbb{Z}$.

Définition 2a1 :

Soit $A_{\text{born}}(\Omega)$ l'espace des fonctions définies holomorphes sur la surface R et bornées au voisinage de chaque point de $\partial^0 R$.

Si on identifie le point de ramification Q_0 de $R = \mathbb{C} \div \mathbb{N}$ avec le point de ramification Q_0 de $\mathbb{C}_\infty = \widehat{\mathbb{C} \div \{0\}}$, R apparaît comme une surface de Riemann au-dessus de $\mathbb{C}_\infty$. Il en résulte un plongement de $A_{\text{born}}(\mathbb{N})$ dans A_{int} (cf. section 1a).

Proposition 2a1 :

Le sous-espace $A_{\text{born}}(\mathbb{N})$ de A_{int} est fermé pour le produit de convolution.

Il s'agit de montrer que pour toute paire $\varphi, \psi \in A_{\text{born}}(\mathbb{N})$, le produit $\varphi * \psi$, qui a priori n'est défini qu'au voisinage de Q_0 , se prolonge en fait à R tout entier. Pour P voisin de Q_0 on a :

$$(2a1) \quad \varphi * \psi (P) = \int_{Q_0}^P \varphi(M) \psi(M') dM$$

où l'on intègre le long du petit segment rectiligne $Q_0 P$ et où les points M et M' sont symétriques par rapport au milieu de $Q_0 P$.

Plus généralement, disons qu'un arc rectifiable $\mathcal{J}$ joignant Q_0 à un point P de R est symétrique si

- (i) excepté son origine Q_0 , il est tout entier contenu dans R
- (ii) il se projette sur $\mathbb{C}$ selon un arc symétrique par rapport à son milieu

$$\frac{1}{2} z = \frac{1}{2} \dot{P}$$

et disons que $\mathcal{J}$ est symétriquement contractable si

- (iii) il est symétrique
- (iiii) il peut, par déformation continue de chemins symétriques, se contracter en un petit segment rectiligne.

Un chemin $\mathcal{J}$ peut être symétrique sans être symétriquement contractable. Les différents cas possibles sont illustrés sur les figures ci-dessous,

en projection sur $\mathbb{C} \div \mathbb{N}$ (pour $\mathbb{N} = i\mathbb{Z}$). En effet, bien que les projections des chemins symétriques γ_1 et γ_2 soient homotopes sur $\mathbb{C} \div \mathbb{N}$ (comme on le vérifie sur les figures 2b1 et 2b2) et que par conséquent ces deux chemins possèdent même extrémité P sur $\mathbb{R}$, le chemin γ_1 n'est pas symétriquement contractable (comme le montrent les figures 2b3) tandis que le chemin γ_2 l'est (comme le montrent les figures 2b4).

Bien que la contractibilité symétrique soit beaucoup plus forte que la simple symétrie, montrons que chaque point P de $\mathbb{R}$ est l'aboutissement d'un chemin symétriquement contractable. L'ensemble $\mathcal{E}$ des points qui possèdent cette propriété est évidemment ouvert. Soit P_0 un point de $\mathbb{R}$ adhérent à $\mathcal{E}$. Manifestement, P_0 est l'aboutissement d'au moins un chemin γ rectifiable, de longueur finie, et satisfaisant à la condition de contractibilité symétrique, à ceci près que γ est susceptible de rencontrer $\partial\mathbb{R}$ en des points $M_1, \dots, M_n$. Mais dans ce cas les points $M'_1, \dots, M'_n$, symétriques des précédents, ne sont pas sur $\partial\mathbb{R}$, car sinon on aurait $M_j + M'_j = P \in \mathbb{N}$. Par suite, on peut apporter, au voisinage des M_j et des M'_j , de petites modifications symétriques au chemin γ , de façon à lui faire éviter les points M_j de $\partial\mathbb{R}$. Donc $P_0 \in \mathcal{E}$ et l'ensemble $\mathcal{E}$, étant ouvert et formé dans $\mathbb{R}$, coïncide avec $\mathbb{R}$.

Il ne reste plus maintenant qu'à déformer symétriquement, au sens ci-dessus, le chemin d'intégration dans (2a1) pour voir que le germe $\varphi * \psi$ se prolonge holomorphiquement à $\mathbb{R}$ toute entière et reste borné au voisinage de chaque point de $\partial\mathbb{R}$, ce qui établit la proposition 2a1.

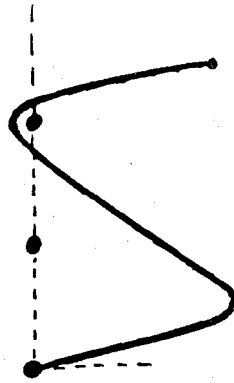
Cela étant, on a une action naturelle du groupe Γ dans $A_{\text{born}}(\mathbb{N})$:

$$\Gamma : \varphi \rightarrow \Gamma\varphi = \varphi \circ \Gamma^{-1}$$

qui induit par linéarité une action de l'algèbre de groupe $\mathbb{C}[\Gamma]$ dans

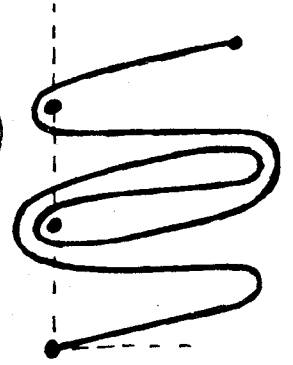
(chemin $\mathcal{I}_1$)

figure 2b1



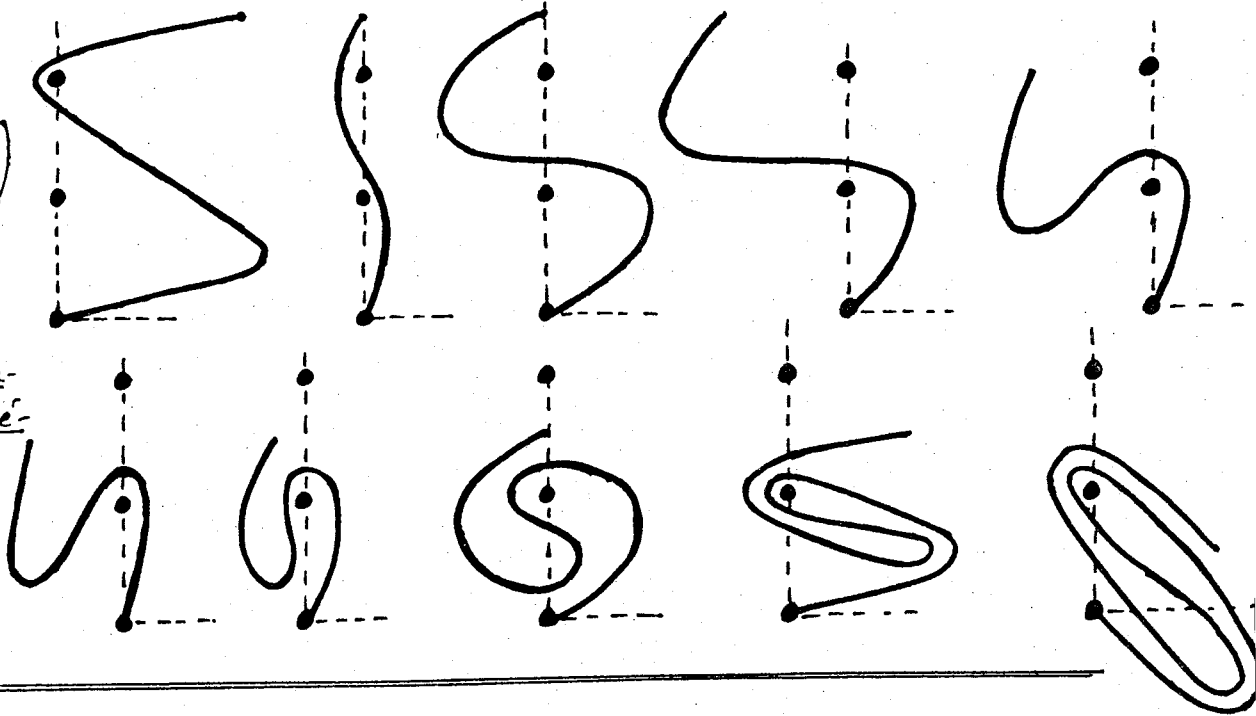
(chemin $\mathcal{I}_2$)

figure 2b2



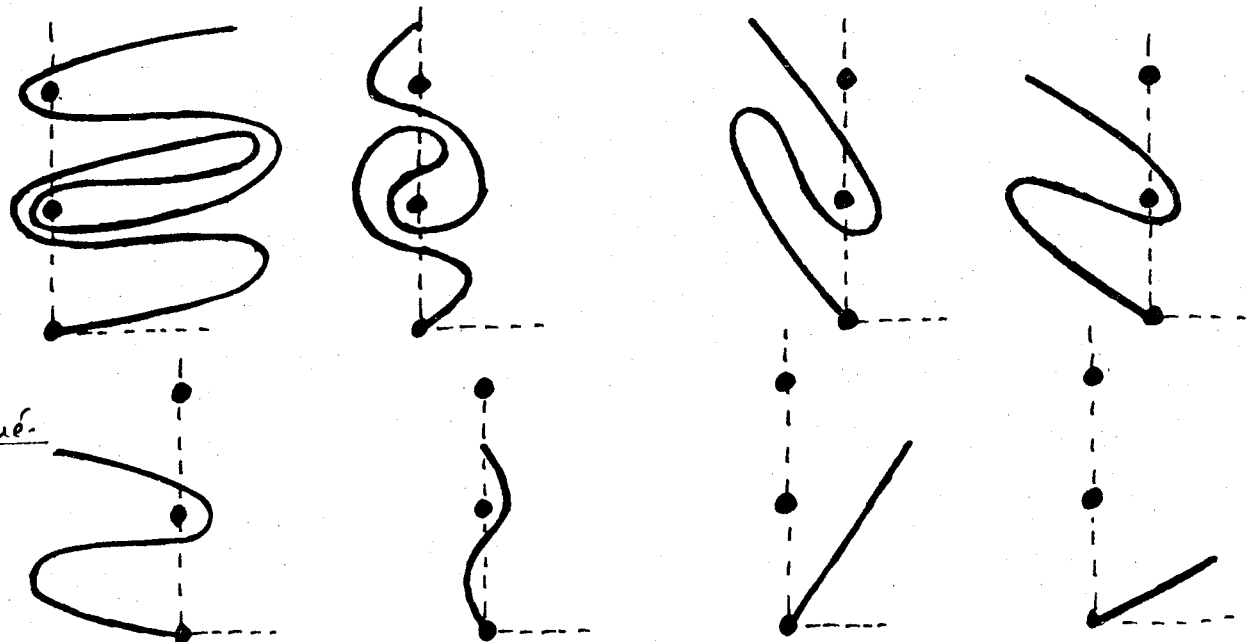
(chemin $\mathcal{I}_1$)

figures 2b3
illustrant la non-
contractibilité symé-
trique de $\mathcal{I}_1$



(chemin $\mathcal{I}_2$)

figures 2b4
illustrant la
contractibilité symé-
trique de $\mathcal{I}_2$



$A_{\text{bom}}(\mathcal{N})$. En fait, nous aurons à nous occuper, non de $\mathbb{C}[\Gamma]$, mais de la sous-algèbre

$$\mathbb{D}(\mathcal{N}) = \mathbb{C} \oplus (1-R) \mathbb{C}[\Gamma]$$

constituée par les combinaisons linéaires finies de la forme

$$D = \gamma_1 1_\Gamma + \sum_{\Gamma} \gamma_{\Gamma} (1-R)\Gamma \quad (\gamma_1, \gamma_{\Gamma} \in \mathbb{C}; \Gamma \in \Gamma)$$

Proposition 2a2 :

α) Il existe une application linéaire unique de $\mathbb{D}(\mathcal{N})$ dans $\mathbb{D}(\mathcal{N}) \otimes \mathbb{D}(\mathcal{N})$:

$$\sigma : D \rightarrow \sigma(D) = \sum_i D_i \otimes D'_i \quad (\text{somme finie})$$

telle que, pour tout $D \in \mathbb{D}(\mathcal{N})$ et toute paire $\varphi, \psi \in A_{\text{bom}}(\mathcal{N})$, on ait une "relation de Leibniz" :

$$(2a2) \quad D(\varphi * \psi) = \sum_i (D_i \varphi) * (D'_i \psi)$$

β) La loi σ munit $\mathbb{D}(\mathcal{N})$ d'une structure de coalgèbre commutative. De plus, les relations de Leibniz sont compatibles avec la multiplication des opérateurs et ceci fait de $\mathbb{D}(\mathcal{N})$ une bigèbre (*).

On observe d'abord qu'à cause de la relation $RST = 1_\Gamma$, la sous-algèbre $\mathbb{D}(\mathcal{N})$ de $\mathbb{C}[\Gamma]$ est engendrée par les éléments suivants :

$$R ; R^{-1} ; S_n = (1-R)S^n \quad (n=1,2,\dots) ; T_n = (1-R)T^n \quad (n=1,2,\dots)$$

Il suffit donc de montrer l'existence d'une relation de Leibniz pour ces éléments-là. Pour $D = R^{\pm 1}$, c'est immédiat, car

$$R^{\pm 1}(\varphi * \psi) = (R^{\pm 1}\varphi) * (R^{\pm 1}\psi)$$

(*) Au sens de Bourbaki XXXVII, chapitre II, § 1. $\mathbb{D}(\mathcal{N})$ possède une involution : cf. Section 6, Problème 5.

par définition même de la convolution. On posera donc :

$$(2a3) \quad \sigma(R^{\pm 1}) = R^{\pm 1} \otimes R^{\pm 1}$$

Considérons ensuite le cas $D = S_n = (1-R)S^n$ pour n entier ≥ 1 . On a alors :

$$\begin{aligned} S_n(\varphi * \psi)(P) &= (\varphi * \psi)(S^{-n}P) - (\varphi * \psi)(S^{-n}R^{-1}P) \\ &= \int_{\gamma_1} \varphi(M) \psi(M') dM - \int_{\gamma_2} \varphi(M) \psi(M') dM \end{aligned}$$

où γ_1 et γ_2 sont n'importe quels chemins symétriquement contractables joignant le point Q_0 aux points $S^{-n}P$ et $S^{-n}R^{-1}P$ respectivement et où M' désigne le symétrique de M sur γ_1 ou γ_2 . Les deux figures ci-dessous montrent, pour $n = 3$ et P voisin de Q_0 , les projections sur $\mathbb{C} \div \mathcal{N}$ de deux chemins γ'_1 et γ'_2 joignant Q_0 à $S^{-3}P$ et $S^{-3}R^{-1}P$ respectivement, mais non symétriques. Remarquons à ce propos que, d'une façon générale, on obtient le graphe d'un chemin

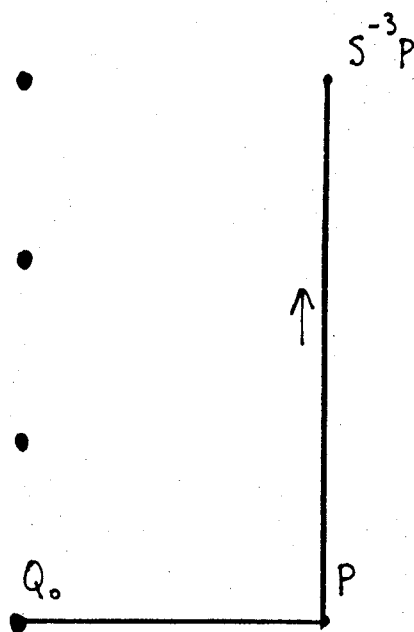


figure 2b5 (chemin γ'_1)

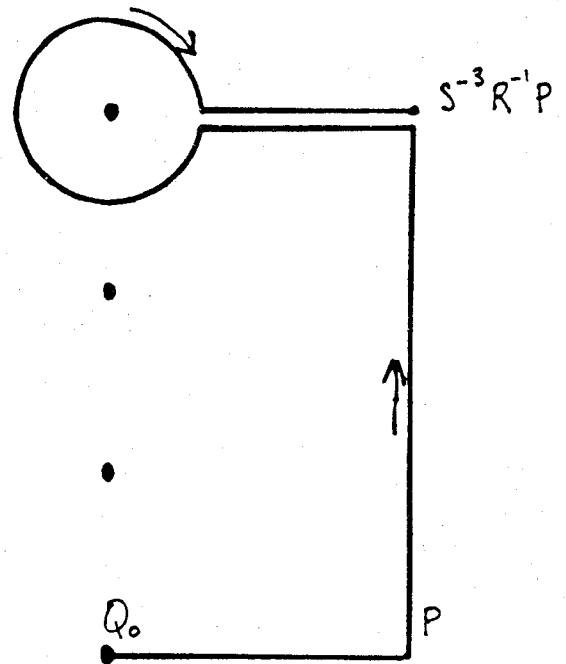


figure 2b6 (chemin γ'_2)

joignant Q_0 à $\Gamma_1 \Gamma_2 \dots \Gamma_n P$ ($\Gamma_i \in \Gamma'$) en mettant bout à bout les graphes de chemins joignant Q_0 à P , P à $\Gamma_1 P$, P à $\Gamma_2 P$, ..., P à $\Gamma_n P$ (dans cet ordre!).

Les figures 2b7 et 2b8 ci-dessous montrent deux chemins $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ homotopiques (*) à $\mathcal{D}'_1$ et $\mathcal{D}'_2$, mais symétriquement contractables. La contractibilité symétrique de $\mathcal{D}_1$ est évidente; celle de $\mathcal{D}_2$ est mise en évidence sur la série des figures 2b9.

Nous sommes maintenant à même de calculer $S_m(\varphi * \psi) = \int_{\mathcal{D}_1} - \int_{\mathcal{D}_2}$ d'après les figures 2b7 et 2b8. Comme φ et ψ sont bornées au voisinage des points de $\partial^0 R$, on peut faire tendre vers 0 les rayons des petits arcs de cercle entourant les points de $\partial^0 R$. Il ne reste plus qu'à recenser soigneusement les contributions aux intégrales des segments verticaux et horizontaux de $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$. La contribution totale des segments verticaux, pris avec la bonne orientation, est nulle. On vérifie en effet que :

$$+ \int_{(2)} - \int_{(6)} - \int_{(12)} - \int_{(18)} = 0$$

Quant à la contribution des segments horizontaux, elle se décompose de la manière suivante

$$\begin{aligned} + \int_{(3)} - \int_{(19)} - \int_{(20)} &= ((S^3 \varphi - RS^3 \varphi) * \psi) (P) \\ - \int_{(13)} - \int_{(14)} - \int_{(15)} - \int_{(16)} - \int_{(17)} &= ((S^2 \varphi - RS^2 \varphi) * (S\psi - RS\psi)) (P) \\ - \int_{(7)} - \int_{(8)} - \int_{(9)} - \int_{(10)} - \int_{(11)} &= ((S\varphi - RS\varphi) * (S^2 \psi - RS^2 \psi)) (P) \\ + \int_{(1)} - \int_{(4)} - \int_{(5)} &= (\varphi * (S^3 \psi - RS^3 \psi)) (P) \end{aligned}$$

(*) plus proprement, ce sont les projections sur $\mathcal{C} \div \mathcal{R}$ qui sont homotopiques.

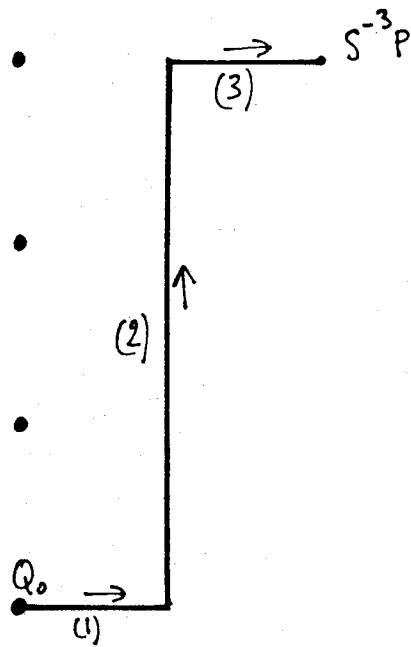


figure 2.6.7 (chemin $\mathcal{I}_1$)

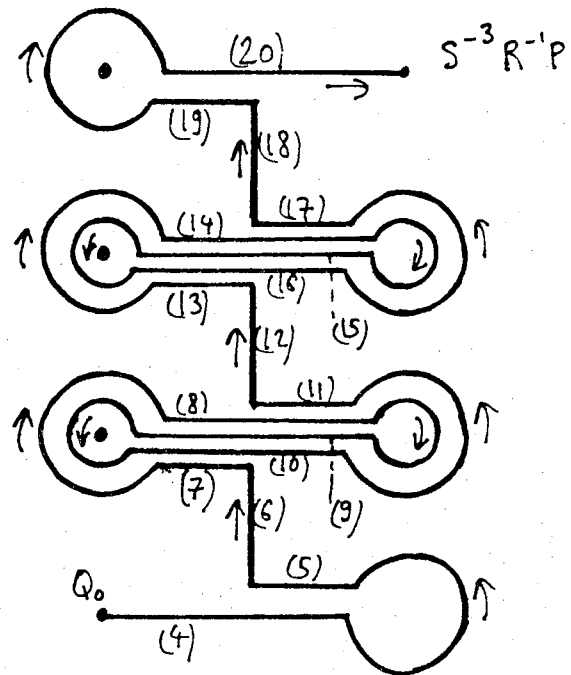
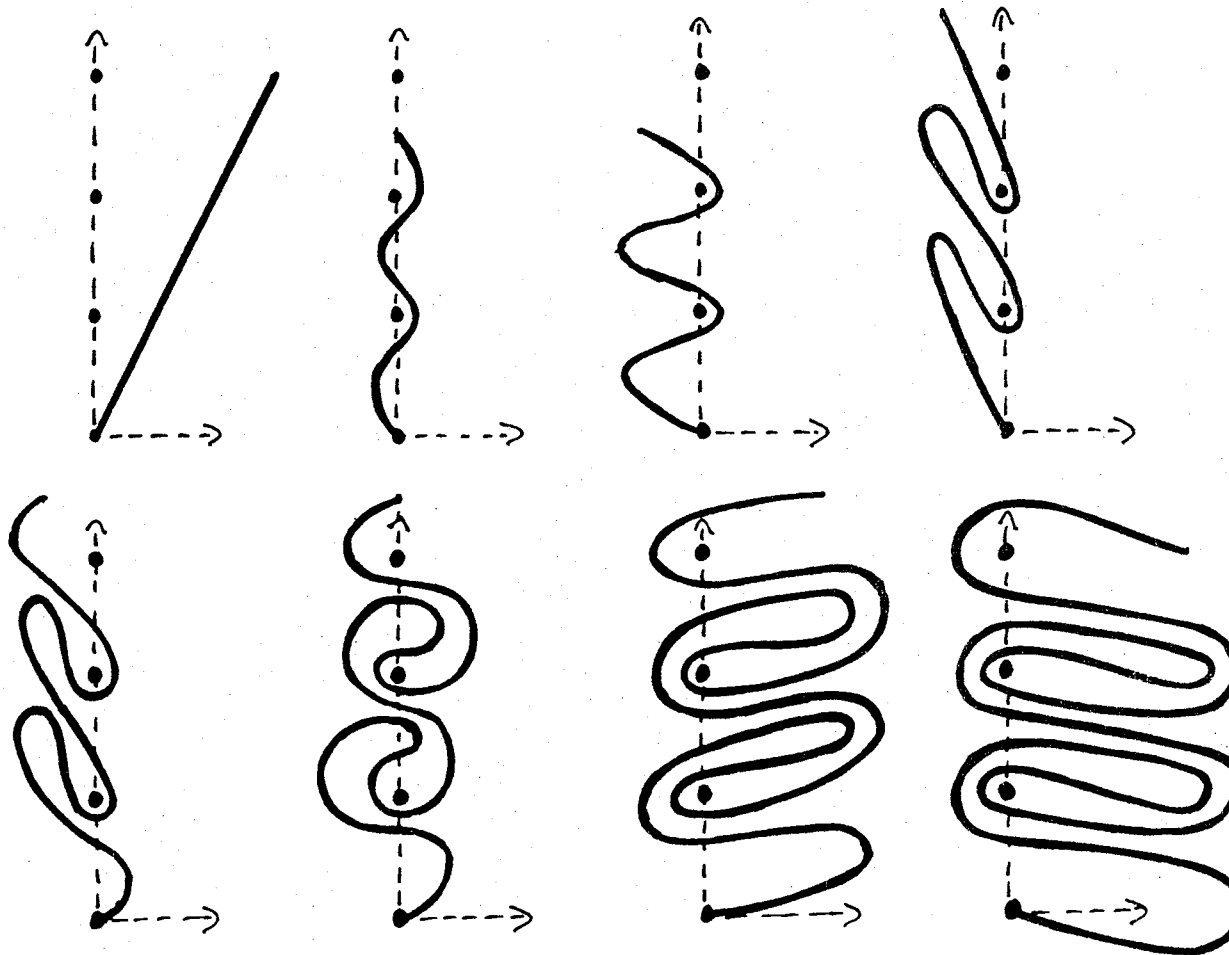


figure 2.6.8 (chemin $\mathcal{I}_2$)



figures 2.6.9 (contractibilité symétrique du chemin $\mathcal{I}_2$)

Chacune des identités ci-dessus s'établit en calculant les intégrales implicites dans les membres de droite, le long de chemins analogues à $\mathcal{J}_1$ et $\mathcal{J}_2$. Le détail des vérifications est laissé au lecteur.

Finalement, il vient :

$$S_3 (\varphi * \psi) = (S_3 \varphi) * \psi + (S_2 \varphi) * (S_1 \psi) + (S_1 \varphi) * (S_2 \psi) + \varphi * (S_3 \psi)$$

Le même raisonnement s'applique pour tout $n \geq 1$ (avec une légère modification pour n pair) et conduit à la formule de Leibniz générale :

$$S_n (\varphi * \psi) = (S_n \varphi) * \psi + \varphi * (S_n \psi) + \sum_{k=1}^{n-1} (S_k \varphi) * (S_{n-k} \psi)$$

Enfin, cette formule reste valable lorsqu'on y remplace S_n par T_n , car cela revient à effectuer une rotation de $+\pi$ sur toutes les figures ci-dessus.

On est donc conduit à noter $S_0 = T_0 = 1$ et à poser les relations :

$$(2a4) \quad \sigma(S_n) = \sum_{k=0}^n S_k \otimes S_{n-k} \quad ; \quad \tau(T_n) = \sum_{k=0}^n T_k \otimes T_{n-k}$$

dont on observe qu'elles sont symétriques. On voit que la loi σ fait de

$\mathcal{D}(\mathcal{N})$ une co-algèbre commutative (*) et ceci achève de prouver la proposition 2a2.

(*) la commutativité de $\mathcal{D}(\mathcal{N})$, comme co-algèbre, tient évidemment à la commutativité de $\mathcal{A}_{\text{com}}(\mathcal{N})$, comme algèbre.

En pratique, lorsqu'on voudra calculer $\sigma(D)$ pour un D général de $\mathcal{D}(\mathcal{R})$, on commencera, grâce aux relations $T^{-1} = RS$ et $S^{-1} = TR$, par supprimer dans l'expression de D tous les S ou T affectés de puissances négatives. On exprimera ensuite D comme polynôme en les variables non-commutantes R, R^{-1}, S_n et T_n ($n \geq 1$). Enfin, on appliquera (2a3) et (2a4) en tenant compte de la compatibilité des relations de Leibniz avec la multiplication des opérateurs :

$$\sigma(D\Delta) = \sigma(D) \sigma(\Delta)$$

c'est-à-dire, sous forme développée :

$$\sigma(D\Delta) = \sum_{i,j} (D_i \Delta_j) \otimes (D'_i \Delta'_j) \quad \text{si} \quad \sigma(D) = \sum_i D_i \otimes D'_i \quad \text{et} \quad \sigma(\Delta) = \sum_j \Delta_j \otimes \Delta'_j$$

On trouvera au chapitre 5 plusieurs exemples de calcul de $\sigma(D)$ avec leur interprétation géométrique.

Nous allons maintenant rechercher les éléments de $\mathcal{D}(\mathcal{R})$ qui sont des dérivations, c'est-à-dire les D tels que

$$\sigma(D) = D \otimes 1 + 1 \otimes D$$

Commençons par introduire les fonctions génératrices :

$$S(x) = \sum_{n \geq 0} x^n S_n = 1 + \sum_{n \geq 1} x^n (1-R) S^n = (1-xRS)(1-xS)^{-1}$$

$$T(x) = \sum_{n \geq 0} x^n T_n = 1 + \sum_{n \geq 1} x^n (1-R) T^n = (1-xRT)(1-xT)^{-1}$$

Grâce aux relations (2a4) on vérifie

$$\sigma(S(x)) = S(x) \otimes S(x) \quad \text{et} \quad \sigma(T(x)) = T(x) \otimes T(x)$$

Autrement dit, $S(x)$ et $T(x)$ sont formellement des automorphismes. Par suite les expressions $S^{-1}(x)$ et $R^{-1}T^{-1}(x)R$ sont aussi des auto-

morphismes. Or, compte tenu de la non-permutabilité de R, S, T on trouve :

$$\begin{aligned} S^{-1}(x) &= (1-xS)(1-xRS)^{-1} = 1 + (1-R^{-1})xT^{-1}(1-xT^{-1})^{-1} \\ &= 1 + \sum_{n \geq 1} x^n (1-R^{-1})T^{-n} \\ R^{-1}T^{-1}(x)R &= R^{-1}(1-xT)(1-xRT)^{-1}R = (1-xR^{-1}TR)(1-xTR)^{-1} \\ &= (1-xR^{-1}S^{-1})(1-xS^{-1})^{-1} = 1 + (1-R^{-1})xS^{-1}(1-xS^{-1})^{-1} \\ &= 1 + \sum_{n \geq 1} x^n (1-R^{-1})S^{-n} \end{aligned}$$

En inversant l'argument précédent, on voit que si l'on pose :

$$(2a5) \quad S_{-n} = (1-R^{-1})S^{-n} \quad \text{et} \quad T_{-n} = (1-R^{-1})T^{-n} \quad (\text{pour } n \geq 1)$$

on aura :

$$(2a6) \quad \sigma(S_{-n}) = \sum_{p=0}^n S_{-p} \otimes S_{p-n} \quad \text{et} \quad \sigma(T_{-n}) = \sum_{p=0}^n T_{-p} \otimes T_{p-n}$$

Posons maintenant :

$$\begin{aligned} S^*(x) &= \log S(x) = \sum_{n \geq 1} x^n S_n^* \\ T^*(x) &= \log T(x) = \sum_{n \geq 1} x^n T_n^* \end{aligned}$$

Puisque $S(x)$ et $T(x)$ sont des automorphismes formels, leurs logarithmes $S^*(x)$ et $T^*(x)$ sont des dérivations formelles et les opérateurs S_n^* et T_n^* sont des dérivations tout court. Cherchons à calculer ces dernières.

Nous avons d'une part les relations :

$$\sum_{n \geq 1} x^n S_n^* = \log(1 + \sum_{n \geq 1} x^n S_n) = -\log(1 + \sum_{n \geq 1} x^n T_n)$$

$$\sum_{n \geq 1} x^n T_n^* = \log(1 + \sum_{n \geq 1} x^n T_n) = -R \left(\log(1 + \sum_{n \geq 1} x^n S_n) \right) R^{-1}$$

qui donnent chaque S_n^* et chaque T_n^* en fonction d'un nombre fini, au choix, de S_m ou de T_m .

D'autre part, nous avons les relations équivalentes :

$$(2a7) \quad \sum_{n \geq 1} x^n S_n^* = \log((1 - xRS)(1 - xS)^{-1})$$

$$(2a8) \quad \sum_{n \geq 1} x^n T_n^* = \log((1 - xRT)(1 - xT)^{-1})$$

que nous allons exploiter grâce au lemme suivant :

Lemme 2a1

Dans l'anneau non-commutatif libre $\mathbb{C}[[X, Y]]$ on a l'identité :

$$(2a9) \quad \log((1 - Y)(1 - X)^{-1}) = (X - Y) \sum X^{p_1} Y^{q_1} \dots X^{p_m} Y^{q_m} \frac{p! q!}{(1 + p + q)!}$$

où $p = \sum p_i, q = \sum q_i$ et où la somme est étendue à tous les $p_i, q_i \geq 1$ ainsi qu'à $p_i = 0$ et $q_m = 0$.

On démontre ce lemme en faisant tendre t vers 0 dans l'identité

$$((1 - Y)(1 - X)^{-1})^t = 1 + (X - Y) \sum X^{p_1} Y^{q_1} \dots X^{p_m} Y^{q_m} \frac{(t + p)(t + p - 1) \dots (t - q + 1)(t - q)}{(1 + p + q)!} (-1)^{q-1}$$

qui à son tour peut s'établir en considérant les valeurs entières positives (resp. négatives) de t , valeurs pour lesquelles les deux membres sont polynômes en Y (resp. en X).

En portant (2a9) dans (2a7) et (2a8), il vient :

$$(2a10) \quad S_n^* = (1-R) S \sum_{l+p+q=n} S^l T^{-q_1} \dots S^p T^{-q_m} \frac{n! q!}{n!}$$

$$(2a11) \quad T_n^* = (1-R) T \sum_{l+p+q=n} T^{l_1} (RT)^{q_1} \dots T^{l_m} (RT)^{q_m} \frac{n! q!}{n!}$$

avec les mêmes conventions de sommation qu'en (2a9).

Proposition 2a3 :

$\alpha)$ L'espace $\mathcal{D}(\mathcal{A}) = \mathbb{C} \oplus (1-R) \mathbb{C}[\Gamma]$ des opérateurs "à relation de Leib-
niz" est, en tant qu'algèbre, engendré par la famille

$$\{ R, R^{-1}, S_n^*, T_n^* \quad (n \in \mathbb{N}^*) \}$$

où les S_n^*, T_n^* sont les dérivations explicitement définies en (2a10) et (2a11). A la relation évidente $RR^{-1}=1$ près, la génération en question est libre.

$\beta)$ Si on désigne par $\Delta^1(\mathcal{A})$ (resp. par $\Delta(\mathcal{A})$) le sous-espace de $\mathcal{D}(\mathcal{A})$ constitué par les dérivations d'ordre 1 (resp. d'ordre quelconque) alors $\Delta^1(\mathcal{A})$ (resp. $\Delta(\mathcal{A})$), en tant qu'algèbre de Lie (resp. algèbre tout court) est engendrée librement par la famille de dérivations :

$$\{ R^m S_n^* R^{-m} \text{ et } R^m T_n^* R^{-m} \quad (m \in \mathbb{Z}; n \in \mathbb{N}^*) \}$$

Nous avons déjà vu que $\mathcal{D}(\mathcal{A})$ était engendrée, librement à la relation $RR^{-1}=1$ près, par la famille $\{ R, R^{-1}, S_n, T_n \quad (n \in \mathbb{N}^*) \}$. Or les

S_n, T_n s'expriment en fonction des S_n^*, T_n^* par les formules

$$(2a12) \quad 1 + \sum_{n \geq 1} x^n S_n = \exp \left(\sum_{n \geq 1} x^n S_n^* \right)$$

$$(2a13) \quad 1 + \sum_{n \geq 1} x^n T_n = \exp \left(\sum_{n \geq 1} x^n T_n^* \right)$$

qui inversent les relations (2a7) (2a8). on peut donc substituer

$\{R, R^{-1}, S_n^*, T_n^* (n \in \mathbb{N}^*)\}$ à $\{R, R^{-1}, S_n, T_n (n \in \mathbb{N}^*)\}$ et le premier point en résulte.

Soit maintenant $D \in \Delta^1(\mathcal{Q})$. D'après ce qui précède, D admet une expression unique comme combinaison linéaire de monômes du type :

$$D_{(m_j, n_j)} = R^{m_1} (S_{n_1}^* \text{ ou } T_{n_1}^*) R^{m_2} (S_{n_2}^* \text{ ou } T_{n_2}^*) R^{m_3} \dots (S_{n_n}^* \text{ ou } T_{n_n}^*) R^{m_{n+1}} \quad (m_j \in \mathbb{Z}, n_j \in \mathbb{N}^*)$$

Or, en explicitant $\sigma(D_{(m_j, n_j)})$ et en raisonnant par récurrence sur l'entier $\sum n_j + \sum |m_j|$, on montre qu'une combinaison linéaire de $D_{(m_j, n_j)}$ ne peut être une dérivation que si, pour chaque terme, on a $m_1 + \dots + m_{n+1} = 0$. Inversement, lorsque les sommes $\sum m_j$ sont nulles, chaque monôme entrant dans l'expression de D peut s'écrire :

$$D_{(m_j, n_j)} = (R^{m_1} (S_{n_1}^* \text{ ou } T_{n_1}^*) R^{-m_1}) (R^{m_2} (S_{n_2}^* \text{ ou } T_{n_2}^*) R^{-m_2}) \dots (R^{m_n} (S_{n_n}^* \text{ ou } T_{n_n}^*) R^{-m_n})$$

Ceci montre que $\Delta^1(\mathcal{Q})$ est contenu dans l'algèbre $\mathcal{D}$ engendré par la famille $\{R^m S_n^* R^{-m} \text{ et } R^m T_n^* R^{-m} (m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}^*)\}$. Mais les S_n^*, T_n^* sont des dérivations et R est un automorphisme. Par suite les $R^m S_n^* R^{-m}$ et $R^m T_n^* R^{-m}$ sont des dérivations (d'ordre 1) et $\mathcal{D}$ est une algèbre

de dérivations (d'ordre quelconque). Donc $\mathcal{D}$ n'est autre que l'algèbre enveloppante de l'algèbre $\Delta^1(\mathcal{Q})$, c'est-à-dire $\Delta(\mathcal{Q})$, et ceci établit le deuxième point de la proposition 2a3.

On notera bien que l'inclusion $\Delta(\mathcal{N}) \subset \mathbb{D}(\mathcal{N})$ est stricte. Par exemple $R \notin \Delta(\mathcal{N})$. Les éléments de $\Delta(\mathcal{N})$, c'est-à-dire les dérivations d'ordre quelconque, ne sont pas immédiatement reconnaissables sous leur expression canonique, lorsqu'ils sont donnés comme combinaisons linéaires d'opérateurs $(1-R)\Gamma$ où $\Gamma \in \mathbb{T}$. De fait, le moyen le plus simple pour les reconnaître est de les exprimer comme combinaisons linéaires de monômes $D_{(m_j, n_j)}$, puis de vérifier $\sum m_j = 0$ pour chaque monôme.

Remarquons aussi, pour finir, que les éléments de $\mathbb{C}[\mathbb{T}]$ qui, opérant sur $A_{\text{bon}}(\mathcal{N})$, y donnent lieu à une "relation de Leibniz", appartiennent tous à $\mathbb{D}(\mathcal{N})$, ce qui justifie après coup l'introduction de cet espace.

Quant à l'algèbre $A_{\text{bon}}(\mathcal{N})$, étudiée dans cette section, elle n'a d'intérêt que comme auxiliaire. Grâce à elle, nous allons pouvoir introduire les véritables objets de la présente étude, à savoir les algèbres de résurgence $A(\mathcal{N})$ et $\bar{A}(\mathcal{N})$.

Section 2b : les algèbres $A(\mathcal{N})$ et $\bar{A}(\mathcal{N})$ et la notion de fonction résurgente.

Soit comme précédemment :

$$\omega_* \in \mathbb{C}^* , \mathcal{N} = \omega_* \mathbb{Z} , \mathbb{C}_\infty = \widetilde{\mathbb{C} \div \{0\}} , \mathcal{R} = \widetilde{\mathbb{C} \div \mathcal{N}}$$

Désignons par $\mathcal{N}_\infty$ la partie de $\mathbb{C}_\infty$ située au-dessus de $\mathcal{N}^* = \mathcal{N} \div \{0\}$. On peut considérer $\mathcal{R}$ comme surface de Riemann au-dessus de $\mathbb{C}_\infty$ (i.e. $\mathcal{R} = \widetilde{\mathbb{C} \div \mathcal{N}_\infty}$) en identifiant le point de ramification Q_0 de $\mathbb{C}_\infty$ et de $\mathcal{R}$.

Définition 2b1 :

$\alpha)$ Soit $\bar{A}(\Omega)$ la partie de l'algèbre $\bar{A}$ constituée par les couples $(\psi, \tilde{\Phi})$ dont le mineur se prolonge holomorphiquement à toute la surface $\mathcal{R}$.

$\beta)$ On munit $\bar{A}(\Omega)$ de la topologie la moins fine qui rende continu, d'une part, le plongement dans $\bar{A}$ et, d'autre part, la projection sur l'espace des mineurs (*).

Autrement dit, $(\psi_n, \tilde{\Phi}_n)$ converge vers $(\psi, \tilde{\Phi})$ dans $\bar{A}(\Omega)$ si ψ_n converge vers ψ uniformément sur tout compact de $\mathcal{R}$ et si il existe des $\tilde{\Psi}_n \in \tilde{\Phi}_n$ qui convergent vers $\tilde{\Psi} \in \tilde{\Phi}$ uniformément sur tout compact d'un certain voisinage fixe de Q_0 .

Proposition 2b1 :

$\alpha)$ $\bar{A}(\Omega)$ est fermé pour le produit de convolution induit par $\bar{A}$ et c'est une algèbre topologique

$\beta)$ Si, pour tout $\Gamma \in \Gamma$ et tout $(\psi, \tilde{\Phi}) \in \bar{A}(\Omega)$, on pose

$$(1-R)\Gamma (\psi, \tilde{\Phi}) = ((1-R)\Gamma \psi, \tilde{\Gamma \psi})$$

cela induit, par linéarité, une action continue de l'algèbre $\mathcal{D}(\Omega)$ dans l'algèbre $\bar{A}(\Omega)$ et les relations de Leibniz restent en vigueur :

$$D((\psi, \tilde{\Phi}) * (\psi, \tilde{\Psi})) = \sum_i D_i(\psi, \tilde{\Phi}) D'_i(\psi, \tilde{\Psi}) \quad \text{si} \quad \sigma(D) = \sum_i D_i \otimes D'_i$$

Démonstration : $\tilde{\Gamma \psi}$ est bien une classe antécédente de $(1-R)\Gamma \psi$ et par suite la définition proposée de l'action de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans $\bar{A}(\Omega)$ a un sens.

On vérifie aussitôt que cette action est séquentiellement continue, donc continue. La fermeture de $\bar{A}(\Omega)$ par rapport à la convolution $*$ induite par $\bar{A}$,

(*) Ce dernier étant bien sûr l'espace de toutes les fonctions holomorphes sur $\mathcal{R}$, avec la topologie de la convergence uniforme sur tout compact de $\mathcal{R}$.

de même que la validité des relations de Leibniz, résulte d'un argument de densité. En effet, tout élément φ de $A_{\text{loc}}(\Omega)$, considéré comme élément de $\mathcal{A}$, possède, d'après le premier chapitre, une image $(\varphi, \pi(\varphi))$ dans $\bar{\mathcal{A}}$ et cette image appartient manifestement à $\bar{A}(\Omega)$. Ce plongement $\varphi \rightarrow (\varphi, \pi(\varphi))$ de $A_{\text{loc}}(\Omega)$ dans $\bar{A}(\Omega)$ est dense : on peut le voir en appliquant convenablement Stone-Weierstrass aux mineurs et aux antécédents.

Comme $A_{\text{loc}}(\Omega)$ est fermée pour la convolution $*$ et que celle-ci est bicontinue, $\bar{A}(\Omega)$ est également fermée pour $*$. Les formules de Leibniz se transportent elles-aussi par densité, d'où la proposition 2b1.

Nous allons maintenant démontrer trois lemmes qui permettront de donner de l'espace $\bar{A}(\Omega)$ et de sa topologie une définition beaucoup plus simple que celle indiquée ci-dessus.

Commençons par montrer que toute fonction φ définie holomorphe sur $\mathcal{R}$ possède un antécédent global :

Lemma 2b1 :

Pour toute φ définie holomorphe sur $\mathcal{R}$ l'équation

$$(2b1) \quad (1-R) \Phi = \varphi$$

possède toujours au moins une solution Φ définie holomorphe sur $\mathcal{R}$.

Soit une telle φ et soit $S\varphi = \varphi \circ S^{-1}$. D'après le lemme 1a6 on peut construire, au voisinage de Q_0 , deux antécédents locaux de φ et $S\varphi$, que nous noterons respectivement $\tilde{\Phi}$ et $\tilde{\Phi}_s$. Introduisons maintenant les trois éléments suivants de l'algèbre $\bar{A}(\Omega)$:

$$(\varphi, \tilde{\Phi}) \quad ; \quad (S\varphi, \tilde{\Phi}_s) \quad ; \quad U = \left(\frac{1}{2\pi i(z-\omega_*)}, \frac{\log z}{(2\pi i)^2(z-\omega_*)} \right)$$

ainsi que leurs produits de convolution :

$$(2b2) \quad (\psi, \tilde{\psi}) = U * (\varphi, \tilde{\Phi})$$

$$(2b3) \quad (\psi_s, \tilde{\psi}_s) = U * (S\varphi, \tilde{\Phi}_s)$$

et calculons l'expression $(1-R)S(\psi, \tilde{\psi}) - (1-R)(\psi_s, \tilde{\psi}_s)$

D'une part, comme l'opérateur $(1-R)S = S_1$ est une dérivation de l'algèbre $\bar{A}(\Omega)$ et comme $(1-R)S U$, qui vaut $(0, \frac{1}{2\pi i \tau})$, n'est autre que l'unité de cette même algèbre, il vient :

$$(2b4) \quad \begin{aligned} (1-R)S(\psi, \tilde{\psi}) &= ((1-R)S U) * (\varphi, \tilde{\Phi}) + U * ((1-R)S(\varphi, \tilde{\Phi})) \\ &= (\varphi, \tilde{\Phi}) + U * ((1-R)S(\varphi, \tilde{\Phi})) \end{aligned}$$

D'autre part, comme l'opérateur R est un automorphisme de l'algèbre $\bar{A}(\Omega)$ et comme $R U = U$, il vient

$$(2b5) \quad \begin{aligned} (1-R)(\psi_s, \tilde{\psi}_s) &= U * (S\varphi, \tilde{\Phi}_s) - (R U) * (R S\varphi, R \tilde{\Phi}_s) \\ &= U * (S\varphi, \tilde{\Phi}_s) - U * (R S\varphi, R \tilde{\Phi}_s) \\ &= U * ((1-R)S\varphi, \widetilde{(1-R)\tilde{\Phi}_s}) \\ &= U * ((1-R)S\varphi, \widetilde{S\varphi}) \\ &= U * ((1-R)S(\varphi, \tilde{\Phi})) \end{aligned}$$

En retranchant (2b5) de (2b4) il vient finalement :

$$(2b6) \quad (1-R)S(\psi, \tilde{\psi}) - (1-R)(\psi_s, \tilde{\psi}_s) = (\varphi, \tilde{\Phi})$$

ce qui implique

$$(2b7) \quad (1-R)(S\varphi - \psi_s) = \varphi$$

$$(2b8) \quad \widetilde{(S\varphi - \psi_s)} = \tilde{\Phi}$$

On voit donc que la fonction $\Theta = S\psi - \psi_S$, qui, comme différence de deux mineurs, est définie holomorphe sur tout $\mathcal{R}$, peut être prise comme antécédent global de φ et ceci prouve le lemme 2b1.

Lemme 2b2 :

Tout élément $(\varphi, \tilde{\Phi})$ de l'algèbre $\bar{A}(\Omega)$ peut s'écrire sous la forme $(\varphi, \tilde{\Theta})$ où $\tilde{\Theta}$ est définie holomorphe sur $\mathcal{R}$ toute entière.

Cela résulte de la relation (2b8) qui montre que la classe $\tilde{\Theta}$ est égale à la classe $\tilde{\Phi}$ et indépendante du choix de la classe $\tilde{\psi}_S$.

Lemme 2b3 :

Toute suite $(\varphi_n, \tilde{\Phi}_n)$ qui converge dans $\bar{A}(\Omega)$ vers une limite $(\varphi, \tilde{\Phi})$, peut s'écrire sous la forme $(\varphi_n, \tilde{\Theta}_n)$ où les $\tilde{\Theta}_n$ sont définis holomorphes sur tout $\mathcal{R}$ et y convergent uniformément sur tout compact.

Par définition de la convergence dans $\bar{A}(\Omega)$, il existe des antécédents locaux des φ_n qui convergent au voisinage de Q_0 . Par le lemme 2b2, il existe des antécédents globaux de φ_n . Ce que le lemme 2b3 affirme, c'est l'existence d'antécédents globaux qui convergent globalement.

Puisque les $S\varphi_n$ convergent sur tout compact de $\mathcal{R}$, on peut trouver des $\tilde{\Phi}_{n,S}$, antécédents locaux des $S\varphi_n$, qui convergent uniformément sur tout compact d'un certain voisinage fixe de Q_0 : pour cela, il suffit de reprendre la construction utilisée pour prouver le lemme 1a6 en choisissant F de telle sorte que $G(M) \varphi_n(M)$ soit uniformément intégrable en Q_0 le long de l'axe $Q_0 P_1$.

On a ainsi deux suites $(\varphi_n, \tilde{\Phi}_n)$ et $(S\varphi_n, \tilde{\Phi}_{n,S})$ qui convergent dans $\bar{A}(\Omega)$. On peut les convoler avec U (cf. (2b2) et (2b3)) et on

obtient, en raisonnant comme dans la démonstration du lemme 2b1, une suite

$$\begin{aligned} \Theta_n &= S\Psi_n - \Psi_{n,S} \text{ convergeant sur tout compact de } \mathcal{R} \text{ et telle que} \\ \tilde{\Theta}_n &= \tilde{\Phi}_n \text{ et } (I-R)\Theta_n = \Psi_n. \text{ Ceci prouve le lemme 2b3.} \end{aligned}$$

En rapprochant les trois lemmes ci-dessus on aboutit à la

Proposition 2b2 :

$\alpha)$ Comme espace vectoriel topologique, $\bar{A}(\mathcal{N})$ est isomorphe au quotient de l'espace $A_{gen}(\mathcal{N})$ de toutes les fonctions holomorphes sur $\mathcal{R}$, muni de la topologie de la convergence uniforme sur tout compact, par le sous-espace fermé $A_{neg}(\mathcal{N})$, formé des fonctions régulières en Q_0 (*) .

$\beta)$ Comme algèbre, $\bar{A}(\mathcal{N})$ est isomorphe à ce même quotient $A_{gen}(\mathcal{N}) / A_{neg}(\mathcal{N})$ muni de la convolution induite par la loi $\otimes$ du quotient $\mathcal{A}_{gen} / \mathcal{A}_{neg}$ (**)

En pratique, on représentera les éléments de $\bar{A}(\mathcal{N})$ par des paires $(\varphi, \tilde{\Phi})$ où mineur et antécédent sont définis holomorphes sur $\mathcal{R}$, et on traduira la convergence d'une suite par la convergence, uniforme sur tout compact, d'antécédents bien choisis.

Introduisons maintenant l'algèbre $A(\mathcal{N})$.

Définition 2b2 :

Soit $A(\mathcal{N})$ la partie de $\bar{A}(\mathcal{N}) \subset \bar{\mathcal{A}}$ formée des $(\varphi, \tilde{\Phi})$ qui appartiennent à $\mathcal{A}$ et tels que $(I-R)\Gamma(\varphi, \tilde{\Phi})$ appartienne à $\mathcal{A}$ pour tout $\Gamma \in \Pi$.

Cela a un sens, car $\mathcal{A}$ s'identifie à un sous-espace de $\bar{\mathcal{A}}$ par le plongement $\varphi \rightarrow (\varphi, \pi(\varphi))$ (***)

(*) C'est-à-dire de la forme $\tilde{\Phi}(p) = \sum_{n \geq 0} a_n \tilde{z}^n (z=p)$ au voisinage de Q_0 .

(**) cf. section 1b.

(***) cf. section 1c.

Proposition 2b3 :

$\mathcal{A}(\mathcal{N})$ est une sous-algèbre dense de $\overline{\mathcal{A}}(\mathcal{N})$.

La densité est immédiate. La fermeture de $\mathcal{A}(\mathcal{N})$ pour le produit de convolution résulte des formules de Leibniz. D'après la définition 2b2 en effet, un élément $U = (\varphi, \tilde{\varphi})$ de $\overline{\mathcal{A}}(\mathcal{N})$ est dans $\mathcal{A}(\mathcal{N})$ si et seulement si $DU \in \mathcal{A}$ pour tout $D \in \mathcal{D}(\mathcal{N})$. Soient alors $U_1, U_2 \in \mathcal{A}(\mathcal{N})$. Si $\sigma(D) = \sum_i D_i \otimes D'_i$ on a :

$$D(U_1 * U_2) = \sum_i (D_i U_1) * (D'_i U_2)$$

Mais les $D_i U_1$ et $D'_i U_2$ appartiennent à $\mathcal{A}$, donc aussi leurs produits, donc $D(U_1 * U_2)$ lui-même, et comme ceci vaut pour tout D , c'est que $U_1 * U_2 \in \mathcal{A}(\mathcal{N})$.

Puisque les éléments de $\mathcal{A}(\mathcal{N})$, au même titre que ceux de $\mathcal{A}$, sont, au Dirac près, déterminés par leurs mineurs, nous les noterons en pratique non pas $(\varphi, \tilde{\varphi})$ mais $\alpha \delta + \varphi$. Ceci permet de donner de $\mathcal{A}(\mathcal{N})$ et de l'action de $\mathcal{D}(\mathcal{N})$ dans $\mathcal{A}(\mathcal{N})$, une description plus concrète :

Définition 2b3 (équivalente à la Définition 2b2) :

L'algèbre $\mathcal{A}(\mathcal{N})$ est constituée par les sommes $\alpha \delta + \varphi$

- où α est un scalaire complexe
- où δ est l'unité de l'algèbre (Dirac de masse 1 en Q_0)
- où φ est une fonction holomorphe sur $\mathbb{R}$ au comportement assez régulier à la frontière $\partial^0 \mathbb{R}$.

Plus précisément, les éléments de $\mathcal{A}(\mathcal{N})$ sont :

- au voisinage de Q_0 , somme d'un Dirac en Q_0 et d'une fonction φ intégrable en Q_0 .

- au voisinage de tout point $Q \in \partial^{\circ} \mathcal{R} - \{Q_0\}$, somme d'un pôle simple $\frac{\alpha_Q}{2\pi i (z-\omega)}$ ($z=\dot{P}, \omega=\dot{Q}$) et d'une fonction φ_Q qui est un $\sigma((z-\omega)^{-1})$ et dont les déterminations successives, au voisinage du point de ramification Q , ne diffèrent que par des fonctions intégrables en Q .

Le scalaire $\alpha_Q/2\pi i$ est dit résidu de $\alpha\delta + \varphi$ au point Q . Enfin, l'action de $\mathbb{D}(\mathcal{R})$ est donnée par

$$\begin{aligned} R^n (\alpha\delta + \varphi) &= \alpha\delta + \varphi \circ R^{-n} & (n \in \mathbb{Z}) \\ (1-R)\Gamma (\alpha\delta + \varphi) &= \alpha_Q\delta + \varphi \circ \Gamma^{-1} - \varphi \circ \Gamma^{-1} \circ R^{-1} & (\Gamma \in \Gamma, \Gamma \neq R^n) \end{aligned}$$

où $\alpha_Q/2\pi i$ est le résidu de $\alpha\delta + \varphi$ au point $Q = \Gamma^{-1}Q_0 \neq Q_0$.

Regardons maintenant de plus près l'algèbre $\mathbb{D}(\mathcal{R})$. Soit $D = \gamma_1 1_{\Gamma} + \sum_{\Gamma \in \Gamma} \gamma_{\Gamma} (1-R)\Gamma$ l'opérateur générique de $\mathbb{D}(\mathcal{R})$. On appelle support de D ($\text{supp } D$) la partie de $\partial^{\circ} \mathcal{R}$ égale à $\bigcup_{\Gamma \neq 0} \Gamma^{-1}Q_0$. Pour chaque φ de $\mathcal{A}(\mathcal{R})$, le comportement de $D\varphi$ au voisinage de Q_0 ne dépend que du comportement de φ au voisinage de $\text{supp } D$. Plus précisément, il ne dépend que des singularités de φ au voisinage de $\text{supp } D$, car $D\varphi$ ne change pas si on ajoute à φ une fonction ψ régulière en chaque point de $\text{supp } D$. Les opérateurs D apparaissent donc comme des "prises de singularités" et les relations de Leibniz traduisent la manière dont se "composent" les singularités. Quant aux fonctions de $\mathcal{A}(\mathcal{R})$, on les qualifiera de résurgentes, vu qu'elles "resurgissent" en quelque sorte en leurs points singuliers : elles y fournissent de nouveaux éléments de $\mathcal{A}(\mathcal{R})$.

En fait, ce terme de résurgente s'applique plus proprement encore à celles des fonctions φ de $\overline{\mathcal{A}}(\mathcal{R})$ qui interviennent dans les applications et qui toutes se trouvent vérifier des équations de résurgence : ceci veut dire que pour chaque D , il existe une relation simple rattachant $D\varphi$ soit à φ elle-même, soit

à d'autres $D_\eta \varphi$. On trouvera de nombreux exemples de cette forme stricte de résurgence aux chapitres 9 et 13.

Par extension, l'algèbre $\mathcal{A}(\mathcal{I})$ toute entière, ainsi que sa complétée $\bar{\mathcal{A}}(\mathcal{I})$ seront qualifiées d'algèbres de résurgence.

Introduisons maintenant une base commode dans l'algèbre $\mathcal{D}(\mathcal{I})$. Chacun des opérateurs S_n et T_n définis plus haut a un support ponctuel, à savoir $\{S^{-n}Q_0\}$ et $\{T^{-n}Q_0\}$. Ce n'est plus le cas des opérateurs S_n^* et T_n^* mais on s'assure, à partir des formules (2a10) (2a11), que chaque ensemble $\text{Supp } S_n^*$ ou $\text{Supp } T_n^*$ est entièrement situé au dessus d'un même point de la surface $\mathcal{C}_\infty$ (intermédiaire entre $\mathcal{R}$ et $\mathcal{C}$) et, plus précisément, au dessus d'un même point de l'ensemble $\mathcal{I}_\infty \subset \mathcal{C}_\infty$. Il en va de même des opérateurs $R^m S_n R^{-m}$ et $R^m T_n R^{-m}$ (resp. $R^m S_n^* R^{-m}$ et $R^m T_n^* R^{-m}$).

Inversement, pour chaque $\eta \in \mathcal{I}_\infty$, on vérifie qu'il existe dans la famille $\{R^m S_n R^{-m} \text{ et } R^m T_n R^{-m} \ (m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{Z}^*)\}$ exactement deux opérateurs ayant leur support au dessus de η . L'un d'eux a son paramètre n positif et nous le noterons Δ_η^+ ; l'autre a son paramètre n négatif et nous le noterons Δ_η^- .

De même, il existe dans la famille de dérivations $\{R^m S_n^* R^{-m} \text{ et } R^m T_n^* R^{-m} \ (m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}^*)\}$ une dérivation et une seule ayant son support au dessus de η . Nous la noterons Δ_η .

Nous avons ainsi trois applications $\eta \rightarrow \Delta_\eta^+, \Delta_\eta^-, \Delta_\eta$ de $\mathcal{I}_\infty$ dans $\mathcal{D}(\mathcal{I})$ et il est utile de les étendre à $\mathcal{I}_\infty \cup \{0\}$ en posant $\Delta_0^+ = \Delta_0^- = 1$ et $\Delta_0 = 0$.

Un opérateur D étant défini dès qu'on définit $D\varphi$ sur un arc de $\mathcal{R}$, la proposition suivante donne une caractérisation commode des opérateurs $\Delta_\eta^+, \Delta_\eta^-, \Delta_\eta$.

Proposition 2b4 :

Soit η un point de $\mathcal{N}_\infty$ et j sa projection sur $\mathcal{N}$. Soit I le segment $]Q_0, \eta[$ de $\mathcal{C}_\infty$ et $\dot{I} =]0, j[$ sa projection sur $\mathcal{C}$. Alors, pour toute $\varphi \in \mathcal{A}(\mathcal{N})$ et pour tout point $P \in \mathcal{R}$ voisin de Q_0 et situé au dessus de I , on a :

$$\Delta_+^+ \varphi(P) = \varphi(P_+) - \varphi(P'_+)$$

$$\Delta_-^+ \varphi(P) = \varphi(P_-) - \varphi(P'_-)$$

$$\Delta_j \varphi(P) = \sum_j \gamma_j (\varphi(P_j) - \varphi(P'_j)) \quad (\text{somme finie})$$

où les points auxiliaire P_+, P'_+, P_j, P'_j sont déterminés par le fait qu'ils sont tous au dessus du point $\dot{P} + j$ de $\mathcal{C}$ et qu'ils peuvent être joints à P par des chemins qui, en projection sur $\mathcal{C} \div \mathcal{N}$, longent le segment $\dot{I}$ sans aucun retour en arrière et qui en outre

(i) dans le cas de P_+ et P'_+ , contournent dans le sens positif tous les points de $\mathcal{N} \cap \dot{I}$

(ii) dans le cas de P_- et P'_- , contournent dans le sens négatif tous les points de $\mathcal{N} \cap \dot{I}$

(iii) dans le cas des P_j et P'_j , contournent dans un sens quelconque les points de $\mathcal{N} \cap \dot{I}$ et sont affectés de coefficients $\gamma_j = \frac{p! q!}{(p+q+1)!}$ où p (resp. q) est le nombre de points contournés dans le sens positif (négatif).

Si $\mathcal{N} \cap \dot{I}$ contient n point (i.e. si $|\dot{\eta}/\omega_*| = \pm(n+1)$), l'indice j prend 2^n valeurs et on vérifie que $\sum \gamma_j = 1$.

Les différents points auxiliaires sont figurés ci-dessous dans le cas $n = 3$.

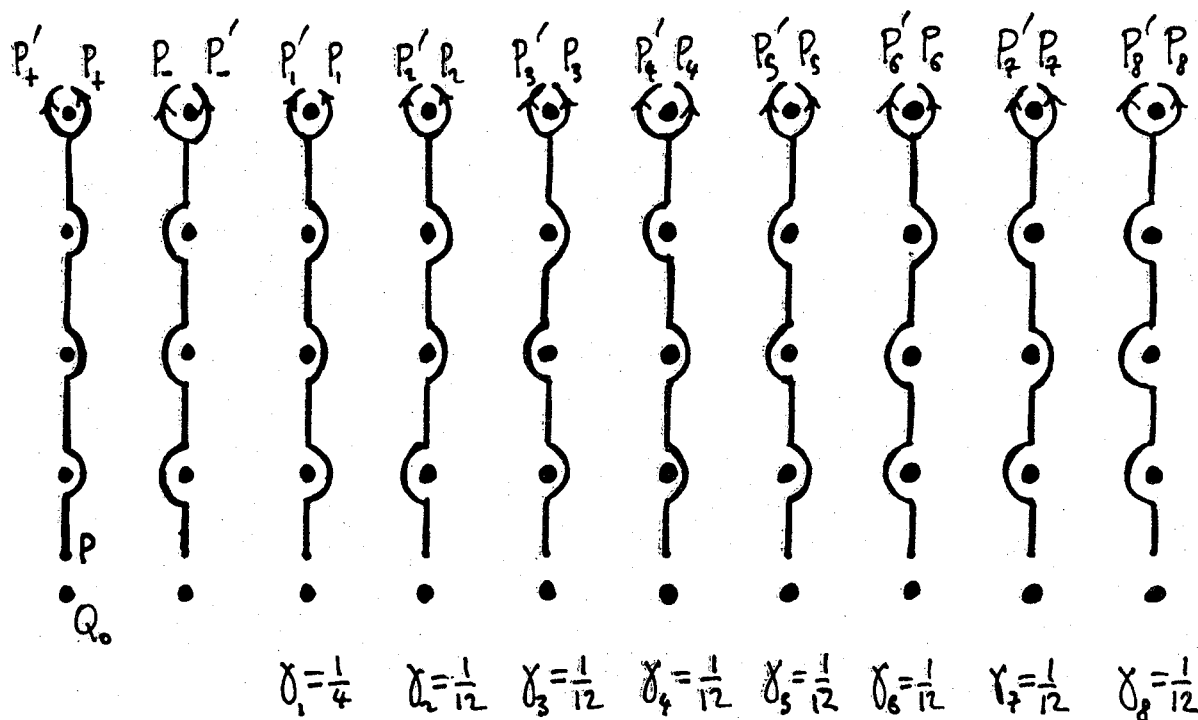


Figure 2810.

Introduisons maintenant sur les algèbres $A(\mathcal{N})$ et $\bar{A}(\mathcal{N})$ un opérateur ∂ :

$$\partial : \quad \varphi \rightarrow -\tau \varphi \quad ; \quad (\varphi, \tilde{\varphi}) \rightarrow (-\tau \varphi, -\tau \tilde{\varphi}) \quad \text{avec} \quad \tau = \dot{P}$$

En se reportant à la définition de la convolution de $A(\mathcal{N})$ et $\bar{A}(\mathcal{N})$, on vérifie que ∂ est une dérivation. Comme la transformation de Laplace, lorsqu'elle est définie (cf. section 3d), transforme ∂ en la dérivation usuelle $\partial = \frac{\partial}{\partial z}$, on appellera ∂ dérivation naturelle, par opposition aux Δ_η et aux autres dérivations de $\mathcal{D}(\mathcal{N})$, qu'on appellera dérivations étrangères. En remarquant que $\text{Supp } \Delta_\eta$ est au dessus du point η de $\mathbb{C}_\infty$ (et donc au dessus du point $\dot{\eta}$ de $\mathbb{C}$) et que $\mathcal{D}\varphi$ fait intervenir uniquement les singularités de φ aux points de $\text{Supp } \Delta_\eta$, on vérifie que le crochet de Lie $[\partial, \Delta_\eta]$ vaut $\dot{\eta} \Delta_\eta$.

Proposition 2b5 :

$\alpha)$ On a les relations de Leibniz :

$$(2b9) \quad \sigma(\Delta_{\eta}^+) = \sum'_{\dot{\eta}_1 + \dot{\eta}_2 = \dot{\eta}} \Delta_{\eta_1}^+ \otimes \Delta_{\eta_2}^+ \quad (*)$$

$$(2b10) \quad \sigma(\Delta_{\eta}^-) = \sum'_{\dot{\eta}_1 + \dot{\eta}_2 = \dot{\eta}} \Delta_{\eta_1}^- \otimes \Delta_{\eta_2}^- \quad (*)$$

$$(2b11) \quad \sigma(\Delta_{\eta}) = 1 \otimes \Delta_{\eta} + \Delta_{\eta} \otimes 1$$

$\beta)$ Les dérivations étrangères Δ_{η} ne sont liées entre elles par aucune relation du type $[\Delta_{\eta_i}, \Delta_{\eta_j}] = \sum \gamma_{ij}^k \Delta_{\eta_k}$, mais elles sont liées avec la dérivation naturelle ∂ (multiplication par $-z$) par les relations :

$$(2b12) \quad [\partial, \Delta_{\eta}] = \dot{\eta} \Delta_{\eta}$$

$\gamma)$ Tout opérateur de $\mathcal{D}(\mathcal{R})$ s'écrit d'une manière unique comme somme d'un scalaire et d'une combinaison linéaire de monômes $R^m \Delta_{\eta_n} \Delta_{\eta_{n-1}} \dots \Delta_{\eta_1}$ où $m \in \mathbb{Z}$ et $\eta_j \in \mathcal{R}_{\infty}$.

$\delta)$ L'algèbre $\mathcal{A}(\mathcal{R})$ (resp. l'algèbre de Lie $\mathcal{A}^1(\mathcal{R})$) constituée par les dérivations étrangères de tout ordre (resp. d'ordre 1) est engendrée librement par les dérivations Δ_{η} .

Essentiellement, les propositions 2b4 et 2b5 transposent aux $\Delta_{\eta}^+, \Delta_{\eta}^-, \Delta_{\eta}$ les résultats précédemment établis pour les S_n, T_n, S_n^*, T_n^* . Les vérifications de détail sont laissées au lecteur.

Section 2c : Les algèbres $\mathcal{A}(n, \mathcal{R})$ et $\bar{\mathcal{A}}(n, \mathcal{R})$.

Introduisons maintenant quelques algèbres de résurgence qui nous serviront beaucoup dans la suite :

(*) Cette somme est en fait finie car elle est limitée aux $\eta_1, \eta_2 \in [Q_0, \eta]$

Définition 2cl :

α) Pour tout p entier positif et pour $p = \infty$, on désigne par $\mathcal{A}(p, \mathcal{D})$ la plus grande sous-algèbre de $\mathcal{A}(\mathcal{D})$ qui soit contenue dans $\mathcal{H}(p)$ et qui soit stable pour l'action de $\mathcal{D}(\mathcal{D})$.

β) On définit de même $\overline{\mathcal{A}}(p, \mathcal{D})$ à partir de $\overline{\mathcal{A}}(\mathcal{D})$ et $\overline{\mathcal{H}}(p)$.

Pour $p < \infty$ (resp. $= \infty$) les algèbres $\mathcal{A}(p, \mathcal{D})$ et $\overline{\mathcal{A}}(p, \mathcal{D})$ sont chacune fermées (resp. denses) dans $\overline{\mathcal{A}}(\mathcal{D})$ et par conséquent la barre sur la seconde n'indique pas qu'elle est la complétée de la première.

Pour $p < \infty$, une fonction résurgente φ appartient à $\mathcal{A}(p, \mathcal{D})$ (resp. $\overline{\mathcal{A}}(p, \mathcal{D})$) si et seulement si, pour tout $\Gamma \in \Pi'$:

$$(1-R^p)\varphi = 0 \text{ et } (1-R^p)(1-R)\Gamma\varphi = 0$$

ou encore, en employant les fonctions résurgentes $I^\alpha \sim (I^\alpha, \tilde{I}^\alpha)$ introduites à la proposition 1cl, si et seulement si

- au voisinage de Q_0 :

$$\varphi(p) = \sum a_{m, Q_0} I^{-m}(z) \quad \text{avec } z = \dot{P} \text{ et } m \in p^{-1}\mathbb{N} \text{ (resp. } p^{-1}\mathbb{Z})$$

- au voisinage de chaque point $Q \in \partial^0 \mathcal{R} - \{Q_0\}$:

$$\varphi(p) = \sum a_{m, Q} I^{-m}(z-\omega) \quad \text{avec } z = \dot{P}, \omega = \dot{Q} \text{ et } m \in p^{-1}\mathbb{N} \text{ (resp. } p^{-1}\mathbb{Z})$$

Le cas $p = 1$ est particulièrement simple. En effet, les éléments

$$\varphi \in \mathcal{A}(1, \mathcal{D}) \quad (\text{resp. } \overline{\mathcal{A}}(1, \mathcal{D})) \text{ sont}$$

- au voisinage de Q_0 :

$$\text{de la forme } \varphi(p) = \alpha_{Q_0} \delta(z) + \varphi_{Q_0}(z)$$

$$(\text{resp. } \varphi(p) = \sum_{m \geq 0} \alpha_{m, Q_0} \frac{(-1)^m}{m!} \delta^{(m)}(z) + \varphi_{Q_0}(z))$$

- au voisinage de chaque point $Q \in \partial^0 \mathcal{R} - \{Q_0\}$:

de la forme $\varphi(P) = \psi_Q(z-\omega) + \frac{\alpha_Q}{2\pi i(z-\omega)} + \frac{1}{2\pi i} \varphi_Q(z-\omega) \log(z-\omega)$
 (resp. $\varphi(P) = \psi_Q(z-\omega) + \sum_{m \geq 0} \frac{1}{2\pi i} \frac{\alpha_{m,Q}}{(z-\omega)^{m+1}} + \frac{1}{2\pi i} \varphi_Q(z-\omega) \log(z-\omega)$)
 où φ_{Q_0} (resp. φ_Q et ψ_Q) sont des fonctions holomorphes sur $\mathbb{R}$ et régulières au point Q_0 (resp. Q) et où les suites $|\alpha_{m,Q_0}|^{1/m}$ et $|\alpha_{m,Q}|^{1/m}$ tendent vers 0 quand $m \rightarrow \infty$.

Quant à l'action de $\mathcal{D}(\mathcal{R})$ dans $\mathcal{A}(1, \mathcal{R})$ (resp. $\overline{\mathcal{A}}(1, \mathcal{R})$), elle est donnée par :

$$(1-R)\Gamma\varphi = \alpha_{0,Q}\delta + \varphi_Q \quad \text{avec} \quad Q = \Gamma^{-1}Q_0$$

$$\text{(resp. } (1-R)\Gamma\varphi = \sum_{m \geq 0} \alpha_{m,Q} \frac{(-1)^m}{m!} \delta^{(m)} + \varphi_Q \text{)}$$

Les bigèbres $\mathcal{D}(\mu, \mathcal{R})$ et $\Delta(\mu, \mathcal{R})$.

Pour $\mu < \infty$, les éléments φ de $\mathcal{A}(\mu, \mathcal{R})$ peuvent, au Dirac près, être considérés comme des fonctions holomorphes sur la surface de Riemann $\mathcal{R}_\mu$ obtenue à partir de $\mathcal{R}$ en identifiant le point courant P à $R^\mu P$. Par suite, si $\mathcal{C}_\mu$ désigne la surface de Riemann de $z^{1/\mu}$ et $\mathcal{R}_\mu$ le relevé de $\mathcal{R}^*$ sur $\mathcal{C}_\mu$, deux dérivations étrangères Δ_{η_1} et Δ_{η_2} ($\eta_1, \eta_2 \in \mathcal{R}_\infty$) auront la même action sur $\mathcal{A}(\mu, \mathcal{R})$ si et seulement si η_1 et η_2 sont situés au dessus d'un même point η de $\mathcal{R}_\mu$. D'où une injection, encore notée $\eta \rightarrow \Delta_\eta$, pour simplifier, de l'ensemble $\mathcal{R}_\mu$ dans l'algèbre de Lie des dérivations étrangères de $\mathcal{A}(\mu, \mathcal{R})$.

Plus généralement, on vérifie que l'ensemble $\mathcal{J}_\mu$ des opérateurs $D \in \mathcal{D}(\mathcal{R})$ qui annulent les éléments de $\mathcal{A}(\mu, \mathcal{R})$ est l'idéal bilatère de $\mathcal{D}(\mathcal{R})$ engendré par $(1-R^\mu)$ (*). On peut donc, lorsqu'on

(*) Bien noter que $\mathcal{J}_\mu$ n'est pas l'intersection de $\mathcal{D}(\mathcal{R})$ avec l'idéal bilatère engendré par $(1-R^\mu)$ dans $\mathbb{C}[\pi]$.

travaille dans l'algèbre $A(p, \mathcal{R})$, remplacer $D(\mathcal{R})$ par l'algèbre quotient $D(p, \mathcal{R}) = D(\mathcal{R}) / (1-R^p)$. De plus, on vérifie que si $D = \Delta \pmod{(1-R^p)}$ alors $\sigma(D)$ et $\sigma(\Delta)$ peuvent s'écrire respectivement $\sum D_i \otimes D'_i$ et $\sum \Delta_i \otimes \Delta'_i$ avec $D_i = \Delta_i$ et $D'_i = \Delta'_i \pmod{(1-R^p)}$. La loi σ passe donc au quotient et ceci fait de $D(p, \mathcal{R})$ une bigèbre d'opérateurs.

On appelle de même $\Delta(p, \mathcal{R})$ (resp. $\Delta^1(p, \mathcal{R})$) la partie de $D(p, \mathcal{R})$ constituée par les dérivations d'ordre quelconque (d'ordre 1).

En résumé, on peut énoncer :

Proposition 2c1 :

- $\alpha)$ La bigèbre $D(p, \mathcal{R})$ agissant sur $A(p, \mathcal{R})$ s'identifie au quotient $(\mathbb{C} \otimes (1-R)\mathbb{C}[\pi]) / (1-R^p)$ et tout élément de $D(p, \mathcal{R})$ s'écrit d'une manière unique comme combinaison linéaire de monômes du type
 $R^m \Delta_{\eta_n} \Delta_{\eta_{n-1}} \dots \Delta_{\eta_1}$ avec $m \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ et $\eta_j \in \mathcal{R}_p$.
- $\beta)$ L'algèbre $\Delta(p, \mathcal{R})$ (resp. l'algèbre de Lie $\Delta^1(p, \mathcal{R})$) constituée par les dérivations étrangères de tout ordre (resp. d'ordre 1) agissant sur $A(p, \mathcal{R})$ est librement engendrée par la famille des Δ_{η} , où η parcourt $\mathcal{R}_p$.
- $\gamma)$ L'inclusion $\Delta(p, \mathcal{R}) \subset D(p, \mathcal{R})$ est stricte pour $p > 1$ mais on a l'identité pour $p = 1$. De plus, dans ce cas, $\mathcal{R}_1$ s'identifie avec $\mathcal{R}^*$ et on a, pour l'algèbre $\Delta(1, \mathcal{R}) = D(1, \mathcal{R})$ le système de générateurs indépendants $\{\Delta_{\omega} (\omega \in \mathcal{R}^*)\}$ avec
si $\omega/\omega_x = n > 0$: $\Delta_{\omega} = (1-R)S \sum_{1+p+q=n} S^{p_1} T^{-q_1} \dots S^{p_m} T^{-q_m} \frac{p! q!}{n!}$
si $\omega/\omega_x = -n < 0$: $\Delta_{\omega} = (1-R)T \sum_{1+p+q=n} T^{p_1} (RT)^{q_1} \dots T^{p_m} (RT)^{q_m} \frac{p! q!}{n!}$

les sommes étant étendues aux mêmes p_i, q_i qu'en (2a10), (2a11).

Section 2d : L'exponentielle de l'algèbre $A(\mathcal{R})$.

Limitons-nous pour commencer aux éléments φ de $A(\mathcal{R})$ qui ne comportent pas de Dirac et montrons la convergence de la série

$$E\varphi = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n!} \varphi^{*n} \quad \text{avec} \quad \varphi^{*n} = \varphi * \varphi * \dots * \varphi \quad (n \text{ fois})$$

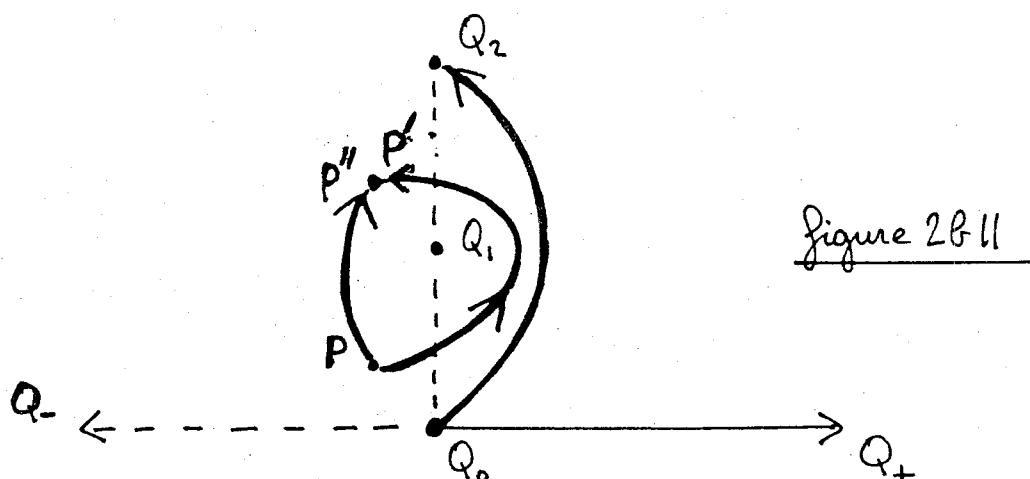
Pour ce faire, considérons successivement les différents demi-feuillets $\mathcal{R}(Q)$ de la surface $\mathcal{R}$ (ils sont définis au début de la section 2a). Les points de $\mathcal{R}(Q_+)$ ou de $\mathcal{R}(Q_-)$ ou plus généralement de $\mathcal{R}(R^m Q_{\pm})$ peuvent être joints à Q_0 par un segment rectiligne, et ce sont les seuls. Pour un tel point P , compte tenu de l'intégrabilité en Q_0 de φ , il vient :

$$(2d1) \quad \int_{Q_0}^P |\varphi^{*n}(M)| dM \leq \left(\int_{Q_0}^P |\varphi(M)| dM \right)^n$$

les intégrales étant prises le long du segment $Q_0 P$ et l'égalité n'ayant lieu que pour $\varphi \equiv 0$. Comme φ est par hypothèse uniformément intégrable en Q_0 , (2d1) entraîne la convergence uniforme de la série $E\varphi$ sur tout compact de $\mathcal{R}(R^m Q_{\pm})$ et, bien sûr, l'uniforme intégrabilité en Q_0 de sa somme, également notée $E\varphi$.

Considérons maintenant les demi-feuillets contigus à $\mathcal{R}(Q_+)$, c'est-à-dire la famille des demi-feuillets $\mathcal{R}(S^{-n} Q_-)$, dont chacun est séparé de $\mathcal{R}(Q_+)$ par le segment $]Q_n, Q_{n+1}[$ avec $Q_n = S^{-n} Q_0 \in \partial^0 \mathcal{R} \quad (n \in \mathbb{Z})$.

Soit P un point de $\mathcal{R}(Q_-)$ voisin du segment $]Q_0, Q_1[$ qui sépare $\mathcal{R}(Q_+)$ de $\mathcal{R}(Q_-)$ et soient $P' = S^{-1}P$, $P'' = S^{-1}R^{-1}P = TP$. Les points P et P'' sont dans $\mathcal{R}(Q_-)$. Le point P' est dans $\mathcal{R}(S^{-1}Q_-)$ et voisin du segment $]Q_1, Q_2[$ qui sépare $\mathcal{R}(Q_+)$ de $\mathcal{R}(S^{-1}Q_-)$.



Cela étant, en modifiant légèrement les chemins d'intégration dans (2d1), on voit que la fonction holomorphe $E\psi$ se prolonge en fait au voisinage des segments limitrophes de $R(Q_+)$. On peut donc prendre les valeurs de $E\psi$ aux points P, P', P'' et former l'expression

$$(E\psi)(P') - (E\psi)(P'') = ((S - RS)(E\psi))(P)$$

Or $S - RS = S_1$ est une dérivation de l'algèbre $A(\Omega)$ et la convergence uniforme de la série $E\psi$ permet de dériver celle-ci terme à terme. On peut donc écrire :

$$(2d2) \quad (E\psi)(P') - (E\psi)(P'') = (S_1\psi)(P) + ((S_1\psi) * (E\psi))(P)$$

Lorsque P s'éloigne de Q_0 pour parcourir $R(Q_-)$, P' reste dans $R(Q_-)$, donc $(E\psi)(P')$ demeure défini holomorphe. Le second membre de (2d2) lui-aussi demeure défini holomorphe, car c'est la somme de $S_1\psi$, élément de $A(\Omega)$, et du produit de $S_1\psi$ par $E\psi$, qui est défini holomorphe dans $R(Q_-)$ et intégrable en Q_0 . (d'où la possibilité de calculer $(S_1\psi) * (E\psi)$ en intégrant sur un chemin rectiligne). Finalement, par différence, $(E\psi)(P')$ demeure défini holomorphe en P' , et comme P'

parcourt $\mathcal{R}(S^{-1}Q_-)$ quand P parcourt $\mathcal{R}(Q_-)$, cela montre que $E\psi$ se prolonge analytiquement à $\mathcal{R}(S^{-1}Q_-)$.

En raisonnant sur les opérateurs $(1-R)S^n$ et en utilisant leurs relations de Leibniz, on démontre d'une manière analogue, par récurrence sur $|n|$, la prolongeabilité de $E\psi$ aux $\mathcal{R}(S^{-n}Q_-)$, c'est-à-dire à tous les demi-feuillets continus à $\mathcal{R}(Q_+)$. Puis on passe aux demi-feuillets continus aux $\mathcal{R}(S^{-n}Q_-)$ et aussi de suite, jusqu'à couvrir toute la surface $\mathcal{R}$.

A partir de là, on montre facilement, pour l'élément générique $\psi = \alpha\delta + \Psi$ de $\mathcal{A}(\mathcal{N})$, la convergence de la série exponentielle

$$\exp_* \psi = \delta + \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n!} \psi^{*n}$$

dont la somme est évidemment égale à $e^\alpha \delta + e^\alpha E\psi$.

Contrairement à la convolution $*$ de $\mathcal{A}(\mathcal{N})$, qui est continue par rapport aux deux facteurs et qui s'étend à $\bar{\mathcal{A}}(\mathcal{N})$, l'application exponentielle de $\mathcal{A}(\mathcal{N})$ n'est pas continue et ne s'étend pas à $\bar{\mathcal{A}}(\mathcal{N})$ tout entier. La raison tient en gros à ceci : pour tout $\psi \in \mathcal{A}(\mathcal{N})$, de classe antécédente canonique $\pi(\psi)$, on peut bien exprimer les valeurs de ψ^{*n} sur un compact $K_1 \subset \mathcal{R}$ par des intégrales ne faisant intervenir que les valeurs de ψ et d'un antécédent fixe $\bar{\psi} \in \pi(\psi)$ sur un compact K_n , mais à condition que K_n soit assez gros et s'approche suffisamment du point Q_0 . Plus précisément, pour tout $P \in K_1$, K_n doit contenir des points M tels que $|\dot{M}| \leq \frac{1}{n} |\dot{P}|$. A partir de là, on montre que, pour tout voisinage V de 0 dans l'algèbre $\mathcal{A}(\mathcal{N})$, pour tout point $P \in \mathcal{R}$ et pour tout entier m supérieur à une certaine valeur $n(P, V)$, le scalaire $\psi^{*m}(P)$ parcourt $\mathbb{C}$ lorsque ψ parcourt V . Ceci entraîne la discontinuité, non pas bien sûr des applications $\psi \rightarrow \psi^{*m}$, mais de l'application $\psi \rightarrow \exp_* \psi$.

En revanche, la restriction de l'exponentielle aux sous-algèbres

$A(\mu, \Omega)$ ($\mu < \infty$) est continue, car toute $\varphi \in A(\mu, \Omega)$ peut être majorée près de Q_0 dès qu'on connaît son maximum sur un compact K entourant p fois le point Q_0 .

En résumé, on peut énoncer :

Proposition 2d1 :

La série exponentielle est convergente dans l'algèbre $A(\Omega)$, mais l'application $\varphi \rightarrow \exp_* \varphi$ qu'elle définit n'est pas continue. Elle le devient toutefois si on se restreint aux sous-algèbres $A(\mu, \Omega)$ pour $\mu < \infty$.

Section 2e : La composition des fonctions résurgentes.

Nous allons dans cette section introduire sur les fonctions résurgentes une loi de composition, notée $\odot$ (rond gras) et qui jouera un rôle essentiel dans les applications. On prendra garde de ne pas la confondre avec la composition usuelle des applications, notée $\circ$ (rond maigre), ni avec la convolution $*$ (que certains appellent aussi "composition").

Conformément aux notations de la proposition 1c1, désignons par $I = I^1$ l'élément de $\bar{A}(\Omega)$ égal à $\delta' = (0, \widetilde{-\frac{1}{2\pi i z^2}})$. Soit $G(\Omega)$ la partie de $\bar{A}(\Omega)$ égale à la translatée de $\bar{A}(\Omega)$ par I . Soit enfin ∂ la dérivation naturelle (multiplication par $-z$) des fonctions résurgentes (*).

Proposition 2e1 (composition des fonctions résurgentes)

$\alpha)$ Pour toute paire f, g dans l'ensemble $G(\Omega) = I + A(\Omega)$, la série

(*) bien noter que I s'identifie à δ' , dérivée au sens des distributions, du Dirac δ . Mais avec la dérivation naturelle ∂ on a une relation exactement inverse, soit $\partial \delta' = \delta$, car $\delta' = (0, \widetilde{-\frac{1}{2\pi i z^2}})$ et $\delta = (0, \widetilde{\frac{1}{2\pi i z}})$

$$(2e1) \quad g \circ f = g + \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n!} (f - I)^{*n} * (\partial^n g)$$

converge dans $\bar{A}(\Omega)$, sa somme $g \circ f$ appartient à $G(\Omega)$ et est continue en g (mais pas en f).

$\beta)$ La loi interne $\circ$ munit $G(\Omega)$ d'une structure de semi-groupe. Pour chaque $\mu < \infty$, cette même loi $\circ$ munit l'ensemble $G(\mu, \Omega) = I + A(\Omega)$ d'une structure de groupe topologique.

$\gamma)$ Pour tout $\varphi \in A(\Omega)$ ou $\bar{A}(\Omega)$ et tout $f \in G(\Omega)$, la série

$$(2e2) \quad \varphi \circ f = \varphi + \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n!} (f - I)^{*n} * (\partial^n \varphi)$$

converge dans $A(\Omega)$ ou $\bar{A}(\Omega)$ et sa somme $\varphi \circ f$ est continue en φ (mais pas en f).

$\delta)$ Ceci définit une action

$$f : \varphi \longrightarrow \varphi \circ f$$

de $G(\Omega)$ dans les algèbres $A(\Omega)$ et $\bar{A}(\Omega)$ et une action parallèle de $G(\mu, \Omega)$ dans les algèbres $A(\mu, \Omega)$ et $\bar{A}(\mu, \Omega)$. En particulier :

$$(\varphi * \psi) \circ f = (\varphi \circ f) * (\psi \circ f)$$

On résume ceci en disant que $A(\Omega)$ et les $A(\mu, \Omega)$ sont des algèbres à composition.

Proposition 2e2 : (dérivation d'un produit de composition).

$\alpha)$ Si Δ est une dérivation étrangère de support entièrement situé au dessus du point $\omega \in \Omega$, on a :

$$(2e3) \quad \Delta(\varphi \circ f) = (\partial \varphi) \circ f * (\Delta f) + (\exp_{\omega} - \omega(f - I)) * (\Delta \varphi \circ f)$$

et cette identité vaut en particulier pour les dérivations canoniques Δ_j à condition de prendre $\omega = j$.

β) Enfin, l'action de la dérivation naturelle ∂ est celle à laquelle on s'attend :

$$(2e4) \quad \partial(\varphi \circ f) = (\partial f) * ((\partial \varphi) \circ f)$$

Comme la démonstration des deux propositions ci-dessus utilise des procédés déjà employés pour la plupart, nous nous bornons à indiquer son schéma.

1) Pour φ et $f-I$ éléments de $\mathcal{A}(\mathcal{L})$ et sans Diracs, on montre, par des intégrations sur des segments $Q_0 P$ rectilignes, la convergence uniforme de la série (2e2) sur tout compact de $\mathcal{R}(Q_+)$ et de $\mathcal{R}(Q_-)$ ainsi qu'au voisinage des segments qui délimitent ces deux demi-feuillets.

2) Au voisinage du segment $]Q_0, Q_1[$ séparant $\mathcal{R}(Q_+)$ de $\mathcal{R}(Q_-)$ on établit l'identité (2e3) avec $\Delta = S_1 = (1-S)R$ et $\omega = \omega_*$. Pour cela, on applique Δ terme à terme à la série (2e2) tout en utilisant $[\partial, \Delta] = \omega_* \Delta$ et plus généralement $\Delta \partial^n = (\partial - \omega_*)^n \Delta$.

3) En raisonnant comme dans la section précédente, on se sert de l'identité (2e3) avec $\Delta = S_1$ pour montrer la prolongeabilité de $\varphi \circ f$ au demi-feuillet $\mathcal{R}(S^{-1}Q_-)$.

4) En utilisant les opérateurs $(1-R)S^n$ et leurs relations de Leibniz, on prolonge de même $\varphi \circ f$ aux demi-feuillets $\mathcal{R}(S^{-n}Q_-)$ contigus à $\mathcal{R}(Q_+)$, puis aux demi-feuillets contigus aux $\mathcal{R}(S^{-n}Q_-)$, et ainsi de suite.

5) On montre que ces résultats valent encore lorsque φ appartient à $\overline{\mathcal{A}}(\mathcal{L})$ et lorsque $f-I$ contient un Dirac. En particulier :

$$(2e5) \quad \varphi \circ (I + \alpha \delta) = e^{-\alpha^2} \varphi$$

6) On établit la continuité en φ de $\varphi \circ f$

7) Prenant $\varphi = g$, on obtient la convergence de la série (2el) et l'appartenance de $g \circ f$ à $\mathcal{G}(\mathcal{N})$. La loi $\circ$ sur $\mathcal{G}(\mathcal{N})$ est donc interne, avec $\mathbf{I}$ pour élément neutre bilatéral. De plus, la composition $\circ$ est associative et distributive à gauche par rapport à la convolution $*$. Ces deux derniers points résultent de l'analogie formelle de (2el) avec un développement de Taylor ordinaire :

$$g(f(z)) = g(z) + \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n!} (f(z) - z)^n \frac{\partial^n}{\partial z^n} g(z)$$

(voir à ce sujet les chapitres 8 et 9)

8) En raisonnant comme dans la section précédente, on montre la continuité de la composition $\circ$ dans $\mathcal{G}(\mu, \mathcal{N})$ pour $\mu < \infty$.

9) Le seul point qui reste à démontrer est l'existence d'un inverse de composition pour tout $f \in \mathcal{G}(\mu, \mathcal{N})$. Soit un tel f et supposons pour commencer que $f - \mathbf{I}$ ne comporte pas de Dirac.

Alors $f - \mathbf{I}$ est une fonction holomorphe sur $\mathcal{R}$, de la forme $\sum_{n \geq 0} a_n z^{n-1}$ ($z = \dot{p}$, $n \in \mu^{-1} \mathbb{N}^*$) au voisinage de Q_0 . Par suite, sur tout segment rectiligne $\mathcal{J}$ issu du point Q_0 , la fonction $(f - \mathbf{I})(p)$ est majorable en valeur absolue par $c x^{\varepsilon-1} / \Gamma(\varepsilon)$ pour $\varepsilon = \mu^{-1}$, $x = |z| = |\dot{p}|$ et pour une constante c fonction de $\mathcal{J}$ (Γ désigne ici la fonction gamma classique). On en déduit que sur $\mathcal{J}$ la puissance de convolution $(f - \mathbf{I})^{*n}$ est majorée par $c^n x^{n\varepsilon-1} / \Gamma(n\varepsilon)$.

Cela étant, l'opérateur $F : \varphi \rightarrow \varphi \circ f$ s'écrit :

$$F = \mathbf{1} + \sum_{n \geq 1} M_n \quad \text{avec} \quad M_n : \varphi \rightarrow M_n \varphi = (f - \mathbf{I})^{*n} * \left(\frac{(\underline{z})^n}{n!} \varphi \right)$$

Vu la forme de l'opérateur M_n , on vérifie aisément que si φ est

sans Dirac et majorée par $x^{m-1}/\Gamma(m)$ ($m > 0$) sur $\mathcal{D}$, alors $M_m \varphi$ est sans Dirac et admet sur $\mathcal{D}$ la majoration :

$$(2e6) \quad |M_m \varphi| < c^n \cdot \frac{x^{n+\varepsilon n+m-1}}{\Gamma(n+\varepsilon n+m-1)} \cdot \frac{\Gamma(n+m)}{n! \Gamma(m)}$$

Or l'opérateur F a pour inverse formel

$$F^{-1} = 1 + \sum_{\{n_i \geq 1\}} (-1)^{n+1} M_{n_n} M_{n_{n-1}} \dots M_{n_1} M_{n_0}$$

Appliquons $F^{-1}-1$ à l'élément I , identité du groupe $G(p, \mathbb{R})$.
Puisque $\partial I = \delta$ et $\partial^n I = 0$ si $n > 1$, il vient $M_1 I = \delta - I$ et $M_n I = 0$ si $n > 1$. Par suite :

$$(2e7) \quad F^{-1} \cdot I - I = \sum_{\{n_i \geq 1\}} (-1)^{n+1} M_{n_n} M_{n_{n-1}} \dots M_{n_1} (\delta - I)$$

Les termes du second membre sont sans Dirac et compte tenu de (2e6) on vérifie que la série (2e7) admet sur $\mathcal{D}$ la majoration terme à terme :

$$(2e8) \quad |F^{-1} \cdot I - I| \leq \sum_{\{n_i \geq 1\}} c^{n_n + \dots + n_1 + 1} \frac{x^{n'_n + \dots + n'_1 + \varepsilon - 1}}{n_n! \dots n_1! \Gamma(\varepsilon)} A^{n_n, \dots, n_1}$$

$$\text{avec } n'_i = (1+\varepsilon)n_i \text{ et } A^{n_n, \dots, n_1} = \frac{\Gamma(n_n + n'_{n-1} + n'_{n-2} + \dots + \varepsilon)}{\Gamma(n'_n + n'_{n-1} + n'_{n-2} + \dots + \varepsilon)} \frac{\Gamma(n_{n-1} + n'_{n-2} + \dots + \varepsilon)}{\Gamma(n'_{n-1} + n'_{n-2} + \dots + \varepsilon)} \dots \frac{\Gamma(n_1 + \varepsilon)}{\Gamma(n'_1 + \varepsilon)}$$

Puisque chaque entier n peut s'obtenir exactement de 2^{n-1} manières comme somme ordonnée $\sum n_i$ avec $n_i \geq 1$, on tire de (2e8) :

$$(2e9) \quad |F^{-1} \cdot I - I| \leq \sum_{n=1}^{\infty} c^{n+1} \frac{x^{n+\varepsilon-1}}{\Gamma(\varepsilon)} A(n) 2^{n-1} = \frac{c x^{\varepsilon-1}}{2 \Gamma(\varepsilon)} \sum_{n=1}^{\infty} A(n) (c x^{1+\varepsilon})^n$$

avec $A(n) = \sup A^{n_n, \dots, n_1}$ pour $\sum n_i = n$.

Or, on vérifie que $\lim (A(n))^{1/n} = 0$ (en fait, à somme $\sum n_i$ constante, les coefficients $A^{n_n, \dots, n_1}$ croissent lorsque n croît et on trouve

$$(A(n))^{1/n} = O(n^{-\varepsilon})$$

Par suite, le membre de droite de (2e9) converge pour toutes les valeurs de $\varepsilon, \alpha, \Sigma$ et ceci assure la convergence de la série $F^{-1} \cdot I - I$ uniformément sur tout compact des demi-feuillets $\mathcal{R}(R^m Q_{\pm})$.

On passe de là à la surface $\mathcal{R}$ toute entière par un type de raisonnement déjà deux fois utilisé.

On obtient finalement une fonction résurgente $g = F^{-1} \cdot I$ qui appartient à $\mathcal{G}(\mu, \mathcal{N})$ et il est immédiat, par de simples considérations formelles, que $g \circ g = g \circ g = I$.

On a supposé au début que $g - I$ ne comportait pas de Dirac. Le cas où il en comporte on s'y ramène facilement grâce à la relation (2e5).

$\mathcal{G}(\mu, \mathcal{N})$ est donc un groupe.

Section 2f : Résumé du chapitre 2.

Ce chapitre étudie la convolution globale des fonctions holomorphes sur la surface de Riemann $\mathcal{R}$, recouvrement universel de $\mathbb{C} / \mathcal{N}$, où $\mathcal{N}$ est un sous-groupe discret de $\mathbb{C}$ (réseau à une ou deux dimensions).

On montre d'abord que si deux germes de $\mathcal{A}$ ou $\overline{\mathcal{A}}$ sont prolongeables holomorphiquement à $\mathcal{R}$ toute entière, leur produit de convolution l'est lui-aussi. On obtient ainsi deux algèbres de convolution, $\mathcal{A}(\mathcal{N})$ et $\overline{\mathcal{A}}(\mathcal{N})$, dites algèbres de résurgences et ayant pour éléments des fonctions holomorphes sur $\mathcal{R}$.

On introduit ensuite le groupe Γ , constitué par ceux des automorphismes de $\mathcal{R}$ qui, en projection sur $\mathbb{C}$, deviennent des translations. Le groupe Γ et par suite son algèbre de groupe $\mathbb{C}[\Gamma]$, agissent d'une manière

naturelle sur les fonctions holomorphes sur $\mathcal{R}$. Le fait important est que $\mathbb{C}[\Gamma]$ possède une sous-algèbre, notée $\mathcal{D}(\mathcal{R})$, dont l'action sur $\mathcal{A}(\mathcal{R})$ et $\overline{\mathcal{A}}(\mathcal{R})$ donne lieu à des formules de Leibniz, c'est-à-dire à des relations du type :

$$\mathcal{D}(\varphi * \psi) = \sum_i (\mathcal{D}_i \varphi) * (\mathcal{D}'_i \psi) \quad (\mathcal{D}, \mathcal{D}_i, \mathcal{D}'_i \in \mathcal{D}(\mathcal{R}))$$

identiquement vérifiées en φ et ψ .

Le produit ordinaire $\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2 \rightarrow \mathcal{D}_1 \mathcal{D}_2$ et le coproduit $\mathcal{D} \rightarrow \sigma(\mathcal{D}) = \sum_i \mathcal{D}_i \otimes \mathcal{D}'_i$ munissent $\mathcal{D}(\mathcal{R})$ d'une structure de bigèbre d'opérateurs sur $\mathcal{A}(\mathcal{R})$ et $\overline{\mathcal{A}}(\mathcal{R})$. On étudie la structure de cette bigèbre. Il s'avère qu'à tout point η de l'ensemble $\mathcal{R}_\infty$ (relevé de $\mathcal{R}$ sur $\mathbb{C}_\infty$) on peut associer un élément Δ_η de $\mathcal{D}(\mathcal{R})$ qui est une dérivation de $\mathcal{A}(\mathcal{R})$ et $\overline{\mathcal{A}}(\mathcal{R})$, autrement dit :

$$\Delta_\eta(\varphi * \psi) = (\Delta_\eta \varphi) * \psi + \varphi * (\Delta_\eta \psi) \quad (\forall \varphi, \psi)$$

On étudie la forme de ces dérivations Δ_η et la structure de la bigèbre

$\Delta(\mathcal{R}) \subset \mathcal{D}(\mathcal{R})$ qu'elles engendrent (cette génération étant, d'ailleurs, libre).

Les opérateurs de $\Delta(\mathcal{R})$ sont qualifiés de dérivations étrangères, par opposition à la dérivation naturelle ∂ (multiplication par $-z$), avec laquelle ils vérifient les relations de non-commutation :

$$[\partial, \Delta_\eta] = \eta \Delta_\eta \quad (\eta \text{ projection de } \eta \text{ sur } \mathcal{R})$$

On étudie ensuite les sous-algèbres $\mathcal{A}(\mu, \mathcal{R})$, $\overline{\mathcal{A}}(\mu, \mathcal{R})$ de $\mathcal{A}(\mathcal{R})$, $\overline{\mathcal{A}}(\mathcal{R})$ ainsi que les bigèbres $\Delta(\mu, \mathcal{R})$ de dérivations étrangères qui leur correspondent.

On termine par une brève étude de l'exponentielle sur l'algèbre $\mathcal{A}(\mathcal{R})$

et par la construction d'une loi de "composition", notée $\circ$, qui fait de

$\mathcal{A}(\mathcal{Q})$ une algèbre à composition.

Chapitre 3 : Les divers modèles des algèbres de résurgence.

Section 3a : Le modèle additif.

Les algèbres $\mathcal{A}(\Omega)$ et $\bar{\mathcal{A}}(\Omega)$ du chapitre précédent ont été construites à partir de la surface de Riemann $\mathcal{R}$, recouvrement universel de $\mathbb{C} \setminus \Omega$, pour $\Omega = \omega_* \mathbb{Z}$.

Ce modèle particulier des algèbres de résurgence sera dit modèle additif, car il utilise une convolution apparentée à la convolution additive

$$(\varphi * \psi)(z) = \int_0^z \varphi(z-\zeta) \psi(\zeta) d\zeta$$

par opposition à la convolution multiplicative

$$(\varphi * \psi)(z) = \int_1^z \varphi(z/\zeta) \psi(\zeta) \frac{d\zeta}{\zeta}$$

Pour certaines questions, il est avantageux de remplacer le modèle additif par d'autres modèles. Ceux-ci rentrent dans deux catégories :

α) Les "modèles gras" (modèles multiplicatif, modèle de Poincaré, modèle abstrait) s'obtiennent en remplaçant la surface de base $\mathcal{R}$ par une surface de Riemann équivalente. Dans ces modèles, les algèbres de résurgence et leurs éléments sont notés par des lettres grasses, ainsi que la dérivation naturelle ∂ . La multiplication est notée $*$ et appelée "convolution".

β) Les "modèles maigres" (modèles sectoriels, modèle formel) s'obtiennent en soumettant les fonctions résurgentes à une transformation de Laplace (effective ou formelle). Dans ces modèles, les algèbres de résurgence et leurs éléments sont notés par des lettres maigres, ainsi que la dérivation naturelle ∂ . La multiplication est dénotée par la simple juxtaposition des facteurs.

Enfin, comme aucune confusion n'est possible, les opérateurs de $\mathcal{D}(\Omega)$ et notamment les dérivations étrangères Δ_γ seront désignés par des symboles

identiques dans les deux classes de modèles.

Section 3b : Le modèle multiplicatif.

Pour simplifier, supposons $\Omega = 2\pi i \mathbb{Z}$ et notons S la sphère de Riemann $\bar{\mathbb{C}}$. Alors, l'application $z \rightarrow e^z$ de $\mathbb{C} \div \Omega$ dans $S \div \{0, 1, \infty\}$ induit un isomorphisme

$$h_{\Omega} : \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{Y} \quad (\text{voir figures 3g1 et 3g2})$$

de la surface de Riemann $\mathcal{R} = \widetilde{\mathbb{C} \div \Omega}$ sur la surface de Riemann $\mathcal{Y} = \widetilde{S \div \{0, 1, \infty\}}$. L'isomorphisme h_{Ω} permet de considérer les fonctions résurgentes comme fonctions sur $\mathcal{Y}$ et cela nous donne le modèle multiplicatif de $\mathcal{A}(\Omega)$ et $\bar{\mathcal{A}}(\Omega)$. Voici en bref comment les principales notions se transposent à ce modèle.

Les points-frontière Q_0, Q_+, Q_- de $\mathcal{Y}$ ainsi que les ensembles $\partial^0 \mathcal{Y}, \partial^+ \mathcal{Y}, \partial^- \mathcal{Y}$ sont situés respectivement au dessus des points $1, \infty, 0$ de S .

Γ est le groupe des automorphismes de recouvrement (*) de $\mathcal{Y}$ (ce qu'il n'était pas pour $\mathcal{R}$). Les automorphismes paraboliques R, S, T correspondent, en projection sur S , au contournement dans le sens positif des points $1, \infty, 0$ respectivement.

$\mathcal{A}(\Omega)$ est, aux Diracs près, l'ensemble des fonctions holomorphes sur $\mathcal{Y}$ qui vérifient certaines conditions de croissance aux points situés au dessus de 1 .

$\bar{\mathcal{A}}(\Omega)$ est l'ensemble de tous les couples $(\psi, \tilde{\phi})$, avec ψ et $\tilde{\phi}$ holomorphes sur $\mathcal{Y}$, ψ mineur de $\tilde{\phi}$ et $\tilde{\phi}$ classe de $\tilde{\phi}$ modulo les fonctions régulières en Q_0 .

(*) covering automorphisms

La topologie de $\bar{A}(\Omega)$ est celle de la convergence uniforme, sur tout compact de $\mathcal{Y}$, des classes antécédentes $\hat{\Phi}$.

Enfin, la convolution de $A(\Omega)$ relève sur $\mathcal{Y}$ la convolution

$$(\Psi * \Upsilon)(z) = \int_1^z \Psi(z/\zeta) \Upsilon(\zeta) \frac{d\zeta}{\zeta}$$

des germes de fonctions holomorphes au point 1, ce qui justifie après coup le nom de modèle multiplicatif.

Section 3c : Le modèle de Poincaré.

Supposons encore $\Omega = 2\pi i$ et soient $\mathcal{R}, \mathcal{Y}$ comme à la section précédente. Soit enfin λ la fonction automorphe classique. Alors les applications

$$\begin{cases} z \rightarrow \frac{1}{1-\lambda(z)} = \frac{1}{\lambda(-1/z)} = \prod_{k \text{ impair} \geq 1} \left\{ \frac{1+e^{k\pi i z}}{1-e^{k\pi i z}} \right\}^8 \\ z \rightarrow -\log(1-\lambda(z)) = 16 \sum_{n \text{ impair} \geq 1} \mu_n e^{n\pi i z} \quad \left(\mu_n = \sum_{d|n} \frac{1}{d} = \frac{1}{n} \sum_{d|n} d \right) \end{cases}$$

envoient le demi-plan de Poincaré $\mathcal{P} = \{ \operatorname{Im} z > 0 \}$ dans $\mathcal{S} \doteq \{0, 1, \infty\}$ et $\mathcal{C} \doteq \Omega$ respectivement et induisent des isomorphismes

$$\begin{cases} h_{\mu\Delta} : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{Y} \\ h_{\mu\Omega} : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{R} \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{(Voir figures 3g3 et 3g2)} \\ \text{(Voir figures 3g3 et 3g1)} \end{array}$$

On peut donc considérer les fonctions résurgentes comme fonctions sur $\mathcal{P}$ et cela donne le modèle de Poincaré de $A(\Omega)$ et $\bar{A}(\Omega)$. Voici comment les principales notions se transposent à ce modèle.

Les frontières neutre, positive, négative apparaissent comme trois sous-ensembles de l'axe réel. Plus précisément, elles réalisent une partition

de l'ensemble $\mathbb{Q} \cup \{\infty\}$ et consistent respectivement en les rationnels dont la valuation 2-adique est négative, positive, nulle (dans cet ordre!). Ainsi :

$$\mathcal{P}^0 = \bigcup \{2^{-r} p/q\} \cup \{\infty\}$$

$$\mathcal{P}^+ = \bigcup \{2^r p/q\} \cup \{0\}$$

$$\mathcal{P}^- = \bigcup \{p/q\}$$

où r (resp. p, q) parcourt l'ensemble des entiers positifs (resp. des entiers relatifs impairs).

Le groupe Γ est le groupe d'invariance de la fonction automorphe λ , c'est-à-dire le groupe des homographies de la forme $z \rightarrow \Gamma(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ avec a, d entiers impairs et b, c entiers pairs. Les trois automorphismes paraboliques fondamentaux sont donnés par :

$$R(z) = z + 2 \quad ; \quad S(z) = \frac{z}{-2z+1} \quad ; \quad T(z) = \frac{z-2}{2z-3}$$

et leurs points fixes sont $Q_0 = \infty$, $Q_+ = 0$, $Q_- = 1$.

$\mathcal{A}(\mathcal{P})$ est, aux Diracs près, l'ensemble des fonctions holomorphes sur $\mathcal{P}$ qui vérifient certaines conditions de croissance "radiale" au voisinage des points de $\mathcal{P}^0$.

$\overline{\mathcal{A}}(\mathcal{P})$ est l'ensemble de tous les couples $(\varphi, \tilde{\Phi})$ avec φ et $\tilde{\Phi}$ holomorphes sur $\mathcal{P}$, φ mineur de $\tilde{\Phi}$ (i.e. $\varphi(z) = \tilde{\Phi}(z) - \tilde{\Phi}(z-2)$) et $\tilde{\Phi}$ classe de $\tilde{\Phi}$ modulo l'ensemble des fonctions bornées à l'infini et périodiques de période 2. La topologie de $\overline{\mathcal{A}}(\mathcal{P})$ est celle de la convergence uniforme, sur tout compact de $\mathcal{P}$, des classes antécédente $\tilde{\Phi}$.

Pour $p < \infty$, l'algèbre $\mathcal{A}(p, \mathcal{P})$ est, aux termes unitaires près, l'ensemble des fonctions φ , périodiques de période $2/p$, bornées à l'infini et telles que, pour tous a, d impairs et tous b, c pairs, la fonction

$$\varphi\left(\frac{az+b}{cz+d}\right) - \varphi\left(\frac{az+2a+b}{cz+2c+d}\right)$$

soit également périodique en z , de période $2/\mu$ et bornée à l'infini.

Enfin, comme la relation $\lambda(z_1) = \lambda(z_2) \lambda(z_3)$ ne se résout pas élémentairement en z_1 , on ne peut pas définir la convolution dans le modèle de Poincaré autrement que par transposition à partir des modèles multiplicatif ou additif. On peut toutefois, à partir des coefficients $\mu_n = \sum_{d|n} \frac{1}{d}$, calculer facilement les coefficients $\Lambda_{\alpha}^{\beta, \gamma}$ des développements

$$(e^{\alpha \pi i z}) * (e^{\beta \pi i z}) = \sum \Lambda_{\gamma}^{\alpha, \beta} e^{\gamma \pi i z} \quad (\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}, \gamma - \alpha - \beta \in \mathbb{N}^*)$$

et ces coefficients suffisent pour déterminer la convolution dans le modèle de Poincaré des algèbres périodiques $\mathcal{A}(\mu, \Omega)$ et $\bar{\mathcal{A}}(\mu, \Omega)$.

Section 3d : Les modèles sectoriels.

$\mathcal{A}(\Omega)$ désigne ici le modèle additif pour $\Omega = \omega_* \mathbb{Z}$, $\omega_* \in \mathbb{C}^*$. Soit $\mathcal{A}_0(\Omega)$ la partie de $\mathcal{A}(\Omega)$ formée des φ qui croissent au plus exponentiellement le long de toute droite inscrite sur la surface $\mathcal{R}$.

On vérifie que $\mathcal{A}_0(\Omega)$ est stable pour la convolution et pour la composition à droite par les $\mathfrak{f}$ de $\mathcal{G}_0(\Omega) = \mathbf{I} + \mathcal{A}_0(\Omega)$.

Pour tout Q de la forme $R^m Q_+$ (resp. $R^m Q_-$), l'application de Laplace :

$$(3d1) \quad \mathcal{L}_Q : \varphi \rightarrow \varphi_Q \quad \text{avec} \quad \varphi_Q(z) = \int_{Q_0}^Q \varphi(M) e^{-z\zeta} dM \quad (\zeta = \dot{M})$$

envoie $\mathcal{A}_0(\Omega)$ dans l'espace des germes analytiques sectoriels au point ∞ . En effet, en intégrant sur une demi-droite issue de Q_0 et variable dans le demi-feuillet $\mathcal{R}(Q)$, on peut définir $\varphi_Q(z)$ pour z grand et d'argu-

ment $\neq -\text{Arg } \omega_* - \frac{\pi}{2}$ (resp. $-\text{Arg } \omega_* + \frac{\pi}{2}$).

On obtient ainsi le modèle sectoriel (relatif au point Q) de l'algèbre $\mathcal{A}_0(\mathcal{Q})$. La convolution est transformée en multiplication ordinaire, la dérivation ∂ devient $\partial = \frac{\partial}{\partial z}$ et la composition grasse $\bullet$ devient la composition ordinaire des germes :

$$\varphi, f \rightarrow \varphi \circ f = \varphi(f)$$

Quant à l'action, dont on vérifie qu'elle est interne, des dérivations étrangères, elle ne peut être définie autrement que par transposition à partir du modèle additif (sauf dans le cas de ceux des opérateurs $D \in \mathcal{D}(\mathcal{Q})$ qui ont leur support contigu au feuillet $\mathcal{R}(Q)$: l'action de ces D peut s'interpréter directement sur le modèle sectoriel, en terme de développement asymptotique pour $z \rightarrow \infty$ dans la direction $-\text{Arg } \omega_* - \frac{\pi}{2}$ ou $-\text{Arg } \omega_* + \frac{\pi}{2}$ respectivement).

On définit de même $\overline{\mathcal{A}}_0(\mathcal{Q})$ comme la partie de $\overline{\mathcal{A}}(\mathcal{Q})$ formée par les couples (φ, Φ) avec mineur φ à croissance exponentielle et on obtient les modèles sectoriels de $\overline{\mathcal{A}}_0(\mathcal{Q})$ en remplaçant l'intégrale (3d1) par une intégrale analogue à (1e1).

Section 3e : Le modèle formel :

$\mathcal{A}(\mu, \mathcal{Q})$ et $\overline{\mathcal{A}}(\mu, \mathcal{Q})$ étant des parties de $\mathcal{A}$ et $\overline{\mathcal{A}}$, on peut d'après la section le leur appliquer l'opérateur de Laplace formel $\mathcal{L}$:

$\varphi \rightarrow \varphi$. On obtient de cette manière les modèles formels $\mathcal{A}(\mu, \mathcal{Q})$ et $\overline{\mathcal{A}}(\mu, \mathcal{Q})$, ainsi nommés parce qu'ils consistent en séries formelles de la variable $z^{-1/\mu}$ lorsque $\mu < \infty$ (resp. des variables $\log z$ et z^α , $\alpha \in \mathbb{C}$ lorsque $\mu = \infty$). La convolution $*$ devient multiplication ordinaire, ∂ devient $\partial = \frac{\partial}{\partial z}$ et la composition $\bullet$ devient la composition ordinaire des séries formelles :

$$\varphi, f \rightarrow \varphi \circ f = \varphi(f)$$

Quant à l'action des dérivations étrangères, elle ne peut être définie autrement que par transposition à partir du modèle additif.

Section 3f : le cas $\dim \Omega = 2$.

Dans toutes les constructions précédentes, il est loisible de remplacer $\Omega = \omega_* \mathbb{Z}$ par un réseau complexe à deux dimensions $\Omega = \omega_* \mathbb{Z} + \omega'_* \mathbb{Z}$ (ω_*/ω'_* non réel). Dans ce cas, le groupe fuchsien Γ possède non plus deux, mais trois générateurs indépendants. En revanche, il possède non plus trois, mais une seule classe d'éléments paraboliques, à savoir la classe des éléments conjugués à la "rotation" R .

Le modèle additif de $\mathcal{A}(\Omega)$ et $\overline{\mathcal{A}}(\Omega)$ se construit comme précédemment. Chaque opérateur de $\mathcal{D}(\Omega) = \mathbb{C} \oplus (1-R)\mathbb{C}[\Gamma]$ vérifie une relation de Leibniz et cela fait de $\mathcal{D}(\Omega)$ une bigèbre. Pour chaque $\eta \in \Omega_\infty$, on définit encore une dérivation étrangère Δ_η à l'aide de 2^n chemins, n étant le nombre de points de Ω situés sur le segment $]0, \eta[$ (cf. fig. 2b10). L'algèbre $\Delta(\Omega) \subset \mathcal{D}(\Omega)$ des dérivations étrangères est engendrée librement par les Δ_η .

On obtient le modèle multiplicatif en prenant pour surface $\mathcal{Y}$ le recouvrement universel de la courbe elliptique :

$$y^2 = 4x^3 - g_2 x - g_3 \quad \left(g_2 = 60 \sum_{\omega \in \Omega^*} \omega^{-4} ; g_3 = 140 \sum_{\omega \in \Omega^*} \omega^{-6} \right)$$

privée de son point à l'infini et en prenant la convolution relative au "produit" canonique de cette courbe elliptique (*).

(*) $x_1, x_2 \rightarrow x_3$ avec $(x_1 + x_2 + x_3)(4x_1 x_2 x_3 - g) = (x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_3 + \frac{1}{4}g_2)^2$

Le modèle de Poincaré s'obtient en choisissant un isomorphisme $R \rightarrow P$ tel que R devienne une translation, ce qui fait de $A(p, \mathcal{R})$ et $\bar{A}(p, \mathcal{R})$ des ensembles de fonctions périodiques.

L'obtention du modèle formel ne pose aucune difficulté. On a de même un modèle sectoriel relatif à chaque Q , point à l'infini d'un demi-axe issu de Q_0 . Ces points Q , au lieu de former deux classes $\{R^m Q_+\}$ et $\{R^m Q_-\}$ comme ci-avant, en forment maintenant une infinité et les $\varphi_Q = \mathcal{L}_Q \psi$ sont des germes à l'infini définis sur des secteurs d'ouverture, non plus 2π , mais π (cela tient à ce qu'on ne peut plus faire varier les axes $Q_0 Q$ d'intégration).

Notons pour finir que dans les deux cas $\dim \mathcal{R} = 1$ ou 2 , chacun des trois "modèles gras" (additif, multiplicatif, de Poincaré) est un cas particulier du modèle abstrait ainsi construit :

Soit $\mathcal{L}$ un groupe de Lie complexe, à une dimension (complexe) et soit $\mathcal{L}^*$ ce même groupe privé de son élément neutre. $A(\mathcal{R})$ et $\bar{A}(\mathcal{R})$ se construisent alors à partir des fonctions holomorphes sur la surface $\mathcal{L}^*$, recouvrement universel de $\mathcal{L}^*$, et avec la convolution $*$ induite par la loi du groupe $\mathcal{L}$.

Les groupes Γ et $\mathcal{R}$ s'identifient respectivement aux groupes fondamentaux des surfaces $\mathcal{L}^*$ et $\mathcal{L}$, soit $\text{Hom } \mathcal{L}^*$ et $\text{Hom } \mathcal{L}$, et l'homomorphisme $\Gamma \rightarrow \mathcal{R}$ de Γ dans $\mathcal{R}$ s'identifie à la projection naturelle $\text{Hom } \mathcal{L}^* \rightarrow \text{Hom } \mathcal{L}$. On a $\dim \mathcal{R} = 1$ (resp. 2) en prenant $\mathcal{L}$ isomorphe à un cylindre (resp. à une courbe elliptique).

Section 3g : Résumé du chapitre 3.

On décrit divers modèles des algèbres de résurgence, obtenus en remplaçant la surface $\mathcal{R}$ par une surface de Riemann équivalente. Les modèles additif et multiplicatif correspondent à des produits apparentés respectivement aux

convolutions additive et multiplicative :

$$(\Psi * \Psi)(z) = \int_0^z \Psi(z-\zeta) \Psi(\zeta) d\zeta \quad \text{et} \quad (\Psi * \Psi)(z) = \int_1^z \Psi(z/\zeta) \Psi(\zeta) \frac{d\zeta}{\zeta}$$

Le modèle de Poincaré correspond au choix, pour surface de Riemann, du demi-plan $\text{Im } z > 0$.

Le cas où $\Omega = 2\pi i \mathbb{Z}$ est illustré sur les trois figures ci-après.

Le groupe fuchsien Γ est engendré par trois éléments paraboliques R, S, T , de points fixes Q_0, Q_+, Q_- et liés par l'unique relation $RST = 1_\Gamma$. Les relations entre les trois modèles sont résumées sur le tableau ci-dessous.

	<u>Modèle additif</u>	<u>Modèle multiplicatif</u>	<u>Modèle de Poincaré</u>
<u>Surface de Riemann</u>	$\mathcal{Q} = \mathbb{C} / 2\pi i \mathbb{Z}$	$\mathcal{Y} = \mathbb{C} \setminus \{0, 1, \infty\}$	$\mathcal{P} = \{ \text{Im } z > 0 \}$
<u>Groupe Γ</u>	Groupe des automorphismes qui, en projection sur $\mathbb{C}$, donnent des translations de pas $2\pi i m$.	Groupe des automorphismes de recouvrement de $\mathcal{Y}$.	Groupe des homographies $z \rightarrow \frac{az+b}{cz+d}$ avec a, d entiers impairs et b, c entiers pairs
<u>Générateurs paraboliques</u>	R relève la rotation de $+2\pi$ autour de 0. S et T donnent en projection des translations de pas $-2\pi i$ et $+2\pi i$.	R, S, T correspondent à des lacets positifs autour de $1, \infty, 0$ sur la sphère de Riemann privée de ces points.	$R(z) = z + 2$ $S(z) = \frac{z}{-2z+1}$ $T(z) = \frac{z-2}{2z-3}$

	<u>Modèle additif</u>	<u>Modèle multiplicatif</u>	<u>Modèle de Poincaré</u>
<u>Frontière neutre</u>	Ensemble des points de ramifications	Points de ramification au dessus de 1	Rationnels de valuation 2-adique négative
<u>Frontière positive</u>	Points relevant le point à l'infini de $\operatorname{Re} z > 0$	Points de ramification au dessus de ∞	Rationnels de valuation 2-adique positive
<u>Frontière négative</u>	Points relevant le point à l'infini de $\operatorname{Re} z < 0$	Points de ramification au dessus de 0	Rationnels de valuation 2-adique nulle

En plus de ces trois modèles, dont les éléments sont des fonctions holomorphes sur une surface fixe, on obtient aussi, pour certaines algèbres de résurgence et au moyen de la transformation de Laplace, des modèles sectoriels, ayant pour éléments des germes sectoriels à l'infini, et un modèle formel, ayant pour éléments des séries formelles de la variable z^{-1} .

Selon les applications, on est conduit à préférer tel ou tel de ces modèles.

Figure 3g1:

Surface $R = \mathbb{C} \div 2\pi i \mathbb{Z}$

(Modèle additif)

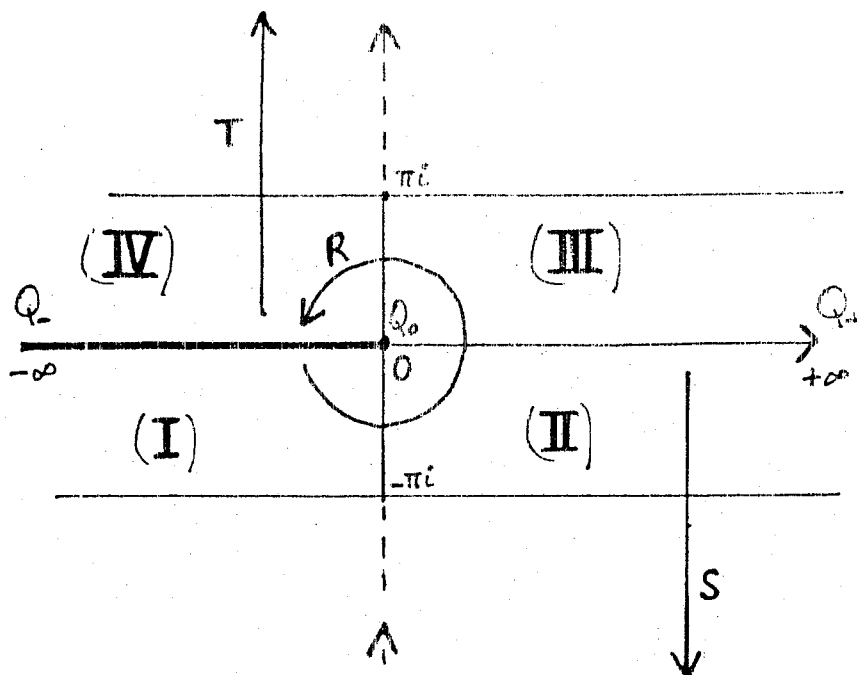


Figure 3g2:

Surface $\mathcal{P} = \mathbb{S} \div \{0, 1, \infty\}$

(Modèle multiplicatif)

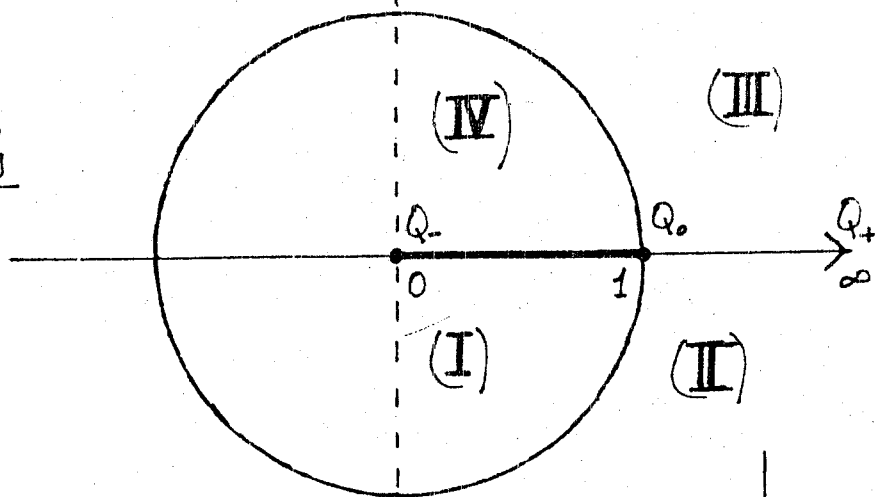
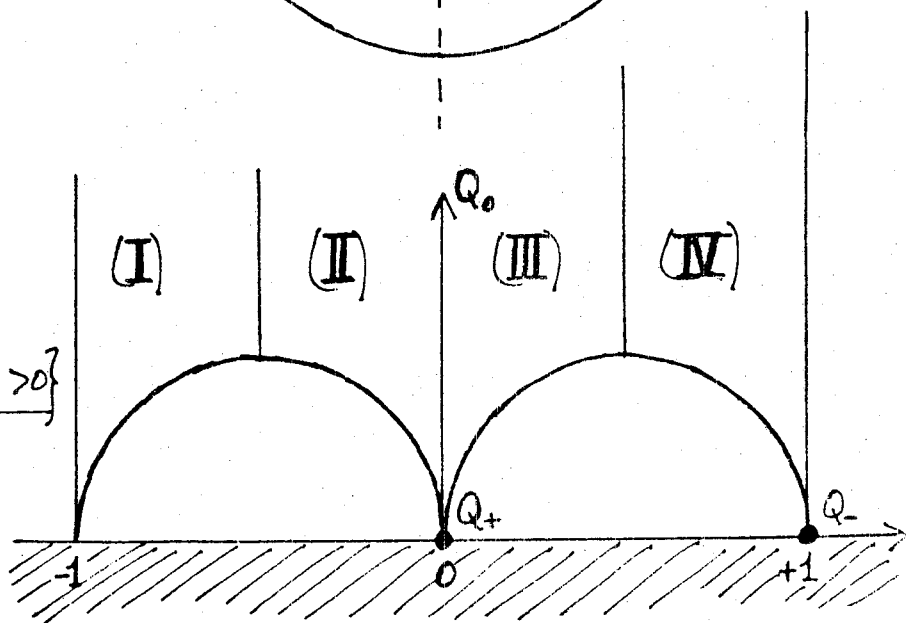


Figure 3g3:

Demi-plan $\mathcal{P} = \{\text{Im } z > 0\}$

(Modèle de Poincaré)



Chapitre 4 : Dérivations étrangères et pseudovariables. Moules et comoules.

Section 4a : Les algèbres de pseudovariables.

L'algèbre $\mathbb{E}_n$ des fonctions entières de n variables a toutes ses dérivations de la forme $\sum \varphi_i \frac{\partial}{\partial z_i}$ ($1 \leq i \leq n, \varphi_i \in \mathbb{E}_n$). Par suite le $\mathbb{E}_n$ -module à gauche des dérivations de $\mathbb{E}_n$ est de dimension n , précisément égale au nombre des variables. Ce phénomène est général pour les algèbres classiques de fonctions.

Au contraire, l'algèbre $\mathcal{A}(\mathcal{N})$, qui est pourtant une algèbre de fonctions holomorphes (*) d'une seule variable, contient, outre la dérivation naturelle ∂ , toute la série des dérivations étrangères Δ_η , lesquelles sont linéairement indépendantes, tant comme éléments de $\Delta(\mathcal{N})$ que comme opérateurs sur $\mathcal{A}(\mathcal{N})$. Par suite, le $\mathcal{A}(\mathcal{N})$ -module des dérivations de $\mathcal{A}(\mathcal{N})$ est de dimension infinie, et il en va de même pour $\mathcal{A}(\mu, \mathcal{N})$. D'où l'idée de considérer les fonctions résurgentes comme dépendant d'une unique vraie variable et d'une infinité de pseudovariables.

Cette intuition peut-être précisée : nous allons introduire des pseudovariables qui obéiront à des lois (de multiplication, de dérivation, de composition) bien définies.

Commençons par une construction générale qui couvrira tous les cas utiles. Soit $\mathcal{A}$ une algèbre commutative sur $\mathbb{C}$ et Δ une bigèbre d'opérateurs sur $\mathcal{A}$. Cela veut dire que Δ , outre sa structure d'algèbre d'opérateurs sur $\mathcal{A}$, possède une structure de coalgèbre commutative $\tau: \Delta \rightarrow \Delta \otimes \Delta$, à laquelle correspondent les lois de Leibniz :

(*) En fait, on a ajouté à $\mathcal{A}(\mathcal{N})$ des Diracs pour l'unitariser, mais la suppression de ceux-ci ne changerait rien à l'abondance des dérivations.

$$D(a, b) = \sum (D_i a) (D'_i b) \quad \text{avec} \quad \sigma(D) = \sum D_i \otimes D'_i \quad (a, b \in A; D \in \Delta; \sum \text{fini})$$

Désignons par Δ' l'algèbre duale de la coalgèbre Δ . Appelons pseudo-variables les éléments de Δ' et notons (Δ, Z) le scalaire obtenu par contraction de $\Delta \in \Delta$ avec $Z \in \Delta'$.

Proposition 4a1 : (formes déployée et restreinte)

Soient A, Δ, Δ' comme ci-dessus. Soit $\{\Delta_j\}$ une base algébrique de l'espace vectoriel Δ et soit $\{Z^j\}$ la famille duale de Δ' .

$\alpha)$ Il existe un unique homomorphisme d'algèbre

$$[] : A \rightarrow A \otimes \Delta'$$

tel que $(D, [a]) = Da$ pour tout $D \in \Delta$ et tout $a \in A$, et on a l'expression analytique

$$[a] = \sum_j (\Delta_j a) Z^j$$

$[a]$ est dit forme déployée de a .

$\beta)$ Pour chaque homomorphisme $v : A \rightarrow \mathbb{C}$, il existe un unique homomorphisme d'algèbre

$$\langle \rangle : A \rightarrow A'$$

tel que $(D, \langle a \rangle) = v(Da)$ identiquement, et on a l'expression analytique

$$\langle a \rangle = \sum_j v(\Delta_j a) Z^j$$

$\langle a \rangle$ est dit forme restreinte de a (relativement à v)

$\gamma)$ Il existe une action unique de la bigèbre Δ dans les algèbres Δ' et $A \otimes \Delta'$ qui commute avec les formes restreinte et déployée :

$$D\langle a \rangle = \langle Da \rangle \quad \text{et} \quad D[a] = [Da]$$

L'action $D : Z \rightarrow DZ$ de Δ dans Δ' s'obtient en transposant l'anti-action à gauche $D : \Delta \rightarrow \Delta \cdot D$ de Δ dans Δ et l'action de Δ dans $A \otimes \Delta'$ s'en déduit par restriction au second facteur de $A \otimes \Delta'$. Autrement dit, on ne fait agir D que sur les pseudovariables dans les formes déployées. Ainsi.

$$D(\sum_j a_j Z^j) = \sum_j a_j DZ^j \quad \text{et non pas} \quad \sum_{i,j} (D_i a) (D'_i Z^j) \quad \text{avec} \quad \sigma(D) = \sum D_i \otimes D'_i$$

Cette proposition se vérifie mécaniquement et nous n'insistons pas. Notons simplement que les développements $[a]$ et $\langle a \rangle$ en séries de pseudovariables généralisent les développements formels en séries de Taylor. Remarquons aussi que, pour construire les homomorphismes $[]$ et $\langle \rangle$, il suffit que soit une coalgèbre d'opérateurs. La structure d'algèbre d'opérateurs n'intervient qu'au point γ , lorsqu'il s'agit d'étendre l'action de la bigèbre Δ aux pseudovariables.

Appliquons la construction ci-dessus en prenant $A = A(\Omega)$ et $\Delta = \Delta(\Omega)$. Comme algèbre, $\Delta(\Omega)$ est engendrée par l'opérateur unité et par les dérivations étrangères Δ_η , où η est un indice simple parcourant Ω_∞ . Comme espace vectoriel, $\Delta(\Omega)$ admet pour base la famille

$$\{ \Delta_\eta = \Delta_{\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_r} = \Delta_{\eta_r} \dots \Delta_{\eta_2} \Delta_{\eta_1} \}$$

où $\eta = (\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_r)$ désigne cette fois un multiindice de longueur r quelconque. (Noter l'ordre des facteurs dans la définition de Δ_η).

Désignons par $\{ Z^\eta = Z^{\eta_1, \dots, \eta_r} \}$ la famille de pseudo-variables duale de la famille $\{ \Delta_\eta = \Delta_{\eta_1, \dots, \eta_r} \}$.

Il est commode, pour $r = 0$, de poser $\eta = \emptyset$ (multiindice vide) et d'identifier $Z^\emptyset$ (resp. $\Delta_\emptyset$) à l'unité de l'algèbre $A'(\Omega)$ (resp. de la

bigèbre $\Delta(\Omega)$. De plus, pour distinguer indices simples et indices multiples, les premiers seront à l'occasion subindexés en bas (η_j) et les seconds subindexés en haut (η^j).

La loi de coalgèbre de $\Delta(\Omega)$ s'écrit :

$$(4a1) \quad \sigma(\Delta_{\eta^3}) = \sum_{\eta^1, \eta^2 < \eta^3} \Delta_{\eta^1} \otimes \Delta_{\eta^2}$$

et, par dualité, on en déduit la table de multiplication des pseudovariables :

$$(4a2) \quad z^{\eta^1} z^{\eta^2} = \sum_{\eta^1, \eta^2 < \eta^3} z^{\eta^3}$$

où la notation $\eta^1, \eta^2 < \eta^3$ signifie que le multiindice η^3 peut s'obtenir en imbriquant les coordonnées des multiindices η^1 et η^2 sans changer l'ordre qui est le leur dans η^1 et η^2 . Par exemple :

$$z^{\eta_1} z^{\eta_2} = z^{\eta_1, \eta_2} + z^{\eta_2, \eta_1}$$

$$z^{\eta_1, \eta_2} z^{\eta_3} = z^{\eta_1, \eta_2, \eta_3} + z^{\eta_1, \eta_3, \eta_2} + z^{\eta_3, \eta_1, \eta_2}$$

$$z^{\eta_1, \eta_2} z^{\eta_3, \eta_4} = z^{\eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4} + z^{\eta_1, \eta_3, \eta_2, \eta_4} + z^{\eta_3, \eta_1, \eta_2, \eta_4} + z^{\eta_1, \eta_3, \eta_4, \eta_2} + z^{\eta_3, \eta_1, \eta_4, \eta_2} + z^{\eta_3, \eta_4, \eta_1, \eta_2}$$

Quant à l'action de $\Delta(\Omega)$ dans $\Delta'(\Omega)$, elle est donnée par :

$$\Delta_{\eta_0} z^{\eta_1, \dots, \eta_n} = z^{\eta_2, \dots, \eta_n} \quad (\text{resp. } = 0) \quad \text{si } \eta_0 = \eta_1 \quad (\text{resp. } \eta_0 \neq \eta_1)$$

et plus généralement par

$$\Delta_{\eta^1} z^{\eta^3} = z^{\eta^2} \quad \text{si } \eta^3 \text{ est de la forme } \eta^1 \eta^2 \quad (\text{resp. } 0 \text{ dans le cas contraire})$$

où la notation $\eta^3 = \eta^1 \eta^2$ signifie que le multiindice η^3 s'obtient en juxtaposant les coordonnées des multiindices η^1 et η^2 (dans cet ordre) —. $\Delta(\Omega)$ agit comme bigèbre sur les pseudovariables. Ceci s'exprime par les identités :

$$\Delta_{\eta'}(\Delta_{\eta^2} z^{\eta^3}) = (\Delta_{\eta'} \Delta_{\eta^2}) z^{\eta^3} \quad \text{et} \quad \Delta_{\eta'}(z^{\eta^2} z^{\eta^3}) = \sum_{\eta^4, \eta^5 < \eta'} (\Delta_{\eta^4} z^{\eta^2}) (\Delta_{\eta^5} z^{\eta^3})$$

de vérification immédiate.

Ceci étant, soit $v: \varphi \rightarrow v(\varphi)$ l'homomorphisme de $\mathcal{A}(\mathcal{N})$ dans $\mathbb{C}$ qui à chaque fonction résurgente associe la masse de son Dirac au point Q_0 . Alors, la forme déployée et la forme restreinte relative à v sont données par

$$\varphi \rightarrow [\varphi] = \sum_{\eta} (\Delta_{\eta} \varphi) z^{\eta}$$

$$\varphi \rightarrow \langle \varphi \rangle = \sum_{\eta} v(\Delta_{\eta} \varphi) z^{\eta} = v([\varphi]) \quad (*)$$

où les sommes sont étendues à tous les multiindices η , y compris $\emptyset$ (elles commencent donc par φ et $v(\varphi)$ respectivement). De plus, on a identiquement :

$$[\varphi * \psi] = [\varphi] \cdot [\psi] \quad (**) \quad \Delta[\varphi] = [\Delta\varphi] \quad (***)$$

$$\langle \varphi * \psi \rangle = \langle \varphi \rangle \cdot \langle \psi \rangle \quad \Delta\langle \varphi \rangle = \langle \Delta\varphi \rangle$$

D'autre part, à partir des relations de non-commutations

$$[\partial, \Delta_{\eta}] = \dot{\eta} \Delta_{\eta} \quad (\eta \text{ indice simple; } \dot{\eta} \text{ projection de } \eta \text{ sur } \mathcal{N})$$

et des relations plus générales

$$[\partial, \Delta_{\eta}] = \|\dot{\eta}\| \Delta_{\eta} \quad (\eta = (\eta_1, \dots, \eta_n) ; \|\dot{\eta}\| = \dot{\eta}_1 + \dots + \dot{\eta}_n ; \|\emptyset\| = 0)$$

qui en découlent, on montre que si on définit l'action de ∂ dans $\Delta'(\mathcal{N})$ par

(*) La forme restreinte fait donc intervenir les résidus aux points de $\partial^{\circ} \mathcal{R}$.

(**) Pour calculer $[\varphi][\psi]$, multiplier les pseudovariabes et convoler les fonctions résurgentes.

(***) Pour calculer $\Delta[\varphi]$, faire opérer Δ sur les pseudovariabes, mais pas sur les fonctions résurgentes.

$$(4a3) \quad \partial z^\eta = -\| \eta \| z^\eta \quad (\eta \text{ multiindice})$$

et que si on étend cette action à $A(\mathcal{N}) \otimes \Delta'(\mathcal{N})$ en faisant agir ∂ sur les deux facteurs du produit tensoriel (contrairement aux dérivations étrangères, qu'on ne fait agir que sur le second facteur) alors la dérivation naturelle ∂ commute avec les formes restreinte et déployée :

$$\partial \langle \varphi \rangle = \langle \partial \varphi \rangle \quad ; \quad \partial [\varphi] = [\partial \varphi]$$

Il ne reste plus qu'à définir sur les pseudovariables une composition $\circ$ qui commute avec $\langle \rangle$ et $[\]$. Pour cela, introduisons une nouvelle pseudovariable I , qui sera l'élément neutre de la composition, et pour tous $z_1, z_2 \in \Delta'(\mathcal{N})$, posons :

$$(4a4) \quad (I + z_1) \circ (I + z_2) = I + z_1 + z_2 + \sum_{n \geq 1} (z_2)^n \frac{\partial^n}{n!} z_1$$

$$(4a5) \quad z_1 \circ (I + z_2) = z_1 + \sum_{n \geq 1} (z_2)^n \frac{\partial^n}{n!} z_1$$

Les membres de droites convergent toujours faiblement (i.e. leur contraction avec tout $D \in \Delta(\mathcal{N})$ donne des séries scalaires convergentes). La relation (4a4) définit sur l'ensemble $I + \Delta'(\mathcal{N})$ une loi de groupe et la relation (4a5) définit une action de ce groupe dans l'algèbre $\Delta'(\mathcal{N})$. Enfin, pour $\varphi \in A(\mathcal{N})$ et $f, g \in G(\mathcal{N})$ on a identiquement :

$$\langle \varphi \circ f \rangle = \langle \varphi \rangle \circ \langle f \rangle \quad \text{et} \quad [\varphi \circ f] = [\varphi] \circ [f]$$

$$\langle g \circ f \rangle = \langle g \rangle \circ \langle f \rangle \quad \text{et} \quad [g \circ f] = [g] \circ [f]$$

ainsi qu'on le voit en appliquant $\langle \rangle$ et $[\]$ aux relations (2e2) et (2e1) et en faisant bien sûr $[I] = \langle I \rangle = I$.

En résumé :

Proposition 4a2 :

$\alpha)$ L'espace $\Delta'(\mathcal{N})$ des pseudovariables, muni de la table de multiplication (4a2) et de la loi de composition (4a5) est une algèbre à composition. La bigèbre $\Delta(\mathcal{N})$ des dérivations étrangères agit sur $\Delta'(\mathcal{N})$.

$\beta)$ Les formes restreintes $\varphi \rightarrow \langle \varphi \rangle$ et déployée $\varphi \rightarrow [\varphi]$ sont des homomorphismes de l'algèbre à composition $\mathcal{A}(\mathcal{N})$ dans les algèbres à composition $\Delta'(\mathcal{N})$ et $\Delta'(\mathcal{N}) \otimes \mathcal{A}(\mathcal{N})$ respectivement. Ces homomorphismes commutent avec les dérivations étrangères.

En somme, prendre la forme déployée (resp. restreinte) consiste à "ajouter" les pseudovariables (resp. à "ajouter" les pseudovariables puis à "supprimer" la vraie variable) sans que cela affecte aucunement les différentes opérations (telles que addition, multiplication, composition, différentiation naturelle ou étrangère). C'est cette grande souplesse dans le maniement des pseudovariables qui nous permettra, en particulier, de démontrer les théorèmes de transcendance du chapitre 13.

Les pseudovariables sont très "nombreuses" : on ne peut pas les engendrer toutes à partir d'un nombre fini d'entre elles. Cette abondance des pseudovariables est plutôt un avantage, mais elle peut aussi parfois devenir un inconvénient, auquel on obvie en remplaçant $\Delta'(\mathcal{N})$ par des sous-algèbres Δ' engendrées par une seule pseudovariable. La construction correspondante sera faite au chapitre 14, car c'est là que nous en aurons besoin. Signalons simplement pour l'instant que ces algèbres à composition Δ' s'identifient chacune à une algèbre à composition du type $\mathbb{C}[[e^{-\omega z}]]$ pour un certain $\omega \in \mathcal{N}$. Les formes déployée et restreinte restent définies et conservent leurs propriétés, mais on perd quand même beaucoup de "structure" du fait que les dérivations étrangères n'opèrent plus dans Δ' .

Enfin, il va de soit que tout ce qui a été dit s'applique en remplaçant $A(\mathcal{N}), \Delta(\mathcal{N}), \Delta'(\mathcal{N})$ par $A(n, \mathcal{N}), \Delta(n, \mathcal{N}), \Delta'(n, \mathcal{N})$.

Section 4b : Moules et comoules.

Nous allons, dans cette section, introduire deux notions duales, les moules et les comoules, qui généralisent respectivement les notions de dérivation étrangère et de pseudovariation, tout en étant d'un maniement plus commode. Moules et comoules nous serviront constamment dans la suite. Leur intérêt tient surtout à cinq raisons :

- les moules sont indispensables pour exprimer les relations qui existent entre les différentes représentations des pseudovariations (voir les chapitres 6 et 7)
- les comoules permettent d'exprimer commodément les invariants qui interviennent en théorie de l'itération fractionnaire et à propos de nombreuses équations fonctionnelles (voir chapitres 9 et 15)
- moules et comoules possèdent chacun une structure d'algèbre à composition qui généralise l'algèbre à composition des séries formelles.
- moules et comoules donnent lieu à des groupes où la recherche des invariants est intéressante (voir chapitre 17)
- moules et comoules interviennent en théorie des algèbres de Lie (voir chapitre 16) et en analyse combinatoire.

Fixons d'abord quelques notations.

Multiindices : Pour tout $\mathcal{N}$, ensemble d'indices, soit $\mathcal{I}(\mathcal{N})$ le semigroupe des multiindices correspondants. $\mathcal{I}(\mathcal{N})$ a pour éléments les suites finies $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_n)$ d'éléments de $\mathcal{N}$ et pour loi de composition la juxtaposition des suites : $(\omega_1, \dots, \omega_n)(\omega_{n+1}, \dots, \omega_{n+d}) = (\omega_1, \dots, \omega_{n+d})$. L'élément neutre de $\mathcal{I}(\mathcal{N})$ est le multiindice vide, noté ϕ . Si $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_n)$ on pose

$n(\omega) = n$ = longueur de ω , et lorsque $\mathcal{Q}$ est un semi-groupe noté additivement, on pose $\|\omega\| = \omega_1 + \dots + \omega_n$ = somme de ω . Pour ω vide, on pose $n(\phi) = \|\phi\| = 0$.

Pour simplifier, les éléments de $\mathcal{Q}$ et de $\mathcal{J}(\mathcal{Q})$ seront dénotés par les mêmes symboles, parfois subindexés en bas et en haut respectivement.

Enfin, pour $\omega, \omega', \omega'', \dots, \omega^d \in \mathcal{J}(\mathcal{Q})$, la notation $\omega', \omega'', \dots, \omega^d < \omega$ signifiera que le multiindice ω peut s'obtenir en imbriquant mutuellement les multiindices $\omega', \omega'', \dots, \omega^d$ avec préservation de leur ordre interne. Par exemple :

$$(\omega_1, \omega_2), (\omega_3, \omega_4) < (\omega_1, \omega_3, \omega_2, \omega_4)$$

Proposition 4b1 (Algèbre à composition des moules)

α) Un moule sur un ensemble $\mathcal{Q}$ est une application $(\omega_1, \dots, \omega_n) \rightarrow A^{\omega_1, \dots, \omega_n}$ de $\mathcal{J}(\mathcal{Q})$ dans $\mathbb{C}$, où la variable $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_n)$ est notée comme indice supérieur. L'ensemble $M^*(\mathcal{Q})$ des moules sur $\mathcal{Q}$, muni de l'addition et de la multiplication ainsi définies.

$$(4b1) \quad C^\bullet = A^\bullet + B^\bullet \quad \Leftrightarrow \quad C^\omega = A^\omega + B^\omega$$

$$(4b2) \quad C^\bullet = A^\bullet \times B^\bullet \quad \Leftrightarrow \quad C^\omega = \sum_{\omega' \omega'' = \omega} A^{\omega'} B^{\omega''} \quad (*)$$

est une algèbre non commutative. Son unité est notée $1^\bullet$ et vérifie :

$$1^\phi = 1 \quad \text{et} \quad 1^\omega = 0 \quad \text{si} \quad n(\omega) \neq 0.$$

Les moules qui possèdent un inverse multiplicatif sont ceux pour lesquels $A^\phi \neq 0$. Ils forment un groupe, noté $M_X^*(\mathcal{Q})$.

(*) La somme est étendue à tous les couples de facteurs, facteurs vides compris.

$$\begin{aligned} \text{Ainsi :} \quad C^\phi &= A^\phi B^\phi, \quad C^{\omega_1} = A^{\omega_1} B^\phi + A^\phi B^{\omega_1}, \\ C^{\omega_1, \omega_2} &= A^{\omega_1, \omega_2} B^\phi + A^{\omega_1} B^{\omega_2} + A^\phi B^{\omega_1, \omega_2}, \text{ etc...} \end{aligned}$$

β) Si en outre Ω est un semi-groupe et si on pose, lorsque $B^\phi = 0$:

$$(4b3) \quad C = A \circ B \Leftrightarrow C^\omega = \sum_{\omega^1 \omega^2 \dots \omega^s = \omega} A^{\|\omega^1\|, \|\omega^2\|, \dots, \|\omega^s\|} B^{\omega^1} B^{\omega^2} \dots B^{\omega^s} (*)$$

alors $M'(\Omega)$ devient une algèbre à composition. Cela signifie que la composition est associative et distributive à gauche par rapport à la multiplication (et bien sûr, à l'addition) :

$$(A \times B) \circ C = (A \circ C) \times (B \circ C)$$

L'élément neutre de la composition est noté I' et vérifie :

$$I'^\omega = 1 \quad \text{si } r(\omega) = 1 \quad \text{et} \quad I' = 0 \quad \text{si } r(\omega) \neq 1.$$

Les moules qui possèdent un inverse de composition sont ceux pour lesquels $A^\phi = 0$ et $A^\omega \neq 0$ chaque fois que $r(\omega) = 1$. Leur ensemble forme un groupe, noté

$$M_0'(\Omega)$$

γ) Si maintenant Ω^* désigne un groupe privé de son élément neutre et si on dénote par $M'(\Omega^*)$ l'ensemble des moules M' sur Ω^* tels que $M^{\omega_1, \dots, \omega_n} = 0$ chaque fois que $\omega_1 + \dots + \omega_n = 0$, on peut encore définir la composition par la relation (4b3) à condition de sommer par rapport aux seuls ω^i de somme $\|\omega^i\|$ non nulle, moyennant quoi $M_0'(\Omega)$ est toujours un groupe pour la composition.

Proposition 4b2 (Algèbre à composition des comoules).

α) Un comoule sur un ensemble Ω est une application $(\omega_1, \dots, \omega_n) \rightarrow A_{\omega_1, \dots, \omega_n}$ de $\mathcal{J}(\Omega)$ dans $\mathbb{C}$, où la variable $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_n)$ est notée comme indice

(*) La somme est étendue à toutes les factorisations de ω , mais comme $B^\phi = 0$, on peut se limiter aux facteurs non vide et faire varier s de 1 à $r(\omega)$. Ainsi :

$$C^\phi = 0; \quad C^{\omega_1} = A^{\omega_1} B^{\omega_1}; \quad C^{\omega_1, \omega_2} = A^{\omega_1, \omega_2} B^{\omega_1} B^{\omega_2} + A^{\omega_1 + \omega_2} B^{\omega_1, \omega_2};$$

$$C^{\omega_1, \omega_2, \omega_3} = A^{\omega_1, \omega_2, \omega_3} B^{\omega_1} B^{\omega_2} B^{\omega_3} + A^{\omega_1 + \omega_2, \omega_3} B^{\omega_1, \omega_2} B^{\omega_3} + A^{\omega_1, \omega_2 + \omega_3} B^{\omega_1} B^{\omega_2, \omega_3} + A^{\omega_1 + \omega_2 + \omega_3} B^{\omega_1, \omega_2, \omega_3}$$

inférieur. L'ensemble des comoules sur $\mathcal{N}$, muni de l'addition et de la multiplication ainsi définies :

$$(4b4) \quad C. = A. + B. \quad \Leftrightarrow \quad C_{\omega} = A_{\omega} + B_{\omega}$$

$$(4b5) \quad C. = A. \times B. \quad \Leftrightarrow \quad C_{\omega} = \sum_{\omega', \omega'' < \omega} A_{\omega'} B_{\omega''} \quad (*)$$

est une algèbre commutative. Son unité est notée $1.$ et vérifie :

$$1_{\emptyset} = 1 \text{ et } 1_{\omega} = 0 \text{ si } R(\omega) \neq 0.$$

$\beta)$ Si en outre $\mathcal{N}$ est plongé dans $\mathbb{C}$ et si on introduit le symbole $I.$ avec les règles

$$(4b6) \quad C. = (A.) \circ (I. + B.) \Leftrightarrow C_{\omega} = \sum_{\omega, \omega', \dots, \omega^{\Delta} < \omega} \frac{(-\| \omega^{\Delta} \|)^{\Delta}}{\Delta!} A_{\omega^{\Delta}} B_{\omega'} B_{\omega''} \dots B_{\omega^{\Delta}} \quad (**)$$

$$\Leftrightarrow C_{\omega} = \sum'_{\omega, \omega', \dots, \omega^{\Delta} < \omega} \frac{e^{-\| \omega^{\Delta} \|} B^{\Delta}}{\Delta!} A_{\omega^{\Delta}} B_{\omega'} B_{\omega''} \dots B_{\omega^{\Delta}} \quad (**)$$

$$(4b7) \quad (I. + A.) \circ (I. + B.) = I. + B. + A. \circ (I. + B.)$$

alors l'ensemble $I. + M.(\mathcal{N})$ devient un groupe pour la composition et ce groupe agit dans l'algèbre $M.(\mathcal{N})$. Ceci fait de $M.(\mathcal{N})$ une algèbre à composition.

(*) Ainsi $C_{\emptyset} = A_{\emptyset} B_{\emptyset} ; \quad C_{\omega_1} = A_{\omega_1} B_{\emptyset} + A_{\emptyset} B_{\omega_1} ;$

$$C_{\omega_1, \omega_2} = A_{\omega_1, \omega_2} B_{\emptyset} + A_{\omega_1} B_{\omega_2} + A_{\omega_2} B_{\omega_1} + A_{\emptyset} B_{\omega_1, \omega_2}$$

(**) La somme $\sum$ (resp. $\sum'$) est étendue à tous les ω^i (resp. aux seuls ω^i non vides) et compte un nombre infini (resp. fini) de termes.

Ces deux propositions étant faciles à vérifier, nous allons tout de suite passer à l'interprétation des moules et des comoules. Commençons par ces derniers.

Comoules et pseudovariables :

Notons d'abord que lorsque Ω est un sous-groupe discret de $\mathbb{C}$, à chaque comoule $A_\bullet$ sur Ω^* correspond une pseudovariable $Z(A_\bullet)$:

$$A_\bullet \rightarrow Z(A_\bullet) = \sum A_\omega Z^\omega \quad (\omega \text{ multindice})$$

et que cette application $M.(\Omega^*) \rightarrow \Delta'(1, \Omega)$ est un isomorphisme d'algèbre à composition. Bien que dans ce cas les comoules fassent simplement figure de coordonnées de pseudovariables, on a souvent intérêt à distinguer les deux notions.

Comoules sur un ensemble ponctuel :

Si $\Omega = \{\omega\}$ avec $\omega \neq 0$, l'algèbre à composition des comoules sur Ω s'identifie à l'algèbre à composition $\mathbb{C} [e^{-\omega z}]$.

Passons maintenant aux moules, sur lesquels il y a plus à dire.

Moules et dérivations étrangères :

Soit Ω^* un sous-groupe discret de $\mathbb{C}$ privé du point 0. Pour tout moule $A^\bullet$ sur Ω^* posons :

$$(4b8) \quad \Delta(A^\bullet) = \sum A^\omega \Delta_\omega \quad (\omega \text{ multindice})$$

$$(4b9) \quad T(A^\bullet) \Delta_{\omega_0} = \sum_{\|\omega\|=\omega_0} A^\omega \Delta_\omega \quad (\omega_0 \text{ indice simple; } \omega \text{ multindice})$$

Par multilinéarité, (4b9) induit un endomorphisme de l'algèbre des séries infinies de dérivations étrangères et on a les relations suivantes :

$$(4b10) \quad \Delta(B^\bullet) \Delta(A^\bullet) = \Delta(A^\bullet \times B^\bullet)$$

$$(4b11) \quad T(B^\bullet) T(A^\bullet) = T(A^\bullet \circ B^\bullet)$$

$$(4b12) \quad T(B^\bullet) \Delta(A^\bullet) = \Delta(A^\bullet \times B^\bullet)$$

qui permettent d'interpréter les opérations sur les moules en termes d'opérations sur les dérivations étrangères. Toutefois, même pour un Ω^* de cette forme, il est souvent impératif de distinguer les deux notions.

Moules sur le groupe trivial.

Lorsque $\Omega = \{0\}$ l'application

$$(4b13) \quad A^\bullet \rightarrow A^\emptyset + \tau A^0 + \tau^2 A^{0,0} + \tau^3 A^{0,0,0} + \dots$$

est un isomorphisme de l'algèbre à composition des moules sur Ω dans l'algèbre à composition $\mathbb{C}[[\tau]]$.

Moules symétriques et moules alternés.

Définition 4b1 :

Un moule $A^\bullet$ est dit symétrique si $A^\emptyset = 1$ et si

$$(4b14) \quad \sum_{\omega', \omega'' < \omega} A^\omega = A^{\omega'} A^{\omega''} \quad (\text{pour tous multindices } \omega', \omega'').$$

Un moule $A^\bullet$ est dit alterné si $A^\emptyset = 0$, si $A^\omega \neq 0$ pour $n(\omega) = 1$ et si

$$(4b15) \quad \sum_{\omega', \omega'' < \omega} A^\omega = 0 \quad (\text{pour tous multindices } \omega', \omega'' \text{ non vides})$$

Dire qu'un moule $A^\bullet$ est symétrique (alterné) ne signifie donc pas

du tout que les applications $(\omega_1, \dots, \omega_n) \rightarrow A^{\omega_1, \dots, \omega_n}$ soient symétriques (alternées) au sens usuel.

Si Ω est un réseau discret de $\mathbb{C}$ et si on considère les moules de $M^*(\Omega^*)$, on a une interprétation simple de la symétrie et de l'alternance.

En effet, sous ces conditions, on vérifie les équivalences :

$$\left\{ \begin{array}{l} A^* \text{ symétrique} \iff \\ \Delta(A^*) \text{ est un automorphisme formel, i.e. } \sigma \Delta(A^*) = \Delta(A^*) \otimes \Delta(A^*) \\ A^* \text{ alterné} \iff \\ \Delta(A^*) \text{ est une dérivation formelle, i.e. } \sigma \Delta(A^*) = 1 \otimes \Delta(A^*) + \Delta(A^*) \otimes 1 \iff \\ T(A^*) \text{ transforme toute dérivation en dérivation} \iff \\ \text{pour tous multiindices } \omega^1, \omega^2 \neq \emptyset, \text{ la somme } \sum_{\omega^1, \omega^2 \leq \omega} A^{\omega} \Delta_{\omega} \text{ est une} \\ \text{dérivation.} \end{array} \right.$$

Proposition 4b3 :

L'inverse multiplicatif d'un moule symétrique est symétrique. L'inverse de composition d'un moule alterné est alterné. En outre, on a les lois de stabilité suivantes :

$$\begin{array}{lll} (4b16) \left\{ \begin{array}{l} A^* = \exp B^* \\ \text{sym} \quad \text{alt} \end{array} \right. & (4b17) \left\{ \begin{array}{l} A^* \times B^* = C^* \\ \text{sym} \quad \text{sym} \quad \text{sym} \end{array} \right. & (4b18) \left\{ \begin{array}{l} A^* \circ B^* = C^* \\ \text{alt} \quad \text{alt} \quad \text{alt} \end{array} \right. \\ (4b19) \left\{ \begin{array}{l} B^* \times A^* \times B^{*-1} = C^* \\ \text{sym} \quad \text{alt} \quad \text{sym} \quad \text{alt} \end{array} \right. & (4b20) \left\{ \begin{array}{l} A^* \times B^* - B^* \times A^* = C^* \\ \text{alt} \quad \text{alt} \quad \text{alt} \quad \text{alt} \quad \text{alt} \end{array} \right. & (4b21) \left\{ \begin{array}{l} A^* \circ B^* = C^* \\ \text{alt} \quad \text{alt} \quad \text{alt} \end{array} \right. \end{array}$$

Ces relations se démontrent soit par des arguments combinatoires directs, soit en utilisant les caractérisations de la symétrie et de l'alternance d'un moule M^* au moyen de $\Delta(M^*)$ et $T(M^*)$.

Groupe symétrique et groupe alterné.

Il résulte de ce qui précède que l'ensemble $M^*_{\text{sym}}(\Omega)$ des

modules symétriques, muni de la multiplication, est un sous-groupe (non distingué) de $M_x^*(\Omega)$ et que l'ensemble $M_{alt}^*(\Omega)$ des modules alternés, muni de la composition, est un sous-groupe (non distingué) de $M_o^*(\Omega)$.

Les groupes symétrique et alterné nous serviront beaucoup dans la suite, le premier pour étudier les deux représentations canoniques des pseudo-variables, le second pour passer de l'une à l'autre de ces représentations.

On vérifie que l'inverse (multiplicatif) B^* d'un élément A^* du groupe symétrique est donné par :

$$B^\phi = A^\phi = 1 ; B^{\omega_1} = -A^{\omega_1} ; B^{\omega_1, \omega_2} = A^{\omega_2, \omega_1} ; \dots ; B^{\omega_1, \dots, \omega_n} = (-1)^n A^{\omega_n, \dots, \omega_1}$$

soit en abrégé

$$(4b22) \quad B^\omega = (-1)^{n(\omega)} A^{\tilde{\omega}} \quad (\tilde{\omega} \text{ symétrique de } \omega)$$

Il n'y a pas de formule simple pour l'inverse (de composition) B^* d'un élément A^* du groupe alterné. Dans le cas où $A^\omega = 1$ pour $n(\omega) = 1$, les premiers termes sont :

$$\begin{cases} B^\phi = 0 ; B^{\omega_1} = 1 ; B^{\omega_1, \omega_2} = -A^{\omega_1, \omega_2} \\ B^{\omega_1, \omega_2, \omega_3} = -A^{\omega_1, \omega_2, \omega_3} + A^{\omega_1 + \omega_2, \omega_3} A^{\omega_1, \omega_2} + A^{\omega_1, \omega_2 + \omega_3} A^{\omega_2, \omega_3} ; \text{ etc...} \end{cases}$$

De plus, si A^* est alterné, on a toujours $A^{\omega_n, \dots, \omega_1} = (-1)^{n+1} A^{\omega_1, \dots, \omega_n}$, soit en abrégé :

$$(4b23) \quad A^{\tilde{\omega}} = (-1)^{1+n(\omega)} A^\omega \quad (\tilde{\omega} \text{ symétrique de } \omega)$$

Le centre du groupe symétrique est réduit à l'élément neutre 1^* , mais le centre du groupe alterné n'est pas réduit à l'élément neutre I^* car il est isomorphe à $\mathbb{C}$ additif et comprend tous les modules $J^*(\tau)$ définis par :

$$(4b24) \quad J_{\omega}^{\omega}(\tau) = e^{\tau \omega} \quad (\text{resp } 0) \quad \text{si} \quad n(\omega) = 1 \quad (\text{resp } \neq 1)$$

où ω est un multiindice et τ un paramètre complexe.

Section 4c : Les huit moules fondamentaux.

Nous allons dans cette section présenter plusieurs exemples de moules (sur le groupe $\Omega = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{Z}$) en les choisissant parmi ceux qui reviennent le plus souvent dans les applications. Ces moules se répartissent en différents types, types qu'il convient de définir d'emblée, afin de mettre un peu d'ordre dans l'énumération qui va suivre.

En premier lieu, tous les moules que nous allons étudier se trouvent être soit symétriques, soit alternés. Symétrie et alternance ont été définies à la section précédente. Rappelons que ces notions sont stables pour la multiplication et la composition respectivement et qu'elles n'ont rien à voir avec les notions usuelles d'application symétriques et alternées.

En second lieu, la plupart des moules que nous allons introduire dépendent d'une manière bien particulière des indices. D'une façon précise, ils revêtent la plupart du temps l'une des trois formes suivantes :

$$(4c1) \quad \begin{cases} M^{\omega_1, \dots, \omega_n} = \text{polynôme en } \varphi(\omega_1), \varphi(\omega_2), \dots, \varphi(\omega_n) & (\text{type } \underline{\text{séparé}}) \\ M^{\omega_1, \dots, \omega_n} = \text{polynôme en } \varphi(\omega_1), \varphi(\omega_1 + \omega_2), \dots, \varphi(\omega_1 + \omega_2 + \dots + \omega_n) & (\text{type } \underline{\text{somme}}) \\ M^{\omega_1, \dots, \omega_n} = \text{polynôme en } \varphi(\omega_1), \varphi(\omega_1 - \omega_2), \dots, \varphi(\omega_1 - \omega_2 + \dots - \omega_n) & (\text{type } \underline{\text{différence}}) \end{cases}$$

pour une fonction φ qui elle-même peut prendre deux formes :

$$(4c2) \quad \begin{cases} \varphi(x) = \frac{1}{x} & (\text{type } \underline{\text{polaire}}) \\ \varphi(x) = \delta(x) = \frac{x}{|x|} = \text{signe}(x) & (\text{type } \underline{\text{plat}}) \end{cases}$$

Les types somme et différence tiennent leur nom des transformations σ et δ qu'on définit sur les multiindices :

$$(4c3) \quad \begin{cases} \sigma(\omega_1, \dots, \omega_n) = (\omega_1, \omega_1 + \omega_2, \dots, \omega_1 + \omega_2 + \dots + \omega_n) \\ \delta(\omega_1, \dots, \omega_n) = (\omega_1, \omega_2 - \omega_1, \dots, \omega_n - \omega_{n-1}) \end{cases}$$

et qui sont manifestement inverses l'une de l'autre : $\sigma\delta = \delta\sigma = 1$.

Définition et propriétés des huit moules fondamentaux :

Nous rencontrerons en fin de section quelques moules de type séparé, mais nous allons commencer par les moules de type somme ou différence. Ce sont les plus intéressants car, si on leur impose d'autres conditions (telles que symétrie ou alternance, polarité ou platitude), ces moules se trouvent déterminés par leur type.

Nous allons donc pour l'instant introduire les huit moules, dits moules fondamentaux, qui illustrent toutes les combinaisons possibles :

(symétrique/alterné) $\times$ (somme/différence) $\times$ (polaire/plat)

et énoncer les principales propriétés de ces moules. Les démonstrations, de nature combinatoire, sont toutes laissées au lecteur.

Commençons par les quatre moules de type polaire. Ceux-ci ne sont évidemment définis que presque partout, à savoir pour les valeurs du multi-indice ω qui n'annulent pas les dénominateurs (*)

Lemme 4c1. Le moule $\Gamma^\bullet$

Les relations

$$(4c4) \quad \Gamma^\phi = 1 \quad \text{et} \quad \Gamma^{\omega_1, \dots, \omega_n} = \frac{1}{\omega_1(\omega_1 + \omega_2) \dots (\omega_1 + \omega_2 + \dots + \omega_n)}$$

(*) pour leur définition partout, voir l'exercice 4c1.

définissent un moule symétrique de type somme-polaire. C'est, à un facteur près, le seul moule symétrique de ce type.

L'application $(\omega_1, \dots, \omega_n) \rightarrow \Gamma^{\omega_1, \dots, \omega_n}$ n'est évidemment pas symétrique. La symétrie est ici celle des moules. Elle se traduit par les identités en ω^1, ω^2 :

$$\Gamma^{\omega^1} \Gamma^{\omega^2} = \sum_{\omega^1, \omega^2 < \omega} \Gamma^{\omega} \quad (\omega, \omega^1, \omega^2 \text{ multiindices})$$

qui s'écrivent par exemple, pour $n(\omega^1) = n(\omega^2) = 2$:

$$\Gamma^{\omega_1, \omega_2} \Gamma^{\omega_3, \omega_4} = \begin{cases} \Gamma^{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4} + \Gamma^{\omega_1, \omega_3, \omega_2, \omega_4} + \Gamma^{\omega_3, \omega_1, \omega_2, \omega_4} \\ + \Gamma^{\omega_1, \omega_3, \omega_4, \omega_2} + \Gamma^{\omega_3, \omega_1, \omega_4, \omega_2} + \Gamma^{\omega_3, \omega_4, \omega_1, \omega_2} \end{cases}$$

Lemme 4c2. Le moule $\Xi^\bullet$

Les relations

$$(4c5) \quad \Xi^\bullet = 0 \quad \text{et} \quad \Xi^{\omega_1, \dots, \omega_n} = \frac{\delta(\omega_1 + \dots + \omega_n)}{\omega_1(\omega_1 + \omega_2) \dots (\omega_1 + \dots + \omega_{n-1})}$$

définissent un moule alterné de type somme-polaire. C'est, à un facteur près, le seul moule alterné de ce type.

δ est le dirac. Quand $\Omega = \mathbb{Z}$, le moule $\Xi^\bullet$ n'offre pas de difficulté d'interprétation. Quand $\Omega = \mathbb{R}$ au contraire, ce même moule doit s'interpréter comme distribution et il y a des précautions à prendre pour assurer l'alternance (voir ci-après).

Lemme 4c3. Le moule $X^\bullet$.

Les relations

$$(4c6) \quad X^\phi = 1 \quad \text{et} \quad X^{\omega_1, \dots, \omega_n} = \frac{1}{\omega_1(\omega_2 - \omega_1)(\omega_3 - \omega_2) \dots (\omega_n - \omega_{n-1})}$$

définissent un moule symétrique de type différence-polaire. C'est, à un facteur près, le seul moule symétrique de ce type.

Lemme 4c4. Le moule $Y^\bullet$

Les relations

$$(4c7) \quad Y^\phi = 0 \quad \text{et} \quad Y^{\omega_1, \dots, \omega_n} = \frac{1}{(\omega_2 - \omega_1)(\omega_3 - \omega_2) \dots (\omega_n - \omega_{n-1})}$$

définissent un moule alterné de type différence-polaire. C'est, à un facteur près, le seul moule alterné de ce type.

Introduisons maintenant les quatre moules de type plat. Eux aussi ne sont définis que presque partout, puisqu'ils font intervenir la fonction $\Delta(x) = \text{signe}(x)$ qui n'est définie que pour $x \neq 0$. Il existe en général une manière unique de définir partout ces moules tout en conservant leur propriété de symétrie ou d'alternance. Nous n'entrerons pas ici dans ces considérations. Signalons simplement que le passage du "presque partout" au "partout" ne s'effectue pas nécessairement en posant $\Delta(0) = 0$ dans les formules de définition (*)

Lemme 4c5. Le moule $S^\bullet$

Si p (resp. q) désigne le nombre de croissances (de décroissances) dans la suite

$$(0, \omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n)$$

alors les relations

(*) voir exercice 4c2.

$$(4c8) \quad S^\phi = 1 \quad \text{et} \quad S^{\omega_1, \dots, \omega_n} = (-1)^q \frac{(2p)! (2q)!}{p! q! n!}$$

définissent un moule symétrique de type différence-plat. C'est, à un facteur près, le seul moule symétrique de ce type (*)

La symétrie du moule $S^\bullet$ demande évidemment à être vérifiée. Au contraire, son appartenance au type différence-plat est à peu près manifeste sur la formule (4c8), sans qu'on ait à exprimer $S^{\omega_1, \dots, \omega_n}$ en fonction de $\Delta(\omega_i)$ et des $\Delta(\omega_j - \omega_{j-1})$. Nous allons toutefois donner cette expression, car on en aura besoin pour calculer la transformée de Fourier du moule $S^\bullet$.

Lemme 4c5bis. Expression analytique du moule $S^\bullet$.

Si on note S_j la somme des produits j à j des n nombres suivants

$$\Delta(t_1), \Delta(t_2 - t_1), \dots, \Delta(t_n - t_{n-1})$$

et si on pose

$$\alpha_{2n} = \frac{(2n)!}{n! n! 2^{2n}}$$

alors on a les développements :

$$(4c9) \quad S^{\omega_1, \dots, \omega_n} = \alpha_0 S_n + \alpha_2 S_{n-2} + \alpha_4 S_{n-4} + \dots \quad |||$$

Ces développements sont évidemment finis. Ainsi :

$$\left\{ \begin{array}{l} S^\phi = 0 ; \quad S^{\omega_1} = \Delta(\omega_1) ; \quad S^{\omega_1, \omega_2} = \Delta(\omega_1) \Delta(\omega_2 - \omega_1) + \frac{1}{2} ; \\ S^{\omega_1, \omega_2, \omega_3} = \Delta(\omega_1) \Delta(\omega_2 - \omega_1) \Delta(\omega_3 - \omega_2) + \frac{1}{2} (\Delta(\omega_1) + \Delta(\omega_2 - \omega_1) + \Delta(\omega_3 - \omega_2)) \\ \text{etc...} \end{array} \right.$$

(*) Il y a une petite réserve : voir exercice 4c3.

Lemme 4c6. Le moule $T^\bullet$

Si p_* (resp. q_*) désigne le nombre de croissances (décroissances) dans la suite :

$$(\omega_1, \dots, \omega_n)$$

alors les relations

$$(4c10) \quad T^\phi = 0 \quad \text{et} \quad T^{\omega_1, \dots, \omega_n} = (-1)^{q_*} \frac{p_*! q_*!}{n!}$$

définissent un moule alterné de type différence-plat. C'est à un facteur près le seul moule alterné de ce type (*).

Le caractère alterné de $T^\bullet$ n'est pas évident, mais son type différence plat l'est. Pourtant, ici encore, en vue de la transformation de Fourier, nous donnons $T^{\omega_1, \dots, \omega_n}$ en fonction des $\Delta(\omega_i - \omega_{i-1})$.

Lemme 4c6bis. Expression du moule $T^\bullet$.

Si on note S_j^* la somme des produits j à j des $(n-1)$ nombres suivants :

$$\Delta(\omega_2 - \omega_1), \Delta(\omega_3 - \omega_2), \dots, \Delta(\omega_n - \omega_{n-1})$$

on a les développements :

$$(4c11) \quad T^{\omega_1, \dots, \omega_n} = 2^{1-n} \left(S_{n-1}^* + \frac{1}{3} S_{n-3}^* + \frac{1}{5} S_{n-5}^* + \dots \right)$$

Ces développements sont finis. Ainsi :

$$T^\phi = 0; T^{\omega_1} = \frac{1}{2} \Delta(\omega_2 - \omega_1); T^{\omega_1, \omega_2} = \frac{1}{2} \Delta(\omega_2 - \omega_1); T^{\omega_1, \omega_2, \omega_3} = \frac{1}{4} \Delta(\omega_2 - \omega_1) \Delta(\omega_3 - \omega_2) + \frac{1}{12};$$

(*) Ici encore, il y a une petite réserve : voir exercice 4c3.

$$T^{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4} = \frac{1}{8} \Delta(\omega_2 - \omega_1) \Delta(\omega_3 - \omega_2) \Delta(\omega_4 - \omega_3) + \frac{1}{24} (\Delta(\omega_2 - \omega_1) + \Delta(\omega_3 - \omega_2) + \Delta(\omega_4 - \omega_3))$$

etc...

Avant de passer aux deux derniers moules fondamentaux, il nous faut introduire des coefficients $\chi_{\pm}(n)$, liés aux nombres de Bernouilli et ainsi définis :

$$(4c12) \quad \sum x^n \chi_+(n) = \frac{2}{e^x + e^{-x}} = \frac{1}{\operatorname{ch} x}$$

$$(4c13) \quad \sum x^n \chi_-(n) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \operatorname{th} x$$

Les $\chi_+(n)$ (resp. $\chi_-(n)$) sont nuls pour n impair (resp. pair) et leur signe est fonction de la valeur modulo 4 de l'argument n . Ainsi :

$$\begin{cases} \chi_+(0) = 1 ; \chi_+(2) = -\frac{1}{2} ; \chi_+(4) = \frac{5}{4!} ; \chi_+(6) = -\frac{61}{6!} ; \chi_+(8) = \frac{132}{8!} = \frac{1}{320} \text{ etc...} \\ \chi_-(1) = 1 ; \chi_-(3) = -\frac{1}{3} ; \chi_-(5) = \frac{2}{15} ; \chi_-(7) = -\frac{17}{315} \text{ etc...} \end{cases}$$

Lemme 4c7. Le moule $P^\bullet$.

Si on pose

$$\Delta_{n_j} = \Delta(\omega_1 + \omega_2 + \dots + \omega_{n_j}) = \operatorname{signe}(\omega_1 + \omega_2 + \dots + \omega_{n_j})$$

alors les relations

$$(4c14) \quad \begin{cases} P^\emptyset = 1 \\ P^{\omega_1, \dots, \omega_n} = \sum_{1 \leq n_1 \leq n_2 \leq \dots \leq n_j \leq n} \Delta_{n_1} \Delta_{n_2} \dots \Delta_{n_j} \chi_-(n_1) \chi_-(n_2 - n_1) \chi_-(n_3 - n_2) \dots \chi_-(n_j - n_{j-1}) \chi_+(n - n_j) \end{cases}$$

définissent un moule symétrique de type somme-plat. C'est à un facteur près le seul moule symétrique de ce type.

Que $P^\bullet$ soit du type somme-plat ressort de sa définition même, mais le caractère symétrique n'est pas évident. Explicitons P^ω pour $n(\omega) \leq 5$.

$$\left\{ \begin{array}{l} P^\emptyset = 1 ; P^{\omega_1} = \delta(\omega_1) ; P^{\omega_1, \omega_2} = \delta(\omega_1) \delta(\omega_1 + \omega_2) - \frac{1}{2} ; \\ P^{\omega_1, \omega_2, \omega_3} = \delta(\omega_1) \delta(\omega_1 + \omega_2) \delta(\omega_1 + \omega_2 + \omega_3) - \frac{1}{2} \delta(\omega_1) - \frac{1}{2} \delta(\omega_1 + \omega_2 + \omega_3) ; \\ P^{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4} = \left\{ \begin{array}{l} \delta(\omega_1) \delta(\omega_1 + \omega_2) \delta(\omega_1 + \omega_2 + \omega_3) \delta(\omega_1 + \omega_2 + \omega_3 + \omega_4) - \frac{1}{4} \delta(\omega_1) \delta(\omega_1 + \omega_2) \\ - \frac{1}{3} \delta(\omega_1) \delta(\omega_1 + \omega_2 + \omega_3 + \omega_4) - \frac{1}{3} \delta(\omega_1 + \omega_2 + \omega_3) \delta(\omega_1 + \omega_2 + \omega_3 + \omega_4) + \frac{5}{24} \end{array} \right. \\ \text{etc...} \end{array} \right.$$

Lemme 4c8. Le moule $Q^\bullet$

Si δ désigne le dirac et si on conserve les notations δ_{n_j} du lemme précédent, alors les relations :

$$(4c15) \left\{ \begin{array}{l} Q^\emptyset = 0 \\ Q^{\omega_1, \dots, \omega_n} = \delta(\omega_1 + \dots + \omega_n) \sum_{1 \leq n_1 < n_2 < \dots < n_j \leq n} \delta_{n_1} \delta_{n_2} \dots \delta_{n_j} \chi(n_1) \chi(n_2 - n_1) \chi(n_3 - n_2) \dots \chi(n_j - n_{j-1}) \chi(n - n_j) \end{array} \right.$$

définissent un moule alterné de type somme-plat. C'est à un facteur près le seul moule alterné de ce type.

Que $Q^\bullet$ soit du type somme-plat ressort de sa définition même, mais le caractère alterné n'est pas évident. Explicitons Q^ω pour $n(\omega) \leq 5$:

$$\left\{ \begin{array}{l} Q^\emptyset = 0 ; Q^{\omega_1} = \delta(\omega_1) ; Q^{\omega_1, \omega_2} = \delta(\omega_1 + \omega_2) \delta(\omega_1) ; \\ Q^{\omega_1, \omega_2, \omega_3} = \delta(\omega_1 + \omega_2 + \omega_3) \left(\delta(\omega_1) \delta(\omega_1 + \omega_2) - \frac{1}{3} \right) ; \\ Q^{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4} = \delta(\omega_1 + \omega_2 + \omega_3 + \omega_4) \left(\delta(\omega_1) \delta(\omega_1 + \omega_2) \delta(\omega_1 + \omega_2 + \omega_3) - \frac{1}{3} \delta(\omega_1) - \frac{1}{3} \delta(\omega_1 + \omega_2 + \omega_3) \right) \\ Q^{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5} = \delta(\omega_1 + \omega_2 + \omega_3 + \omega_4 + \omega_5) \left\{ \begin{array}{l} \delta(\omega_1) \delta(\omega_1 + \omega_2) \delta(\omega_1 + \omega_2 + \omega_3) \delta(\omega_1 + \omega_2 + \omega_3 + \omega_4) \\ - \frac{1}{3} \delta(\omega_1) \delta(\omega_1 + \omega_2) - \frac{1}{3} \delta(\omega_1) \delta(\omega_1 + \omega_2 + \omega_3 + \omega_4) \\ - \frac{1}{3} \delta(\omega_1 + \omega_2 + \omega_3) \delta(\omega_1 + \omega_2 + \omega_3 + \omega_4) + \frac{2}{15} \end{array} \right. \\ \text{etc...} \end{array} \right.$$

Comme le moule $\overline{\omega}$, le moule $Q^\bullet$ n'offre pas de difficulté d'interprétation quand $\Omega = \mathbb{Z}$. Quand $\Omega = \mathbb{R}$ au contraire, $Q^\bullet$ doit s'interpréter en termes de distributions. On vérifie d'ailleurs, dans ce cas, entre les deux moules de type somme-plat, la relation :

$$(4c16) \quad P^{\omega_1, \dots, \omega_n} = \frac{\partial}{\partial \omega_n} Q^{\omega_1, \dots, \omega_n}$$

valable au sens des distributions et parallèle à la relation

$$(4c17) \quad \overline{\omega}^{\omega_1, \dots, \omega_n} = \delta(\omega_1 + \dots + \omega_n) (\omega_1 + \dots + \omega_n) \Gamma^{\omega_1, \dots, \omega_n}$$

qui rattache l'un à l'autre les deux moules de type somme-polaire.

Nous allons voir maintenant qu'à condition d'envisager comme des distributions les huit moules fondamentaux qu'on vient d'introduire, ceux-ci se correspondent deux à deux par la transformation de Fourier. Commençons par préciser ces deux notions.

Transformation de Fourier des moules et moules-distributions.

Pour tout moule scalaire $M^\bullet$ ($\omega \rightarrow M^\omega$; ω multiindice) sur le groupe $\Omega = \mathbb{R}$, on appelle transformée de Fourier et on note $\mathcal{F}M^\bullet$ ($t \rightarrow \mathcal{F}M^t$; t multiindice) le moule scalaire sur $\mathbb{R}$ défini par :

$$(4c18) \quad \mathcal{F}M^\phi = M^\phi$$

$$(4c18bis) \quad \mathcal{F}M^{t_1, \dots, t_n} = \int_{\mathbb{R}^n} e^{2\pi i (\omega_1 t_1 + \dots + \omega_n t_n)} M^{\omega_1, \dots, \omega_n} d\omega_1 \dots d\omega_n$$

pourvu qu'on puisse donner un sens (comme fonction ou comme distribution) à l'intégrale du membre de droite.

La transformation de Fourier respecte la multiplication des moules :

$$(4c19) \quad \mathcal{F} (M^* \times N^*) = (\mathcal{F} M^*) \times (\mathcal{F} N^*)$$

et elle transmute la composition ordinaire $\circ$ des moules en une composition convolutive, notée $\hat{\circ}$:

$$(4c20) \quad \mathcal{F} (M^* \circ N^*) = (\mathcal{F} M^*) \hat{\circ} (\mathcal{F} N^*)$$

et définie par :

$$(4c21) \quad (A \hat{\circ} B)^t = \sum_{t^1 \dots t^s = t} \int_{\mathbb{R}^s} A^{t_1, t_2, \dots, t_s} B^{t^1 - \tau_1} B^{t^2 - \tau_2} \dots B^{t^s - \tau_s} d\tau_1 \dots d\tau_s$$

le $\sum$ étant étendu à toutes les 2^{s-1} factorisations du multiindice

$k = (t_1, \dots, t_n)$ en produit de facteurs $k^j = (t_{1+n_{j-1}}, t_{2+n_{j-1}}, \dots, t_{n_j})$ et la notation abusive $k^j - \tau_j$ désignant le multiindice $(t_{1+n_{j-1}} - \tau_j, t_{2+n_{j-1}} - \tau_j, \dots, t_{n_j} - \tau_j)$.

On sait que lorsque les $M^{\omega_1, \dots, \omega_n}$ sont des fonctions sur $\mathbb{R}^n$, la symétrie ou l'alternance du moule M^* se traduisent par les relations (4b14) ou (4b15) respectivement. Plus généralement, lorsque les $M^{\omega_1, \dots, \omega_n}$ sont des distributions sur $\mathbb{R}^n$, le moule M^* est dit symétrique (resp. alterné) si, pour toute paire d'entiers n_1, n_2 et pour tout choix de fonctions d'épreuve à une variable $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{n_1+n_2}$, indéfiniment dérivables et à support compact sur $\mathbb{R}$, on a l'identité :

$$\sum_{\omega^1, \omega^2 < \omega} \int \varphi(\omega) M^{\omega^1 \omega^2} = \left(\int \varphi(\omega^1) M^{\omega^1} \right) \left(\int \varphi(\omega^2) M^{\omega^2} \right) \quad (\text{resp. } = 0)$$

où $n(\omega^1) = n_1$, $n(\omega^2) = n_2$ et $\varphi(\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_{n_1+n_2}) = \varphi_1(\omega_1) \varphi_2(\omega_2) \dots \varphi_{n_1+n_2}(\omega_{n_1+n_2})$

Moyennant cette définition, on vérifie que la symétrie (l'alternance) d'un moule équivaut dans tous les cas à la symétrie (alternance) du moule transformé de Fourier. Lorsqu'un moule-distribution M^* est tel que les distributions M^ω possèdent des densités, notées $\text{dens}(M^\omega)$, la symétrie

(alternance) de $M^\bullet$ implique la symétrie (alternance) presque partout de $\text{dens}(M^\bullet)$, mais l'inverse est évidemment faux. Il peut même arriver que $\text{dens}(M^\bullet)$ et $\text{dens}(\mathcal{F}M^\bullet)$ soient simultanément symétriques (alternés) sans que ni $M^\bullet$ ni $\mathcal{F}M^\bullet$ ne le soient.

Bien sûr, la transformation de Fourier $\mathcal{F}$ des moules possède une inverse $\mathcal{F}^{-1}$ qui coïncide avec la conjuguée $\overline{\mathcal{F}}$:

$$(4c22) \quad \mathcal{F}^{-1} M^{t_1, \dots, t_n} = \overline{\mathcal{F}} M^{t_1, \dots, t_n} = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i(\omega_1 t_1 + \dots + \omega_n t_n)} M^{t_1, \dots, t_n} dt_1 \dots dt_n$$

Tout comme $\mathcal{F}, \overline{\mathcal{F}}$ respecte la multiplication et transforme la composition ordinaire $\circ$ en composition convolutive $\hat{\circ}$.

L'opérateur somme, l'opérateur différence, l'involution et la transformation de Fourier.

Nous avons rencontré en (4c3) deux opérations inverses sur les multi-indices, à savoir la somme ∇ et la différence δ . Nous connaissons aussi l'opération involutive $\omega \rightarrow \tilde{\omega}$:

$$(4c23) \quad (\omega_1, \dots, \omega_n) \rightarrow \overbrace{(\omega_1, \dots, \omega_n)} = (\omega_n, \dots, \omega_1)$$

En conformité avec cette terminologie, introduisons trois opérateurs sur les moules, opérateurs que nous noterons $[\nabla], [\delta], [\sim]$ et qui agissent ainsi :

opérateur somme	$[\nabla]$:	$M^\omega \rightarrow M^{\nabla\omega}$
opérateur différence	$[\delta]$:	$M^\omega \rightarrow M^{\delta\omega}$
opérateur involution	$[\sim]$:	$M^\omega \rightarrow (-1)^{n(\omega)} M^{\tilde{\omega}}$ (attention au signe)

Ce sont trois opérateurs linéaires. L'involution $[\sim]$ respecte la multiplication et la composition des moules. De plus, si $M^\bullet$ est un moule symétrique

et si M'^{-1} désigne son inverse multiplicatif, la relation (4b22) s'écrit

$$(4c24) \quad [\sim] M' = M'^{-1} \quad (M' \text{ symétrique})$$

Pareillement, si M' est un moule alterné, la relation (4b23) s'écrit :

$$(4c25) \quad [\sim] M' = -M' \quad (M' \text{ alterné})$$

Ainsi, l'involution $[\sim]$ inverse multiplicativement les moules symétriques et inverse additivement les moules alternés.

Avec la transformation de Fourier $\mathcal{F}$, cela nous fait quatre opérateurs linéaires sur les moules : $\mathcal{F}$, $[\sim]$, $[\sigma]$, $[\delta]$. Toutes leurs relations mutuelles se déduisent des trois lignes suivantes, de vérification immédiate

$$(4c26) \quad \begin{cases} [\sim] [\sim] = 1 & ; \mathcal{F} \mathcal{F} \mathcal{F} \mathcal{F} = 1 \\ [\sigma] [\delta] = 1 & ; [\sim] \mathcal{F} = \mathcal{F} [\sim] \\ \mathcal{F} [\delta] = [\sim] [\sigma] [\sim] \mathcal{F} & ; \mathcal{F} [\sigma] = [\sim] \delta [\sim] \mathcal{F} \end{cases}$$

Bien entendu, tout ceci reste valable si on substitue $\overline{\mathcal{F}}$ à $\mathcal{F}$.

Les huit moules fondamentaux et la transformation de Fourier.

C'est la dernière ligne de (4c26) qui nous intéresse ici. Elle implique en effet que :

Lemme 4c9.

A l'involution $[\sim]$ près, la transformation de Fourier échange les moules de type somme et les moules de type différence.

D'autre part, en notant comme d'habitude $\Delta(x)$ la fonction signe (x) , on a :

$$(4c27) \quad (\mathcal{F} \cdot \delta)(x) = -\frac{1}{\pi i} \text{v.p.} \frac{1}{x} = -\frac{1}{\pi i} \text{valeur principale de } \frac{1}{x}$$

où le second membre est la distribution bien connue :

$$(4c28) \quad \left(v.p. \frac{1}{x}, \varphi \right) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{|x| > \varepsilon} \varphi(x) \frac{dx}{x}$$

En se reportant à (4c1) et (4c2), on voit que les relations ci-dessus impliquent :

Lemme 4c10 :

La transformation de Fourier échange les moules de type polaire et les moules de type plat.

Or on a déjà vu que la transformation de Fourier conservait la symétrie et l'alternance des moules. Comme les huit moules fondamentaux sont chacun caractérisés par leur type (*), nous sommes conduits à l'énoncé :

Proposition 4c1 :

Les huit moules fondamentaux, considérés comme moules-distributions sur $\mathbb{R}$, sont échangés deux à deux (***) par la transformation de Fourier. Les moules ainsi échangés sont diamétralement opposés sur le quadrant ci-dessous.

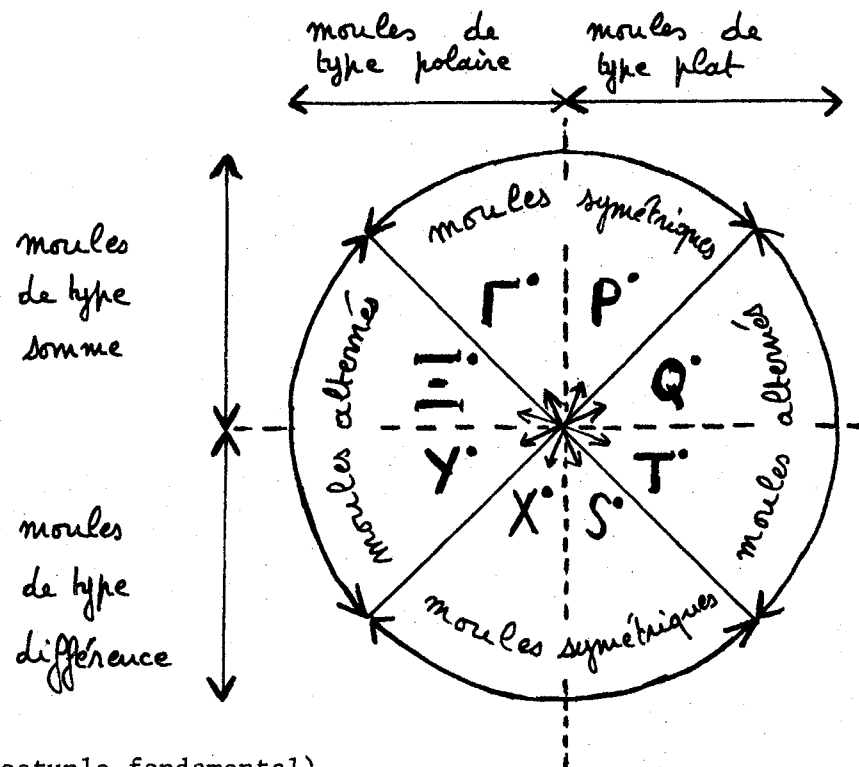


Figure 4c1. (l'octuple fondamental)

(*) avec la réserve de l'exercice 4c3.

(**) à des facteurs $(2\pi i)^n$ près et modulo l'involution $[\sim]$

Les quatre moules de type plat étant des fonctions localement intégrales leur interprétation comme distributions ne pose aucune difficulté. Au contraire, les quatre moules de type polaire ne sont pas localement intégrables. Pour leur associer des distributions, on est amené à prendre des "valeurs principales" et cela peut a priori se faire de plusieurs manières. Toutefois, dans chaque cas, il n'y a qu'une définition qui respecte la symétrie (ou l'alternance) et le type. Pour trouver cette bonne définition, le plus simple est d'ailleurs, précisément, d'interpréter le moule polaire considéré comme transformé de Fourier du moule plat qui lui est apparié.

Par exemple, on prouve que le moule symétrique de type différence-polaire, soit χ^* , considéré comme moule-distribution, agit de la manière indiquée en (7c16). Le lecteur est invité à élucider de même le mode d'action des moules-distributions $\gamma^*, \Gamma^*, \Xi^*$.

Les huit moules fondamentaux sont importants à plus d'un titre. Au chapitre 7, ils interviendront, en conjonction avec d'autres moules (de type séparé), dans les transformées de Fourier des moules hyperlogarithmiques. Au chapitre 16 ils réapparaîtront dans les applications aux algèbres de Lie. Au chapitre 18 on les verra s'introduire dans l'étude des "métamorphoses". Enfin, ils se rattachent à la question des fonctions dites "spéciales".

Autres exemples de moules.

Le moule T_1^*

Le moule alterné T^* a des exponentielles $T_w^* = \exp(w T^*)$

$$(4c29) \quad T_w^{\omega_1, \dots, \omega_n} = \frac{(\omega + p_*) (\omega + p_* - 1) \dots (\omega - q_* + 1) (\omega - q_*)}{n!} \quad \text{presque partout}$$

qui sont importantes, surtout pour w entier. Ce sont des moules symétriques de type différence-plat (*). Pour $w = 1$, on obtient un moule très simple. On calcule en effet que presque partout :

(*) Cela ne contredit qu'en apparence l'unicité du moule S^* . Voir à ce sujet l'exercice 4c3.

$$T_1^\phi = 1 \quad \text{et} \quad T^{\omega_1, \dots, \omega_n} = \begin{cases} 1 & \text{si } \omega_1 < \omega_2 < \dots < \omega_n \\ 0 & \text{dans le cas contraire} \end{cases}$$

On a souvent besoin de définir partout le moule $T_1^\bullet$. Si l'on veut préserver sa symétrie, il n'y a qu'une définition possible, qui est celle-ci :

$$(4c30) \quad T_1^{\omega_1, \dots, \omega_n} = 0 \quad \left(\text{resp} = \frac{1}{n_1! n_2! \dots n_n!} \right)$$

si la suite $(\omega_1, \dots, \omega_n)$ présente au moins une décroissance (resp. si elle est non décroissante et prend n_1 fois sa plus petite valeur, n_2 fois la valeur suivante, etc...).

Le moule $\zeta^\bullet$

Posons $\zeta^\bullet = 1$ et, pour $\omega_1 > 1, \dots, \omega_n > 1$, posons :

$$(4c31) \quad \zeta^{\omega_1, \dots, \omega_n} = \sum_{n_j} T_1^{n_1, \dots, n_n} n_1^{-\omega_1} \dots n_n^{-\omega_n}$$

où $T_1^\bullet$ est le moule symétrique défini partout en (4c30) et considéré ici comme moule sur $\mathbb{Z}$. On vérifie alors que :

(i) pour $R(\omega)$ fixe, la fonction analytique $\omega \rightarrow \zeta^\omega$ admet un prolongement méromorphe à tout $\mathbb{C}^n$.

(ii) le moule $\zeta^\bullet$ ainsi défini presque partout sur $\Omega = \mathbb{C}$ est symétrique

(iii) lorsque les variables $\varepsilon_j = \omega_j - 1$ tendent chacune vers 0, on a $\zeta^{\omega_1, \dots, \omega_n} \sim \Gamma^{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n}$ pour le moule $\Gamma^\bullet$ introduit ci-dessus.

(iiii) l'équation fonctionnelle de la fonction zêta classique n'a pas d'équivalent pour ζ^ω lorsque $R(\omega) > 1$.

Le moule $\zeta^\bullet$ nous servira à la section 12e lors du calcul des invariants holomorphes.

Les moules $\Gamma_{\alpha\beta}^\bullet$

Pour tous $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ les relations :

$$(4c32) \quad \Gamma_{\alpha,\beta}^\phi = 1 \quad \text{et} \quad \Gamma_{\alpha,\beta}^{\omega_1, \dots, \omega_n} = \frac{\beta - \alpha}{(\beta - t_n)(t_n - t_{n-1}) \dots (t_2 - t_1)(t_1 - \alpha)}$$

définissent des moules symétriques $\Gamma_{\alpha,\beta}^\bullet$ qui vérifient :

$$(4c33) \quad \Gamma_{\alpha,\beta}^\bullet \times \Gamma_{\beta,\gamma}^\bullet = \Gamma_{\alpha,\gamma}^\bullet$$

Les moules $R_+^\bullet$ et $R_-^\bullet$ (moules rotationnels)

Soient $E_+^\bullet$ et $E_-^\bullet$ les moules symétriques définis par

$$(4c34) \quad E_\pm^\phi = 1 \quad \text{et} \quad E_\pm^{\omega_1, \dots, \omega_n} = \frac{1}{n!} \Delta_i \pm \omega_j > 0 \text{ pour tout } j \text{ (resp } = 0 \text{ sinon)}$$

D'après (4b17), les moules produits $(E_+^\bullet) \times (E_-^\bullet)$ et $(E_-^\bullet) \times (E_+^\bullet)$ sont symétriques et d'après (4b16) ils admettent pour logarithmes des moules alternés, que nous noterons $R_+^\bullet$ et $R_-^\bullet$ et qualifierons de "rotationnels" en raison du rôle qu'ils jouent à la section 6d. Ce sont deux moules de type séparé-plat.

Ils sont liés par :

$$R_+^{\omega_1, \dots, \omega_n} = (-1)^{n+1} R_-^{\omega_1, \dots, \omega_n}$$

si bien qu'il suffit de calculer $R_+^\bullet$. En notant simplement par leur signe les indices ω_j et en posant pour abrégier $R_+^\bullet = R^\bullet$, on trouve :

$$\begin{aligned} \underline{n(\omega) = 0} & : R^\phi = 0 \\ \underline{n(\omega) = 1} & : R^+ = R^- = 1 \\ \underline{n(\omega) = 2} & : R^{++} = R^{--} = 0 ; R^{+-} = \frac{1}{2} ; R^{-+} = -\frac{1}{2} \\ \underline{n(\omega) = 3} & : \begin{cases} R^{+++} = R^{---} = 0 ; R^{++-} = R^{-+-} = -\frac{1}{6} \\ R^{+-+} = R^{-++} = R^{+--} = R^{--+} = \frac{1}{12} \end{cases} \\ \underline{n(\omega) = 4} & : \begin{cases} R^{++++} = R^{----} = R^{+++ -} = R^{---+} = R^{+---} = R^{-+++} = 0 \\ R^{+++-} = R^{--+-} = R^{+-++} = R^{-+--} = R^{+--+} = R^{-++-} = 0 \\ R^{+--+} = -\frac{1}{12} ; R^{-+ -+} = \frac{1}{12} ; R^{--++} = -\frac{1}{24} ; R^{++--} = \frac{1}{24} \end{cases} \end{aligned}$$

Nous aurons plus tard besoin des transformées de Fourier des moules $R_{\pm}^{\omega}$.
On calcule celles-ci à partir des expressions de $R_{\pm}^{\omega}$ en fonction des $\Delta(\omega_i)$.

Ainsi :

$$(4c35) \quad \begin{cases} R_{\pm}^{\phi} = 0 & ; R_{\pm}^{\omega_1} = 1 & ; R_{\pm}^{\omega_1, \omega_2} = \pm \frac{1}{4} (\Delta(\omega_1) - \Delta(\omega_2)) \\ R_{\pm}^{\omega_1, \omega_2, \omega_3} = \frac{1}{24} (\Delta(\omega_1) \Delta(\omega_2) + \Delta(\omega_2) \Delta(\omega_3) - 2 \Delta(\omega_1) \Delta(\omega_3)) \\ R_{\pm}^{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4} = \pm \frac{1}{192} (\Delta(\omega_2) \Delta(\omega_3) - 1) (\Delta(\omega_1) - \Delta(\omega_4)) \mp \frac{1}{64} (\Delta(\omega_1) \Delta(\omega_4) - 1) (\Delta(\omega_2) - \Delta(\omega_3)) \\ \text{etc...} \end{cases}$$

Moule C^{ω}

Posons $C^{\phi} = 0$, $C^{\omega_1} = 1$ et pour $n(\omega) \geq 2$:

$$(4c36) \quad 2(n(\omega) - 1) C^{\omega} = \sum_{\omega' \omega'' = \omega} \left\{ \frac{n(\omega')}{n(\omega)} - \frac{n(\omega'')}{n(\omega)} \right\} C^{\omega'} C^{\omega''} (\omega', \omega'' \neq \phi)$$

Alors (4c36) définit par récurrence sur $n(\omega)$ un moule C^{ω} dont on montre qu'il est alterné. Ce moule, considéré sur le groupe $\Omega = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, possède une interprétation intéressante (cf. exercice 4c4) et donne une bonne idée de l'alternance d'un moule beaucoup plus complexe, à savoir le moule hyperlogarithmique U^{ω} .

Les moules hyperlogarithmiques.

Ce sont essentiellement les moules $U^{\omega}, V^{\omega}, U_{\pm}^{\omega}, V_{\pm}^{\omega}$. Ils seront définis à la section 6d pour $\Omega = 2\pi i \mathbb{Z}$ et à la section 7b pour $\Omega = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Ils jouent un rôle crucial en théorie des fonctions résurgentes et aussi en théorie de l'itération (*). Ils se rattachent d'ailleurs d'une certaine manière aux moules fondamentaux (**).

(*) cf. sections 13d.

(**) cf. sections 7c.

Section 4d. Les trois comoules fondamentaux.

Définition 4d1 : (Les comoules $\Gamma_{\cdot}, \Gamma_{\langle \cdot \rangle}, \Gamma_{[\cdot]}$)

Les relations :

$$(4d1) \quad \Gamma_{\phi} = 0 \quad \text{et} \quad \Gamma_{\omega_1, \dots, \omega_n} = \omega_1 (\omega_1 + \omega_2) \dots (\omega_1 + \omega_2 + \dots + \omega_{n-1}) \quad (\omega_n \text{ absent!})$$

$$(4d2) \quad \Gamma_{\langle \phi \rangle} = 1 \quad \text{et} \quad \Gamma_{\langle \omega_1, \dots, \omega_n \rangle} = (-\omega_1)(\omega_1 - \omega_2)(\omega_1 + \omega_2 - \omega_3) \dots (\omega_1 + \omega_2 + \dots + \omega_{n-1} - \omega_n)$$

$$(4d3) \quad \Gamma_{[\phi]} = 0 \quad \text{et} \quad \Gamma_{[\omega_1, \dots, \omega_n]} = (\omega_1 - \omega_2)(\omega_1 + \omega_2 - \omega_3) \dots (\omega_1 + \omega_2 + \dots + \omega_{n-1} - \omega_n)$$

définissent trois comoules, dit comoules fondamentaux. Les comoules qui s'en déduisent par l'involution $[\sim]$ sont notés $\widetilde{\Gamma}_{\cdot}, \widetilde{\Gamma}_{\langle \cdot \rangle}, \widetilde{\Gamma}_{[\cdot]}$. On a ainsi :

$$(4d1bis) \quad \widetilde{\Gamma}_{\omega_1, \dots, \omega_n} = (-1)^n \Gamma_{\omega_n, \dots, \omega_1}$$

$$(4d2bis) \quad \widetilde{\Gamma}_{\langle \omega_1, \dots, \omega_n \rangle} = (-1)^n \Gamma_{\langle \omega_n, \dots, \omega_1 \rangle}$$

$$(4d3bis) \quad \widetilde{\Gamma}_{[\omega_1, \dots, \omega_n]} = (-1)^n \Gamma_{[\omega_n, \dots, \omega_1]}$$

Enonçons les principales propriétés des comoules fondamentaux.

Le principe des démonstrations sera indiqué en fin de section.

Il est très commode d'introduire quatre pseudovariables $Z^*, {}^*Z, Z_*, {}^*_Z$, ainsi définies :

$$(4d4) \quad Z^* = I - \sum_{\omega} \Gamma_{\omega} Z^{\omega}$$

$$(4d4bis) \quad {}^*Z = I - \sum_{\omega} \widetilde{\Gamma}_{\omega} Z^{\omega}$$

$$(4d5) \quad Z_* = 1 + \sum_{\omega} \Gamma_{\langle \omega \rangle} Z^{\omega}$$

$$(4d5bis) \quad {}^*Z = 1 + \sum_{\omega} \widetilde{\Gamma}_{\langle \omega \rangle} Z^{\omega}$$

Ici, les sommes sont étendues à tous les multiindices ω . Dans la suite, ∂ désigne comme d'habitude la dérivation des pseudovariables :

$$Z^{\omega} \rightarrow \partial Z^{\omega} = -\|\omega\| Z^{\omega}$$

De même, 1 et I désignent respectivement les pseudovariables "unitaire" et "identique", c'est-à-dire les éléments neutres pour la multiplication et la composition des pseudovariables (cf. section 4a).

Proposition 4d1. (L'inverse de composition du comoule $\Gamma_{\bullet}$)

Les pseudovariables Z^* et *Z , qui sont involuées l'une de l'autre, sont également inverses l'une de l'autre pour la composition des pseudovariables :

$$(4d6) \quad Z^* \circ {}^*Z = I$$

Proposition 4d2. (Lien entre les comoules $\Gamma_{\bullet}$ et $\Gamma_{\langle \cdot \rangle}$)

On a :

$$(4d7) \quad Z_* \cdot \partial Z^* = 1$$

D'où par involution :

$$(4d7bis) \quad {}^*Z \cdot \partial {}^*Z = 1$$

Sous forme explicite, (4d7) se traduit par la relation suivante entre $\Gamma_{\bullet}$ et $\Gamma_{\langle \cdot \rangle}$

$$\Gamma_{\langle \omega \rangle} + \sum_{\omega', \omega'' < \omega} \|\omega'\| \Gamma_{\omega'} \Gamma_{\langle \omega'' \rangle} = 0 \quad (\forall \omega \text{ multiindice})$$

Proposition 4d3. (L'exponentiation du comoule $\Gamma_{\bullet}$)

On a dans l'algèbre des pseudovariabiles, pour tout scalaire α :

$$(4d8) \quad \exp(\alpha(Z^* - I)) = - \sum_{\omega} \Gamma_{\alpha\omega} Z^{\omega} \quad (\omega \text{ multiindice})$$

Il en résulte, dans l'algèbre des comoules :

$$(4d9) \quad \exp(\alpha \Gamma_{\bullet}) = \Gamma_{\alpha\bullet} \quad (\alpha \in \mathbb{C})$$

c'est-à-dire sous forme explicite:

$$(4d9bis) \quad \Gamma_{\alpha, \omega_1, \dots, \omega_n} = \sum_{\delta \geq 1} \frac{\alpha^{\delta}}{\delta!} \sum_{\omega' \dots \omega^{\delta} < \omega} \Gamma_{\omega'} \dots \Gamma_{\omega^{\delta}}$$

avec $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_n)$ et $\omega^1, \dots, \omega^{\delta}$ multiindices.

Proposition 4d4. (Les puissances du comoule $\Gamma_{\langle \bullet \rangle}$)

On a dans l'algèbre des pseudovariabiles, pour tout scalaire α :

$$(4d10) \quad (Z_*)^{\alpha} = 1 + \sum (-\alpha \omega_1)(\omega_1 - \alpha \omega_2)(\omega_1 + \omega_2 - \alpha \omega_3) \dots (\omega_1 + \dots \omega_{n-1} - \alpha \omega_n) Z^{\omega_1, \dots, \omega_n}$$

Il en résulte que le comoule $\Gamma_{\langle \bullet \rangle}$ admet des puissances α -ièmes $\Gamma_{\langle \bullet \rangle}^{\alpha}$ qui sont données par la formule :

$$(4d11) \quad \Gamma_{\langle \omega_1, \dots, \omega_n \rangle}^{\alpha} = (-\alpha \omega_1)(\omega_1 - \alpha \omega_2)(\omega_1 + \omega_2 - \alpha \omega_3) \dots (\omega_1 + \omega_2 + \dots \omega_{n-1} - \alpha \omega_n)$$

Principe des démonstrations :

On a vu, à la section 4a, comment les dérivations étrangères agissaient dans l'algèbre des pseudovariabiles. On commence donc ici par calculer l'effet sur Z^* , *Z etc... des dérivations étrangères Δ_{ω} . On trouve ainsi :

$$(4d12) \quad \Delta_{\omega} Z^* = - e^{-\omega(Z^* - I)}$$

$$(4d13) \quad \Delta_{\omega} {}^*Z = \partial {}^*Z$$

$$(4d14) \quad \Delta_{\omega} Z_* = -\omega Z_* e^{-\omega(Z^*-I)}$$

$$(4d15) \quad \Delta_{\omega} (Z_*)^{\alpha} = -\alpha \omega (Z_*)^{\alpha} e^{-\omega(Z^*-I)}$$

Il est alors loisible, en itérant, de calculer l'effet sur Z^* , *Z etc... des opérateurs généraux $\Delta_{\omega_n} \dots \Delta_{\omega_2} \Delta_{\omega_1}$ et cela conduit tout droit aux quatre propositions de cette section.

Remarque 1 : Les moules $\Gamma_{\bullet}$ et $\Gamma_{\langle \bullet \rangle}$ nous retiendront surtout à la partie II, à cause de leur rôle en théorie de l'itération.

Remarque 2 : Le comoule $\Gamma_{[\bullet]}$ n'intervient dans aucun des énoncés précédents, mais il interviendra dès la section prochaine et surtout aux chapitres 10 et 11, où il jouera un rôle crucial dans la "réduction" des algèbres de résurgence et dans la démonstration des théorèmes d'indépendance.

Remarque 3 : L'importance des moules $\Gamma_{\bullet}$ et $\Gamma_{[\bullet]}$ tient en partie en relations :

$$(4d16) \quad \Gamma_{\omega_1, \dots, \omega_n} = \left(e^{\omega_n z} \frac{d}{dz} \right) \dots \left(e^{\omega_2 z} \frac{d}{dz} \right) \left(e^{\omega_1 z} \frac{d}{dz} \right) \cdot z$$

$$(4d17) \quad \Gamma_{[\omega_1, \dots, \omega_n]} = \left[e^{\omega_n z} \frac{d}{dz} \left[\dots \left[e^{\omega_2 z} \frac{d}{dz}, e^{\omega_1 z} \frac{d}{dz} \right] \dots \right] \right] \cdot z$$

où $[\dots, \dots]$ désigne le crochet de Lie.

Autres exemples de comoules.

On en trouvera aux exercices 4d1, 4d2.

Section 4e5 : Interactions entre moules et comoules. La notion de métamorphose.

Moules et comoules sont des notions duales. De fait, on est souvent conduit à contracter, d'une manière ou d'une autre, des moules (surtout symétriques ou alternés) avec des comoules (surtout les comoules fondamentaux). Passons en revue les principales propriétés de ces contractions.

Proposition 4e1. (Contraction des moules alternés et des comoules fondamentaux)

Soit $M^\bullet$ un moule alterné quelconque. Alors, pour tout indice simple ω_0 et tout multiindice ω , on a identiquement :

$$(4e1) \quad \sum_{\omega'} \Gamma_{\omega_0 \omega'} M^{\omega'} = \omega_0 \sum_{\omega'} \Gamma_{\omega'} M^{\omega'}$$

où les sommes sont étendues à tous les multiindices ω' obtenus en permutant les termes de ω . De même, pour tout multiindice ω , on a identiquement

$$(4e2) \quad \begin{cases} \sum_{\omega'} \Gamma_{\omega'} M^{\omega'} = -\frac{1}{\|\omega\|} \sum_{\omega'} \Gamma_{\langle \omega' \rangle} M^{\omega'} = \\ \frac{1}{n(\omega)} \sum_{\omega'} \Gamma_{[\omega']} M^{\omega'} = \sum_{\omega''} \Gamma_{[\omega, \omega'']} M^{\omega, \omega''} \end{cases}$$

où ω' parcourt l'ensemble des permutations de $\omega = (\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n)$ et où ω'' parcourt l'ensemble des permutations de $(\omega_2, \omega_3, \dots, \omega_n)$.

Pour la démonstration, voir l'exercice 4e1.

On peut aussi contracter les moules généraux $M^\bullet$ et le comoule Γ de manière à obtenir des métamorphoses $\underline{M}^\bullet$ sur les séries de Fourier. Expliquons de quoi il s'agit.

Considérons d'abord l'espace $\mathcal{C}$ (resp. $\mathcal{C}^+$ ou $\mathcal{C}^-$) constitué par les séries de Fourier de la forme :

$$(4e3) \quad \varphi(z) = \sum_{\omega} A_{\omega} e^{\omega z} \quad (\omega \text{ indice simple})$$

où ω parcourt l'ensemble $\Omega = 2\pi i \mathbb{Z}$ (resp. $\Omega^+ = 2\pi i \mathbb{N}^*$ ou $\Omega^- = -2\pi i \mathbb{N}^*$). A tout moule M^* sur Ω (pas nécessairement symétrique ni alterné) associons un opérateur (non linéaire) sur l'espace $\mathcal{E}$, que nous noterons $\underline{M^*}$ et qui, à toute φ de la forme (4e3), associe la série :

$$(4e4) \quad (\underline{M^*} \varphi)(z) = \sum_{n \geq 1} \sum_{\omega_i \in \Omega} A_{\omega_1} \dots A_{\omega_n} M^{\omega_1, \dots, \omega_n} \Gamma_{\omega_1, \dots, \omega_n} e^{(\omega_1 + \dots + \omega_n)z}$$

soit en écriture compacte :

$$(4e4bis) \quad (\underline{M^*} \varphi)(z) = \sum_{\omega} A_{\omega} M^{\omega} \Gamma_{\omega} e^{\|\omega\|z} \quad (\omega \text{ multiindice})$$

avec bien sûr la notation :

$$(4e4ter) \quad A_{\omega_1, \dots, \omega_n} = A_{\omega_1} \dots A_{\omega_n}$$

La paire (M^*, φ) doit évidemment remplir certaines conditions pour que convergent les formules :

$$(4e5) \quad B_{\omega_0} = \sum_{\|\omega\| = \omega_0} A_{\omega} M^{\omega} \Gamma_{\omega} \quad (\omega_0 \text{ indice simple, } \omega \text{ multiindice})$$

qui donnent les coefficients B_{ω_0} de $\underline{M^*} \varphi$. Toutefois, la convergence est automatique dans le cas important où φ appartient à $\mathcal{E}^+$ ou $\mathcal{E}^-$: les sommes (4e5) sont alors finies. On peut donc considérer les $\underline{M^*}$ comme des opérateurs (non linéaires) qui agissent sur certaines parties de $\mathcal{E}$ et notamment sur les sous-espaces $\mathcal{E}^+$ et $\mathcal{E}^-$ constitués par les séries de Fourier "unilatérales".

Appelons métamorphoses les opérateurs sur séries de Fourier qui commutent avec les translations. Il est clair que les $\underline{M^*}$ sont des métamorphoses et que toute métamorphose peut s'écrire sous la forme $\underline{M^*}$ (pour une infinité de M^*). Evidemment, les seules métamorphoses vraiment intéressantes (et qui justifient pleinement leur nom) sont celles qui correspondent à des

moules $M^{\bullet}$ bien particuliers, tels que :

- (i) les huit moules fondamentaux de la section 4c
- (ii) les six moules hyperlogarithmiques des sections 7b, 7c. Dans presque tous ces cas, en effet, les métamorphoses $\underline{M^{\bullet}}$ transforment d'une manière remarquable les propriétés des séries de Fourier. Par exemple, les métamorphoses $\underline{U^{\bullet}}$ et $\underline{V^{\bullet}}$, issues des moules hyperlogarithmiques $U^{\bullet}$ et $V^{\bullet}$, ont la propriété de changer certains types de résurgence en d'autres types de résurgence, comme on l'entreverra aux sections 13g et 13h et comme on le verra en détail au chapitre 18.

En attendant, donnons quelques généralités sur les métamorphoses associées aux moules $M^{\bullet}$ alternés ou symétriques.

Proposition 4e2. (Métamorphoses et alternance)

Pour toute paire $M^{\bullet}, N^{\bullet}$ de moules alternés on a :

$$(4e6) \quad \underline{\underline{M^{\bullet} \circ N^{\bullet}}} = \underline{\underline{M^{\bullet}}} \underline{\underline{N^{\bullet}}}$$

Autrement dit, $M^{\bullet} \rightarrow \underline{\underline{M^{\bullet}}}$ est un homomorphisme du groupe (*) des moules alternés dans le groupe (**) des métamorphoses inversibles.

En fait, seul le second facteur $N^{\bullet}$ a besoin d'être alterné pour donner lieu à (4e6). Cette identité équivaut en effet à :

$$(4e7) \quad \underline{\underline{M^{\bullet} \circ N^{\bullet}}} \varphi = \underline{\underline{M^{\bullet}}} \underline{\underline{N^{\bullet}}} \varphi$$

pour toute φ de la forme (4e3), c'est-à-dire en explicitant :

(*) pour la composition des moules (**) pour le produit des opérateurs.

$$(4e8) \quad \left\{ \begin{array}{l} \sum_{\omega^i} M^{\|\omega^1\|, \dots, \|\omega^s\|} N^{\omega^1} \dots N^{\omega^s} \Gamma_{\|\omega^1\|, \dots, \|\omega^s\|} \Gamma_{\omega^1} \dots \Gamma_{\omega^s} = \\ \sum_{\omega^i} M^{\|\omega^1\|, \dots, \|\omega^s\|} N^{\omega^1} \dots N^{\omega^s} \Gamma_{\omega^1 \dots \omega^s} \end{array} \right.$$

où les ω^i désignent des multiindices. (4e8) à son tour équivaut à l'identité :

$$(4e9) \quad \left\{ \begin{array}{l} \sum_{\eta^i \sim \omega^i} \Gamma_{\|\omega^1\|, \dots, \|\omega^s\|} \Gamma_{\omega^1} \dots \Gamma_{\omega^s} N^{\omega^1} \dots N^{\omega^s} = \\ \sum_{\eta^i \sim \omega^i} \Gamma_{\omega^1 \dots \omega^s} N^{\omega^1} \dots N^{\omega^s} \end{array} \right.$$

où les multiindices η^i sont fixes et où l'on somme par rapport à toutes leurs permutations ω^i . L'identité (4e9) ne comporte plus que le moule $N^\bullet$ et elle se démontre en gros comme l'identité (4e1), à laquelle elle se réduit d'ailleurs dans le cas $\Delta = 2$.

Envisageons maintenant les métamorphoses $\underline{M}^\bullet$ issues de moules symétriques. Il est commode de faire agir ces métamorphoses, non pas sur $\mathcal{E}^+$ ni $\mathcal{E}^-$, mais sur les ensembles $I + \mathcal{E}^+$ et $I + \mathcal{E}^-$ constitués par les $f(z)$ de la forme $z + \varphi(z)$ avec $\varphi \in \mathcal{E}^+$ ou $\mathcal{E}^-$.

$I + \mathcal{E}^+$ et $I + \mathcal{E}^-$ sont évidemment deux groupes pour la composition 0 (substitution des séries) :

$$(z + \varphi) \circ (z + \psi) = z + \psi + \varphi(z + \psi)$$

La composition en question est d'ailleurs définissable formellement, sans aucune hypothèse de convergence sur les séries φ et ψ .

On fait ensuite agir $\underline{M}^\bullet$ sur $I + \mathcal{E}^\pm$ en posant

$$\underline{M}^\bullet (z + \varphi) = z + \underline{M}^\bullet \varphi$$

et cela donne lieu à la :

Proposition 4e3. (Métamorphoses et symétrie)

Pour toute paire M^*, N^* de moules symétriques et pour tout élément φ du groupe $I + \mathcal{U}^\pm$ on a :

$$(4e10) \quad (\underline{M^* \times N^*}) \varphi = (\underline{N^*} \varphi) \circ (\underline{M^*} \varphi)$$

Autrement dit, chaque élément φ de $I + \mathcal{U}^\pm$ induit un (anti)homomorphisme du groupe multiplicatif des moules symétriques dans le groupe $I + \mathcal{U}^\pm$.

La proposition 4e3 est plus rapide à prouver que la proposition 4e2. Elle repose essentiellement sur l'identité (4d16).

L'intérêt de la proposition 4e3 tient à ceci : il se trouve, d'une part, que les groupes multiplicatifs de moules symétriques "contiennent" des sous-groupes non commutatifs très généraux et, d'autre part, que les groupes $I + \mathcal{U}^\pm$ sont isomorphes entre eux et surtout isomorphes au groupe G^∞ , lequel, avec ses sous-groupes, est étudié à fond à la partie II. Nous mettrons ces deux faits à profit, au chapitre 17, pour ramener l'analyse harmonique sur des groupes très généraux à l'analogue harmonique sur les sous-groupes de G^∞ .

Section 4f : Résumé du chapitre 4.

Bien qu'ayant pour éléments (dans le modèle additif) des fonctions holomorphes d'une seule variable, les algèbres de résurgence possèdent beaucoup de dérivations (une infinité de Δ , indépendants) ce qui fait penser à des "variables cachées". On précise cette idée en introduisant l'algèbre $\Delta'(\mathcal{Q})$ des pseudovariables, duale de la coalgèbre $\Delta(\mathcal{Q})$ des dérivations étrangères. On construit ensuite un homomorphisme $\varphi \rightarrow \langle \varphi \rangle$ ("forme restreinte") de l'algèbre $\mathcal{A}(\mathcal{Q})$ dans l'algèbre $\Delta'(\mathcal{Q})$ et un homomorphisme $\varphi \rightarrow [\varphi]$ ("forme déployée") de l'algèbre $\mathcal{A}(\mathcal{Q})$ dans l'algèbre

$\Delta'(\Omega) \otimes A(\Omega)$. On montre enfin qu'il existe une unique extension aux pseudovariables des opérations définies sur les fonctions résurgentes (dérivation naturelle, dérivations étrangères, composition, etc...) qui commute avec ces deux homomorphismes. On dispose ainsi d'un procédé $[]$ (adjonction des pseudovariables) et d'un procédé $< >$ (adjonction des pseudovariables, puis suppression de la vraie variable) qui sont d'un maniement très souple et qui permettent de démontrer des théorèmes fins concernant les solutions de certaines équations fonctionnelles.

Dans une seconde section, on introduit deux notions duales - l'algèbre à composition des moules et l'algèbre à composition des comoules - qui interviennent dans presque toutes les questions de calcul différentiel étranger. Moules et comoules sont apparentés respectivement aux dérivations étrangères et aux pseudovariables, mais il est souvent nécessaire de distinguer les deux choses. On dégage la notion de moule symétrique et de moule alterné (sans aucun rapport avec la symétrie ou l'alternance ordinaires) et la stabilité de ces notions relativement à la multiplication et à la composition respectivement.

Enfin, les trois dernières sections définissent, étudient et classent quelques moules et comoules choisis parmi ceux qui reviennent le plus souvent dans les applications. Il s'agit avant tout des huit "moules fondamentaux" et des trois "comoules fondamentaux" (rassemblés au tableau de la page suivante).

Les huit moules fondamentaux.

	type polaire	type plat
type somme	<u>moule symétrique Γ^*</u> $\Gamma^{\omega_1, \dots, \omega_n} = \frac{1}{\omega_1(\omega_1 + \omega_2) \dots (\omega_1 + \dots + \omega_n)}$	<u>moule symétrique P^*</u> $\begin{cases} P^{\omega_1, \dots, \omega_n} = \sum_{1 \leq n_1 < n_2 < \dots < n_j \leq n} \delta(\omega_1 + \dots + \omega_{n_1}) \dots \delta(\omega_1 + \dots + \omega_{n_j}) \times \\ \chi_-(n_1) \chi_-(n_2 - n_1) \dots \chi_-(n_j - n_{j-1}) \chi_+(n - n_j) \end{cases}$
	<u>moule alterné $\overleftrightarrow{\Gamma}^*$</u> $\overleftrightarrow{\Gamma}^{\omega_1, \dots, \omega_n} = \frac{\delta(\omega_1 + \dots + \omega_n)}{\omega_1(\omega_1 + \omega_2) \dots (\omega_1 + \dots + \omega_{n-1})}$	<u>moule alterné Q^*</u> $\begin{cases} Q^{\omega_1, \dots, \omega_n} = \delta(\omega_1 + \dots + \omega_n) \sum_{1 \leq n_1 < n_2 < \dots < n_j \leq n} \delta(\omega_1 + \dots + \omega_{n_1}) \dots \delta(\omega_1 + \dots + \omega_{n_j}) \\ \chi_-(n_1) \chi_-(n_2 - n_1) \dots \chi_-(n_j - n_{j-1}) \chi_-(n - n_j) \end{cases}$
type différence	<u>moule symétrique X^*</u> $X^{\omega_1, \dots, \omega_n} = \frac{1}{\omega_1(\omega_2 - \omega_1) \dots (\omega_n - \omega_{n-1})}$	<u>moule symétrique S^*</u> $S^{\omega_1, \dots, \omega_n} = (-1)^q \frac{(2p)! (2q)!}{p! q! n!}$
	<u>moule alterné Y^*</u> $Y^{\omega_1, \dots, \omega_n} = \frac{1}{(\omega_2 - \omega_1)(\omega_3 - \omega_2) \dots (\omega_n - \omega_{n-1})}$	<u>moule alterné T^*</u> $T^{\omega_1, \dots, \omega_n} = (-1)^{q_*} \frac{p_*! q_*!}{n!}$

Avec les notations :

$$\begin{cases} s(x) = \text{signe de } x & ; \quad \delta(x) = \text{dérivée} \\ \sum x^n \chi_+(n) = \frac{1}{\cosh x} & ; \quad \sum x^n \chi_-(n) = \tanh x \\ p \text{ (resp } q) = \text{nombre de croissances (décroissances) dans la suite } 0, \omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n \\ p_* \text{ (resp } q_*) = \text{nombre de croissances (décroissances) dans la suite } \omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n \end{cases}$$

Les trois moules fondamentaux.

<u>Moule Γ</u>	$\Gamma_{\omega_1, \dots, \omega_n} = \omega_1(\omega_1 + \omega_2) \dots (\omega_1 + \omega_2 + \dots + \omega_{n-1})$
<u>Moule $\langle \cdot, \cdot \rangle$</u>	$\langle \omega_1, \dots, \omega_n \rangle = -\omega_1(\omega_1 - \omega_2) \dots (\omega_1 + \omega_2 + \dots + \omega_{n-1} - \omega_n)$
<u>Moule $[\cdot, \cdot]$</u>	$[\omega_1, \dots, \omega_n] = (\omega_1 - \omega_2)(\omega_1 + \omega_2 - \omega_3) \dots (\omega_1 + \dots + \omega_{n-1} - \omega_n)$

Chapitre 5 : Les algèbres à la frontière.

Section 5a : Introduction.

Soit comme d'habitude $\omega_* \in \mathbb{C}$, $\mathcal{R} = \omega_* \mathbb{Z}$, $\mathcal{R} = \widetilde{\mathbb{C}} \div \mathcal{R}$ et soient $\partial^0 \mathcal{R}, \partial^+ \mathcal{R}, \partial^- \mathcal{R}$ les frontières neutre, positive, négative de $\mathcal{R}$. Les notations $\mathcal{A}(\mathcal{R})$ etc... sont ici relatives au modèle additif. Aux Diracs près, les éléments de $\mathcal{A}(\mathcal{R})$, $\mathcal{A}(p, \mathcal{R})$ (resp. $\mathcal{A}_0(\mathcal{R})$, $\mathcal{A}_0(p, \mathcal{R})$) ont été caractérisés comme fonctions holomorphes sur $\mathcal{R}$ présentant certaines propriétés de régularité au voisinage des points de la frontière neutre (resp. des trois frontières) et on a vu que ces propriétés étaient stables par rapport à la convolution $*$. C'est là un aspect particulier d'un phénomène plus général :

L'irrégularité (cette notion sera précisée à la section 5d) en un point frontière Q d'un produit $\Psi * \Psi$ de fonctions résurgentes ne dépend que des irrégularités de chaque facteur en un nombre fini de points frontière $Q_i = Q_i(Q)$. Ces points Q_i sont dits antérieurs à Q et on note $Q_i \ll Q$. L'antériorité est alors une relation d'ordre partiel sur $\partial^0 \mathcal{R}$, sur $\partial^+ \mathcal{R}$ et sur $\partial^- \mathcal{R}$.

La raison de ce phénomène tient en gros à ceci : d'après la section 2a, $(\Psi * \Psi)(P)$ est égal à l'intégrale (2a1) prise le long de n'importe quel chemin $\mathcal{J}$ symétriquement contractable (voir 2a) et joignant Q_0 à P . Or, lorsque le point P est voisin d'un point frontière Q , le chemin $\mathcal{J}$, quelque tracé que l'on choisisse, passe nécessairement un certain nombre (fini) de fois au voisinage de la frontière de $\mathcal{R}$ et les points frontière qu'on ne peut pas éviter sont précisément les Q_i antérieurs à Q .

Nous allons successivement examiner la situation à la frontière neutre et aux frontières positive ou négative. Ce chapitre visant surtout à fournir une interprétation géométrique des relations de Leibniz dans les algèbres de résurgence, nous nous bornerons à indiquer en quelques mots le principe des démonstrations

En revanche, nous traiterons en détail plusieurs exemples et nous donnerons les figures correspondantes.

Section 5b : L'algèbre à la frontière neutre.

Rappelons que la frontière neutre est, dans le modèle additif, l'ensemble $\partial^\circ \mathcal{R}$ des points de ramifications de $\mathcal{R}$, tous situés au dessus du réseau $\mathcal{N}$. Désignons maintenant par $\mathbb{C}[\partial^\circ \mathcal{R}]$ (resp. $\mathbb{C}[\partial^\circ \mathcal{R}]$) l'espace des combinaisons linéaires formelles finies (resp. finies ou infinies), à coefficients complexes, de points Q de $\partial^\circ \mathcal{R}$. Les espaces $\mathbb{C}[\partial^\circ \mathcal{R}]$ et $\mathbb{C}[\partial^\circ \mathcal{R}]$ sont mis en dualité par le crochet :

$$Q_1, Q_2 \rightarrow (Q_1, Q_2) = 1 \quad \text{si } Q_1 = Q_2 \quad (\text{resp.} = 0 \text{ si } Q_1 \neq Q_2)$$

Proposition 5b1.

$\alpha)$ Lorsqu'un point P de $\mathcal{R}$ est voisin d'un point Q de $\partial^\circ \mathcal{R}$, tout chemin γ symétriquement contractable joignant Q_0 à P passe successivement à proximité de points $Q_{(0)}, Q_{(1)}, \dots, Q_{(n-1)}, Q_{(n)}$ de $\partial^\circ \mathcal{R}$ (avec bien sûr $Q_{(0)} = Q_0$ et $Q_{(n)} = Q$). De plus, il existe une suite bien déterminée $\{m_i\}$ d'entiers ou de demi-entiers tels que

$$m_0 = m_n = \frac{1}{2} \quad \text{et, si } 0 < i < n, \quad Q_{(i+1)} = \Gamma_i^{m_i} Q_{(i-1)}$$

pour un certain automorphisme parabolique Γ_i appartenant à Π , conjugué avec $\mathcal{R}$, et laissant $Q_{(i)}$ invariant (*)

$\beta)$ Ni l'entier n , ni les suites ordonnées $\{Q_{(i)}\}$ ou $\{m_i\}$, ni même

(*) Comme automorphisme parabolique, Γ_i admet évidemment des puissances demi-entières bien déterminées.

les ensembles sans ordre $\{Q_{(i)}\}$ ou $\{m_i\}$, ne sont indépendants du choix de $\mathcal{J}$. En revanche, l'application linéaire $\sigma_{\bullet}$ de $\mathcal{C}[\partial^{\circ}\mathcal{R}]$ dans $\mathcal{C}[\partial^{\circ}\mathcal{R}] \otimes \mathcal{C}[\partial^{\circ}\mathcal{R}]$ définie par

$$(5b1) \quad Q \rightarrow \sigma_{\bullet}(Q) = \sum'_{0 \leq i \leq n} (m_i + m_{n-i}) Q_{(i)} \otimes Q_{(n-i)} \quad (*)$$

est, elle, indépendante du choix de $\mathcal{J}$. Elle est de plus symétrique et coassociative.

$\sigma_{\bullet}$ munit donc $\mathcal{C}[\partial^{\circ}\mathcal{R}]$ d'une structure de coalgèbre et, par dualité, munit $\mathcal{C}[\partial^{\circ}\mathcal{R}]$ d'une structure d'algèbre commutative.

7) Pour $Q, Q' \in \partial^{\circ}\mathcal{R}$, posons $Q' \ll Q$ si et seulement si Q' est l'un des $Q_{(i)}$ qui figurent dans l'expression de $\sigma_{\bullet}(Q)$, une fois effectuées toutes les simplifications possibles. Alors la relation $\ll$ (dite d'antériorité) est une relation d'ordre partiel sur $\partial^{\circ}\mathcal{R}$, sans plus grand élément, mais avec un plus petit élément, qui est Q_0 .

8) Soit Q un point de $\partial^{\circ}\mathcal{R}$ et soit $[Q_0, Q]$ l'ensemble des points antérieurs à Q . Si deux fonctions φ, ψ holomorphes sur $\mathcal{R}$ sont bornées (resp. intégrables ou régulières (**)) en chaque point de $[Q_0, Q]$, alors $\varphi * \psi$ est bornée (resp. intégrable ou régulière) au point Q et $[Q_0, Q]$ est la plus petite partie de $\partial^{\circ}\mathcal{R}$ pour laquelle pareille implication soit vraie.

Pour prouver le point α , on peut s'inspirer des figures 5e1 à 5e11 ci après, puis passer au cas général.

(*) Le symbole $\sum'$ signifie que l'on ne compte pas les termes de la forme $Q_{(i)} \otimes Q_{(n-i)}$ ou $Q_{(n-i)} \otimes Q_{(i)}$ pour lesquels $i \neq 0$ et $Q_{(i)} = Q_0$.

(**) régulière en Q signifie sans pôles ni ramifications en Q .

Au point β , bien que $\mathcal{U}$ puisse passer à proximité de n'importe quel point de $\partial^0 \mathcal{R}$, le coefficient total des termes $Q_{(i)} \otimes Q_{(n-i)}$ "superflus" s'annule, d'où l'indépendance de $\sigma(Q)$ par rapport à $\mathcal{U}$. On peut par exemple vérifier ceci sur les figures 5e3 et 5e4 ci-après, puis passer au cas général.

Au point γ , on utilise la coassociativité de σ_0 pour démontrer la transitivité de la relation $\ll$ (i.e. $Q_1 \ll Q_2$ et $Q_2 \ll Q_3 \Rightarrow Q_1 \ll Q_3$) et on utilise des considérations sur la longueur des chemins symétriques pour montrer la réflexivité de $\ll$ (i.e. $Q_1 \ll Q_2$ et $Q_2 \ll Q_1 \Rightarrow Q_1 = Q_2$).

Le point δ enfin résulte simplement de la considération de l'intégrale (2a1) le long de chemins symétriquement contractables.

Section 5c : Les algèbres aux frontières positive et négative.

Rappelons que la frontière positive (resp. négative) est, dans le modèle additif, l'ensemble $\partial^+ \mathcal{R}$ (resp. $\partial^- \mathcal{R}$) des points à l'infini des demi-feuillets de $\mathcal{R}$ situés au dessus de $\text{Im}(z/\omega_*) < 0$ (resp. > 0), étant entendu qu'on compte un seul point à l'infini par demi-feuillet.

Désignons maintenant par $\mathbb{C}[\partial^+ \mathcal{R}]$ et $\mathbb{C}[\partial^- \mathcal{R}]$ (resp. $\mathbb{C}[[\partial^+ \mathcal{R}]]$ et $\mathbb{C}[[\partial^- \mathcal{R}]]$) l'espace des combinaisons linéaires formelles finies (resp. finies ou infinies), à coefficients complexes, de points Q de $\partial^+ \mathcal{R}$ ou $\partial^- \mathcal{R}$. Les espaces $\mathbb{C}[\partial^\pm \mathcal{R}]$ et $\mathbb{C}[[\partial^\pm \mathcal{R}]]$ sont mis en dualité par le crochet :

$$Q_1, Q_2 \rightarrow (Q_1, Q_2) = 1 \text{ si } Q_1 = Q_2 \text{ (resp. } = 0 \text{ si } Q_1 \neq Q_2)$$

Proposition 5c1 :

$\alpha)$ Lorsqu'un point P de $\mathcal{R}$ est voisin d'un point Q de $\partial^+ \mathcal{R}$ (resp. $\partial^- \mathcal{R}$),

tout chemin $\mathcal{J}$ symétriquement contractable joignant Q_0 à P passé successi-
vement à proximité de points $Q_{(0)}, Q_{(1)}, \dots, Q_{(n)} = Q$ de $\partial^+ \mathcal{R}$ (resp. $\partial^- \mathcal{R}$).

$\beta)$ Ni l'entier n , ni la suite ordonnée $\{Q_{(i)}\}$, ni même l'ensemble sans
ordre $\{Q_{(i)}\}$, ne sont indépendants du choix de $\mathcal{J}$. En revanche l'appli-
cation linéaire $\sigma_{\pm}$ de $\mathbb{C}[\partial^{\pm} \mathcal{R}]$ dans $\mathbb{C}[\partial^{\pm} \mathcal{R}] \otimes \mathbb{C}[\partial^{\pm} \mathcal{R}]$ définie par

$$(5c1) \quad Q \longrightarrow \sigma_{\pm}(Q) = \sum_{i=1}^n Q_{(i)} \otimes Q_{(n+1-i)} - \sum_{i=1}^{n-1} Q_{(i)} \otimes Q_{(n-i)}$$

est, elle, indépendante du choix de $\mathcal{J}$. Elle est de plus symétrique et coasso-
ciative.

$\sigma_{\pm}$ munit donc $\mathbb{C}[\partial^{\pm} \mathcal{R}]$ d'une structure de coalgèbre et, par
dualité, munit $\mathbb{C}[\partial^{\pm} \mathcal{R}]$ d'une structure d'algèbre commutative.

$\gamma)$ Pour $Q, Q' \in \partial^{\pm} \mathcal{R}$, posons $Q' \ll Q$ si et seulement si Q' est
l'un des $Q_{(i)}$ qui figurent dans l'expression de $\sigma_{\pm}(Q)$, une fois effec-
tuées toutes les simplifications possibles. Alors la relation $\ll$ (dite d'anté-
riorité) est une relation d'ordre partiel sur $\partial^{\pm} \mathcal{R}$. Elle ne possède pas
d'éléments maximaux, mais possède une infinité d'éléments minimaux, qui sont
les points $R^m Q_{\pm}$ $(m \in \mathbb{Z})$

$\delta)$ Soit Q un point de $\partial^{\pm} \mathcal{R}$ et soit $[\cdot, Q]$ l'ensemble des points
antérieurs à Q . Si deux fonctions φ, ψ holomorphes sur $\mathcal{R}$ et intégrables
en Q_0 sont de croissance exponentielle $(*)$ en chaque point de $[\cdot, Q]$,
alors $\varphi * \psi$ est de croissance exponentielle au point Q et $[\cdot, Q]$
est la plus petite partie de $\partial^{\pm} \mathcal{R}$ pour laquelle pareille implication soit
vraie.

Pour le schéma de la démonstration, voir la section précédente.

$(*)$ de croissance exponentielle en Q signifie de croissance (au plus)
exponentielle sur le demi-feuillet $\mathcal{R}(Q)$.

Section 5d : Les algèbres à la frontière et la convolution des irrégularités.

Les algèbres à la frontière introduites ci-dessus vont nous permettre de préciser la remarque de la section 5a en montrant d'une façon explicite comment l'irrégularité (ou si l'on préfère : le comportement asymptotique) d'un produit $\varphi * \psi$ en un point frontière Q dépend de l'irrégularité des facteurs φ et ψ en un nombre fini de points frontière antérieurs à Q .

Pour ce faire, il faut choisir une mesure convenable de l'irrégularité des φ de $\mathcal{A}(\mathcal{R})$ aux points frontière Q .

- (i) si $Q = Q_0$, on pose $\varphi_Q =$ masse du Dirac de φ en Q_0 .
- (ii) si $Q \in \partial^0 \mathcal{R} - \{Q_0\}$, on pose $\varphi_Q = (2\pi i) \times$ (résidu de φ en Q)
- (iii) si $Q \in \partial^\pm \mathcal{R}$, on pose $\varphi_Q(z) = \int_{Q_0}^Q \varphi(M) e^{-z\beta} dM$ ($\beta = \dot{M}$) en cas de convergence, c'est-à-dire pour une φ de croissance exponentielle en Q .

φ_Q est donc un scalaire (resp. un élément de l'espace $\mathcal{T}$ des germes sectoriels à l'infini) lorsque Q appartient à la frontière neutre (resp. positive ou négative).

Proposition 5d1 :

Soit $Q \in \partial^0 \mathcal{R}$ (resp. $\partial^\pm \mathcal{R}$), soit $\varphi, \psi \in \mathcal{A}(\mathcal{R})$ (resp. $\mathcal{A}_0(\mathcal{R})$) et soit $\theta = \varphi * \psi$. Alors :

$$(5d1) \quad \theta_Q = \sum K_Q^{Q', Q''} \varphi_{Q'} \psi_{Q''} \quad (\text{somme finie})$$

où Q', Q'' parcourent l'ensemble des points antérieurs à Q et $\{K_Q^{Q', Q''}\}$ désigne le tenseur de structure de la coalgèbre correspondante.

Par suite l'application

$$(5d2) \quad \varphi \rightarrow \sum_Q \varphi_Q \cdot Q$$

où la somme est étendue à $\partial^0 \mathcal{R}$ (resp. $\partial^\pm \mathcal{R}$), est un homomorphisme de l'algèbre $\mathcal{A}(\mathcal{R})$ (resp. $\mathcal{A}_\pm(\mathcal{R})$) dans l'algèbre $\mathbb{C}[\partial^0 \mathcal{R}]$ (resp. $\mathbb{T} \otimes \mathbb{C}[\partial^\pm \mathcal{R}]$).

Remarque 1 : Le second membre de (5d1) se réduit à un seul terme (alors égal à $\varphi_Q \varphi_Q$) si et seulement si Q est minimal, c'est-à-dire égal à Q_0 ou de la forme $R^n Q_\pm$.

Pour $Q = Q_0$, l'application $\varphi \rightarrow \varphi_{Q_0}$ coïncide avec l'application $\varphi \rightarrow v(\varphi)$, unique homomorphisme de l'algèbre $\mathcal{A}(\mathcal{R})$ dans $\mathbb{C}$ (Voir section 4a).

Pour $Q = R^n Q_\pm$, l'application $\varphi \rightarrow \varphi_Q$ se réduit à la banale transformation de Laplace $\mathcal{L}_Q$ (Voir section 3d) et l'équation (5d1) ne fait que traduire la propriété fondamentale de cette transformation (changement de la convolution en multiplication).

Remarque 2 : Bien entendu, le groupe Γ et par suite les bigèbres d'opérateurs $\mathcal{D}(\mathcal{R})$ et $\Delta(\mathcal{R})$ agissent d'une manière naturelle dans les algèbres à la frontière :

$$\Gamma: Q \rightarrow \Gamma Q \quad ; \quad D = (1-R)\Gamma: Q \rightarrow DQ = \Gamma Q - R\Gamma Q$$

et ces actions commutent avec l'homomorphisme (5d2). Autrement dit :

$$\sum_Q (D\varphi)_Q \cdot Q = \sum_Q \varphi_Q \cdot DQ$$

Section 5e : Calculs pratiques dans les algèbres à la frontière.

Les algèbres et coalgèbres à la frontière sont définies grâce à un tenseur de structure $\{K_{Q'Q''}^{Q'}\}$ qui à son tour est défini géométriquement au moyen de limites de chemins symétriquement contractables. Nous allons maintenant rattacher les algèbres à la frontière aux algèbres de pseudovariables

ou plutôt, ce qui revient au même, rattacher les coalgèbres à la frontière $\mathbb{C}[\partial^0 \mathcal{R}]$ et $\mathbb{C}[\partial^1 \mathcal{R}]$ aux coalgèbres d'opérateurs $\Delta(\mathcal{N})$ et $\mathbb{D}(\mathcal{N})$ respectivement. Cela fournira, pour le calcul du tenseur $\{K_{\mathcal{Q}}^{Q'Q''}\}$ un procédé indépendant du procédé de la définition et plus simple que lui.

On suppose toujours que $\mathcal{N}$ est un réseau de dimension 1. Par suite, le groupe Γ d'automorphismes de la surface $\mathcal{R}$ est engendré par trois automorphismes paraboliques R, S, T liés par la seule relation $RST=1$ et $\mathbb{D}(\mathcal{N})$, en tant qu'algèbre, est isomorphe à

$$\mathbb{C} \oplus (1-R)\mathbb{C}[\Gamma] = \mathbb{C} \oplus (1-R)\mathbb{C}[R, R^{-1}, S, S^{-1}]$$

Soit maintenant μ_0 l'application linéaire de $\mathbb{D}(\mathcal{N})$ dans $\mathbb{C}[\partial^0 \mathcal{R}]$ déterminée par :

$$\begin{cases} \mu_0(R^n) = Q_0 & \text{pour tout } n \in \mathbb{Z} \\ \mu_0((1-R)\Gamma) = \Gamma^{-1}Q_0 & \text{pour tous les } \Gamma \in \Gamma \text{ qui ne sont pas de la forme } R^n \end{cases}$$

Proposition 5e1 (frontière neutre)

La relation d'équivalence $\sim$ définie sur $\mathbb{D}(\mathcal{N})$ par :

$$D_1 \sim D_2 \iff \mu_0(D_1) = \mu_0(D_2)$$

est compatible avec la loi de coalgèbre de $\mathbb{D}(\mathcal{N})$, le quotient $\mathbb{D}(\mathcal{N})/\sim$ est isomorphe à $\Delta(\mathcal{N})$ et μ_0 induit un isomorphisme (encore noté μ_0) de la coalgèbre $\Delta(\mathcal{N}) = \mathbb{D}(\mathcal{N})/\sim$ sur la coalgèbre $\mathbb{C}[\partial^0 \mathcal{R}]$.

Laissons la vérification au lecteur et utilisons plutôt l'isomorphisme μ_0 pour calculer $\sigma_0(Q)$ dans trois cas différents. Pour chaque exemple, on trouvera des figures illustrant la situation géométrique. Ces figures correspondent au choix $\mathcal{N} = \mathbb{Z}$.

Exemple 1 : Soit à calculer $\sigma_0(Q)$ pour $Q = S^{-1} R^{-2} S^{-1} Q_0$.

Au point Q , considéré comme élément de la coalgèbre $\mathbb{C}[\partial^0 \mathcal{R}]$, l'isomorphisme inverse μ_0^{-1} associe un élément D_Q de $\mathbb{D}(\mathcal{R})/\sim$ défini par :

$$D_Q = (1-R) S R^2 S$$

D'où, avec les notations $S_n = (1-R) S^n$ de la section 2a :

$$D_Q = (1-R) S (1 - (1-R) - R(1-R)) S = S_2 - S_1 S_1 - S_1 R S_1$$

D'où, compte tenu des relations de Leibniz (2a4) :

$$\sigma(D_Q) = 1 \otimes S_2 + S_1 \otimes S_1 + S_2 \otimes 1 - (S_1 \otimes 1 + 1 \otimes S_1)^2 - (S_1 \otimes 1 + 1 \otimes S_1) R (S_1 \otimes 1 + 1 \otimes S_1)$$

D'où, compte tenu de la compatibilité des structures d'algèbre et de coalgèbre :

$$\begin{aligned} \sigma(D_Q) = & 1 \otimes S_2 + S_1 \otimes S_1 + S_2 \otimes 1 - 1 \otimes S_1 S_1 - 2 S_1 \otimes S_1 - S_1 S_1 \otimes 1 \\ & - R \otimes S_1 R S_1 - R S_1 \otimes S_1 R - S_1 R \otimes R S_1 - S_1 R S_1 \otimes R \end{aligned}$$

Soit finalement, après simplification et après application de l'isomorphisme direct μ_0 :

$$(5e1) \quad \begin{cases} \sigma_0(Q) = Q_0 \otimes Q + Q \otimes Q_0 - Q_1 \otimes Q_2 - Q_2 \otimes Q_1 - Q_1 \otimes Q_1 \\ \text{avec } Q_1 = S^{-1} Q_0, \quad Q_2 = R^{-1} S^{-1} Q_0 \end{cases}$$

Voyons maintenant l'aspect géométrique. Les figures ci-dessous représentent quatre chemins $\mathcal{J}$ joignant l'origine Q_0 à un point P de $\mathcal{R}$ voisin du point frontière Q (En fait, il faut imaginer les chemins $\mathcal{J}$ beaucoup plus resserrés le long de l'axe réel).

Le chemin de la figure 5e1 transcrit par son tracé la définition du point

$$Q = S^{-1} R^{-1} S^{-1} Q_0 .$$

Le chemin de la figure 5e2 a un tracé simple.

Enfin, les chemins des figures 5e3 et 5e4 sont symétriquement contractables, ce qui va permettre de leur appliquer la proposition 5b1.

Le chemin $\mathcal{J}$ de la figure 5e3 passe successivement par six points $P_{(i)}$ qui sont voisins de points frontière $Q_{(i)}$. Explicitement :

$$\left\{ \begin{array}{l} P_{(0)} = Q_{(0)} = Q_0 \quad , \quad P_{(1)} \sim Q_{(1)} = Q_2 \quad , \quad P_{(2)} \sim Q_{(2)} = Q_0 \quad , \quad P_{(3)} \sim Q_{(3)} = Q_1 \\ P_{(4)} \sim Q_{(4)} = Q_3 \quad , \quad P_{(5)} \sim Q_{(5)} = Q_1 \quad , \quad P_{(6)} \sim Q_{(6)} = Q \\ \text{avec } Q_1, Q_2 \text{ définis comme ci-dessus et } Q_3 = S^{-1} R^{-1} S^{-1} . \end{array} \right.$$

De plus, si on pose :

$$m_0 = \frac{1}{2} \quad , \quad m_1 = 0 \quad , \quad m_2 = 1 \quad , \quad m_3 = -\frac{1}{2} \quad , \quad m_4 = 0 \quad , \quad m_5 = -1 \quad , \quad m_6 = \frac{1}{2}$$

on aura :

$$Q_{(i+1)} = \Gamma_i^{m_i} Q_{(i-1)}$$

où Γ_i désigne l'unique élément parabolique de Γ conjugué à R et laissant $Q_{(i)}$ invariant. On peut donc appliquer la formule (5b1) :

$$\sigma_0(Q) = \sum' (m_i + m_{n-i}) Q_{(i)} \otimes Q_{(n-i)}$$

(en prenant soin d'omettre les termes d'indice $i = 2$ et 4 , du fait de la présence de Q_0) et on retourne bien le résultat obtenu analytiquement.

Quant au chemin $\mathcal{J}$ de la figure 5e4, il passe successivement à proximité des points :

$$\begin{cases} Q_{(0)} = Q_0, & Q_{(1)} = Q_2, & Q_{(2)} = Q_0, & Q_{(3)} = Q_4, & Q_{(4)} = Q_0, & Q_{(5)} = Q_1, \\ Q_{(6)} = Q_3, & Q_{(7)} = Q_5, & Q_{(8)} = Q_3, & Q_{(9)} = Q_1, & Q_{(10)} = Q. \end{cases}$$

avec Q_1, Q_2, Q_3 définis comme précédemment et $Q_4 = SQ_0, Q_5 = S^{-1}R^{-1}S^{-1}R^{-1}S^{-1}Q_0$.

La suite $\{m_i\}$ correspondante est donnée par :

$$m_0 = \frac{1}{2}, m_1 = 0, m_2 = \frac{1}{2}, m_3 = 0, m_4 = \frac{1}{2}, m_5 = -\frac{1}{2}, m_6 = -\frac{1}{2}, m_7 = 0, m_8 = \frac{1}{2}, m_9 = -1, m_{10} = \frac{1}{2}$$

Moyennant quoi on peut encore appliquer la formule (5b1) et vérifier que l'on trouve toujours le même $\sigma_0(Q)$.

Exemple 2 : Soit à calculer $\sigma_0(Q)$ pour $Q = S^{-2}R^{-2}S^{-1}Q_0$.

On procède comme dans l'exemple précédent et on trouve successivement :

$$\begin{aligned} D_Q &= \mu_0^{-1}(Q) = (1-R) S R^2 S^2 \\ &= (1-R) S (1 - (1-R) - R(1-R)) S^2 \\ &= S_3 - S_1 S_2 - S_1 R S_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma(D_Q) &= 1 \otimes S_3 + S_3 \otimes 1 - 1 \otimes S_1 S_2 - S_1 \otimes S_1 S_2 - S_1 S_1 \otimes S_2 - S_1 S_2 \otimes 1 - R \otimes S_1 R S_2 \\ &\quad - R S_1 \otimes S_1 R S_2 - R S_2 \otimes S_1 R - S_1 R \otimes R S_2 - S_1 R S_1 \otimes R S_2 - S_1 R S_2 \otimes R \end{aligned}$$

Finalement :

$$(5e2) \quad \begin{cases} \sigma_0(Q) = Q_0 \otimes Q + Q \otimes Q_0 - Q_1 \otimes Q_2 - Q_2 \otimes Q_1 \\ \quad - Q_2 \otimes Q_3 - Q_3 \otimes Q_2 - Q_1 \otimes Q_4 - Q_4 \otimes Q_1 \\ \text{avec } Q_1 = S^{-1}Q_0, Q_2 = S^{-2}Q_0, Q_3 = R^{-1}S^{-1}Q_0, Q_4 = S^{-1}R^{-2}S^{-1}Q_0 \end{cases}$$

La situation géométrique est illustrée sur les figures 5e5, 5e6, 5e7 ci-dessous.

Le chemin $\mathcal{J}$ de la figure 5e7 est symétriquement contractable. Il lui correspond les suites $\{Q_{(i)}\}$ et $\{m_i\}$ que voici :

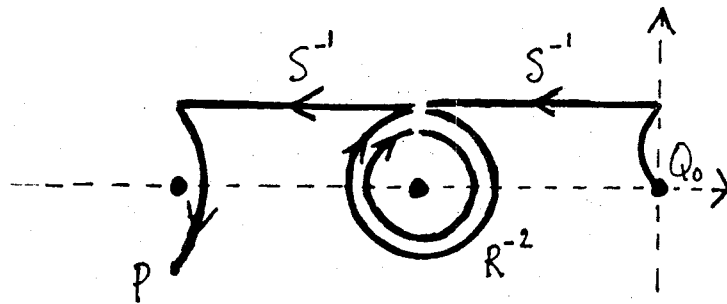


figure 5e1.

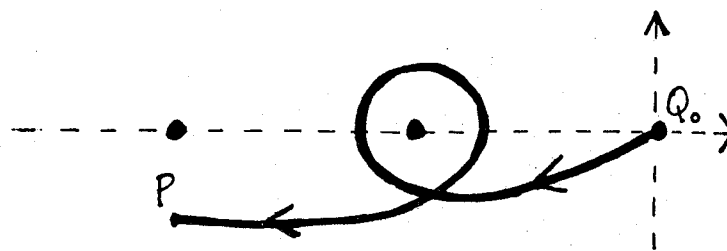


figure 5e2

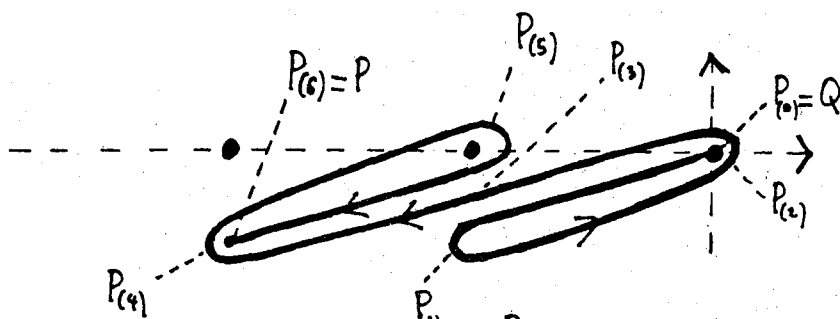


figure 5e3

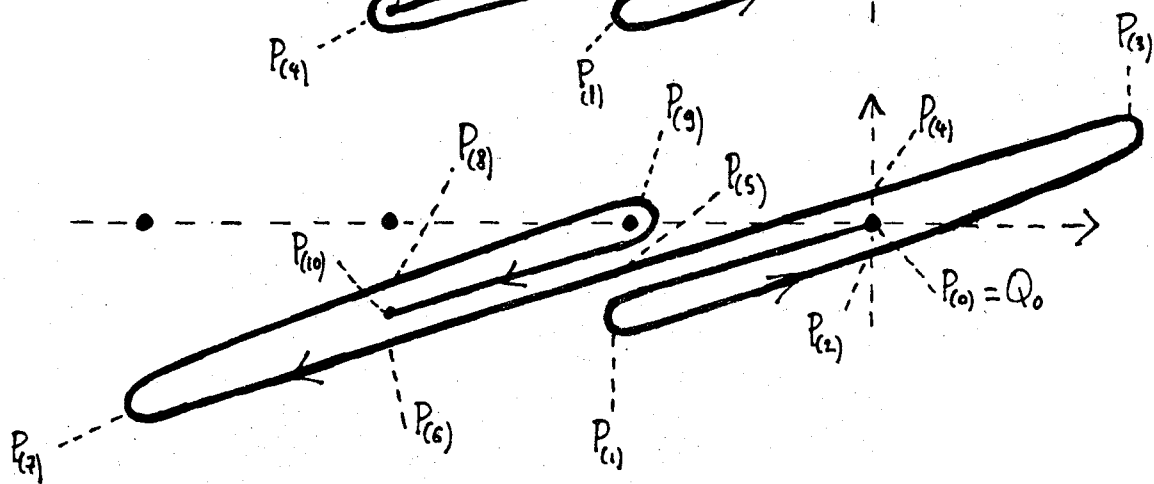


figure 5e4

$$\left\{ \begin{array}{l} Q_{(0)} = Q_0, \quad Q_{(1)} = Q_3, \quad Q_{(2)} = Q_0, \quad Q_{(3)} = Q_1, \quad Q_{(4)} = Q_5, \\ Q_{(5)} = Q_1, \quad Q_{(6)} = Q_4, \quad Q_{(7)} = Q_1, \quad Q_{(8)} = Q_5, \quad Q_{(9)} = Q_1, \\ Q_{(10)} = Q_2, \quad Q_{(11)} = Q_6, \quad Q_{(12)} = Q_2, \quad Q_{(13)} = Q. \end{array} \right.$$

avec Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 définis comme précédemment et $Q_5 = S^{-1}R^{-1}S^{-1}, Q_6 = S^{-2}R^{-1}S^{-1}$

$$\left\{ \begin{array}{l} m_0 = \frac{1}{2}, \quad m_1 = 0, \quad m_2 = 1, \quad m_3 = -\frac{1}{2}, \quad m_4 = 0, \quad m_5 = -1, \quad m_6 = 0, \\ m_7 = 1, \quad m_8 = 0, \quad m_9 = 1, \quad m_{10} = -\frac{1}{2}, \quad m_{11} = 0, \quad m_{12} = -1, \quad m_{13} = \frac{1}{2}. \end{array} \right.$$

On peut alors appliquer la formule (5b1) et vérifier que l'on retrouve bien la valeur $\sigma_0(Q)$ calculée analytiquement. On notera au passage que bien que le chemin symétriquement contractable $\mathcal{J}$ de la figure 5e7 soit le plus "simple" possible (*), il passe quand même par des points "superflus", à savoir Q_5 et Q_6 . Mais le point Q_6 s'élimine de (5b1) parce que, correspondant à l'indice $i = 11$ et étant associé au point $Q_{(2)} = Q_0$, il doit être omis conformément à la convention de sommation. Enfin, le point Q_5 disparaît lui aussi de la somme (5b1), car il y figure sous la forme

$$(m_4 + m_9 + m_5 + m_{10}) (Q_1 \otimes Q_5 + Q_5 \otimes Q_1)$$

où le facteur de droite est nul.

(*) c'est-à-dire : asymptotiquement le plus court possible. Bien sûr, il y a des chemins symétriques, mais non symétriquement contractables, qui sont beaucoup plus courts.

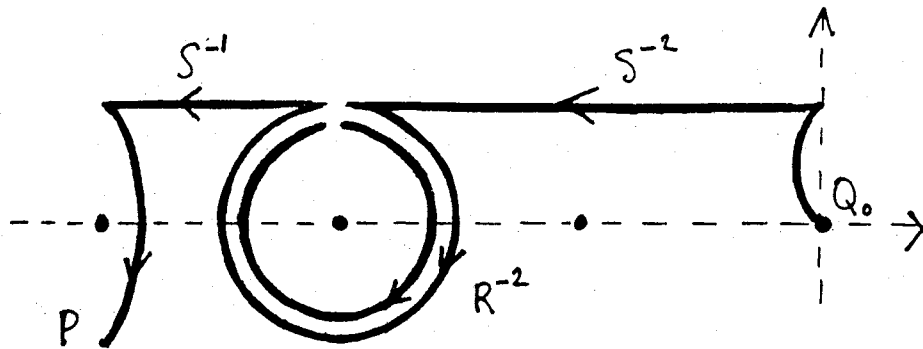


figure 5e5.

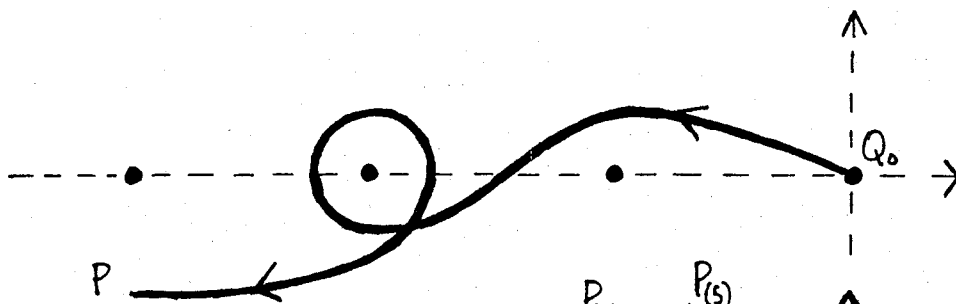


figure 5e6.

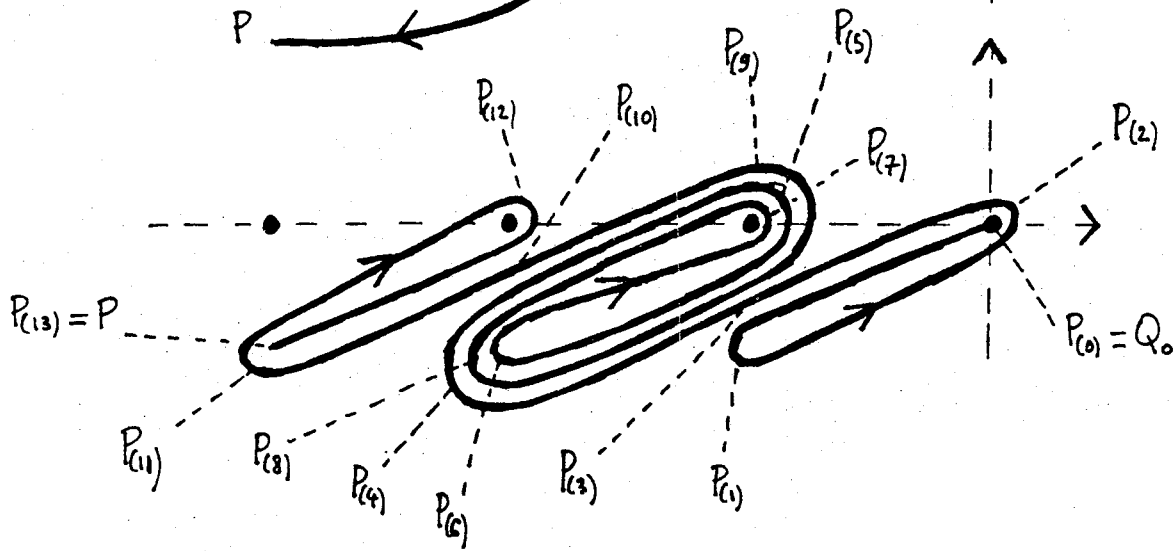


figure 5e7.

Exemple 3 : Soit à calculer $\sigma_0(Q)$ pour $Q = S^{-2} R^{-1} S^{-1}$.

On trouve successivement :

$$\begin{aligned} D_Q &= \mu_0^{-1}(Q) = (I-R) S R S^2 \\ &= (I-R) S (I - (I-R)) S^2 \\ &= S_3 - S_1 S_2 \end{aligned}$$

$$\sigma(D_Q) = I \otimes S_3 + S_3 \otimes I - S_1 S_2 \otimes I - S_1 S_1 \otimes S_1 - S_1 \otimes S_1 S_1 - I \otimes S_1 S_2$$

Et finalement :

$$(5e3) \quad \left\{ \begin{array}{l} \sigma_0(Q) = Q \otimes Q_0 + Q_0 \otimes Q + Q_1 \otimes Q_3 \\ \quad + Q_3 \otimes Q_1 - Q_2 \otimes Q_1 - Q_1 \otimes Q_2 \\ \text{avec } Q_1 = S^{-1} Q_0, Q_2 = S^{-2} Q_0, Q_3 = S^{-1} R^{-1} S^{-1} Q_0 \end{array} \right.$$

La situation géométrique est illustrée sur les figures 5e8, 5e9, 5e10, 5e11 ci-dessous.

Le chemin de la figure 5e10 est symétriquement contractable. Il lui correspond les suites suivantes (sans points superflus) :

$$\begin{aligned} Q_{(0)} &= Q_0, Q_{(1)} = Q_1, Q_{(2)} = Q_3, Q_{(3)} = Q_1, Q_{(4)} = Q_2, Q_{(5)} = Q \\ m_0 &= \frac{1}{2}, m_1 = -\frac{1}{2}, m_2 = 0, m_3 = 1, m_4 = -\frac{1}{2}, m_5 = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Le chemin de la figure 5e11 est lui aussi symétriquement contractable. Il lui correspond les suites suivantes (avec deux points superflus $Q_4 = S Q_0$ et

$$Q_5 = S^{-2} R^{-1} S^{-1} R^{-1} S^{-1} Q_0)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} Q_{(0)} = Q_0, Q_{(1)} = Q_4, Q_{(2)} = Q_0, Q_{(3)} = Q_1, Q_{(4)} = Q_3, \\ Q_{(5)} = Q_1, Q_{(7)} = Q, Q_{(8)} = Q_5, Q_{(9)} = Q \end{array} \right.$$

$$m_0 = \frac{1}{2}, m_1 = 0, m_2 = -\frac{1}{2}, m_3 = -\frac{1}{2}, m_4 = 0, m_5 = 1, m_6 = -\frac{1}{2}, m_7 = -\frac{1}{2}, m_8 = 0, m_9 = \frac{1}{2}$$

On peut alors appliquer la formule (5b1) à l'un et l'autre de ces chemins et vérifier que l'on retrouve la valeur $\sigma_0(Q)$ déjà calculée.

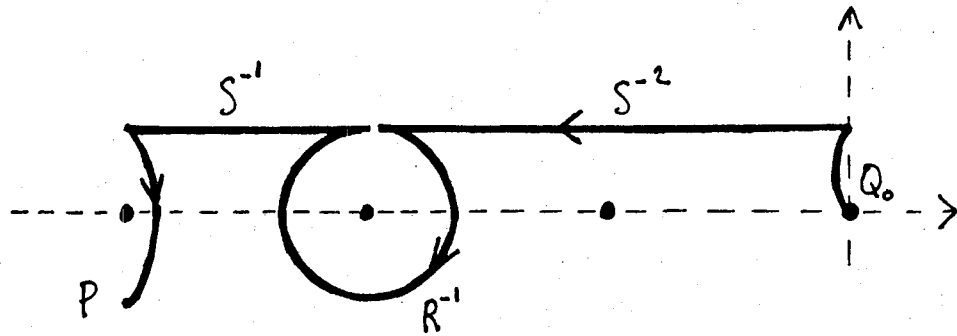


figure 5e8

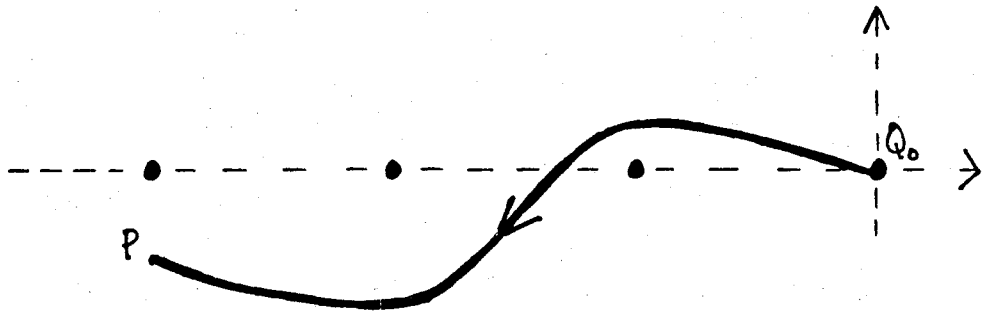


figure 5e9

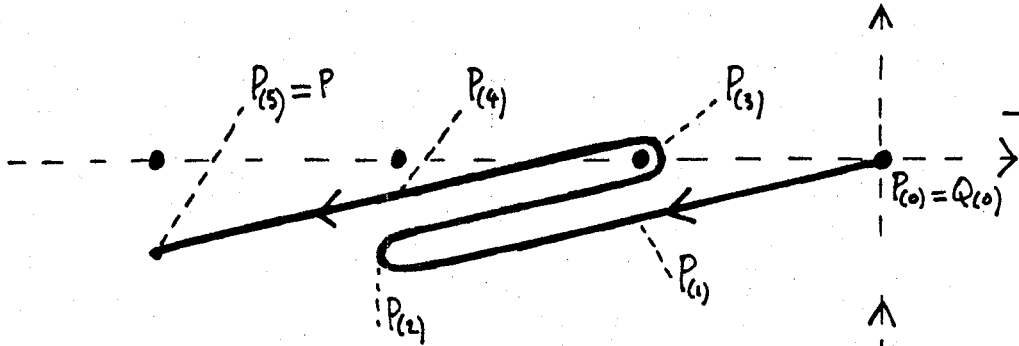


figure 5e10

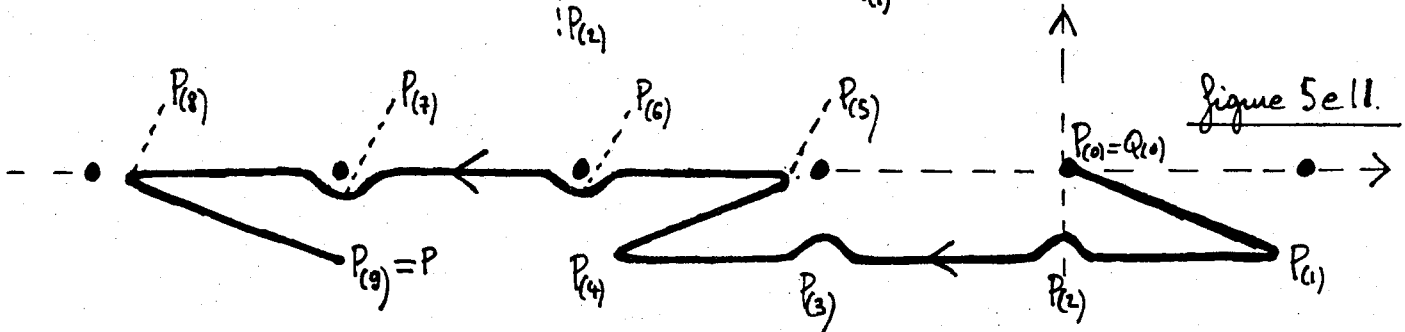


figure 5e11

Considérons maintenant les coalgèbres aux frontières négative et positive.

Soit $\mu_{\pm}$ l'application linéaire de $\mathcal{C}[\Gamma]$ dans $\mathcal{C}[\partial^{\pm}\mathcal{R}]$ déterminée par :

$$\mu_{\pm}(\Gamma) = \Gamma^{-1} Q_{\pm} \quad \text{pour tout } \Gamma \in \Gamma.$$

On observe que $\mathcal{P}_+$ et $\mathcal{P}_-$ ont respectivement pour noyaux :

$$(1-S)\mathbb{C}[\Gamma] \quad \text{et} \quad (1-T)\mathbb{C}[\Gamma]$$

Puisque d'autre part les espaces vectoriels $\mathcal{D}(\mathcal{N})$ et $\mathbb{C}[\Gamma]$ admettent les décompositions en sommes directes :

$$\begin{aligned} \mathcal{D}(\mathcal{N}) &= \mathbb{C} \oplus (1-R)\mathbb{C}[\Gamma] \\ \mathbb{C}[\Gamma] &= \mathbb{C} \oplus (1-R)\mathbb{C}[\Gamma] \oplus (1-S)\mathbb{C}[\Gamma] \\ &= \mathbb{C} \oplus (1-R)\mathbb{C}[\Gamma] \oplus (1-T)\mathbb{C}[\Gamma] \end{aligned}$$

il est clair que $\mathcal{P}_+$ et $\mathcal{P}_-$ définissent des isomorphismes linéaires respectivement de $\mathbb{C}[\partial^+\mathcal{R}]$ et $\mathbb{C}[\partial^-\mathcal{R}]$ dans $\mathcal{D}(\mathcal{N})$.

Proposition 5e2 (frontières positive et négative)

L'application $\mathcal{P}_\pm$ définie ci-dessus est en fait un isomorphisme de la coalgèbre $\mathcal{D}(\mathcal{N})$ dans la coalgèbre $\mathbb{C}[\partial^\pm\mathcal{R}]$.

Laissons ici encore la vérification au lecteur et traitons deux exemples.

Exemple 4 : Soit à calculer $\sigma_+(Q)$ pour $Q = S^{-1}R^{-2}Q_+$.

Dans la somme directe $\mathbb{C} \oplus (1-R)\mathbb{C}[\Gamma] \oplus (1-S)\mathbb{C}[\Gamma]$ l'élément R^2S de $\mathbb{C}[\Gamma]$ admet pour composantes :

$$1 \ ; \ (1-R)(-S-RS) \ ; \ -(1-S)$$

Par suite, au point Q , considéré comme élément de la coalgèbre $\mathbb{C}[\partial^+\mathcal{R}]$, l'isomorphisme inverse $\mathcal{P}_+^{-1}$ associe un élément D_Q de $\mathcal{D}(\mathcal{N})$ défini par :

$$\begin{aligned} D_Q &= \psi_+^{-1}(Q) = 1 - (1-R)S - R(1-R)S \\ &= 1 - S_1 - RS_1 \end{aligned}$$

D'où, compte tenu de (2a4) et des lois de bigèbre :

$$\begin{aligned} \sigma(D_Q) &= -S_1 \otimes 1 - 1 \otimes S_1 - (R \otimes R)(S_1 \otimes 1 + 1 \otimes S_1) + 1 \otimes 1 \\ &= -S_1 \otimes 1 - 1 \otimes S_1 - RS_1 \otimes R - R \otimes RS_1 + 1 \otimes 1 \\ &= -S \otimes 1 + RS \otimes 1 - 1 \otimes S + 1 \otimes RS - RS \otimes R - R \otimes RS \\ &\quad + R^2 S \otimes R + R \otimes R^2 S + 1 \otimes 1 \end{aligned}$$

Soit finalement, après application de l'isomorphisme direct :

$$(5e4) \quad \left\{ \begin{aligned} \sigma_+(Q) &= Q_1 \otimes Q_3 + Q_3 \otimes Q_1 - Q_+ \otimes Q_+ \\ &\quad + Q_+ \otimes Q_2 + Q_2 \otimes Q_+ - Q_2 \otimes Q_1 - Q_1 \otimes Q_2 \\ \text{avec } Q_1 &= R^{-1}Q_+, \quad Q_2 = S^{-1}R^{-1}Q_+, \quad Q_3 = S^{-1}R^{-2}Q_+ \end{aligned} \right.$$

L'interprétation géométrique est fournie par les figures 5e12, 5e13, 5e14 ci-dessous.

Le chemin $\mathcal{J}$ de la figure 5e15 est symétriquement contractable et il passe successivement à proximité des points suivants de la frontière positive :

$$Q_{(1)} = Q_1, \quad Q_{(2)} = Q_+, \quad Q_{(3)} = Q_2, \quad Q_{(4)} = Q_3$$

On peut alors appliquer la formule (5c1)

$$\sigma_+(Q) = \sum_{i=1}^n Q_{(i)} \otimes Q_{(n+1-i)} - \sum_{i=1}^{n-1} Q_{(i)} \otimes Q_{(n-i)}$$

et vérifier que l'on retrouve bien la valeur de $\sigma_+(Q)$ déjà obtenue par le calcul analytique.

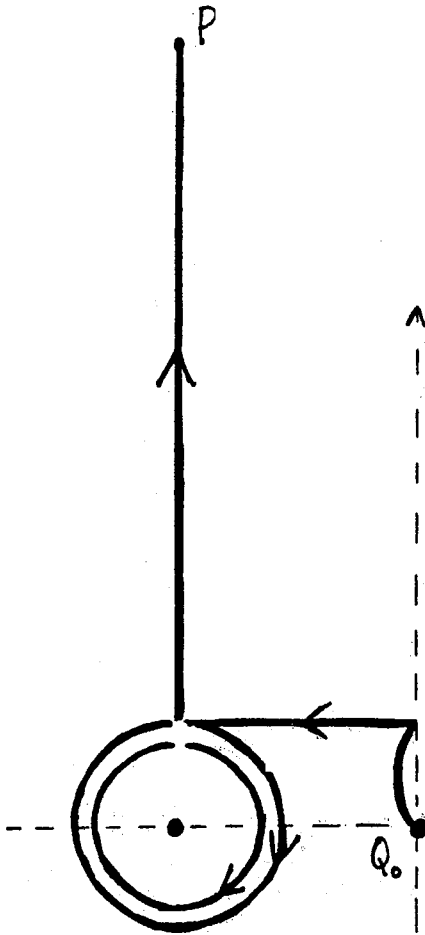


figure 5e12

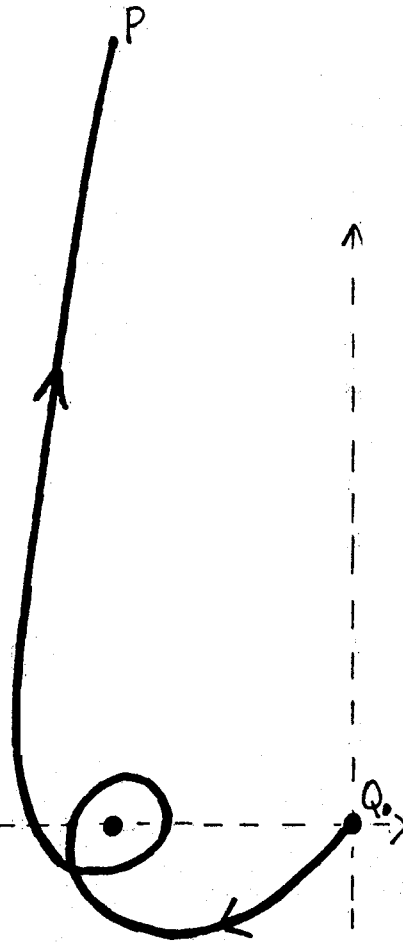


figure 5e13

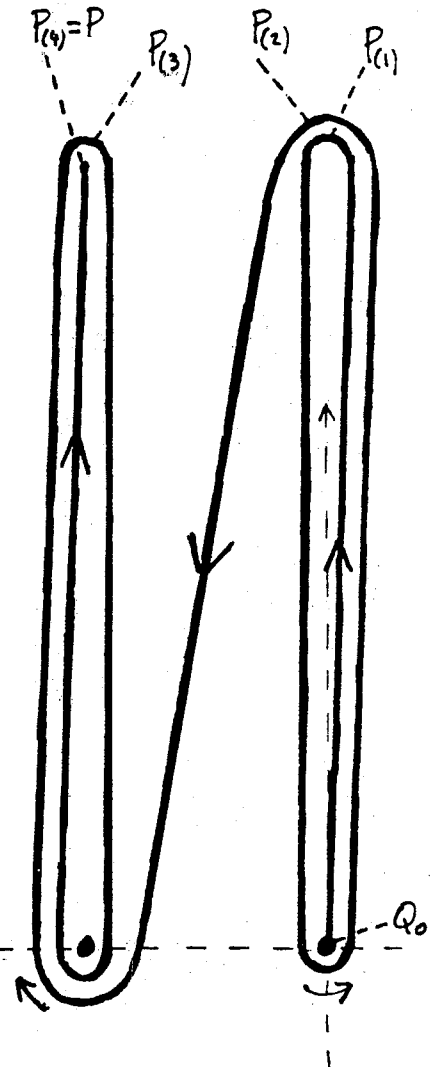


figure 5e14

Exemple 5 : Soit à calculer $\sigma_+(Q)$ pour $Q = S^{-1}R^{-1}S^{-2}R^{-1}Q_+$.

Dans la somme directe $\mathbb{C} \oplus (1-R)\mathbb{C}[\pi] \oplus (1-S)\mathbb{C}[\pi]$ l'élément RS^2RS de $\mathbb{C}[\pi]$ admet pour composantes :

$$1 ; (1-R)(-S-S^2RS) ; (1-S)(1-RS-SRS)$$

Par suite, au point Q , considéré comme élément de la coalgèbre $\mathbb{C}[\partial^+R]$, l'isomorphisme inverse ρ_+^{-1} associe un élément D_Q de $\mathcal{D}(\Omega)$ défini par :

$$\begin{aligned}
 D_Q &= \psi_+^{-1}(Q) = 1 - (1-R)(S + S^2RS) \\
 &= 1 - (1-R)(S + S^3 - S^2(1-R)S) \\
 &= 1 - S - S_3 + S_2 S_1
 \end{aligned}$$

D'où, compte tenu de (2a4) et des lois de bigèbre :

$$\begin{aligned}
 \sigma(D_Q) &= 1 \otimes 1 - S_1 \otimes 1 - 1 \otimes S_1 - S_3 \otimes 1 - S_2 \otimes S_1 - S_1 \otimes S_2 - 1 \otimes S_3 \\
 &\quad + S_2 S_1 \otimes 1 + S_2 \otimes S_1 + S_1 S_1 \otimes S_1 + S_1 \otimes S_1 S_1 + S_1 \otimes S_2 + 1 \otimes S_2 S_1 \\
 &= 1 \otimes 1 + RS \otimes 1 + 1 \otimes RS - S \otimes 1 - 1 \otimes S - S^2 RS \otimes 1 - 1 \otimes S^2 RS \\
 &\quad + S^2 \otimes S + S \otimes S^2 + RS^2 RS \otimes 1 + 1 \otimes RS^2 RS - S^2 \otimes RS \\
 &\quad - RS \otimes S^2 - RS^2 \otimes S - S \otimes RS^2 + RS^2 \otimes RS + RS \otimes RS^2 \\
 &\quad - SRS \otimes S - S \otimes SRS + SRS \otimes RS + RS \otimes SRS \\
 &\quad + RSRS \otimes S + S \otimes RSRS - RSRS \otimes RS - RS \otimes RSRS
 \end{aligned}$$

Soit finalement, après application de l'isomorphisme direct :

$$(5e5) \quad \left\{ \begin{aligned} \sigma_+(Q) &= Q \otimes Q_+ + Q_+ \otimes Q + Q_+ \otimes Q_+ + 2Q_1 \otimes Q_1 \\
 &\quad - 2Q_1 \otimes Q_+ - 2Q_+ \otimes Q_1 + Q_3 \otimes Q_+ + Q_+ \otimes Q_3 \\
 &\quad + Q_2 \otimes Q_1 + Q_1 \otimes Q_2 - Q_+ \otimes Q_2 - Q_2 \otimes Q_+ \\
 &\quad - Q_1 \otimes Q_3 - Q_3 \otimes Q_1 \\
 &\quad \text{avec } Q_1 = S^{-1}R^{-1}Q_+, \quad Q_2 = S^{-2}R^{-1}Q_+, \quad Q_3 = S^{-1}R^{-1}S^{-1}R^{-1}Q_+ \end{aligned} \right.$$

L'interprétation géométrique est fournie par les figures 5e15, 5e16, 5e17 ci-dessous.

Le chemin  de la figure 5e18 est symétriquement contractable.

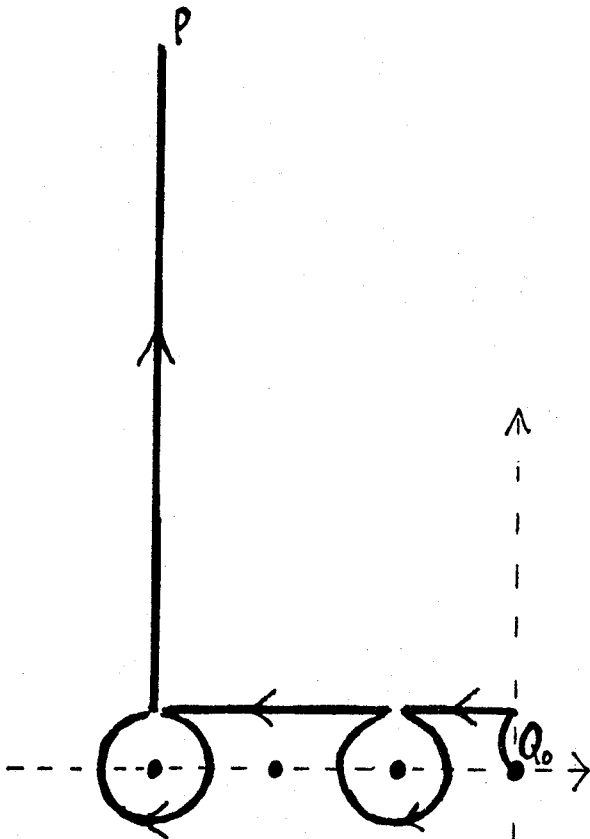


figure 5e15

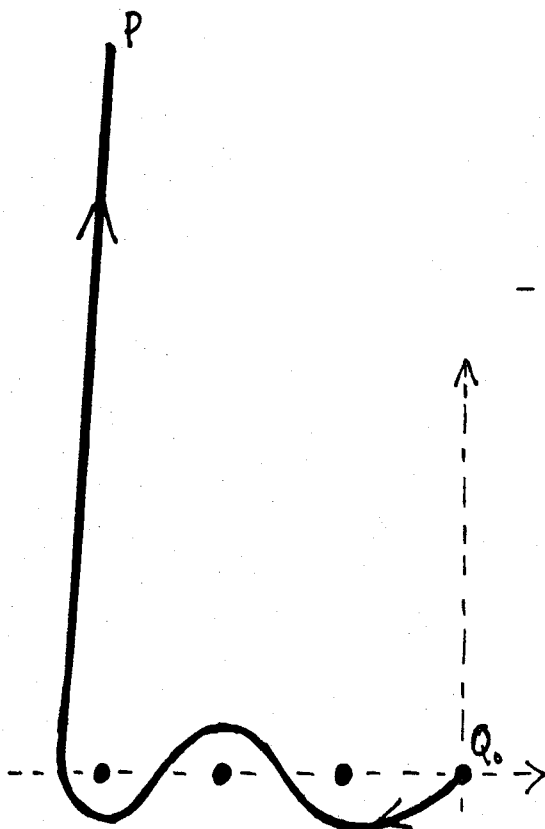


figure 5e16

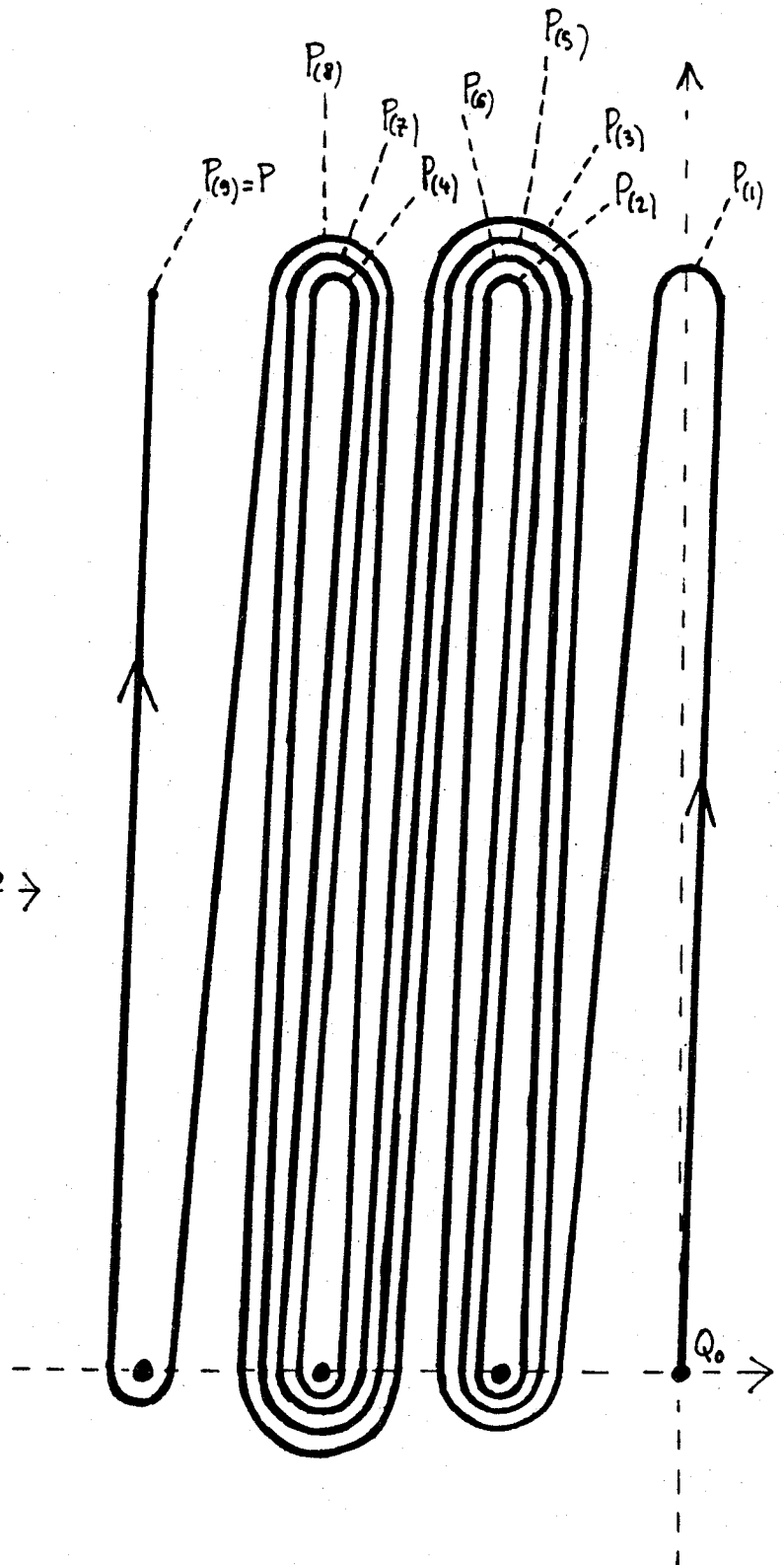


figure 5e17

Malgré son tracé "compliqué", c'est le plus simple possible (*). Il passe successivement à proximité des points suivants de la frontière positive

$$\begin{cases} Q_{(1)} = Q_+ , Q_{(2)} = Q_1 , Q_{(3)} = Q_+ , Q_{(4)} = Q_2 , Q_{(5)} = Q_+ , \\ Q_{(6)} = Q_1 , Q_{(7)} = Q_3 , Q_{(8)} = Q_1 , Q_{(9)} = Q \end{cases}$$

On peut alors appliquer la formule (5c1) et vérifier que l'on retrouve la même valeur $\sigma_+(Q)$ que par le calcul analytique.

Section 5f : Résumé du chapitre 5.

Le comportement asymptotique en un point-frontière Q d'un produit $\psi * \psi$ de fonctions résurgentes ne dépend que du comportement asymptotique des deux facteurs en un nombre fini de points-frontière Q_i . Ces points sont dits antérieurs à Q . L'antériorité est une relation d'ordre définie sur chacune des trois frontières (neutre, positive, négative).

On élucide successivement l'aspect géométrique de ce phénomène, grâce à la notion de contractibilité symétrique des chemins d'intégration, puis l'aspect analytique, grâce aux formules de Leibniz.

Pour finir, on traite cinq exemples particuliers, d'abord par le calcul, ensuite par la géométrie, puis on vérifie la coïncidence des résultats.

(*) Voir la Note à l'exemple 2.

Chapitre 6 : Représentation des pseudovariables et calcul différentiel étranger.

Section 6a : Introduction. Notion de représentation ∂ -stable et Δ -stable.

Soit $\mathcal{A}$ l'une des algèbres de résurgence introduites plus haut (par exemple $\mathcal{A}(\mathcal{L})$ ou $\mathcal{A}(\mathfrak{h}, \mathcal{L})$). Soit Δ la bigèbre des dérivations étrangères de $\mathcal{A}$ et soit Δ' l'algèbre des pseudovariables de $\mathcal{A}$.

On appelle représentation des pseudovariables dans $\mathcal{A}$ la donnée d'une famille $\mathcal{W} = \{w^\eta\}$ d'éléments de $\mathcal{A}$ qui vérifient la même table de multiplication que les pseudovariables fondamentales z^η , à savoir :

$$(6a1) \quad w^{\eta^1} * w^{\eta^2} = \sum_{\eta^1, \eta^2 < \eta} w^\eta \quad (\eta^1, \eta^2, \eta^3 \text{ multiindices})$$

Par linéarité, l'application $\mathcal{W} : z^\eta \rightarrow w^\eta$ induit alors une représentation dans $\mathcal{A}$, non pas de l'algèbre Δ' toute entière, mais de la sous-algèbre formée par les combinaisons linéaires finies des z^η .

Les représentations des pseudovariables interviennent dans la plupart des problèmes de calcul différentiel étranger, c'est-à-dire dans l'étude des équations faisant intervenir les dérivations étrangères et ayant pour inconnues des fonctions résurgentes. On trouvera des exemples de telles équations à la section 6e et aux chapitres 9 et 14.

Les représentations les plus utiles sont celles qui présentent avec les opérateurs Δ_η ou ∂ (dérivations étrangères ou naturelle) des relations de commutation simple.

Plus précisément, une représentation $\mathcal{W}$ est dite Δ -stable si elle commute avec les dérivations étrangères :

$$\mathcal{W}\Delta = \Delta\mathcal{W} \quad \text{pour tout } \Delta \in \Delta$$

On voit aussitôt que w est Δ -stable si et seulement si :

$$(6a2) \quad \Delta_{\eta_0} w^{\eta_1, \dots, \eta_n} = \begin{cases} w^{\eta_1, \dots, \eta_n} & \text{si } \eta_0 = \eta_1 \\ 0 & \text{si } \eta_0 \neq \eta_1 \end{cases}$$

L'action de la dérivation naturelle ∂ sur les pseudovariables étant donnée par $\partial z^\eta = -\|\dot{\eta}\| z^\eta$, on ne peut pas imposer la relation $w\partial = \partial w$, car celle-ci équivaudrait à la relation $(\partial + \|\dot{\eta}\|)w^\eta = 0$, c'est-à-dire $(-\eta + \|\dot{\eta}\|)w^\eta(P) = 0$ pour tout point P de $\mathcal{R}$. w^η serait donc nulle pour $\|\dot{\eta}\| \neq 0$ (respectivement réduite à un Dirac pour $\|\dot{\eta}\| = 0$) et la représentation w dégénérerait en une représentation scalaire.

On se contentera donc de postuler une forme affaiblie de commutation et on dira qu'une représentation w est ∂ -stable si et seulement si :

$$(6a3) \quad (\partial + \dot{\eta}_1 + \dots + \dot{\eta}_n) w^{\eta_1, \dots, \eta_n} = -\frac{1}{2\pi i} w^{\eta_1, \dots, \eta_{n-1}} * \mathcal{J}e^{\eta_n}$$

pour une certaine famille $\{\mathcal{J}e^{\eta_i}\}$, paramétrée par un indice simple, de fonctions résurgentes.

Une représentation non-triviale ne peut être simultanément Δ -stable et ∂ -stable. Nous verrons même qu'il existe une remarquable dualité entre ces deux types de représentations.

Section 6b : Représentations des pseudovariables de $\mathcal{A}(\mathcal{R})$. La dualité $v \leftrightarrow v^*$

$\mathcal{C}_\infty$ (resp. $\mathcal{C}_r$) désigne comme d'habitude la surface de Riemann de $\log z$ (resp. $z^{1/r}$). Le point de ramification de chacune de ces surfaces est noté Q_0 . $\mathcal{R}$ désigne un sous-groupe discret de $\mathcal{C}$ et $\mathcal{R}_\infty$ (resp. $\mathcal{R}_r$) l'ensemble des points de $\mathcal{C}_\infty$ (resp. $\mathcal{C}_r$) qui sont situés au dessus de $\mathcal{R}^*$. On note $\dot{\eta}$ la projection sur $\mathcal{R}^*$ du point courant η de $\mathcal{R}_\infty$ ou $\mathcal{R}_r$. Enfin, comme précédemment, on pose :

$$\mathcal{R} = \widehat{\mathbb{C} \div \Omega} \sim \widehat{\mathbb{C}_\infty \div \Omega_\infty}$$

Commençons par construire une représentation ∂ -stable des pseudovariabiles de l'algèbre de résurgence $\mathcal{A}(\Omega)$.

Proposition 6b1 (représentation ∂ -stable)

Soit $\{\mathcal{H}^{\eta_i} (\eta_i \in \Omega_\infty)\}$ une famille de fonctions holomorphes sur $\mathbb{C}_\infty$ et possédant les propriétés suivantes :

$$(6b1) \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathcal{H}^{\eta_i} \text{ est bornée au voisinage de } Q_0 \\ \mathcal{H}^{\eta_i}(\eta_i) = 1 \\ \mathcal{H}^{\eta_i}(\eta_j) = 0 \quad \text{si } \eta_i = \eta_j \text{ mais } \eta_i \neq \eta_j \\ \sum_{\eta_i = \text{cste}} \mathcal{H}^{\eta_i} \text{ converge uniformément sur tout compact} \end{array} \right.$$

Alors les relations

$$(6b2) \quad \left\{ \begin{array}{l} v^\emptyset = \delta = \text{unité de l'algèbre } \mathcal{A}(\Omega) \\ v^{\eta_i} = \frac{1}{2\pi i (z - \eta_i)} \mathcal{H}^{\eta_i} \\ \dots \\ v^{\eta_1, \dots, \eta_n} = \frac{1}{2\pi i (z - \eta_1 \dots - \eta_n)} (v^{\eta_1, \dots, \eta_{n-1}} * \mathcal{H}^{\eta_n}) \end{array} \right.$$

définissent par récurrence sur r une famille $v = \{v^{\eta}; \eta \text{ multiindice}\}$ d'éléments de l'algèbre $\mathcal{A}(\Omega)$. De plus, l'application $z^\eta \rightarrow v^\eta$ est une représentation ∂ -stable de pseudovariabiles.

Démonstration : Etant des fonctions holomorphes sur $\mathbb{C}_\infty$ intégrables en Q_0 , les $\mathcal{H}^{\eta_i}$ induisent des éléments de $\mathcal{A}(\Omega)$, encore notés $\mathcal{H}^{\eta_i}$. Grâce aux hypothèses (6b1) on vérifie par récurrence que, pour tout multiindice η , v^η est définie holomorphes sur la surface $\mathcal{R}$, qu'elle est bornée en Q_0 et qu'aux

autres points de ramification Q de la surface $\mathcal{R}$, elle est un $\mathcal{O}(\log z)$ (avec, en plus, un pôle simple si $\dot{Q} = \|\dot{\eta}\| = \dot{\eta}_1 + \dots + \dot{\eta}_n$). Donc v^η appartient à $\mathcal{A}(\mathcal{Q})$. D'autre part, il résulte immédiatement de (6b2) que les v^η vérifient (6a3). D'où leur $\mathcal{Q}$ -stabilité.

Pour montrer que les v^η vérifient aussi la table de multiplication (6a1), on part de la relation élémentaire :

$$(6b3) \quad \left(\frac{A}{z-a} \right) * \left(\frac{B}{z-b} \right) = \frac{1}{z-a-b} \left(B * \frac{A}{z-a} \right) + \frac{1}{z-a-b} \left(A * \frac{B}{z-b} \right)$$

valable pour toute paire $\left(\frac{A}{z-a}, \frac{B}{z-b} \right)$ d'éléments de $\mathcal{A}_{int}$ ou, par suite, de $\mathcal{A}(\mathcal{Q})$. (a, b sont des scalaires; A, B des fonctions).

En notant $\bar{a}$ l'opérateur de multiplication par $(z-a)^{-1}$ et $\underline{A}$ l'opérateur de convolution par A , la relation (6b3) s'écrit :

$$(6b4) \quad (\bar{a} A) * (\bar{b} B) = \overline{a+b} \underline{B} \bar{a} A + \overline{a+b} \underline{A} \bar{b} B$$

En itérant convenablement (6b4) on peut montrer d'une part :

$$(6b5) \quad (\bar{a}_1 A^1) * \dots * (\bar{a}_n A^n) = \sum' \frac{1}{a_{\tau(1)} + \dots + a_{\tau(n)}} \underline{A}^{\tau(n)} \dots \frac{1}{a_{\tau(1)} + a_{\tau(2)}} \underline{A}^{\tau(2)} \bar{a}_{\tau(1)} A^{\tau(1)}$$

et d'autre part :

$$(6b6) \quad \left\{ \begin{aligned} & \left(\overline{a_1 + \dots + a_\delta} \underline{A}^\delta \dots \overline{a_1 + a_2} \underline{A}^2 \bar{a}_1 A^1 \right) * \left(\overline{a_{\delta+1} + \dots + a_n} \underline{A}^n \dots \overline{a_{\delta+1} + a_{\delta+2}} \underline{A}^{\delta+2} \bar{a}_{\delta+1} A^{\delta+1} \right) = \\ & \sum'' \frac{1}{a_{\tau(1)} + \dots + a_{\tau(n)}} \underline{A}^{\tau(n)} \dots \frac{1}{a_{\tau(1)} + a_{\tau(2)}} \underline{A}^{\tau(2)} \bar{a}_{\tau(1)} A^{\tau(1)} \end{aligned} \right.$$

où $\sum'$ est étendu à toutes les substitutions τ de n éléments et $\sum''$ aux seules τ qui préservent l'ordre interne des δ premiers et des $n-\delta$

derniers éléments, c'est-à-dire aux τ telles que :

$$\tau^{-1}(i) < \tau^{-1}(j) \quad \text{chaque fois que } 0 < i < j \leq \Delta \quad \text{ou } \Delta < i < j \leq n$$

Si maintenant on pose $a_j = \dot{\eta}_j$ et $A^j = \frac{1}{2\pi i} \mathcal{H}^{\eta_j}$, on s'aperçoit que la relation (6b6) s'écrit :

$$(6b7) \quad v^{\eta^1} * v^{\eta^2} = \sum_{\eta^1, \eta^2 < \eta} v^{\eta} \quad \text{avec } \eta = (\eta_1, \dots, \eta_n)$$

ce qui montre que $z^{\eta} \rightarrow v^{\eta}$ est bien une représentation des pseudo-variables (cqfd).

Cette représentation n'est pas Δ -stable, mais nous allons voir que les dérivations étrangères agissent quand même d'une manière assez simple sur les v^{η} , ce qui nous permettra plus tard d'en tirer une représentation Δ -stable.

Proposition 6b2 :

$\alpha)$ Il existe une famille unique $\left\{ V_{\eta_0}^{\eta} = V_{\eta_0}^{\eta_1, \dots, \eta_n} \right\}$ de scalaires tels
que pour tout indice simple η_0 et tout multiindice η on ait :

$$(6b8) \quad \Delta_{\eta_0} v^{\eta} = \sum_{\eta^1, \eta^2 = \eta} V_{\eta_0}^{\eta^1} v^{\eta^2}$$

où la somme est étendue à toutes les factorisations $\eta^1 = (\eta_1, \dots, \eta_j)$,

$\eta^2 = (\eta_{j+1}, \dots, \eta_n)$ du multiindice $\eta = (\eta_1, \dots, \eta_n)$, y compris les factorisations extrémales $\eta = \emptyset \eta$ et $\eta = \eta \emptyset$.

$\beta)$ Les scalaires $V_{\eta_0}^{\eta}$ sont nuls lorsque $\dot{\eta}_0 \neq \|\dot{\eta}\| = \eta_1 + \dots + \eta_n$ et, dans le
cas $\dot{\eta}_0 = \|\dot{\eta}\|$, ils peuvent se calculer par les formules

$$(6b9) \quad \begin{cases} V_{\eta_0}^{\phi} = 0 \\ V_{\eta_0}^{\eta_1} = 1 \quad \text{et} \quad V_{\eta_0}^{\eta_1} = 0 \quad \text{si} \quad \eta_0 \neq \eta_1 \\ V_{\eta_0}^{\eta_1, \dots, \eta_n} = \sum \gamma_j \left(v^{\eta_1, \dots, \eta_{n-1}} * \mathcal{R}^{\eta_n} \right) (Q_j) \quad (\text{somme finie}) \end{cases}$$

où les scalaires γ_j et les points-frontière Q_j sont définis à partir du développement canonique de la dérivation étrangère Δ_{η_0} :

$$(6b10) \quad \Delta_{\eta_0} = (1-R) \sum_j \gamma_j \Gamma_j \quad (\Gamma_j \in \Pi, Q_j = \Gamma_j^{-1} Q_0)$$

Démonstration : Notons d'abord que la dernière des relations (6b9) a un sens.

En effet, puisque $\dot{\eta}_n = \dot{\eta}_0 - (\dot{\eta}_1 + \dots + \dot{\eta}_{n-1}) \neq 0$, aucun des points Q_j n'est au dessus de $\dot{\eta}_1 + \dots + \dot{\eta}_{n-1}$. Donc la fonction $v^{\eta_1, \dots, \eta_{n-1}}$ n'a pas de pôle simple en Q_j et elle y admet au plus une singularité en $O(\log z)$ avec $z = \dot{P} - \dot{Q}_j$. La convolution avec $\mathcal{R}^{\eta_n}$ transforme ceci en un $O(z \log z)$ et par suite $(v^{\eta_1, \dots, \eta_{n-1}} * \mathcal{R}^{\eta_n})(P)$ tend vers une limite finie quand $P \rightarrow Q_j$.

Cela étant, la relation (6b8) est vraie pour $n=1$, car elle se réduit alors à $\Delta_{\eta_0} v^{\eta_1} = \delta$ si $\eta_0 = \eta_1$ (resp. 0 si $\eta_0 \neq \eta_1$). Supposons (6b8) vraie pour $1, 2, \dots, n-1$ et appliquons l'opérateur Δ_{η_0} à la fonction $v^{\eta_1, \dots, \eta_n}$ définie par (6b2). Puisque Δ_{η_0} et l'opérateur de multiplication par z ont pour commutateur $[\Delta_{\eta_0}, z] = \dot{\eta}_0 \Delta_{\eta_0}$, il vient en dérivant (6b2) :

$$\Delta_{\eta_0} v^{\eta_1, \dots, \eta_n} = V_{\eta_0}^{\eta_1, \dots, \eta_n} \delta + \frac{1}{2\pi i (z + \dot{\eta}_0 - \dot{\eta}_1 - \dots - \dot{\eta}_n)} \Delta_{\eta_0} (v^{\eta_1, \dots, \eta_{n-1}} * \mathcal{R}^{\eta_n})$$

où le scalaire $V_{\eta_0}^{\eta_1, \dots, \eta_n}$ est exactement celui des formules (6b9). Puisque Δ_{η_0} est une dérivation et que, par construction, $\Delta_{\eta_0} \mathcal{R}^{\eta_n} = 0$, cela donne :

$$\Delta_{\eta_0} v^{\eta_1, \dots, \eta_n} = V_{\eta_0}^{\eta_1, \dots, \eta_n} \delta + \frac{1}{2\pi i (\tau + \dot{\eta}_0 - \dot{\eta}_1 \dots - \dot{\eta}_n)} \left((\Delta_{\eta_0} v^{\eta_1, \dots, \eta_{n-1}}) * x^{\eta_n} \right)$$

D'où, par l'hypothèse de récurrence :

$$\begin{aligned} \Delta_{\eta_0} v^{\eta_1, \dots, \eta_n} &= V_{\eta_0}^{\eta_1, \dots, \eta_n} \delta + \frac{1}{2\pi i (\tau + \dot{\eta}_0 - \dot{\eta}_1 \dots - \dot{\eta}_n)} \sum_{j=1}^{n-1} V_{\eta_0}^{\eta_1, \dots, \eta_j} v^{\eta_{j+1}, \dots, \eta_{n-1}} * x^{\eta_n} \\ &= V_{\eta_0}^{\eta_1, \dots, \eta_n} \delta + \sum_{j=1}^{n-1} V_{\eta_0}^{\eta_1, \dots, \eta_j} \left(\frac{1}{2\pi i (\tau + \dot{\eta}_0 - \dot{\eta}_1 \dots - \dot{\eta}_n)} (v^{\eta_{j+1}, \dots, \eta_{n-1}} * x^{\eta_n}) \right) \end{aligned}$$

Or les scalaires $V_{\eta_0}^{\eta_1, \dots, \eta_j}$ ne sont différents de 0 que si $\dot{\eta}_0 = \dot{\eta}_1 + \dots + \dot{\eta}_j$.

Mais dans ce cas $\tau + \dot{\eta}_0 - \dot{\eta}_1 \dots - \dot{\eta}_n = \tau - \dot{\eta}_{j+1} \dots - \dot{\eta}_n$. On peut donc écrire dans tous les cas, en utilisant à nouveau (6b8) :

$$\Delta_{\eta_0} v^{\eta_1, \dots, \eta_n} = V_{\eta_0}^{\eta_1, \dots, \eta_n} \delta + \sum_{j=1}^{n-1} V_{\eta_0}^{\eta_1, \dots, \eta_j} v^{\eta_{j+1}, \dots, \eta_n}$$

Mais $\delta = v^\phi =$ unité de $\mathcal{A}(\Omega)$. Finalement, il vient :

$$\Delta_{\eta_0} v^{\eta_1, \dots, \eta_n} = \sum_{\eta' \eta^2 = \eta} V_{\eta_0}^{\eta'} v^{\eta^2} \quad (\eta = (\eta_1, \dots, \eta_n))$$

ce qui achève la démonstration par récurrence sur r . Avant de construire une représentation Δ -stable, il nous faut établir une propriété d'alternance des coefficients $V_{\eta_0}^{\eta}$.

Proposition 6b3 :

Pour tout indice simple η_0 et pour toute paire η^1, η^2 de multi-indices non vides, on a :

$$(6b11) \quad \sum_{\eta^1, \eta^2 < \eta} V_{\eta_0}^{\eta} = 0$$

Démonstration : Partons de la relation

$$\sum_{\eta', \eta'' < \eta} v^{\eta} = v^{\eta'} * v^{\eta''}$$

et appliquons la dérivation Δ_{η_0} à chaque membre. Il vient, d'après la proposition 6b2 :

$$\sum_{\eta', \eta'' < \eta} \sum_{\alpha', \alpha'' = \eta} V_{\eta_0}^{\alpha'} v^{\alpha''} = \left(\sum_{\beta', \beta'' = \eta'} V_{\eta_0}^{\beta'} v^{\beta''} \right) * v^{\eta''} + v^{\eta'} * \left(\sum_{\gamma', \gamma'' = \eta''} V_{\eta_0}^{\gamma'} v^{\gamma''} \right)$$

Le coefficient du Dirac δ dans le premier membre provient des seuls termes qui correspondent à la factorisation $\alpha' = \eta, \alpha'' = \emptyset$ de η . Il vaut donc exactement $\sum_{\eta', \eta'' < \eta} V_{\eta_0}^{\eta}$. Au contraire, le second membre ne contient pas de Dirac, à cause des facteurs $v^{\eta'}$ et $v^{\eta''}$, qui n'en contiennent pas.

D'où (6b11).

Nous pouvons maintenant, à partir de la représentation ∂ -stable $z^{\eta} \rightarrow v^{\eta}$, construire une représentation Δ -stable $z^{\eta} \rightarrow u^{\eta}$. Ce sera l'objet des quatre propositions suivantes.

Proposition 6b4 (Représentation Δ -stable).

Si pour tout multiindice η on pose

$$(6b12) \quad v^{\eta} = \sum_{\left\{ \begin{array}{l} \eta' \dots \eta^{\delta} = \eta \\ \eta_1, \dots, \eta_{\delta} \end{array} \right\}} u^{\eta_1, \dots, \eta_{\delta}} V_{\eta_1}^{\eta'} \dots V_{\eta_{\delta}}^{\eta^{\delta}}$$

où la somme est étendue à tous les indices simples η_j et à toutes les factorisations possibles de η en produit de multiindices η_j , alors les relations

(6b12) définissent par récurrence sur l'entier $n = n(\eta)$ une famille

$u = \{u^{\eta}\}$ de fonctions résurgentes de $A(\mathbb{Q})$ et l'application $z^{\eta} \rightarrow u^{\eta}$ est une représentation Δ -stable des pseudovariabiles de $A(\mathbb{Q})$.

Proposition 6b5.

Ces mêmes fonctions u^η peuvent être définies explicitement à partir
des v^η au moyen des relations suivantes :

$$(6b13) \quad u^\eta = \sum_{\substack{\eta' \dots \eta^s = \eta \\ \eta_1, \dots, \eta_s}} v^{\eta_1, \dots, \eta_s} U_{\eta_1}^{\eta'} \dots U_{\eta_s}^{\eta^s}$$

où les coefficients $U_{\eta_0}^{\eta_1, \dots, \eta_n}$ sont définis par récurrence à partir des
coefficients $V_{\eta_0}^{\eta_1, \dots, \eta_n}$ au moyen de l'un ou l'autre des systèmes équivalents
ci-dessous :

$$(6b14) \quad \sum_{\substack{\eta' \dots \eta^s = \eta \\ \eta_1, \dots, \eta_s}} U_{\eta_0}^{\eta_1, \dots, \eta_s} V_{\eta_1}^{\eta'} \dots V_{\eta_s}^{\eta^s} = \begin{cases} 1 & \text{si } n(\eta) = 1 \\ 0 & \text{si } n(\eta) \geq 2 \end{cases}$$

$$(6b15) \quad \sum_{\substack{\eta' \dots \eta^s = \eta \\ \eta_1, \dots, \eta_s}} V_{\eta_0}^{\eta_1, \dots, \eta_s} U_{\eta_1}^{\eta'} \dots U_{\eta_s}^{\eta^s} = \begin{cases} 1 & \text{si } n(\eta) = 1 \\ 0 & \text{si } n(\eta) \geq 2 \end{cases}$$

On note la parfaite dualité des formules (6b12) et (6b13) ainsi que celle des formules (6b14) et (6b15).

Proposition 6b6 :

Les coefficients $U_{\eta_0}^\eta$, duaux des coefficients $V_{\eta_0}^\eta$, possèdent les
mêmes propriétés d'alternance que ceux-ci, à savoir :

$$(6.16) \quad \sum_{\eta', \eta'' < \eta} U_{\eta_0}^\eta \quad (\forall \eta', \eta'' \neq \emptyset)$$

Proposition 6b7 :

La représentation $z' \rightarrow u'$ n'est pas ∂ -stable. Plus précisément, l'action de la dérivation naturelle ∂ sur les u' est donnée par la formule suivante, duale de la formule (6b8) :

$$(6b17) \quad (\partial + \|\dot{\eta}\|) u' = - \frac{1}{2\pi i} \sum_{\substack{\eta' \eta'' = \eta \\ \eta_2}} u'^{\eta'} * (U_{\eta_2}^{\eta''} u^{\eta_2})$$

où η, η', η'' sont des multiindices et η_2 un indice simple.

Démonstration des quatre propositions précédentes :

Explicitons (6b12) en tenant compte des propriétés des coefficients V_{η}^{η} .

Il vient, pour $r(\eta) \leq 3$:

$$(r = 0) \quad v^{\emptyset} = u^{\emptyset} = \delta$$

$$(r = 1) \quad v^{\eta_1} = u^{\eta_1}$$

$$(r = 2) \quad v^{\eta_1, \eta_2} = u^{\eta_1, \eta_2} + \sum u^{\eta_{12}} V_{\eta_{12}}^{\eta_1, \eta_2}$$

$$(r = 3) \quad v^{\eta_1, \eta_2, \eta_3} = u^{\eta_1, \eta_2, \eta_3} + \sum u^{\eta_{12}, \eta_3} V_{\eta_{12}}^{\eta_1, \eta_2} + \sum u^{\eta_1, \eta_{23}} V_{\eta_{23}}^{\eta_2, \eta_3} + \sum u^{\eta_{123}} V_{\eta_{123}}^{\eta_1, \eta_2, \eta_3}$$

où l'on doit sommer par rapport aux seuls indices muets η_{ij}, η_{ijk} etc...

(indices simples) en se limitant aux valeurs pour lesquelles :

$$\dot{\eta}_{ij} = \dot{\eta}_i + \dot{\eta}_j \quad ; \quad \dot{\eta}_{ijk} = \dot{\eta}_i + \dot{\eta}_j + \dot{\eta}_k \quad ; \quad \text{etc...}$$

D'une façon générale, on voit que $v^{\eta} - u^{\eta}$ s'exprime en fonction de séries infinies de fonctions $v^{\eta'}$ et $u^{\eta'}$ avec $r(\eta')$ et $r(\eta'') < r(\eta)$.

Par suite, si ces séries convergent, (6b12) définit par récurrence sur l'entier $r(\eta)$, une famille u^{η} de fonctions résurgentes. Or ces séries, ainsi plus généralement que toutes celles qui interviennent dans les quatre propositions

précédentes, convergent effectivement. Cela tient à ce que, dans ces sommations, chaque indice muet responsable d'une contribution non nulle varie en gardant une projection constante sur $\mathcal{N}^*$. Or, en se reportant aux définitions des v^η et des $V_{\eta_0}^\eta$ on voit que chacune des séries en question est de la forme

$$(6b18) \quad \sum_{\substack{\eta_1 = \text{cte}, \dots, \eta_n = \text{cte}}} \{ \mathcal{H}^{\eta_1}, \dots, \mathcal{H}^{\eta_n} \}$$

où le crochet $\{ \dots \}$ est une fonction linéaire par rapport à chaque $\mathcal{H}^{\eta_i}$. Compte tenu de la convergence uniforme des séries $\sum \mathcal{H}^\eta$ ($\eta = \text{cte}$), postulée en (6b1), chaque série (6a18) converge.

Nous avons donc une famille $\{v^\eta\} \subset \mathcal{A}(\mathcal{N})$ et nous voulons maintenant montrer sa Δ -stabilité, c'est-à-dire :

$$(6b19) \quad \Delta_{\eta_0} v^{\eta_1, \dots, \eta_n} = \begin{cases} v^{\eta_1, \dots, \eta_n} & \text{si } \eta_0 = \eta_1 \\ 0 & \text{si } \eta_0 \neq \eta_1 \end{cases}$$

Rappelons la formule (6b18) donnant l'action des Δ_{η_0} sur les v^η :

$$\Delta_{\eta_0} v^\eta = \sum_{\eta' \eta^2 = \eta} V_{\eta_0}^{\eta'} v^{\eta^2}$$

Vu la forme de la récurrence définissant les v^η à partir des v^η , la vérité de (6b19) équivaut à la compatibilité de (6b19) avec (6b8). Pour établir cette compatibilité, appliquons Δ_{η_0} aux deux membres de (6b12) en postulant (6b19). Il vient :

$$\Delta_{\eta_0} v^\eta = \sum_{\substack{\eta' \eta^2 \dots \eta^n = \eta \\ \eta_1, \dots, \eta_n}} V_{\eta_0}^{\eta'} (v^{\eta_1, \dots, \eta_n} V_{\eta_2}^{\eta^2} \dots V_{\eta_n}^{\eta^n})$$

Soit, toujours d'après (6b12) :

$$\Delta_{\eta_0} v^\eta = \sum_{\eta' \eta^2 = \eta} V_{\eta_0}^{\eta'} v^{\eta^2}$$

ce qui n'est autre que (6b8). D'où la compatibilité de (6b19) avec (6b8), ce qui établit la Δ -stabilité de u .

Il faut maintenant montrer que l'application $z^\eta \rightarrow u^\eta$ est une représentation, autrement dit que :

$$(6b20) \quad u^{\eta'} * u^{\eta''} - \sum_{\eta^1, \eta^2 < \eta} u^\eta = 0$$

car il n'est pas évident que cette propriété, possédée par les u^η , s'est transmise aux u^η . Désignons par $u^{(\eta^1, \eta^2)}$ le premier membre de (6b20). $u^{(\eta^1, \eta^2)}$ est manifestement nul pour $r(\eta^1) + r(\eta^2) = 0, 1, 2$. Supposons $u^{(\eta^1, \eta^2)}$ nul pour $r(\eta^1) + r(\eta^2) \leq r-1$. Soit alors η^3 et η^4 avec $r(\eta^3) + r(\eta^4) = r$. On vérifie aisément que $\Delta_{\eta_0} u^{(\eta^3, \eta^4)}$ est une combinaison linéaire de $u^{(\eta^1, \eta^2)}$ avec $r(\eta^1) + r(\eta^2) = r-1$. D'où d'après l'hypothèse de récurrence

$$(6b21) \quad \Delta_{\eta_0} u^{(\eta^3, \eta^4)} = 0 \quad (\forall \eta_0)$$

Mais, par construction, chaque u^η , donc aussi $u^{(\eta^3, \eta^4)}$, est combinaison linéaire à coefficients constants de fonctions u^η et vérifie qu'une telle combinaison linéaire ne peut satisfaire (6b21) que si elle est identiquement nulle. Donc $u^{(\eta^3, \eta^4)} = 0$. Ceci achève la récurrence, montre que $z^\eta \rightarrow u^\eta$ est une représentation, et complète la démonstration de la proposition 6b4.

La formule (6b13), duale de (6b12), ainsi que les formules (6b14) et (6b15), se déduisent chacune de (6b12) par de simples arguments combinatoires. Quant à l'importante relation (6b16), duale de (6b11), elle peut aussi se déduire de cette dernière par un argument combinatoire, mais on arrive plus vite au résultat en appliquant la dérivation Δ_{η_0} aux deux membres de la

relation (6b20), puis en prenant leur valeur en Q_0 à l'aide de la formule (6b13). Enfin, la formule (6b17) découle directement de (6b13) compte tenu de la ∂ -stabilité de la représentation $z^\eta \rightarrow v^\eta$.

Ceci achève la démonstration des propositions 6b5, 6b6, 6b7 et conclut la construction, à partir d'une famille $\mathcal{H}^{\eta_i}$ à un paramètre, d'une représentation ∂ -stable v et d'une représentation Δ -stable u des pseudovariables de l'algèbre $A(\Omega)$.

Section 6c : Représentations des pseudovariables de $A(p, \Omega)$

On peut reprendre toutes les constructions de la section précédente en remplaçant $\mathbb{C}_\infty, \Omega_\infty$ par $\mathbb{C}_p, \Omega_p$ et en choisissant des $\mathcal{H}^{\eta_i}$ invariants par R^h (rotation de $+2\pi h$ autour de Q_0). On obtient ainsi, à partir de chaque famille $\{\mathcal{H}^{\eta_i} (\eta_i \in \Omega_p)\}$ vérifiant les trois premières clauses (6b1), une représentation ∂ -stable $z^\eta \rightarrow v^\eta$ et une représentation Δ -stable $z^\eta \rightarrow u^\eta$ des pseudovariables de $A(p, \Omega)$. Tous les résultats précédents demeurent, avec toutefois une simplification considérable, tenant au fait qu'on n'a plus affaire qu'à des sommes finies dans les formules (6b12), (6b13), (6b14), (6b15) puisque les indices muets n'y prennent plus que p valeurs chacun.

Choix de la famille $\{\mathcal{H}^{\eta_i}\}$ dans le cas $p \leq \infty$

On a souvent intérêt à considérer des $\mathcal{H}^{\eta_i}$ qui se déduisent toutes les unes des autres par des similitudes de centre Q_0 . La donnée d'une telle famille $\{\mathcal{H}^{\eta_i}\}$ équivaut à celle d'une unique fonction $\mathcal{H}$, définie holomorphe sur $\mathbb{C}_p$ et telle que

(i) $\mathcal{H}$ soit bornée au voisinage de Q_0 .

(ii) $\mathcal{H}(P_i) = 1$ si P_i désigne le relevé principal sur $\mathbb{C}_p$ du point 1 de $\mathbb{C}$.

$$(iii) \mathcal{H}(P) = 0 \quad \text{si } \dot{P} = 1 \quad \text{et si } P \neq P_1.$$

avec, dans le cas $\mu = \infty$, une quatrième condition :

$$(iiii) \sum_{n=-\infty}^{+\infty} R^n \mathcal{H} \quad \text{converge uniformément sur tout compact.}$$

Un tel choix à l'avantage de rendre les coefficients $V_{\eta_0}^{\eta_1, \dots, \eta_n}$ et $U_{\eta_0}^{\eta_1, \dots, \eta_n}$ homogènes de degré 0 : ils ne changent pas lorsqu'on applique une même similitude à tous les η_j ($0 \leq j \leq n$)

Pour $\mu \geq 2$, il ne semble pas qu'il existe un choix vraiment privilégié de la fonction $\mathcal{H}$. Un choix assez simple revient à fixer un entier $m \geq 1$ et à poser :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{pour } \mu < \infty : \mathcal{H}(P) = \mathcal{H}_\mu(P) = \frac{z^m}{\mu^2} \left(\frac{z^{1/2} - z^{-1/2}}{z^{1/2\mu} - z^{-1/2\mu}} \right)^2 \quad \text{où } z = \dot{P} \\ \text{pour } \mu = \infty : \mathcal{H}(P) = \mathcal{H}_\infty(P) = z^m \left(\frac{z^{1/2} - z^{-1/2}}{\log z} \right)^2 \end{array} \right.$$

Alors $\lim_{\mu \rightarrow \infty} \mathcal{H}_\mu = \mathcal{H}_\infty$ et on vérifie aussi que :

$$(6c1) \quad \sum_{n=-\infty}^{+\infty} R^n \mathcal{H}_\infty = \mathcal{H}_\mu \quad (*)$$

D'où par $\mathcal{R}(\eta)$ -linéarité, des relations analogues entre les fonctions $\mathcal{V}^\eta$ et $\mathcal{U}^\eta$ correspondantes, ainsi qu'entre les scalaires $V_{\eta_0}^\eta$ et $U_{\eta_0}^\eta$.

Remarque : Le choix le plus naturel du paramètre serait $m = 0$. C'est effectivement le bon choix quand $\mu = 1$, car il donne $\mathcal{H} \equiv 1$ et nous aurons l'occasion

(*) cette relation ne serait plus vraie si on remplaçait $\mathcal{H}_\mu$ par $(\mathcal{H}_\mu)^\ell$ pour un ℓ entier ou demi-entier (mais $\neq 1$) et ceci justifie le choix de l'exposant 2 dans la définition de $\mathcal{H}_\mu$.

d'étudier les propriétés remarquables des représentations u et v correspondantes. En revanche, quand $2 \leq p \leq \infty$, on obtiendrait pour $m = 0$ un $\mathcal{H}_p$ qui ne vérifie plus la condition (i) et dont on montre qu'il conduirait à des représentations des pseudovariables z^p non pas dans $A(p, \Omega)$ mais dans $\bar{A}(p, \Omega)$.

Section 6d : Le cas $p = 1$ et les moules auxiliaires canoniques.

Nous allons consacrer une section spéciale au cas $p = 1$, car c'est le plus important pour les applications et il présente par rapport au cas général trois particularités :

- (i) il existe une représentation ∂ -stable et une représentation Δ -stable canoniques, caractérisées par la nullité à l'infini des fonctions v^ω, u^ω et correspondant au choix $\mathcal{H}^\omega \equiv 1$ pour tout $\omega \in \Omega^*$.
- (ii) on peut omettre l'indice inférieur dans les scalaires $U_{\omega_0}^\omega$ et $V_{\omega_0}^\omega$ et on obtient ainsi deux moules, $U^\cdot$ et $V^\cdot$, qui sont liés (entre eux et avec $u^\cdot, v^\cdot$) par des relations s'exprimant très commodément en termes d'opérations sur les moules.
- (iii) les représentations canoniques u et v sont susceptibles d'une interprétation intéressante dans les modèles sectoriels et conduisent à divers moules auxiliaires importants.

Commençons par le point (i). Quand $p = 1$, Ω_p s'identifie à $\Omega^* = \Omega - \{0\}$ et les scalaires $U_{\omega_0}^\omega, V_{\omega_0}^\omega$ s'annulent sauf pour $\omega_0 = \|\omega\| = \omega_1 + \dots + \omega_n$. L'indice inférieur devient donc superflu et on peut poser :

$$(6d1) \quad U^\omega = U_{\|\omega\|}^\omega, \quad V^\omega = V_{\|\omega\|}^\omega$$

Les scalaires U^ω, V^ω sont donc définis pour tout multiindice ω sans

composante nulle et de somme $\|\omega\|$ non nulle. Il est utile de compléter cette définition en posant :

$$(6d1 \text{ bis}) \quad U^\omega = V^\omega = 0 \quad \text{quand} \quad \|\omega\| = 0$$

A côté des moules $u^\cdot$ et $v^\cdot$ à valeurs dans $M(1, \mathbb{R})$ nous avons maintenant les moules $U^\cdot$ et $V^\cdot$ à valeurs scalaires. Ce sont tous des moules sur Ω^* et la proposition 4a1 γ montre que la composition à droite par $U^\cdot$ ou $V^\cdot$ a un sens, du fait, précisément, de (6d1 bis).

Cela étant, on vérifie que les relations duales (6b12) $\Leftrightarrow$ (6b13) et (6b14) $\Leftrightarrow$ (6b15) du cas général se simplifient ici et s'écrivent sous la forme compacte ci-dessous :

$$(6d2) \quad v^\cdot = u^\cdot \circ V^\cdot \qquad (6d4) \quad U^\cdot \circ V^\cdot = I^\cdot$$

$$(6d3) \quad u^\cdot = v^\cdot \circ U^\cdot \qquad (6d5) \quad V^\cdot \circ U^\cdot = I^\cdot$$

Quant aux relations (6b11) $\Leftrightarrow$ (6b16) elles deviennent :

$$(6d6) \quad \sum_{\omega', \omega^2 < \omega} V^\omega = \sum_{\omega', \omega^2 < \omega} U^\omega = 0$$

pour toute paire ω', ω^2 de multiindices non vides. On voit donc que les moules $U^\cdot$ et $V^\cdot$ sont deux éléments mutuellement inverses du groupe alterné des moules sur Ω^* . (Voir Section 4b).

A partir de (6d4) ou de (6d5) on calcule aisément les scalaires U^ω en fonction des V^ω . Par exemple, pour $n(\omega) \leq 4$:

$$U^\emptyset = 0 \quad ; \quad U^{\omega_1} = 1 \quad ; \quad U^{\omega_1, \omega_2} = -V^{\omega_1, \omega_2} ;$$

$$U^{\omega_1, \omega_2, \omega_3} = -V^{\omega_1, \omega_2, \omega_3} + V^{\omega_1 + \omega_2, \omega_3} V^{\omega_1, \omega_2} + V^{\omega_1, \omega_2 + \omega_3} V^{\omega_2, \omega_3}$$

$$\begin{aligned} U^{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4} = & -V^{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4} + V^{\omega_1 + \omega_2, \omega_3, \omega_4} V^{\omega_1, \omega_2} + V^{\omega_1, \omega_2 + \omega_3, \omega_4} V^{\omega_2, \omega_3} \\ & + V^{\omega_1, \omega_2, \omega_3 + \omega_4} V^{\omega_3, \omega_4} + V^{\omega_1 + \omega_2 + \omega_3, \omega_4} V^{\omega_1, \omega_2, \omega_3} \\ & + V^{\omega_1, \omega_2 + \omega_3 + \omega_4} V^{\omega_2, \omega_3, \omega_4} - V^{\omega_1 + \omega_2 + \omega_3, \omega_4} V^{\omega_1 + \omega_2, \omega_3} V^{\omega_1, \omega_2} - V^{\omega_1 + \omega_2, \omega_3 + \omega_4} V^{\omega_1, \omega_2} V^{\omega_3, \omega_4} \\ & - V^{\omega_1 + \omega_2 + \omega_3, \omega_4} V^{\omega_1, \omega_2 + \omega_3} V^{\omega_2, \omega_3} - V^{\omega_1, \omega_2 + \omega_3 + \omega_4} V^{\omega_2 + \omega_3, \omega_4} V^{\omega_2, \omega_3} - V^{\omega_1, \omega_2 + \omega_3 + \omega_4} V^{\omega_2, \omega_3 + \omega_4} V^{\omega_3, \omega_4} \end{aligned}$$

L'expression des V^ω en fonction des U^ω est bien sûr identique. Pareillement, (6d3) donne le moyen d'expliciter les fonctions U^ω comme combinaisons linéaires des fonctions V^ω (lesquelles sont définies directement en (6d7) ci-après). Ainsi pour $n(\omega) \leq 3$:

$$U^\emptyset = V^\emptyset = \delta$$

$$U^{\omega_1} = V^{\omega_1}$$

$$U^{\omega_1, \omega_2} = V^{\omega_1, \omega_2} + V^{\omega_1 + \omega_2} U^{\omega_1, \omega_2}$$

$$U^{\omega_1, \omega_2, \omega_3} = V^{\omega_1, \omega_2, \omega_3} + V^{\omega_1 + \omega_2, \omega_3} U^{\omega_1, \omega_2} + V^{\omega_1, \omega_2 + \omega_3} U^{\omega_2, \omega_3} + V^{\omega_1 + \omega_2 + \omega_3} U^{\omega_1, \omega_2, \omega_3}$$

Examinons maintenant le point (i). Si on choisit $\eta^i \equiv 1$ les relations (6b9) se simplifient et on voit que, pour P voisin de Q_0 et $z = \dot{P}$, les fonctions V^ω sont définies par :

$$(6d7) \quad V^{\omega_1, \dots, \omega_n}(P) = \frac{1}{(2\pi i)^n} \frac{1}{(z - \omega_1 \dots - \omega_n)} \int_0^z \frac{dz_{n-1}}{z_{n-1} - \omega_1 \dots - \omega_{n-1}} \dots \int_0^{z_3} \frac{dz_2}{z_2 - \omega_1 - \omega_2} \int_0^{z_2} \frac{dz_1}{z_1 - \omega_1}$$

ce qui détermine leur prolongement à la surface $\mathcal{R}$ toute entière. On voit donc que pour $R(\omega) = n > 0$, $v^\omega(p)$ est un $O(z^{-n} \log^{n-1} z)$ quand $z \rightarrow \infty$. D'où la nullité à l'infini des v^ω et par suite des u^ω , qui sont leurs combinaisons linéaires à coefficients constants.

Inversement, si $z^\omega \rightarrow w^\omega$ est une représentation Δ -stable nulle à l'infini, on a $\Delta_{\omega_0}(w^{\omega_1} - u^{\omega_1}) = 0$ pour toute paire ω_0, ω_1 d'indices simples. Par suite la fonction $w^{\omega_1} - u^{\omega_1}$ est une pseudo-constante (i.e. elle est annulée par toute dérivation étrangère). Elle relève donc sur $\mathcal{R}$ une fonction entière sur $\mathbb{C}$ et, étant nulle à l'infini, elle est identiquement nulle. Comme d'autre part :

$$\Delta_{\omega_0}(w^{\omega_1, \dots, \omega_n} - u^{\omega_1, \dots, \omega_n}) = \begin{cases} w^{\omega_1, \dots, \omega_n} - u^{\omega_1, \dots, \omega_n} & \text{si } \omega_0 = \omega_1 \\ 0 & \text{si } \omega_0 \neq \omega_1 \end{cases}$$

on peut répéter ce raisonnement et voir, par récurrence sur r , que $w^\omega - u^\omega = 0$. Ceci montre l'unicité de la représentation Δ -stable nulle à l'infini.

Notons que les relations de Δ -stabilité et de ∂ -stabilité s'écrivent ici :

$$(6d8) \quad \Delta_{\omega_0} u^{\omega_1, \dots, \omega_n} = u^{\omega_1, \dots, \omega_n} \quad \text{si } \omega_0 = \omega_1 \quad (\text{resp. } = 0 \quad \text{si } \omega_0 \neq \omega_1)$$

$$(6d9) \quad (\partial + \omega_1 + \dots + \omega_n) v^{\omega_1, \dots, \omega_n} = -\frac{1}{2\pi i} (v^{\omega_1, \dots, \omega_{n-1}} * 1) \quad (*)$$

tandis que les relations duales s'écrivent :

(*) le 1 qui figure ici dans le produit de convolution désigne évidemment la fonction constante (et pas du tout l'unité δ de l'algèbre de résurgence).

$$(6d10) \quad \Delta_{\omega_0} v^\omega = \sum_{\substack{\omega' \omega'' = \omega \\ \|\omega'\| = \omega_0}} V^{\omega'} v^{\omega''}$$

$$(6d11) \quad (\partial + \|\omega\|) u^\omega = - \frac{1}{2\pi i} \left(\sum_{\omega' \omega'' = \omega} u^{\omega'} v^{\omega''} \right) * 1$$

Dans toute la suite, chaque fois qu'il sera question de l'algèbre $A(1, \mathcal{Q})$, les notations u et v seront réservées aux représentations Δ -stable et ∂ -stable canoniques que nous venons de construire. Plus encore que la nullité à l'infini des u^ω et v^ω , ce sont les propriétés différentielles des coefficients U^ω et V^ω correspondants qui distinguent ces deux représentations parmi toutes les autres. Mais comme pour l'instant les indices ne peuvent varier que d'une façon discontinue ($\mathcal{Q}$ est discret) nous devons différer au prochain chapitre l'étude différentielle.

Groupe des représentations des pseudovariables.

La donnée d'une représentation $M : \mathcal{Z}^\omega \rightarrow M^\omega$ des pseudovariables de $A(1, \mathcal{Q})$ équivaut à la donnée d'un moule symétrique m à valeurs dans l'algèbre de résurgence. Par suite, le produit $m_1 \times m_2$ sur les moules symétriques induit un produit $M_1 \times M_2$ sur les représentations et on peut parler du groupe des représentations des pseudovariables.

Les représentations Δ -stables w vérifient :

$$(6d12) \quad \Delta_{\omega_0} w^{\omega_1, \dots, \omega_n} = \delta_{\omega_0}^{\omega_1} w^{\omega_2, \dots, \omega_n} \quad \left(\text{avec } \delta_{\omega_0}^{\omega_1} = 1 \text{ si } \omega_0 = \omega_1 \text{ et } 0 \text{ sinon} \right).$$

Elles ne forment donc pas un groupe pour la multiplication. En revanche, les quotients $w_1^{-1} \times w_2$ et les quotients $w_1 \times w_2^{-1}$ (pour w_1, w_2 Δ -stables) forment deux sous-groupes (distincts l'un de l'autre) du

groupe des représentations.

Les $\mathcal{M}$ de la forme $w_1^{-1} \times w_2$ sont caractérisés par :

$$(6d13) \quad \Delta_{\omega_0} \mathcal{M}^{\omega_1, \dots, \omega_n} = 0 \quad (\forall \omega_0)$$

Les $\mathcal{M}$ de la forme $w_1 \times w_2^{-1}$ sont caractérisés par :

$$(6d14) \quad \Delta_{\omega_0} \mathcal{M}^{\omega_1, \dots, \omega_n} = \delta_{\omega_0}^{\omega_1} \mathcal{M}^{\omega_2, \dots, \omega_n} - \mathcal{M}^{\omega_1, \dots, \omega_{n-1}} \delta_{\omega_0}^{\omega_n} \quad (\text{avec } \delta_{\omega_0}^{\omega_i} \text{ comme ci-dessus})$$

Tous ces faits se vérifient élémentairement par récurrence sur la longueur du multiindice. Les représentations vérifiant (6d13) sont dites pseudoconstantes. Leur construction est facile : il suffit de relever sur $\mathbb{R}$ n'importe quelle famille $\{\mathcal{M}^{\omega_1, \dots, \omega_n}\}$ de fonctions entières sur $\mathbb{C}$ vérifiant la table de multiplication (6a1). D'après ce qui précède, on peut énoncer :

Proposition 6d1 (Représentation Δ -stable générale)

Toute représentation Δ -stable $z^w \rightarrow w^w$ des pseudovariables se factorise sous la forme

$$(6d15) \quad w = u \times \mathcal{M}$$

où u est le représentation Δ -stable canonique et $\mathcal{M}$ une représentation pseudoconstante.

Quant aux représentations vérifiant (6d14), elles interviennent dans la recherche des pseudotranslations, c'est-à-dire des endomorphismes des algèbres de résurgence qui commutent avec les dérivations étrangères (Voir Section 6e, Problème 6).

Abordons maintenant le point (iii) du début de cette section.

Les représentations canoniques $\mathcal{U}$ et $\mathcal{V}$ dans le modèle formel et dans les modèles sectoriels.

Pour fixer les idées, supposons dans toute la suite $\Omega = 2\pi i \mathbb{Z}$ et $\Omega^\pm = \pm 2\pi i \mathbb{N}^*$. Alors $Q_\pm$ se projette sur le point à l'infini du demi-plan $\pm \operatorname{Re} z > 0$. Dans le modèle formel (cf. section 3e) les fonctions $\mathcal{U}^\omega$ et $\mathcal{V}^\omega$ sont remplacées par leurs transformées de Laplace formelles, $\mathcal{U}^\omega$ et $\mathcal{V}^\omega$, qui sont ici des séries entières en z^{-1} . Dans les modèles sectoriels (cf. section 3d) $\mathcal{U}^\omega$ et $\mathcal{V}^\omega$ sont remplacées par leurs transformées de Laplace $\mathcal{U}_Q^\omega$ et $\mathcal{V}_Q^\omega$ relatives à un point-frontière Q de la forme $R^m Q_+$ ou $R^m Q_-$. Mais puisque nous sommes dans $A(1, \Omega)$, il suffit d'envisager $Q = Q_+$ et $Q = Q_-$. Nous poserons donc pour simplifier :

$$\mathcal{U}_{Q_\pm}^\omega = \mathcal{U}_\pm^\omega ; \quad \mathcal{V}_{Q_\pm}^\omega = \mathcal{V}_\pm^\omega$$

Par construction, les $\mathcal{U}_\pm^\omega, \mathcal{V}_\pm^\omega$ sont des germes sectoriels à l'infini, définis holomorphes pour z grand sauf (a priori) dans la direction

$\operatorname{Arg} \mp z = 0$ et admettant les séries formelles $\mathcal{U}^\omega, \mathcal{V}^\omega$ pour développements asymptotiques lorsque z tend vers l'infini dans le secteur

$$|\operatorname{Arg} \pm z| < \frac{\pi}{2}.$$

Les relations duales

$$(6d16) \quad \mathcal{U}^\cdot = \mathcal{V}^\cdot \circ U^\cdot$$

$$(6d17) \quad \mathcal{V}^\cdot = \mathcal{U}^\cdot \circ V^\cdot$$

qui relient les $\mathcal{U}^\omega$ aux $\mathcal{V}^\omega$ via les scalaires U^ω et V^ω , se transposent telles quelles aux modèles formel et sectoriels :

$$(6d18) \quad \mathcal{U}^\cdot = \mathcal{V}^\cdot \circ U^\cdot$$

$$(6d19) \quad \mathcal{V}^\cdot = \mathcal{U}^\cdot \circ V^\cdot$$

$$(6d20) \quad \mathcal{U}_\pm^\cdot = \mathcal{V}_\pm^\cdot \circ V^\cdot$$

$$(6d21) \quad \mathcal{V}_\pm^\cdot = \mathcal{U}_\pm^\cdot \circ U^\cdot$$

Les moules $\mathcal{U}^{\bullet}, \mathcal{U}^{\bullet}, \mathcal{U}_{\pm}^{\bullet}, \mathcal{V}^{\bullet}, \mathcal{V}^{\bullet}, \mathcal{V}_{\pm}^{\bullet}$, comme moules à valeur dans les algèbres de résurgence, sont tous symétriques : cela tient simplement à ce qu'ils correspondent à des représentations des pseudovariables dans les différents modèles des algèbres de résurgence. Mais dans le modèle additif, la table de multiplication (6a1) est vérifiée par rapport à la convolution, si bien que pour un point donné $P \in \mathcal{R}$, les moules scalaires $\mathcal{U}^{\bullet}(P)$ et $\mathcal{V}^{\bullet}(P)$ ne sont pas symétriques. Au contraire, dans les modèles sectoriels, (6a1) est vérifiée par rapport à la multiplication ordinaire (point par point) si bien que, pour z fixe, les moules scalaires $\mathcal{U}_{\pm}^{\bullet}(z)$ et $\mathcal{V}_{\pm}^{\bullet}(z)$ sont cette fois-ci symétriques

Proposition 6d2 (Représentations canoniques dans le modèle formel)

$\alpha)$ Dans le modèle formel on a $\mathcal{V}^{\phi} = 1$ et

$$(6d22) \quad \mathcal{V}^{\omega_1, \dots, \omega_n}(z) = \left(-\frac{1}{2\pi i}\right)^n \frac{1}{\partial + \omega_1 + \dots + \omega_n} \cdot \frac{1}{z} \dots \frac{1}{\partial + \omega_1 + \omega_2} \cdot \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{\partial + \omega_1} \cdot \frac{1}{z}$$

avec $\partial = \frac{\partial}{\partial z}$ et $\frac{1}{\partial + \omega} = \frac{1}{\omega} \sum_{0 \leq n < \infty} \left(-\frac{\partial}{\omega}\right)^n$

$\beta)$ Pas plus que dans le modèle additif, il n'existe dans le modèle formel d'expression direction de la représentation Δ -stable $\mathcal{U}$. On calcule celle-ci à partir de $\mathcal{V}$ grâce à la relation (6d16) où $\mathcal{U}^{\bullet}$ est le moule scalaire mesurant le défaut de Δ -stabilité de $\mathcal{V}^{\bullet}$.

(6d22) s'établit par simple transposition de (6d7). La formule ne représente aucune difficulté d'interprétation, car, pour chaque $n > 0$, elle ne fournit qu'un nombre fini de termes en z^{-n} .

Proposition 6d3. (Représentations canoniques dans les modèles sectoriels).

$\alpha)$ Parmi l'infinité des représentations Δ -stables ou ∂ -stables dans les

modèles sectoriels, les représentations canoniques $U_{\pm}^{\omega}$ et $V_{\pm}^{\omega}$ sont caractérisées par le fait que chaque $U_{\pm}^{\omega}(z)$ et chaque $V_{\pm}^{\omega}(z)$:

(i) se prolonge holomorphiquement le long de tout chemin évitant le point 0.

(ii) se comporte en $O(z^{-\varepsilon})$ ($\forall \varepsilon > 0$) lorsque z tend vers 0. Les $U_{\pm}^{\omega}$ et les $V_{\pm}^{\omega}$ sont donc des fonctions holomorphes sur C_{∞} (surface de Riemann de $\log z$).

$\beta)$ Dans le modèle sectoriel relatif à $Q_{\pm}$, on a $V_{\pm}^{\phi}(z) \equiv 1$ et

$$(6d23) \quad U_{\pm}^{\omega_1, \dots, \omega_n}(z) = \left(\frac{1}{2\pi i}\right)^n \int_z^{+\infty} e^{\omega_n(z_n - z)} \frac{dz_n}{z_n} \int_{z_n}^{+\infty} e^{\omega_{n-1}(z_{n-1} - z_n)} \frac{dz_{n-1}}{z_{n-1}} \dots \int_{z_2}^{+\infty} e^{\omega_1(z_1 - z_2)} \frac{dz_1}{z_1}$$

où $+\infty$ ($-\infty$) désigne le point à l'infini du demi-axe réel positif (négatif).

$\gamma)$ Dans le modèle sectoriel relatif à $Q_{\pm}$, on a $U_{\pm}^{\phi}(z) \equiv 1$ et, pour $\pm \operatorname{Re} z > 0$:

$$(6d24) \quad U_{\pm}^{\omega_1, \dots, \omega_n}(z) = \left(\frac{1}{2\pi i}\right)^n \sum_{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{n-1}} \lambda(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{n-1}) \int_{\prod_{j=1}^{n-1} (\varepsilon_j, \dots, \varepsilon_{n-1})} dz_n \dots dz_2 dz_1 \frac{e^{\omega_n(z_n - z)}}{(z_n - z_{n-1})} \dots \frac{e^{\omega_2(z_2 - z_1)}}{(z_2 - z_1)} \frac{e^{\omega_1(z_1 - z)}}{z_1}$$

- où chaque ε_j prend la valeur $+$ et $-$,

- où $\omega_j \infty$ désigne le point $+i\infty$ ou $-i\infty$ selon le signe de $\operatorname{Im} \omega_j$

- où chaque coefficient $\lambda(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{n-1})$ est égal au quotient par $n!$

du nombre des permutations τ des entiers $\{1, \dots, n\}$ telles que

$$\varepsilon_j(\tau(j+1) - \tau(j)) > 0 \text{ pour } j=1, 2, \dots, n-1 \quad (*)$$

(*) Par exemple $\lambda(+) = \lambda(-) = \frac{1}{2}$, $\lambda(++) = \lambda(--)= \frac{1}{6}$, $\lambda(+-) = \lambda(-+) = \frac{1}{3}$,

$$\lambda(+++) = \lambda(---) = \frac{1}{24}, \lambda(++-) = \lambda(-++) = \lambda(--+) = \lambda(+--) = \frac{1}{8}, \lambda(-+-) = \lambda(+--)= \frac{5}{24}$$

On note que $\sum_{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{n-1} = \pm} \lambda(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{n-1}) = 1$, si bien que $U_{\pm}^{\omega_1, \dots, \omega_n}(z)$ apparaît comme une moyenne d'intégrales.

- où le multichemin $\mathcal{J}(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{n-1})$ indique qu'on intègre par rapport à chaque variable z_j le long d'une verticale, depuis le point z jusqu'au point $\omega_j \omega$ en contournant éventuellement le point z_{j+1} dans le sens positif lorsque $\varepsilon_j = +$ et dans le sens négatif lorsque $\varepsilon_j = -$ (*)

Démonstration :

On a déjà vu que, dans le modèle additif, les représentations canoniques étaient caractérisées par le comportement en $\mathcal{O}(z \log^{n-1} z)$ des $\mathcal{U}^\omega(P)$, $\mathcal{V}^\omega(P)$ lorsque P tend vers n'importe quel point Q à l'infini de $\mathcal{R}$ ($n = n(\omega)$, $z = \dot{P}$). Compte tenu des propriétés de la transformation de Laplace, on s'assure que cela implique la prolongeabilité analytique de $\mathcal{U}_\pm^\omega(z)$, $\mathcal{V}_\pm^\omega(z)$ le long de tout chemin évitant l'origine ainsi que le comportement en $\mathcal{O}(\log^n z)$ de $\mathcal{U}_\pm^\omega(z)$, $\mathcal{V}_\pm^\omega(z)$ lorsque z tend vers 0 selon n'importe quel rayon.

Réciproquement, comme d'une part, d'après la proposition 6d1, toute représentation Δ -stable $\mathcal{W}$ se factorise en le produit de la représentation Δ -stable canonique $\mathcal{U}$ par une représentation pseudo-constante $\mathcal{M}$ et comme d'autre part, la seule représentation pseudoconstante $\mathcal{M}$ qui vérifie, dans le modèle sectoriel, les conditions (i), (ii) est la représentation triviale, il

(*) Autrement dit, z_j passe à droite de z_{j+1} lorsque $(\operatorname{Im} \omega_1 > 0, \operatorname{Im} \omega_2 > 0, \varepsilon_j = +)$ ou $(\operatorname{Im} \omega_1 < 0, \operatorname{Im} \omega_2 < 0, \varepsilon_j = -)$ et z_j passe à gauche de z_{j+1} lorsque $(\operatorname{Im} \omega_1 > 0, \operatorname{Im} \omega_2 > 0, \varepsilon_j = -)$ ou $(\operatorname{Im} \omega_1 < 0, \operatorname{Im} \omega_2 < 0, \varepsilon_j = +)$. Lorsque $\operatorname{Im} \omega_j$ et $\operatorname{Im} \omega_{j+1}$ sont de signes contraires, la question ne se pose évidemment pas.

est clair que (i), (ii) caractérisent $\mathcal{U}_{\pm}$ parmi toutes les représentations Δ -stables et il en résulte, du fait de (6d21), que (i), (ii) caractérisent de même $\mathcal{V}_{\pm}$ parmi toutes les représentations ∂ -stables. Ceci établit le point α .

Quant à la formule (6d23), on la prouve en partant de la formule (6d7) relative au modèle additif et en observant que si $\varphi_{\pm} = \mathcal{L}_{Q_{\pm}} \varphi$, alors :

$$\mathcal{L}_{Q_{\pm}} \left(\frac{1}{z-\omega} \varphi \right) = \int_z^{\pm\infty} e^{\omega(z-\zeta)} \varphi_{\pm}(\zeta) \frac{d\zeta}{\zeta}$$

Notons que les intégrales successives figurant dans (6d23) sont seulement "semi-convergentes". Toutefois, lorsque tous les ω_j sont dans Ω^+ (resp. Ω^-) on peut intégrer de z à $i\infty$ (resp. $-i\infty$) ce qui assure l'absolue convergence. Remarquons aussi que de (6d23) on déduirait aisément les propriétés (i), (ii) pour les $\mathcal{V}_{\pm}^{\omega}$ et, partant, pour les $\mathcal{U}_{\pm}^{\omega}$.

Reste à établir l'importante formule (6d24). Pour ce faire, nous n'allons pas raisonner directement sur les $\mathcal{U}^{\omega_1, \dots, \omega_n}$, mais sur des fonctions notées ${}^{\pm}\mathcal{U}^{\omega_1, \dots, \omega_n}$ et qui s'en déduisent par les relations

$$(6d25) \quad {}^{\pm}\mathcal{U}^{\cdot} = (\mathcal{U}^{\cdot}) \circ ({}^{\pm}\mathcal{L}^{\cdot})$$

où ${}^{+}\mathcal{L}^{\cdot}$ et ${}^{-}\mathcal{L}^{\cdot}$ sont les moules scalaires définis par :

$$(6d26) \quad {}^{\pm}\mathcal{L}^{\emptyset} = 0, \quad {}^{\pm}\mathcal{L}^{\omega_1} = 1, \quad {}^{\pm}\mathcal{L}^{\omega_1, \dots, \omega_n} = \begin{cases} \pm \frac{(-1)^{n-1}}{n} & \text{si } \omega_i/\omega_j > 0 \ (\forall i,j) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

${}^{+}\mathcal{L}^{\cdot}$ et ${}^{-}\mathcal{L}^{\cdot}$ admettent pour inverses de composition les moules ${}^{+}\mathcal{E}^{\cdot}$ et ${}^{-}\mathcal{E}^{\cdot}$ définis par :

$$(6d27) \quad {}^{\pm}E^{\phi} = 0, \quad {}^{\pm}E^{\omega_1} = 1, \quad {}^{\pm}E^{\omega_1, \dots, \omega_n} = \begin{cases} \frac{(\pm 1)^n}{n!} & \text{si } \omega_i/\omega_j > 0 \quad (\forall i, j) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

si bien que (6d25) équivaut à :

$$(6d28) \quad ({}^{\pm}u) \circ ({}^{\pm}E) = u$$

Mais, d'après (2a12) et (2a13), les relations entre les opérateurs Δ_{ω} et $\Delta_{\omega}^{\pm}$ introduits à la proposition 2b4 peuvent s'écrire :

$$(6d29) \quad \Delta_{\omega_0}^{\pm} = \sum_{\|\omega\|=\omega_0} {}^{\pm}E^{\omega} \Delta_{\omega} \quad (\omega_0 \text{ indice simple, } \omega \text{ multiindice})$$

(6d28) et (6d29) montrent que l'application ${}^{\pm}u^{\omega} \rightarrow u^{\omega}$ est formellement transposée de l'application $\Delta_{\omega} = \Delta_{\omega_n} \dots \Delta_{\omega_1} \rightarrow \Delta_{\omega}^{\pm} = \Delta_{\omega_n}^{\pm} \dots \Delta_{\omega_1}^{\pm}$. Par suite, aux relations :

$$\left\{ \begin{array}{l} (6d30) \quad \Delta_{\omega_0} u^{\omega_1, \dots, \omega_n} = \begin{cases} u^{\omega_1, \dots, \omega_n} & \text{si } \omega_0 = \omega_1 \\ 0 & \text{si } \omega_0 \neq \omega_1 \end{cases} \\ (6d30bis) \quad u^{\omega_1, \dots, \omega_n}(P) = O(\bar{z}^{-1} \log^{n-1} \bar{z}) \text{ quand } P \text{ tend vers l'infini } (\bar{z} = \dot{P}) \end{array} \right.$$

qui, ensemble, caractérisent les u^{ω} dans le modèle additif correspondant des relations :

$$\left\{ \begin{array}{l} (6d31) \quad \Delta_{\omega_0}^{\pm} {}^{\pm}u^{\omega_1, \dots, \omega_n} = \begin{cases} {}^{\pm}u^{\omega_1, \dots, \omega_n} & \text{si } \omega_0 = \omega_1 \\ 0 & \text{si } \omega_0 \neq \omega_1 \end{cases} \\ (6d31 bis) \quad {}^{\pm}u^{\omega_1, \dots, \omega_n}(P) = O(\bar{z}^{-1} \log^{n-1} \bar{z}) \text{ quand } P \text{ tend vers l'infini } (\bar{z} = \dot{P}) \end{array} \right.$$

qui, ensemble, caractérisent les ${}^{\pm}u^{\omega}$ dans le modèle additif.

Compte tenu de la forme des opérateurs $\Delta_{\omega_0}^{\pm}$ (ils ont chacun un support ponctuel, cf. proposition 2b4) les relations (6d31) expriment que la fonction $\pm \mathcal{U}^{\omega_1, \dots, \omega_n}$ n'a qu'une seule singularité à la frontière du demi-feuillet $\mathcal{R}(Q_{\pm})$, en un point situé précisément au dessus de ω_1 .

Passons maintenant aux deux modèles sectoriels et comparons les germes

$$\begin{cases} \pm \mathcal{U}_+^{\omega}(z) = \pm \mathcal{U}_{Q_+}^{\omega}(z) = \int_{Q_0}^{Q_+} e^{-\omega \zeta} \pm \mathcal{U}^{\omega}(P) dP & (\zeta = \dot{P}) \\ \pm \mathcal{U}_-^{\omega}(z) = \pm \mathcal{U}_{Q_-}^{\omega}(z) = \int_{Q_0}^{Q_-} e^{-\omega \zeta} \pm \mathcal{U}^{\omega}(P) dP & (\zeta = \dot{P}) \end{cases}$$

sur l'intersection de leur domaine de définition, c'est-à-dire (a priori) dans les demi-plans $\text{Im } z < 0$ et $\text{Im } z > 0$. En faisant tourner l'axe d'intégration dans le sens positif, pour passer de Q_+ à Q_- , et en tenant compte de ce qui vient d'être dit concernant les singularités de $\pm \mathcal{U}^{\omega}$, on montre facilement que, pour $\text{Im } z < 0$;

$$\begin{cases} (6d32) \quad +\mathcal{U}_+^{\omega_1, \dots, \omega_n}(z) - +\mathcal{U}_-^{\omega_1, \dots, \omega_n}(z) = \begin{cases} e^{-\omega_1 z} +\mathcal{U}_-^{\omega_2, \dots, \omega_n}(z) & \text{si } \omega_1 \in \mathcal{R}^+ \\ 0 & \text{si } \omega_1 \in \mathcal{R}^- \end{cases} \\ (6d33) \quad -\mathcal{U}_-^{\omega_1, \dots, \omega_n}(z) - -\mathcal{U}_+^{\omega_1, \dots, \omega_n}(z) = \begin{cases} e^{-\omega_1 z} -\mathcal{U}_+^{\omega_2, \dots, \omega_n}(z) & \text{si } \omega_1 \in \mathcal{R}^+ \\ 0 & \text{si } \omega_1 \in \mathcal{R}^- \end{cases} \end{cases}$$

En faisant tourner l'axe d'intégration dans le sens négatif, on montre de même que, pour $\text{Im } z > 0$:

$$\left\{ \begin{array}{l} (6d34) \quad {}^+u_{-}^{\omega_1, \dots, \omega_n}(z) - {}^+u_{+}^{\omega_1, \dots, \omega_n}(z) = \begin{cases} 0 & \text{si } \omega_1 \in \mathcal{R}^+ \\ e^{-\omega_1 z} {}^+u_{+}^{\omega_2, \dots, \omega_n}(z) & \text{si } \omega_1 \in \mathcal{R}^- \end{cases} \\ (6d35) \quad -u_{+}^{\omega_1, \dots, \omega_n}(z) - u_{-}^{\omega_1, \dots, \omega_n}(z) = \begin{cases} 0 & \text{si } \omega_1 \in \mathcal{R}^+ \\ e^{-\omega_1 z} u_{-}^{\omega_2, \dots, \omega_n}(z) & \text{si } \omega_1 \in \mathcal{R}^- \end{cases} \end{array} \right.$$

De plus, les ${}^+u_{\pm}^{\omega}$ et les $-u_{\pm}^{\omega}$, étant des combinaisons linéaires à coefficients constants des $u_{\pm}^{\omega}$, vérifient :

$$(6d36) \quad {}^+u_{\pm}^{\omega}(z) = o(z^{-\varepsilon}), \quad -u_{\pm}^{\omega}(z) = o(z^{-\varepsilon}) \quad \text{quand } z \rightarrow 0 \quad (\forall \varepsilon > 0)$$

Enfin, l'ensemble des relations (6d32) (6d33) (6d34) (6d35) (6d36), jointes à la prolongeabilité holomorphe le long de tout chemin évitant 0, caractérise les ${}^+u_{\pm}^{\omega}$ et les $-u_{\pm}^{\omega}$.

Lemme 6d1 :

Pour $\pm \operatorname{Re} z > 0$:

$$(6d37) \quad {}^+u_{\pm}^{\omega_1, \dots, \omega_n}(z) = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_{\Gamma^+} \frac{e^{\omega_n(z_n - z)}}{(z_n - z_{n-1})} \dots \frac{e^{\omega_2(z_2 - z)}}{(z_2 - z_1)} \frac{e^{\omega_1(z_1 - z)}}{z_1} dz_n \dots dz_1$$

$$(6d38) \quad -u_{\pm}^{\omega_1, \dots, \omega_n}(z) = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_{\Gamma^-} \frac{e^{\omega_n(z_n - z)}}{(z_n - z_{n-1})} \dots \frac{e^{\omega_2(z_2 - z)}}{(z_2 - z_1)} \frac{e^{\omega_1(z_1 - z)}}{z_1} dz_n \dots dz_1$$

où le multichemin Γ^+ (resp. Γ^-) indique qu'on intègre par rapport à chaque variable z_j le long d'une verticale, depuis le point z jusqu'au point $\omega_j \infty$, en contournant éventuellement (*) le point z_{j+1} dans le sens

(*) c'est-à-dire lorsque $\operatorname{Im} \omega_j$ et $\operatorname{Im} \omega_{j+1}$ sont de même signe.

positif (resp. dans le sens négatif).

Les fonctions définies sur $\pm \operatorname{Re} z > 0$ par les seconds membres de (6d37) et (6d38) sont en fait analytiquement prolongeables le long de tout chemin évitant 0 et on vérifie sans peine qu'elles satisfont à (6d36). Ces fonctions satisfont aussi à (6d32), (6d33), (6d34), (6d35) ainsi qu'on s'en assure en modifiant convenablement les multichemins d'intégration $\mathcal{J}^+$ et $\mathcal{J}^-$ (seul compte en fait le sens dans lequel z_i contourne l'origine). Or on a vu que toutes ces propriétés, ensemble, caractérisaient les ${}^+u_{\pm}^{\omega}$ et les ${}^-u_{\pm}^{\omega}$. Ceci établit donc le lemme.

Il s'agit maintenant de déduire (6d24) de (6d34) ou (6d35). Partons par exemple de la relation (6d34) et explicitons (6d28). Il vient :

$$(6d39) \quad u^{\omega} = \sum_{\omega' \dots \omega^{\Delta} = \omega} {}^+u^{\|\omega'\|, \dots, \|\omega^{\Delta}\|} {}^+E^{\omega'} \dots {}^+E^{\omega^{\Delta}}$$

où les ω^t sont des multiindices et où les ${}^+E^{\omega^t}$ sont définis comme en (6d27). Avec les notations de la proposition 6d3, le multichemin $\mathcal{J}^+$ du lemme 6d1 s'écrit $\mathcal{J}_{(+, +, \dots, +)}$. Plus généralement, pour toute sous-suite S de la suite $\{1, 2, \dots, n-1\}$, notons $\mathcal{J}_S^+$ le multichemin $\mathcal{J}_{(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{n-1})}$ avec $\varepsilon_j = +$ si $j \notin S$ et $\varepsilon_j = -$ si $j \in S$. Enfin, posons $\chi(\omega_1) = 1$ et $\chi(\omega_1, \dots, \omega_n) = 1$ (resp. 0) si tous les ω_j sont deux à deux dans un rapport réel positif (resp. dans le cas contraire). Alors, par de simples calculs de résidus, on trouve de proche en proche :

$$\begin{aligned}
 \chi(\omega_j, \omega_{j+1}) + \mathcal{U}_{\pm}^{\omega_1, \dots, \omega_j + \omega_{j+1}, \dots, \omega_n} &= \int_{\gamma_j^+} - \int_{\gamma_{j+1}^+} \quad (*) \\
 \chi(\omega_j, \omega_{j+1}, \omega_{j+2}) + \mathcal{U}_{\pm}^{\omega_1, \dots, \omega_j + \omega_{j+1} + \omega_{j+2}, \dots, \omega_n} &= \int_{\gamma_{j,j+1}^+} - \int_{\gamma_j^+} - \int_{\gamma_{j+1}^+} + \int_{\gamma_{j+2}^+} \\
 \chi(\omega_i, \omega_{i+1}) \chi(\omega_j, \omega_{j+1}) + \mathcal{U}_{\pm}^{\omega_1, \dots, \omega_i + \omega_{i+1}, \dots, \omega_j + \omega_{j+1}, \dots, \omega_n} &= \int_{\gamma_{i,j}^+} - \int_{\gamma_i^+} - \int_{\gamma_j^+} + \int_{\gamma_{j+1}^+} \\
 \text{----- etc -----}
 \end{aligned}$$

Finalement, pour chaque factorisation $\omega^1 \omega^2 \dots \omega^{\Delta}$ du multi-
 indice $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_{\Delta})$, on aboutit à la formule :

$$(6d40) \quad \chi(\omega^1) \chi(\omega^2) \dots \chi(\omega^{\Delta}) + \mathcal{U}_{\pm}^{\|\omega^1\|, \|\omega^2\|, \dots, \|\omega^{\Delta}\|} = (-1)^{n-\Delta} \sum' \varepsilon_1 \varepsilon_2 \dots \varepsilon_{n-1} \int_{\gamma_{(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_{n-1})}}$$

où le $\sum'$ est étendu à toutes les suites $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_{n-1}\}$ de signes $\pm$ pour
 lesquelles $\varepsilon_j = +$ quand $j = n(\omega^1)$, $j = n(\omega^1) + n(\omega^2)$, $\dots$, $j = n(\omega^1) + \dots + n(\omega^{\Delta-1})$.

A partir de là, on obtient (6d24) en rapprochant (6d39) de (6d40) et
 en utilisant un argument combinatoire que nous laissons au lecteur (**). Ceci
 achève la démonstration de la proposition 6d3.

Nous avons déjà observé que les germes $\mathcal{U}_{\pm}^{\omega}$ et $\mathcal{V}_{\pm}^{\omega}$ se prolon-
 geaient holomorphiquement le long de tout chemin évitant l'origine. Nous allons
 maintenant montrer qu'ils s'expriment comme polynômes en $\log z$, de degré
 $n(\omega)$, avec pour coefficients des fonctions entières en z .

(*) Dans cette formule et les suivantes, on sous-entend les mêmes intégrandes
 qu'en (6d24) et (6d37-38).

(**) Voir exercice 6d3.

Avant de chercher à calculer ces coefficients, il faut étudier l'effet sur les $u_{\pm}^{\omega}, v_{\pm}^{\omega}$ de la dérivation naturelle $\partial = \frac{\partial}{\partial z}$ et de la dérivation tronquée $\partial^* = \left(\frac{\partial}{\partial z}\right)^*$ qui par définition n'agit que sur les z situées à l'intérieur des logarithmes. Autrement dit, pour tout choix de $(n+1)$ fonctions entières φ_j :

$$\left(\frac{\partial}{\partial z}\right)^* \left(\sum_{j=0}^n \varphi_j(z) \log^j z \right) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial z} \varphi_j(z) \log^{j-1} z$$

D'autre part il est commode, dans cette étude, de substituer aux moules $u_{\pm}^{\omega}$ et $v_{\pm}^{\omega}$ les moules $(u_{\pm}^{\omega}) \circ (J^{\omega})$ et $(v_{\pm}^{\omega}) \circ (J^{\omega})$:

$$\omega \longrightarrow u_{\pm}^{\omega} e^{\|\omega\|z}, \quad \omega \longrightarrow v_{\pm}^{\omega} e^{\|\omega\|z}$$

où J^{ω} désigne comme d'habitude le moule alterné défini par :

$$J^{\emptyset} = 0, \quad J^{\omega_1} = e^{\omega_1 z}, \quad J^{\omega_1, \dots, \omega_n} = 0 \quad \text{si } n > 0.$$

Proposition 6d4 (dérivation des moules canoniques)

$$(6d41) \quad \left(-2\pi i z \frac{\partial}{\partial z}\right) (v_{\pm}^{\omega} \circ J^{\omega}) = (v_{\pm}^{\omega} \circ J^{\omega}) \times (J^{\omega})$$

$$(6d42) \quad \left(-2\pi i z \frac{\partial}{\partial z}\right) (u_{\pm}^{\omega} \circ J^{\omega}) = (u_{\pm}^{\omega} \circ J^{\omega}) \times (J^{\omega})$$

$$(6d43) \quad \left(-2\pi i z \frac{\partial}{\partial z}\right)^* (v_{\pm}^{\omega} \circ J^{\omega}) = (R_{\pm}^{\omega} \circ V^{\omega}) \times (v_{\pm}^{\omega} \circ J^{\omega})$$

$$(6d44) \quad \left(-2\pi i z \frac{\partial}{\partial z}\right)^* (u_{\pm}^{\omega} \circ J^{\omega}) = (R_{\pm}^{\omega}) \times (u_{\pm}^{\omega} \circ J^{\omega})$$

où $R_{\pm}^{\omega}$ désigne le moule alterné $\log(E_{\pm}^{\omega} \times E_{\mp}^{\omega})$ (*)

(*) Voir à la fin de la section 4c la définition du moule "rotationnel".

Démonstration :

Observons d'abord qu'à la différence de $U^\bullet$ et $V^\bullet$, les moules $J^\bullet$ et $R_\pm^\bullet$ sont élémentaires. Par suite, des quatre relations ci-dessus, les plus faciles à interpréter sont (6d41) et (6d44). Elles montrent, en gros, que les représentations ∂ -stable et Δ -stable se reproduisent sous l'effet, respectivement, de la dérivation naturelle et de la dérivation tronquée. C'est là un nouvel aspect de la dualité $u^\bullet \leftrightarrow v^\bullet$.

Quant à (6d43), elle s'obtient à partir de (6d44) en composant à droite par $V^\bullet$ et en observant que $J^\bullet \circ V^\bullet = V^\bullet \circ J^\bullet$. De même, (6d42) s'obtient à partir de (6d41) en composant à droite par $U^\bullet$. D'autre part, en transposant (6d9) dans le modèle sectoriel, il vient :

$$\left(\frac{\partial}{\partial z} + \omega_1 + \dots + \omega_n \right) v_\pm^{\omega_1, \dots, \omega_n} = - \frac{1}{2\pi i z} v_\pm^{\omega_1, \dots, \omega_{n-1}}$$

ou encore

$$\left(-2\pi i z \frac{\partial}{\partial z} \right) \left(e^{(\omega_1 + \dots + \omega_n)z} v_\pm^{\omega_1, \dots, \omega_n} \right) = \left(e^{(\omega_1 + \dots + \omega_{n-1})z} v_\pm^{\omega_1, \dots, \omega_{n-1}} \right) J^\omega$$

ce qui équivaut à (6d41).

Il suffit donc de prouver (6d44), qui est en fait la relation principale.

Rappelons la définition des moules $E_+^\bullet$ et $E_-^\bullet$:

$$E_\pm^\emptyset = 0 \quad ; \quad E_\pm^{\omega_1, \dots, \omega_n} = \begin{cases} 1/n! & \text{si } \omega_j \in \mathcal{R}^\pm \text{ pour chaque } j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

puis introduisons les moules $K_+^\bullet$ et $K_-^\bullet$ définis par :

$$K_\pm^\emptyset = 1 \quad ; \quad K_\pm^{\omega_1} = \begin{cases} 1 & \text{si } \omega_1 \in \mathcal{R}^\pm \\ 0 & \text{si } \omega_1 \in \mathcal{R}^\mp \end{cases} \quad ; \quad K^{\omega_1, \dots, \omega_n} = 0 \quad \text{si } n > 0$$

et observons que

$$(6d45) \quad (K_+^\bullet) \circ ({}^+E^\bullet) = E_+^\bullet \quad (6d45bis) \quad (K_-^\bullet) \circ ({}^+E^\bullet) = E_-^\bullet$$

Grâce aux moules $K_\pm^\bullet$ et $J^\bullet$, les relations (6d32) (6d33) (6d34) (6d35) s'expriment commodément

$$\left. \begin{array}{l} (6d46) \quad ({}^+U_+^\bullet \circ J^\bullet) = (K_+^\bullet) \times ({}^+U_-^\bullet \circ J^\bullet) \\ (6d47) \quad ({}^-U_-^\bullet \circ J^\bullet) = (K_+^\bullet) \times ({}^-U_+^\bullet \circ J^\bullet) \end{array} \right\} \text{pour } \text{Im } z < 0$$

$$\left. \begin{array}{l} (6d48) \quad ({}^+U_+^\bullet \circ J^\bullet) = (K_-^\bullet) \times ({}^+U_+^\bullet \circ J^\bullet) \\ (6d49) \quad ({}^-U_+^\bullet \circ J^\bullet) = (K_-^\bullet) \times ({}^-U_-^\bullet \circ J^\bullet) \end{array} \right\} \text{pour } \text{Im } z > 0$$

En composant à droite par ${}^+E^\bullet$ (resp. ${}^-E^\bullet$) les deux membres de (6d46) et (6d47) (resp. (6d48) et (6d49)), en tenant compte de la commutabilité de pour la composition des moules, puis en appliquant (6d45) et (6d45 bis), on trouve :

$$(6d50) \quad (U_+^\bullet \circ J^\bullet) = (E_+^\bullet) \times (U_-^\bullet \circ J^\bullet) \quad \text{pour } \text{Im } z < 0.$$

$$(6d50 \text{ bis}) \quad (U_-^\bullet \circ J^\bullet) = (E_-^\bullet) \times (U_+^\bullet \circ J^\bullet) \quad \text{pour } \text{Im } z > 0.$$

A partir de là, on voit qu'une rotation de $+2\pi$ autour de 0, équivaut, pour $(U_+^\bullet \circ J^\bullet)$, à la multiplication à gauche par $(E_+^\bullet) \times (E_-^\bullet)$ et, pour $(U_-^\bullet \circ J^\bullet)$, à la multiplication à gauche par $(E_-^\bullet) \times (E_+^\bullet)$. Comme $(U_\pm^\bullet \circ J^\bullet)$ est polynomial en $\log z$, avec pour coefficients

des fonctions entières, la rotation infinitésimale s'exprime par la dérivation tronquée $(-2\pi i \tau \frac{\partial}{\partial \tau})^*$ et équivaut à la multiplication à gauche par le moule $R_{\pm}^* = \log((E_{\pm}^*) \times (E_{\mp}^*))$.

Ceci établit (6d44) et achève de démontrer la proposition 6d4.

Factorisation des représentations canoniques.

De la proposition (6d3) nous allons tirer une factorisation des représentations Δ -stable et ∂ -stable canoniques. Les moules qui interviennent dans cette factorisation sont de trois sortes selon leur dépendance par rapport à z :

(Cst) = moules symétriques à valeurs scalaires.

(Log) = moules symétriques à valeurs dans l'espace des polynômes en $\log z$ sans tenue constant (*)

(Ent) = moules symétriques à valeurs dans l'espace des fonctions entières de z nulles à l'origine (*)

Enonçons d'emblée le résultat :

Proposition 6d4 (factorisation de $U_{\pm}^*$ et $V_{\pm}^*$).

La représentation ∂ -stable canonique admet une factorisation unique du type $(Cst) \times (Log) \times (Ent)$ et la représentation Δ -stable canonique admet une factorisation unique du type $(Log) \times (Cst) \times (Ent)$.
Plus explicitement, on a dans les modèles sectoriels :

(*) Sauf évidemment pour le multiindice vide $\omega = \phi$. Bien noter, d'autre part, que ces désignations (Log , fonctions entières) sont relatives aux modèles sectoriels

$$(6d51) \quad U_{\pm}^{\cdot} \circ J^{\cdot} = (V_{\pm}^{\cdot}) \times (\Lambda_{\pm}^{\cdot}) \times (2^{\cdot})$$

$$(6d52) \quad U_{\pm}^{\cdot} \circ J^{\cdot} = (\Lambda_{\pm}^{\cdot} \circ R_{\pm}^{\cdot}) \times (U_{\pm}^{\cdot} \circ R_{\pm}^{\cdot}) \times (P^{\cdot})$$

- où le moule symétrique $\Lambda_{\pm}^{\cdot}$ est défini par :

$$(6d53) \quad \Lambda_{\pm}^{\phi} = 1, \quad \Lambda_{\pm}^{\omega_1, \dots, \omega_n} = \frac{1}{n!} \left(-\frac{\log(\pm z)}{2\pi i} \right)^n$$

- où le moule symétrique $2^{\cdot}$ est déterminé comme unique solution du système :

$$(6d54) \quad \left(-2\pi i z \frac{\partial}{\partial z} \right) 2^{\cdot} = 2^{\cdot} \times J^{\cdot} - I^{\cdot} \times 2^{\cdot}$$

avec les conditions initiales

$$(6d54 \text{ bis}) \quad 2^{\phi} = 1 \quad \text{et} \quad 2^{\omega}(0) = 0 \quad \text{si} \quad n(\omega) > 0$$

et admet l'expression explicite (6d56) ci-après.

- où $P^{\cdot} = 2^{\cdot} \circ U^{\cdot}$ ($U^{\cdot}$ alterné; $P^{\cdot}, 2^{\cdot}$ symétriques)

- où le moule symétrique $\Lambda_{\pm}^{\cdot} \circ R_{\pm}^{\cdot}$ se déduit du moule symétrique $\Lambda_{\pm}^{\cdot}$ par composition avec le moule alterné $R_{\pm}^{\cdot} = \log(E_{\pm}^{\cdot} \times E_{\mp}^{\cdot})$

- où les moules scalaires symétriques $U_{\pm}^{\cdot}$ et $V_{\pm}^{\cdot}$ peuvent se calculer à partir des relations (6d52) et (6d51) respectivement, en y prenant une valeur particulière de z (on a intérêt à faire $z = \pm 1$, car alors $\Lambda_{\pm}^{\cdot}$ dégénère en le moule unité $1^{\cdot}$).

Démonstration. Rappelons la définition des moules alternés $I^\bullet$ et $J^\bullet$ (*)

$$\begin{cases} I^\phi = 0 & , & I^{\omega_1} = 1 & , & I^{\omega_1, \dots, \omega_n} = 0 & \text{si } n > 1 \\ J^\phi = 0 & , & J^{\omega_1} = e^{\omega_1 z} & , & J^{\omega_1, \dots, \omega_n} = 0 & \text{si } n > 1 \end{cases}$$

et introduisons un opérateur $\mathcal{Y}$ dans l'espace des fonctions entières :

$$\mathcal{Y} : \quad \varphi(z) \longrightarrow (\mathcal{Y}\varphi)(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_0^z (\varphi(0) - \varphi(z)) \frac{dz}{z}$$

On vérifie alors que l'équation (6d54) admet pour solution particulière le moule symétrique $2^\bullet$ défini par :

$$(6d55) \quad 2^\phi = 1, \quad 2^{\omega_1, \dots, \omega_n} = \sum (t_1)^{n-j} \varphi^{m_1} e^{\omega_1 z} \varphi^{m_2} e^{\omega_2 z} \dots \varphi^{m_j} e^{\omega_{n-j+1} z}$$

où le $\sum$ est étendu à tous les $j \geq 1$ et $\leq n$ et à tous les $m_i \geq 1$ et des somme $m_1 + \dots + m_j = n$. De plus, le moule (6d55) est la seule solution de (6d54) pour laquelle $2^\omega(0) = 0$ quand $n(\omega) > 0$.

Supposons maintenant $U_\pm^\bullet \circ J^\bullet$ de la forme (6d51) avec $\Lambda_\pm^\bullet$

(*) Ce sont les seuls moules à commuter avec tout autre moule (pour le produit de composition).

défini par (6d53) et $\mathcal{L}^\bullet$ défini par (6d56). Le moule $V_\pm^\bullet$ est alors entièrement déterminé par (6d51), il est symétrique (comme quotient d'un moule symétrique par un produit de moules symétriques) et il s'agit de montrer qu'il est constant en z .

Portons (6d51) dans (6d41).

$$(6d57) \quad \left(-2\pi i z \frac{\partial}{\partial z}\right) (V_\pm^\bullet \circ J^\bullet) = V_\pm^\bullet \times \Lambda_\pm^\bullet \times \mathcal{L}^\bullet \times J^\bullet$$

Remarquons ensuite que :

$$(6d58) \quad \left(-2\pi i z \frac{\partial}{\partial z}\right) \Lambda_\pm^\bullet = \Lambda_\pm^\bullet \times I^\bullet = I^\bullet \times \Lambda_\pm^\bullet$$

et dérivons (6d51) en tenant compte de (6d58). Il vient :

$$(6d59) \quad \begin{cases} \left(-2\pi i z \frac{\partial}{\partial z}\right) (V_\pm^\bullet \circ J^\bullet) = \left(\left(-2\pi i z \frac{\partial}{\partial z} V_\pm^\bullet\right) \times (\Lambda_\pm^\bullet) \times (\mathcal{L}^\bullet)\right) \\ + \left((V_\pm^\bullet) \times (\Lambda_\pm^\bullet) \times (I^\bullet) \times (\mathcal{L}^\bullet)\right) + \left((V_\pm^\bullet) \times (\Lambda_\pm^\bullet) \times \left(-2\pi i z \frac{\partial}{\partial z} \mathcal{L}^\bullet\right)\right) \end{cases}$$

En rapprochant (6d59) de (6d57) et (6d54) on trouve que

$$\left(-2\pi i z \frac{\partial}{\partial z} V_\pm^\bullet\right) \times (\Lambda_\pm^\bullet) \times (\mathcal{L}^\bullet) = 0$$

ce qui prouve la constance du moule $V_\pm^\bullet$ et établit la factorisation (6d51).

Prouvons maintenant (6d52). Pour tout moule $A^\bullet$, il est clair que $\Lambda_\pm^\bullet \circ A^\bullet$ est égal à l'exponentielle de $-\left(\frac{\log \pm z}{2\pi i} \cdot A^\bullet\right)$ dans l'algèbre des moules. Par suite :

$$\begin{aligned}
 (6d60) \quad \Lambda_{\pm}^{\bullet} \circ (V_{\pm}^{\bullet} \times I^{\bullet} \times V_{\pm}^{\bullet-1}) &= \exp\left(-\frac{\log \pm z}{2\pi i} (V_{\pm}^{\bullet} \times I^{\bullet} \times V_{\pm}^{\bullet-1})\right) \\
 &= (V_{\pm}^{\bullet}) \times \exp\left(-\frac{\log \pm z}{2\pi i} I^{\bullet}\right) \times (V_{\pm}^{\bullet}) \\
 &= (V_{\pm}^{\bullet}) \times (\Lambda_{\pm}^{\bullet}) \times (V_{\pm}^{\bullet})^{-1}
 \end{aligned}$$

Compte tenu de (6d60) on tire de (6d51) :

$$\begin{aligned}
 (6d61) \quad V_{\pm}^{\bullet} \circ J^{\bullet} &= (V_{\pm}^{\bullet} \times \Lambda_{\pm}^{\bullet} \times V_{\pm}^{\bullet-1}) \times (V_{\pm}^{\bullet}) \times (2^{\bullet}) \\
 &= (\Lambda_{\pm}^{\bullet} \circ (V_{\pm}^{\bullet} \times I^{\bullet} \times V_{\pm}^{\bullet-1})) \times (V_{\pm}^{\bullet}) \times (2^{\bullet})
 \end{aligned}$$

Or :

$$V_{\pm}^{\bullet} \circ J^{\bullet} \circ U^{\bullet} = V_{\pm}^{\bullet} \circ U^{\bullet} \circ J^{\bullet} = \mathcal{U}_{\pm}^{\bullet} \circ J^{\bullet}$$

Par suite, en composant avec $U^{\bullet}$ les deux membres de (6d61) on obtient :

$$(6d62) \quad \mathcal{U}_{\pm}^{\bullet} \circ J^{\bullet} = (\Lambda_{\pm}^{\bullet} \circ H_{\pm}^{\bullet}) \times (U_{\pm}^{\bullet} \circ R_{\pm}^{\bullet}) \times (\mathcal{P}^{\bullet})$$

avec :

$$(6d63) \quad H_{\pm}^{\bullet} = (V_{\pm}^{\bullet} \times I^{\bullet} \times V_{\pm}^{\bullet-1}) \circ U^{\bullet} = (U_{\pm}^{\bullet} \circ R_{\pm}^{\bullet}) \times (U^{\bullet}) \times (U_{\pm}^{\bullet} \circ R_{\pm}^{\bullet})^{-1}$$

$$(6d64) \quad U_{\pm}^{\bullet} \circ R_{\pm}^{\bullet} = V_{\pm}^{\bullet} \circ U^{\bullet}$$

$$(6d65) \quad \mathcal{P}^{\bullet} = 2^{\bullet} \circ U^{\bullet}$$

Appliquons à (6d62) la dérivation tronquée $\left(-2\pi i z \frac{\partial}{\partial z}\right)^*$. Comme ni $U_{\pm}^{\bullet}$ ni $\mathcal{P}^{\bullet}$ ne contiennent de termes en $\log z$ et compte tenu de (6d58) on vérifie que :

$$\begin{aligned} \left(-2\pi i \mp \frac{\partial}{\partial z}\right)^* (\mathcal{U}_{\pm}^{\bullet} \circ J^{\bullet}) &= (H_{\pm}^{\bullet}) \times (\Lambda_{\pm}^{\bullet} \circ H_{\pm}^{\bullet}) \times (U_{\pm}^{\bullet} \circ R_{\pm}^{\bullet}) \times (P^{\bullet}) \\ &= (H_{\pm}^{\bullet}) \times (\mathcal{U}_{\pm}^{\bullet} \circ J^{\bullet}) \end{aligned}$$

Comparant ceci avec (6d44) il vient :

$$(6d66) \quad H_{\pm}^{\bullet} = R_{\pm}^{\bullet} = \log (E_{\pm}^{\bullet} \times E_{\mp}^{\bullet})$$

ce qui achève de démontrer la proposition 6d4 et fournit en sus le corollaire suivant :

Proposition 6d5 (Séparation des variables dans U^{ω} et V^{ω})

$$(6d67) \quad U^{\bullet} \circ R_{\pm}^{\bullet-1} = (U_{\pm}^{\bullet})^{-1} \times (I^{\bullet}) \times (U_{\pm}^{\bullet})$$

$$(6d68) \quad R_{\pm}^{\bullet} \circ V^{\bullet} = (V_{\pm}^{\bullet}) \times (I^{\bullet}) \times (V_{\pm}^{\bullet})^{-1}$$

(6d67) s'obtient en rapprochant (6d63) de (6d66) et (6d68) s'obtient à partir de (6d67) en composant à droite par $V^{\bullet}$ et en tenant compte de $U^{\bullet} \circ V^{\bullet} = I^{\bullet}$.

Examinons maintenant la signification de ces deux relations. Comme $R_{\pm}^{\phi} = 0$ et comme $R^{\omega_1, \dots, \omega_n}$ est un polynôme par rapport aux variables $\text{sgn}(\omega_j)$ (cf. Fin de section 4c) la factorisation (6d67) montre que $U^{\omega_1, \dots, \omega_n}$, qui est une fonction (homogène) des r variables ω_j , s'exprime comme une "superposition" de fonctions (non homogènes) de $(n-1)$ variables. La même remarque vaut pour $V^{\omega_1, \dots, \omega_n}$. Il en résultera (cf. section 7c) que les moules $\overline{\mathcal{F}} U^{\bullet}$ et $\overline{\mathcal{F}} V^{\bullet}$, transformés de Fourier des moules $U^{\bullet}$ et $V^{\bullet}$, seront des distributions concentrées sur les hyperplans-coordonnées, fait essentiel à plusieurs égards.

Section 6e : Aperçu sur le calcul différentiel étranger.

Cette section, comme son titre l'indique, est consacrée aux équations, ou systèmes d'équations, faisant intervenir des dérivations étrangères et ayant pour inconnues des fonctions résurgentes. Pour simplifier, on se limitera à l'algèbre $\mathcal{A}(1, \mathcal{R})$ et on appellera pseudoconstantes (resp. pseudopolynômes) les fonctions résurgentes φ pour lesquelles $\Delta_\omega \varphi = 0$ pour tout indice simple ω (resp. pour tout multiindice ω sauf au plus pour un nombre fini). Les pseudoconstantes relèvent sur $\mathcal{R}$ les fonctions entières sur $\mathbb{C}$, et les pseudopolynômes sont engendrés par les produits de convolution des pseudoconstantes avec les u^ω (ω multiindice). Plutôt que d'exposer systématiquement le calcul différentiel étranger, on se bornera à examiner quelques exemples.

Problème 1 : Soit à résoudre le système linéaire fini à données φ_{ω_j} pseudo-polynomiales :

$$(6e1) \quad \Delta_{\omega_j} \varphi = \varphi_{\omega_j} \quad (j = 1, \dots, n)$$

On vérifie que la somme :

$$(6e2) \quad \begin{aligned} \varphi = & \sum_{d_1=1}^n u^{\omega_{d_1}} * \varphi_{\omega_{d_1}} - \sum_{d_1, d_2=1}^n u^{\omega_{d_1}, \omega_{d_2}} * (\Delta_{\omega_1} \varphi_{\omega_{d_2}}) \\ & + \sum_{d_1, d_2, d_3=1}^n u^{\omega_{d_1}, \omega_{d_2}, \omega_{d_3}} * (\Delta_{\omega_{d_1}} \Delta_{\omega_{d_2}} \varphi_{\omega_{d_3}}) - \sum_{d_1, d_2, d_3, d_4=1}^n (\dots) + \dots \end{aligned}$$

qui est en fait une somme finie, est solution du système (6e1).

Problème 2 : Soit à résoudre le système linéaire fini à données φ_{ω_j} quelconques (non nécessairement pseudopolynomiales) :

$$(6e3) \quad \Delta_{\omega_j} \Psi = \Psi_{\omega_j} \quad (j = 1, \dots, n)$$

Montrons que (6e3) est toujours résoluble. Supposons pour simplifier $\Omega = \mathbb{Z}$ et posons comme d'habitude $S_n = (1-R) S^n$. Il suffit manifestement de considérer les systèmes du type :

$$(6e3 \text{ bis}) \quad \Delta_j \Psi = \Psi_j \quad (-n \leq j \leq n)$$

Or, d'après (2a12), (2a13) on a, si $j > 0$:

$$\begin{cases} \Delta_j = S_j + \text{polynôme en } S_{j-1}, S_{j-2}, \dots, S_1. \\ \Delta_{-j} = -S_{-j} + \text{polynôme en } S_{-j+1}, S_{-j+2}, \dots, S_{-1}. \end{cases}$$

Par suite (6e3 bis) équivaut à un système fini du type :

$$(6e3 \text{ ter}) \quad \begin{cases} S_j \Psi = \Psi_j + \text{somme de dérivées étrangères de } \Psi_{j-1}, \Psi_{j-2}, \dots, \Psi_1. \\ S_{-j} \Psi = -\Psi_{-j} + \text{somme de dérivées étrangères de } \Psi_{-j+1}, \Psi_{-j+2}, \dots, \Psi_{-1}. \end{cases}$$

Lemme 6e1 : Pour tout j fixe et toute Ψ_j , le système infini :

$$(6e4) \quad S_k \Psi_j = \begin{cases} \Psi_j & \text{si } k = j \\ 0 & \text{si } k \in \mathbb{Z} \setminus \{j\} \end{cases}$$

admet une solution Ψ_j .

Principe de la démonstration : On suppose d'abord que Ψ_j est un élément de $\mathcal{A}(1, \Omega)$ sans pôles et sans Dirac, de telle sorte que $S \Psi_j$ appartienne aussi à $\mathcal{A}(1, \Omega)$. On pose ensuite, comme d'habitude : $u^j = \frac{1}{2\pi i} \frac{1}{z-1}$ puis, tenant compte des relations $S_j u^j = \delta$ si $j=1$ (resp. $= 0$ si

$j = 1$) et utilisant les relations de Leibniz des opérateurs S_n , on montre que la fonction :

$$\varphi_j = S^{-j+1} (u^1 * \varphi_j) - S^{-j} (u^1 * S \varphi_j)$$

appartient encore à $A(1, \Omega)$ et est solution du système (6e4). On étend ensuite cette résolution au cas général, où φ_j peut posséder Dirac et pôles, en jouant convenablement sur les $u^{n_1, \dots, n_n}$. Il ne reste plus alors qu'à additionner les solutions de (6e4) pour obtenir une solution

$$\varphi = \sum_{j=1}^n (\varphi_j + \varphi_{-j}) \quad \text{du système (6e3 ter) et donc (6e3 bis).}$$

On note bien qu'à la différence des $S_j \varphi$, les $\Delta_j \varphi$ ne sont généralement pas nuls pour $|j| > n$. L'existence d'une solution φ telle qu'ils soient nuls est incertaine.

Problème 3 : Soit à résoudre les systèmes infinis :

$$(6e5) \quad \Delta_\omega \varphi = + A_\omega \partial \varphi \quad (\forall \omega \text{ indice simple})$$

$$(6e6) \quad \Delta_\omega \psi = - A_\omega \exp_* (-\omega \psi) \quad (\forall \omega \text{ indice simple})$$

pour une suite scalaire $\{A_\omega\}$ donnée.

Ces deux systèmes, étant liés au problème de la synthèse harmonique dans les groupes G_k , seront traités au chapitre 11, mais nous sommes dès maintenant à même de vérifier que pour toute représentation Δ -stable $z^\omega \rightarrow w^\omega$ des pseudovariables et pour le comoule $\Gamma_\cdot$ introduit à la section 4b, la somme

$$-\sum A_\omega \Gamma_\omega w^\omega \quad (\text{avec } A_{\omega_1, \dots, \omega_n} = A_{\omega_1} \dots A_{\omega_n})$$

est, sous réserve de convergence, solution de (6e6).

Problème 4 : Soit à résoudre le système

$$(6e7) \quad [\Delta_{\omega_i}, \Delta_{\omega_j}] \cdot \varphi = \Gamma_{ij}^k \Delta_{\omega_k} \varphi \quad \text{avec } \Gamma_{ij}^k \in \mathbb{C} ; i, j, k \in \{1, \dots, n\}$$

C'est le problème de la représentation dans $A(1, \mathbb{R})$ des algèbres de Lie finies. Il est traité au chapitre 15.

Problème 5 : Rechercher toutes les projections de l'algèbre des pseudopolynômes dans l'algèbre des pseudoconstantes.

Pour toute représentation Δ -stable $Z^\omega \rightarrow W^\omega$ des pseudovariables, la somme

$$(6e8) \quad E^W(\varphi) = \varphi + \sum_{n \geq 1} (-1)^n \sum_{\omega_1, \dots, \omega_n} W^{\omega_1, \dots, \omega_n} * (\Delta_{\omega_1} \dots \Delta_{\omega_n} \varphi)$$

soit en abrégé :

$$(6e9) \quad E^W(\varphi) = \sum_{\omega} (-1)^{r(\omega)} W^\omega * (\Delta_{\tilde{\omega}} \varphi) \quad (\omega \text{ et } \tilde{\omega} \text{ multiindices inverses})$$

est en réalité finie si φ est un pseudopolynôme et on vérifie les propriétés suivantes :

$$(6e10) \quad E^W(\varphi * \psi) = (E^W \varphi) * (E^W \psi)$$

$$(6e11) \quad \Delta_\omega (E^W \varphi) = 0 \quad (\text{pour tout } \omega \text{ simple}).$$

Les E^W sont donc des homomorphismes de l'algèbre des pseudopolynômes dans l'algèbre des pseudoconstantes et ce sont évidemment des projections, car pour

toute φ pseudoconstante, $E^w(\varphi) = \varphi$. Réciproquement, tout homomorphisme idempotent et pseudoconstant est de la forme E^w avec w représentation Δ -stable.

Notons que (6e10) se démontre sans l'hypothèse de Δ -stabilité. A toute représentation w des pseudovariétés, (6e9) associe donc un endomorphisme E^w de l'algèbre des pseudopolynômes.

Examinons pour finir comment s'exprime $E^w(\varphi)$ par rapport à une base $\{D_J\}$ quelconque de l'espace $\Delta(1, \mathcal{R})$. Soit $\{z^J\}$ la famille de pseudovariétés duale de $\{D_J\}$ et soit $\{w^J\}$ les fonctions résurgentes images des $\{z^J\}$ par la représentation w . On vérifie alors que :

$$(6e12) \quad E^w(\varphi) = \sum_J w^J * (\tilde{D}_J \varphi)$$

où $D \rightarrow \tilde{D}$ est l'involution fondamentale de la bigèbre $\Delta(1, \mathcal{R})$, caractérisée par la propriété :

$$\tilde{\Delta}_{\omega_1, \dots, \omega_n} = (-1)^n \Delta_{\omega_n, \dots, \omega_1} \quad (\text{en abrégé : } \tilde{\Delta}_\omega = (-1)^{n(\omega)} \Delta_{\tilde{\omega}})$$

Cette involution possède d'ailleurs une extension unique à la bigèbre $\mathbb{D}(\mathcal{R})$, laquelle extension transforme

$$(1-R) S^{m_1} R^{n_1} \dots S^{m_\Delta} R^{n_\Delta} \quad \text{en} \quad (1-R^{-1}) R^{-n_\Delta} T^{-m_\Delta} \dots R^{-n_1} T^{-m_1}$$

En particulier, $\tilde{S}_n = T_{-n}$ (cf. Section 2a) et, bien sûr, $\tilde{\Delta} = -\Delta$ pour toute dérivation étrangère de degré 1.

Problème 6 : Rechercher toutes les pseudotranslations, c'est-à-dire tous les endomorphismes E de l'algèbre des pseudopolynômes qui commutent avec les

dérivations étrangères :

$$(6e13) \quad \Delta_{\omega} E(\varphi) = E(\Delta_{\omega} \varphi) \quad (\forall \omega, \varphi)$$

D'après ce qui précède, pour toute représentation $Z^{\omega} \rightarrow W^{\omega}$ des pseudovariables, la relation (6e9) définit un endomorphisme E^W de l'algèbre des pseudopolynômes. De plus, on vérifie que si on impose les conditions :

$$(6e14) \quad \Delta_{\omega_0} W^{\omega_1, \dots, \omega_n} = \delta_{\omega_0}^{\omega_1} W^{\omega_2, \dots, \omega_n} - W^{\omega_1, \dots, \omega_{n-1}} \delta_{\omega_0}^{\omega_n} \quad (\forall \omega_0, \omega_1, \dots, \omega_n)$$

où $\delta_{\omega_1}^{\omega_2} = 1$ si $\omega_1 = \omega_2$ (resp. $= 0$ si $\omega_1 \neq \omega_2$), alors E^W est une pseudotranslation. Inversement, toute pseudotranslation est de la forme E^W pour une certaine représentation W vérifiant (6e14).

Il est clair que les pseudotranslations forment un groupe. Or, on vérifie que si E^{W_1} et E^{W_2} sont deux pseudotranslations, alors

$$(6e15) \quad E^{W_2} \circ E^{W_1} = E^{(W_1 \times W_2)}$$

Il s'ensuit que les représentations W vérifiant (6e14) forment un groupe pour la multiplication. Précisons la structure de ce groupe.

Lemme 6e2 : Soit $Z^{\omega} \rightarrow W^{\omega}$ une représentation des pseudovariables qui vérifie (6e14) et soit E^W la pseudotranslation correspondante. Alors :

α) Pour tout ω multiindice $E^W(W^{\omega}) = W^{\omega}$ et, réciproquement, tout pseudopolynôme φ invariant par E^W est de la forme :

$$(6e16) \quad \varphi = \sum W^{\omega} * \varphi_{\omega} \quad (\text{somme finie; } \omega \text{ multiindice; } \varphi_{\omega} \text{ pseudoconstante})$$

β) Pour toute représentation Δ -stable $Z^{\omega} \rightarrow M^{\omega}$ des pseudovariables, l'appli-

cation $z^w \rightarrow M_2^w = E^w(M_1^w)$ est encore une représentation Δ -stable et le quotient de M_1 par M_2 est un invariant, précisément égal à w :

$$(6e17) \quad M_1 \times M_2^{-1} = w$$

La vérification de ce lemme est laissée au lecteur. Comme toute représentation Δ -stable est de la forme $M = U \times A$, où U est la représentation Δ -stable canonique et A une représentation pseudoconstante quelconque, le w du lemme est de la forme $U \times A_1 \times A_2^{-1} \times U^{-1}$, c'est-à-dire de la forme $U \times A_3 \times U^{-1}$ avec A_1, A_2, A_3 représentations pseudoconstantes.

En résumé, l'application $A \rightarrow U \times A \times U^{-1}$ est un isomorphisme du groupe des représentations pseudoconstantes dans le groupe des représentations vérifiant (6e14) et l'application $w \rightarrow E^w$ est un antimorphisme du groupe des représentations vérifiant (6e14) dans le groupe des pseudotranslations.

Problème 7 : Etant donné une représentation Δ -stable $z^w \rightarrow w^w$ des pseudo-variables, développer tout pseudopolynôme φ sous la forme :

$$(6e18) \quad \varphi = \sum w^w * \varphi_w \quad (\text{somme finie; } w \text{ multiindice; } \varphi_w \text{ pseudoconstante})$$

w étant Δ -stable, E^w est une projection de l'algèbre des pseudopolynômes dans l'algèbre des pseudoconstantes (voir problème 5). Considérons l'application :

$$(6e19) \quad \varphi \rightarrow E^w(\varphi) + \sum_{\omega_1} w^{\omega_1} * E^w(\Delta_{\omega_1} \varphi) + \sum_{\omega_1, \omega_2} w^{\omega_1, \omega_2} * E^w(\Delta_{\omega_1, \omega_2} \varphi) + \sum_{\omega_1, \omega_2, \omega_3} \dots$$

de l'espace des pseudopolynômes dans lui-même. On vérifie successivement :

- (i) que cette application est un endomorphisme d'algèbres,
- (ii) qu'elle laisse invariante les pseudoconstantes,
- (iii) qu'elle laisse invariante chaque $w^{\omega_1, \dots, \omega_n}$.

C'est donc l'application identique. Par suite, dans le développement (6e18) on doit prendre $\varphi = E^w(\Delta_w \varphi)$. Plus généralement, pour toute base $\{D_J\}$ de l'espace $\Delta(1, \Omega)$, pour $\{z^J\}$ famille duale de $\Delta'(1, \Omega)$ et pour $\{w^J\}$ image de $\{z^J\}$ par la représentation w , on a :

$$(6e20) \quad \varphi = \sum_J w^J * E^w(D_J \varphi)$$

Remarque : dans les problèmes 5, 6, 7 on peut remplacer l'algèbre des pseudo-polynômes par diverses algèbres intermédiaires entre celle-ci et l'algèbre globale $A(1, \Omega)$, mais c'est là une étude délicate que nous n'aborderons pas

Section 6f : Résumé du chapitre 6.

Ce chapitre est consacré aux représentations des pseudovariabiles dans les algèbres résurgentes : il s'agit d'associer à la famille canonique $\{z^\eta\}$ de pseudovariabiles, une famille $\{w^\eta\}$ de fonctions résurgentes qui vérifient la même table de multiplication :

$$w^{\eta^1} * w^{\eta^2} = \sum_{\eta^1, \eta^2 < \eta} w^\eta$$

et qui aient si possible un comportement simple par rapport à la dérivation naturelle ∂ (on parle alors de ∂ -stabilité) ou par rapport aux dérivations étrangères (on parle alors de Δ -stabilité).

On commence par construire une représentation ∂ -stable v (qui

dépend d'une famille à un paramètre de fonctions sur $\mathbb{C}_\infty$) puis on tire de là une représentation Δ -stable $\mathcal{U}$. On s'aperçoit qu'il existe une certaine dualité entre les deux types de représentations. Cette dualité est particulièrement nette dans le cas de l'algèbre $A(1, \mathbb{Q})$, car on a alors une représentation ∂ -stable canonique $\mathcal{V}$ et une représentation Δ -stable canonique $\mathcal{U}$, caractérisées chacune par des conditions de nullité à l'infini et liées l'une à l'autre par :

$$\mathcal{U}^* = \mathcal{V}^* \circ U^* \quad , \quad \mathcal{V}^* = \mathcal{U}^* \circ V^* \quad (U^* \circ V^* = I^*)$$

où $\mathcal{U}^*$ (resp. $\mathcal{V}^*$) est le moule symétrique attaché à la représentation $\mathcal{U}$ (resp. $\mathcal{V}$) et où U^* (resp. V^*) est le moule scalaire alterné qui mesure le défaut de ∂ -stabilité de la représentation $\mathcal{U}$ (resp. le défaut de Δ -stabilité de la représentation $\mathcal{V}$).

On montre ensuite que les représentations des pseudovariables forment un groupe, noté multiplicativement, et que toute représentation Δ -stable se factorise en un produit $\mathcal{U} \times \mathcal{M}$, où $\mathcal{U}$ est la représentation Δ -stable canonique et $\mathcal{M}$ une représentation pseudoconstante quelconque (ces dernières sont très faciles à construire).

On précise ensuite cette analyse en mettant en évidence une factorisation des représentations canoniques $\mathcal{U}$ et $\mathcal{V}$ dans les modèles sectoriels et on tire de là le moyen de "séparer les variables" dans les moules scalaires U^* et V^* .

Enfin, la dernière section applique les représentations des pseudovariables au "calcul différentiel étranger", c'est-à-dire aux équations faisant intervenir les dérivations étrangères et ayant pour inconnues des fonctions résurgentes.

Chapitre 7 : Les algèbres de résurgence générales.

Section 7a : Les algèbres $A(C)$ et $\bar{A}(C)$.

Introduction :

L'algèbre $\bar{A}(\mathcal{R})$, avec ses sous-algèbres et les moules canoniques qui leur correspondent, suffit à l'analyse harmonique dans les groupes G_t (chapitres 8 à 13). Toutefois, l'étude des équations fonctionnelles plus générales, du type (8a3) ou (15a) par exemple, nécessite l'introduction d'une algèbre de résurgence plus vaste, $\bar{A}(C)$, à laquelle correspondent des moules sur C^* . Cette extension présente aussi l'avantage de permettre la différentiation des moules canoniques, la prise de leurs transformées de Fourier et l'étude précise de leur croissance par rapport aux indices.

Germes prolongeables sans coupure.

C_∞ désigne comme d'habitude la surface de Riemann de $\log z$ et Q_0 son point de ramification. On dit qu'un germe analytique φ en Q_0 sur C_∞ est prolongeable sans coupure si, sur tout arc de Jordan I sur C_∞ , d'origine Q_0 et d'extrémité η , il existe une suite finie $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n = \eta$ de points tels que φ se prolonge analytiquement le long de I jusqu'à η_1 , qu'en η_1 elle possède un prolongement analytique à droite φ_+ et un prolongement analytique à gauche φ_- , qui chacun se prolongent analytiquement le long de l'arc $] \eta_1, \eta_2 ($ et admettent à leur tour des prolongements à droite et à gauche en η_2 , à savoir $\varphi_{++}, \varphi_{+-}, \varphi_{-+}, \varphi_{--}$ et ainsi de suite.

Cette définition exclut donc les φ du type $\sum 2^{-n} \log(z+1+\frac{1}{n})$ mais elle n'exclut pas qu'en contournant η_j puis en revenant en arrière, on puisse rencontrer un point de ramification η'_j sur l'arc $] \eta_{j-1}, \eta_j ($, puis qu'en contournant à nouveau η_j on rencontre un nouveau point η''_j sur $] \eta'_j, \eta_j ($ et ainsi de suite. En fait, pour une φ prolongeable sans

coupure, l'ensemble $Ram \varphi$, projection sur $\mathbb{C}$ des points de ramification, peut très bien être dense dans $\mathbb{C}$ (mais il est nécessairement dénombrable).

Proposition 7a1 :

La partie $M_{\text{ram}}(\mathbb{C})$ de $\mathcal{A}$ formée des germes φ qui sont prolongeables sans coupure, bornés en Q_0 et en chacun de leurs points de ramification, est une sous-algèbre de $\mathcal{A}$.

En effet, en adaptant la démonstration de la proposition 2a1, on voit que la convolée $\varphi * \psi$ de deux germes prolongeables sans coupure est prolongeable sans coupure, que l'on a

$$(7a1) \quad Ram(\varphi * \psi) \subset (Ram \varphi) \cup (Ram \psi) \cup (Ram \varphi + Ram \psi)$$

l'inclusion pouvant être stricte, et enfin que $\varphi * \psi$ est bornée en Q_0 et en chacun de ses points de ramification si φ et ψ le sont.

Dérivations étrangères.

Soit η un point de $\mathbb{C}_\infty$, φ un germe prolongeable sans coupure et soient sur le segment rectiligne $I =]Q_0, \eta[$ n points

$\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n = \eta$ tels que φ se prolonge analytiquement le long de I moyennant le contournement à droite ou à gauche des points η_j . Pour tout point $P \in I$ et voisin de Q_0 , posons

$$(7a2) \quad (\Delta_\eta \varphi)(P) = \sum_{\varepsilon_1 = \pm, \dots, \varepsilon_n = \pm} \varepsilon_n \gamma_{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{n-1}} \varphi_{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n}(P')$$

(i) où P' désigne le point de $\mathbb{C}_\infty$ tel que $\overrightarrow{\eta P'} = \overrightarrow{Q_0 P}$

(ii) où $\gamma_{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{n-1}} = \frac{n! q!}{n!}$ si la suite $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{n-1}$ comprend p signes + et q signes -.

(iii) où $\varphi_{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n}(P')$ désigne la valeur au point P' de la branche de φ obtenue par prolongation analytique le long de I , sans retour en arrière, en contournant chaque point η_j ($1 \leq j \leq n$) à droite si $\varepsilon_j = +$ et à gauche si $\varepsilon_j = -$.

Proposition 7a2 :

$\alpha)$ Le germe analytique $\Delta_\eta \varphi$ défini par (7a2) à l'origine du segment I est indépendant du choix de la suite $\eta_1, \dots, \eta_n$ (*)

$\beta)$ Ce germe se prolonge analytiquement sans coupure.

$\gamma)$ L'opérateur Δ_η ainsi défini est une dérivation de l'algèbre $A_{\text{loc}}(\mathbb{R})$.

Pour établir le point α , il suffit manifestement de montrer que le germe $\Delta'_\eta \varphi$ défini à partir d'une sur-suite $\{\eta'_1, \dots, \eta'_n, \dots, \eta'_m = \eta\}$ de la suite $\{\eta_1, \dots, \eta_n = \eta\}$ est égal au germe $\Delta_\eta \varphi$ défini par (7a2). Or ceci est vrai et tient essentiellement au fait suivant :

Lemme 7a1 :

Pour toute sous-suite $\{j_1, j_2, \dots, j_{n-1}\}$ de la suite $\{1, 2, \dots, m-1\}$ on a l'identité :

$$(7a3) \quad \sum'_{\varepsilon_j = \pm} \gamma_{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{m-1}} = \gamma_{\varepsilon_{j_1}, \dots, \varepsilon_{j_{n-1}}}$$

où la somme $\sum'$ est restreinte aux seuls ε_j pour lesquels $j \notin \{j_1, \dots, j_{n-1}\}$.

(7a3) se vérifie facilement en sommant d'abord par rapport à un seul ε_i , puis à un second, etc... On peut d'ailleurs donner de cette identité une interprétation probabiliste. Soit une marche aléatoire le long du demi-axe réel positif privé des points entiers, la probabilité conditionnelle de contourner à droite

(*) pourvu évidemment qu'elle couvre toutes les ramifications rencontrées, car sinon la définition (7a2) n'a pas de sens.

(resp. à gauche) le point n étant égale à $\frac{p+1}{n+1}$ (resp. $\frac{q+1}{n+1}$) si on a déjà contourné p entiers positifs à droite et q entiers à gauche. Alors, pour toute partie finie $M \in \mathbb{N}^*$, la probabilité (inconditionnelle) de contourner p points de M à droite et les q points restant à gauche, vaut exactement $\frac{p!q!}{(p+q+1)!}$ et ne dépend donc pas de la forme de M .

Le point β de la proposition est immédiat. Passons au point γ . Il s'agit de montrer.

$$(7a4) \quad \Delta_\eta (\varphi * \psi) = (\Delta_\eta \varphi) * \psi + \varphi * (\Delta_\eta \psi)$$

pour toute paire φ, ψ de $A_{\text{com}}(\mathbb{C})$. Supposons d'abord que $\Delta_\eta \varphi$ et $\Delta_\eta \psi$ soient définissables respectivement à partir de suites $\{\eta_j\}$ et $\{\eta'_j\}$ où tous les points sont commensurables. On peut alors trouver un sur-suite commune de la forme $\{\frac{1}{m}\eta, \frac{2}{m}\eta, \dots, \frac{m-1}{m}\eta, \eta\}$ et l'utiliser pour définir non seulement $\Delta_\eta \varphi$ et $\Delta_\eta \psi$ mais aussi $\Delta_\eta (\varphi * \psi)$. Or puisque, pour une variable P voisine de Q_0 , les deux membres de (7a4) ne font intervenir que les valeurs des différents prolongements analytiques au voisinage du segment $]Q_0, \eta]$, tout se passe comme si on était dans l'algèbre $A_{\text{com}}(\Omega)$ avec $\Omega = \frac{\eta}{m} \mathbb{Z}$. On voit donc, d'après les propositions 2b4 et 2b5, que (7a4) est vérifiée localement, et donc partout.

Enfin, on règle le cas général, où les η_j et η'_j ne sont pas nécessairement commensurables, en modifiant, continûment et symétriquement par rapport à son milieu $\frac{1}{2}\eta$, la suite arithmétique $\{\frac{1}{m}\eta, \frac{2}{m}\eta, \dots, \eta\}$ et en modifiant simultanément les chemins d'intégration permettant le calcul des produits de convolution figurant aux deux membres de (7a4).

Algèbres $\mathcal{A}(\mathbb{C})$ et $\bar{\mathcal{A}}(\mathbb{C})$.

A partir de l'algèbre $\mathcal{A}_{\text{born}}(\mathbb{C})$ ci-dessus, et en raisonnant comme à la section 2b, on construit une série

$$\mathcal{A}(\mathbb{C}), \bar{\mathcal{A}}(\mathbb{C}), \mathcal{A}(\mathbb{C}_r), \bar{\mathcal{A}}(\mathbb{C}_r)$$

parallèle aux séries

$$\begin{array}{cccc} \mathcal{A} & , & \bar{\mathcal{A}} & , & \mathcal{A}(\mathbb{C}_r) & , & \bar{\mathcal{A}}(\mathbb{C}_r) \\ \mathcal{A}(\mathbb{Q}) & , & \bar{\mathcal{A}}(\mathbb{Q}) & , & \mathcal{A}(\mathbb{C}_r, \mathbb{Q}) & , & \bar{\mathcal{A}}(\mathbb{C}_r, \mathbb{Q}) \end{array}$$

Bornons-nous à indiquer les principales étapes de la construction.

(i) L'algèbre $\bar{\mathcal{A}}(\mathbb{C})$ s'identifie à la partie de $\bar{\mathcal{A}}$ formée des couples $(\psi, \tilde{\Phi})$ où le mineur ψ est prolongeable sans coupure.

(ii) $\mathcal{A}_{\text{born}}(\mathbb{C})$ s'identifie à une partie de $\bar{\mathcal{A}}(\mathbb{C})$ et il existe une extension unique des dérivations étrangères Δ_η à $\bar{\mathcal{A}}(\mathbb{C})$.

(iii) $\mathcal{A}(\mathbb{C}), \mathcal{A}(\mathbb{C}_r), \bar{\mathcal{A}}(\mathbb{C}_r)$ s'identifient aux plus grandes sous-algèbres de $\bar{\mathcal{A}}(\mathbb{C})$ stables par rapport à l'action des dérivations étrangères et respectivement incluses dans $\mathcal{A}, \mathcal{A}(\mathbb{C}_r), \bar{\mathcal{A}}(\mathbb{C}_r)$.

(iiii) Les bigèbres correspondantes de dérivations étrangères, soit $\Delta(\mathbb{C})$ et $\Delta(\mathbb{C}_r, \mathbb{C})$, sont librement engendrées par les Δ_η , où l'indice simple η parcourt $\mathbb{C}_\infty$ ou $\mathbb{C}_r$ respectivement.

(iiiii) Les algèbres correspondantes de pseudovariables, soit $\Delta'(\mathbb{C})$ et $\Delta'(\mathbb{C}_r, \mathbb{C})$, sont engendrées par les $z^{\eta_1, \dots, \eta_n}$, avec les η_i parcourant $\mathbb{C}_\infty$ ou $\mathbb{C}_r$. La table de multiplication est toujours :

$$(7a5) \quad z^{\eta^1} \cdot z^{\eta^2} = \sum_{\eta^1, \eta^2 < \eta} z^\eta \quad (\eta^1, \eta^2, \eta \text{ multiindices})$$

En démarquant la construction de la section 6b, on obtient des représentations ∂ -stables des pseudovariables et, à partir de celles-ci, des représentations Δ -stables. Dans le cas $p = 1$, il existe une représentation Δ -stable et une représentation ∂ -stable canoniques, respectivement notées $\mathcal{U}$ et $\mathcal{V}$, auxquelles correspondent deux moules $\mathcal{U}^*$ et $\mathcal{V}^*$ sur $\mathbb{C}^*$ et deux moules scalaires alternés U^* et V^* sur $\mathbb{C}^*$, tels que :

$$(7a6) \quad \mathcal{U} = \mathcal{V} \circ U^* \quad ; \quad \mathcal{V} = \mathcal{U} \circ V^* \quad ; \quad U^* \circ V^* = I^*$$

On notera bien qu'à la différence de $\mathcal{A}(\mathcal{R})$, dont tous les éléments sont des fonctions définies sur une même surface de Riemann $\mathcal{R}$, l'algèbre $\mathcal{A}(\mathbb{C})$ a pour éléments des germes analytiques qui sont chacun prolongeables à des surfaces de Riemann différentes. D'où l'impossibilité d'introduire des modèles multiplicatifs ou de Poincaré pour $\mathcal{A}(\mathbb{C})$. En revanche, la construction des modèles formels ou sectoriels (pour des sous-algèbres appropriées) ne pose pas de difficulté. - Pour les applications des algèbres $\mathcal{A}(\mathbb{C})$ et $\bar{\mathcal{A}}(\mathbb{C})$, voir chapitres 9 et 14.

Section 7b : Propriétés différentielles des moules canoniques. La dualité $U^* \leftrightarrow V^*$

Définition des U^ω et V^ω .

La construction des représentations des pseudovariables de l'algèbre $\mathcal{A}(1, \mathbb{C})$ n'étant indiquée que très sommairement à la fin de la section précédente, il convient d'explicitier un peu.

Dans le modèle additif, la représentation ∂ -stable canonique $\mathcal{V}$ est définie par

$$(7b1) \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathcal{V}^\emptyset = \delta \quad , \quad \mathcal{V}^{\omega_1} = \frac{1}{2\pi i} \frac{1}{z - \omega_1} \quad , \\ \mathcal{V}^{\omega_1, \dots, \omega_n}(z) = \frac{1}{(2\pi i)^n} \frac{1}{(z - \omega_1 \dots - \omega_n)} \int_0^z \frac{dz_{n-1}}{z - \omega_1 \dots - \omega_{n-1}} \int_0^{z_{n-1}} \dots \int_0^{z_2} \frac{dz_1}{z - \omega_1} \end{array} \right.$$

Quant aux coefficients scalaires V^ω qui mesurent le défaut de Δ -stabilité de $\mathcal{V}$, ils sont déterminés par les relations

$$(7b2) \quad \Delta_{\omega_0} \mathcal{V}^\omega = \sum_{\substack{\omega' \omega'' = \omega \\ \|\omega'\| = \omega_0}} V^{\omega'} \mathcal{V}^{\omega''} \quad (\omega_0 \text{ indice simple; } \omega, \omega', \omega'' \text{ multiindices})$$

et sont donnés explicitement par les formules :

$$(7b3) \quad \begin{cases} V^\emptyset = 0, & V^{\omega_1} = 1, \\ V^{\omega_1, \dots, \omega_n} = \frac{1}{(2\pi i)^n} \sum_{\varepsilon_1 = \pm \dots \varepsilon_n = \pm} \gamma_{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n} \int_0^{\omega_1 + \dots + \omega_n} \mathcal{V}^{\omega_1, \dots, \omega_{n-1}}(z) dz \end{cases}$$

(i) où Δ est la longueur de la sous-suite $\{\alpha_1, \dots, \alpha_\Delta\}$ de la suite $\{\omega_1, \omega_1 + \omega_2, \dots, \omega_1 + \omega_2 + \dots + \omega_{n-1}\}$ obtenue en ne retenant que les points qui sont situés sur le segment $I =]0, \omega_1 + \dots + \omega_n[$

(ii) où $\gamma_{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_\Delta} = \frac{n! q!}{(n+q+1)!}$ si la suite $\{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_\Delta\}$ contient p signes $+$ et q signes $-$.

(iii) où l'intégrale affectée du coefficient $\gamma_{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_\Delta}$ est prise le long du segment I en contournant le point α_j à droite (resp. à gauche) si $\varepsilon_j = +$ (resp. $-$).

A partir de là, la représentation Δ -stable canonique $\mathcal{U}$ et les coefficients scalaires U^ω qui mesurent son défaut de ∂ -stabilité, sont définis par les relations suivantes entre moules :

$$(7b4) \quad U^\bullet \circ V^\bullet = I^\bullet \quad (7b5) \quad \mathcal{V}^\bullet = \mathcal{U}^\bullet \circ V^\bullet \quad (7b6) \quad \mathcal{U}^\bullet = \mathcal{V}^\bullet \circ U^\bullet$$

$\mathcal{U}^\bullet, \mathcal{V}^\bullet, U^\bullet, V^\bullet$ sont tous des moules sur $\mathbb{C}^*$ et $U^\bullet, V^\bullet$ sont alternés.

(7b1) et (7b3) montrent que le moule $V^\bullet$ est homogène, i.e.

$$V^{t\omega_1, \dots, t\omega_n} = V^{\omega_1, \dots, \omega_n} \quad (\forall t \in \mathbb{C}^*)$$

et (7b4) montre que cette homogénéité s'étend à U^* . Les coefficients U^ω et V^ω peuvent donc être considérés comme fonctions presque partout définies sur $\mathbb{P}_{n-1}$, espace projectif complexe de dimension $n-1$ ($n = n(\omega)$). Plus précisément, les fonctions U^ω et V^ω sont définies et finies en dehors des hyperplans coordonnés $\omega_j = 0$. De plus, elles s'annulent sur l'hyperplan $\|\omega\| = \omega_1 + \dots + \omega_n = 0$ et c'est d'ailleurs cette dernière circonstance qui permet la composition à droite, par U^* ou V^* , de moules définis simplement sur $\mathbb{C}^*$ (et non sur $\mathbb{C}$).

Donnons pour fixer les idées quelques précisions supplémentaires qui sont des corollaires des relations (7b14), (7b15) établies ci-après.

U^ω est holomorphe en tout point de $\mathbb{P}_{n-1}$ tel que $\omega_j/\omega_{j+1} \notin \mathbb{R}^+$ ($j=1, \dots, n-1$) et V^ω est holomorphe en tout point de $\mathbb{P}_{n-1}$ tel que $(\omega_1 + \dots + \omega_j)/(\omega_{j+1} + \dots + \omega_n) \notin \mathbb{R}^+$. Les ensembles de points ainsi exclus ne constituent évidemment pas une coupure : d'une part ils ne font pas obstacle à la prolongation holomorphe et d'autre part les U^ω et V^ω , restreints à ces ensembles, y sont holomorphes presque partout. Simplement, sur ces ensembles critiques, la définition de U^ω ou V^ω ne coïncide pas avec la prolongation analytique à partir des domaines adjacents.

En particulier, les restrictions à $\mathbb{P}_{n-1}^+ = \{\omega_i/\omega_j \in \mathbb{R}^+; \forall i, j\} \subset \mathbb{P}_{n-1}$ de U^ω et V^ω y sont partout holomorphes et possèdent des extensions holomorphes à la "surface" de Riemann recouvrement universel de $\mathbb{P}_{n-1}$ privé des hyperplans $\omega_i + \omega_{i+1} + \dots + \omega_{j-1} + \omega_j = 0$ ($\forall i, j; i \leq j$). Ces extensions sont dites déterminations principales de U^ω et V^ω . Toutefois, dans toute la suite, les notations U^ω et V^ω , employées sans autre précision, désigneront non pas ces déterminations principales, mais les fonctions partout définies sur

$\mathbb{P}_{n-1}^{(*)}$ par les formules (7b3) et (7b4).

Propriétés différentielles des U^ω et des V^ω .

Proposition 7b1 :

Les dérivées des U^ω et des V^ω sont données par les formules suivantes, valables sur les différents domaines d'holomorphie (et aussi sur les frontières de ces domaines, à condition de dériver tangentiellement)

$$(7b7) \quad \left\{ \begin{array}{l} 2\pi i \frac{\partial}{\partial \omega_j} U^{\omega_1, \dots, \omega_n} = - \sum_{i=1}^{j-1} \frac{1}{\omega_i + \dots + \omega_n} U^{\omega_1, \dots, \omega_i} U^{\omega_{i+1}, \dots, \omega_n} + \sum_{i=j}^n \frac{1}{\omega_i + \dots + \omega_n} U^{\omega_1, \dots, \omega_i} U^{\omega_{i+1}, \dots, \omega_n} \\ \text{ou, en abrégé :} \\ 2\pi i \frac{\partial}{\partial \omega_j} U^{\omega_1, \dots, \omega_n} = \sum_{\substack{\omega' \omega^2 = \omega \\ \omega_j \in \omega'}} \frac{1}{\|\omega'\|} U^{\omega'} U^{\omega^2} - \sum_{\substack{\omega' \omega^2 = \omega \\ \omega_j \in \omega^2}} \frac{1}{\|\omega^2\|} U^{\omega'} U^{\omega^2} \end{array} \right.$$

$$(7b8) \quad \left\{ \begin{array}{l} 2\pi i \frac{\partial}{\partial \omega_1} V^{\omega_1, \dots, \omega_n} = - \frac{1}{\omega_1} V^{\omega_1 + \omega_2, \dots, \omega_n} \\ 2\pi i \frac{\partial}{\partial \omega_j} V^{\omega_1, \dots, \omega_n} = \frac{1}{\omega_j} V^{\omega_1, \dots, \omega_{j-1} + \omega_j, \dots, \omega_n} - \frac{1}{\omega_j} V^{\omega_1, \dots, \omega_j + \omega_{j+1}, \dots, \omega_n} \quad (1 \leq j < n) \\ 2\pi i \frac{\partial}{\partial \omega_n} V^{\omega_1, \dots, \omega_n} = \frac{1}{\omega_n} V^{\omega_1, \dots, \omega_{n-1} + \omega_n} \end{array} \right.$$

Démonstration : On observe d'abord que les relations ci-dessus impliquent bien l'homogénéité des moules :

$$\sum_{j=1}^n \omega_j \frac{\partial}{\partial \omega_j} U^\omega = \sum_{j=1}^n \omega_j \frac{\partial}{\partial \omega_j} V^\omega = 0$$

(*) à l'exclusion des hyperplans-coordonnées.

et, par un argument combinatoire simple, on vérifie qu'elles sont aussi compatibles avec l'alternance des moules, en ce sens que l'hypothèse

$$(7b9) \quad \sum_{\omega^1, \omega^2 < \omega} U^\omega = \sum_{\omega^1, \omega^2 < \omega} V^\omega = 0 \quad \text{pour tous } \omega^1, \omega^2 \text{ tels que } n(\omega^1) + n(\omega^2) \leq n-1$$

jointe aux relations (7b7) et (7b8), entraîne :

$$(7b9 \text{ bis}) \quad \sum_{\omega^1, \omega^2 < \omega} U^\omega = C_{ste}, \quad \sum_{\omega^1, \omega^2 < \omega} V^\omega = C_{ste} \quad \text{pour tous } \omega^1, \omega^2 \text{ tels que } n(\omega^1) + n(\omega^2) \leq n$$

D'autre part, il se trouve que, pour tout moule alterné $A^\bullet$ et toute paire d'entiers $j \leq n$, on peut exprimer $A^{\omega_1, \dots, \omega_n}$ comme combinaison linéaire de $A^{\omega_{\tau(1)}, \dots, \omega_{\tau(n)}}$ avec $\tau(n) = j$. Par exemple, pour $r = 4$:

$$\begin{aligned} A^{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4} &= -A^{\omega_4, \omega_3, \omega_2, \omega_1} & (j=1) \\ &= A^{\omega_1, \omega_4, \omega_3, \omega_2} + A^{\omega_4, \omega_3, \omega_1, \omega_2} + A^{\omega_4, \omega_1, \omega_3, \omega_2} & (j=2) \\ &= A^{\omega_1, \omega_4, \omega_2, \omega_3} - A^{\omega_4, \omega_1, \omega_2, \omega_3} - A^{\omega_1, \omega_2, \omega_4, \omega_3} & (j=3) \end{aligned}$$

On sait donc dériver les $A^{\omega_1, \dots, \omega_n}$ par rapport à chaque variable si on sait les dériver par rapport à la dernière variable. Ce fait, joint à la compatibilité de l'alternance avec les relations (7b7) et (7b8), montre qu'il suffit de vérifier ces dernières dans le cas $j = r$.

Pour (7b8), c'est facile : on se reporte à (7b3) et on dérive par rapport à la borne supérieure d'intégration. Lorsque $(\omega_1 + \dots + \omega_n) / \omega_n > 0$, il faut en outre supprimer le dernier terme de la suite $\{\alpha_1, \dots, \alpha_d\}$, ce qui divise par deux le nombre des chemins d'intégration, mais ne change pas le résultat, du fait de l'identité $\sum_{\varepsilon_d = \pm} \gamma_{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_d} = \gamma_{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{d-1}}$ (cf. Lemme 7a1).

Quant aux U^ω , ils sont liés aux V^ω par les relations :

$$(7b10) \quad U^{\omega_1, \dots, \omega_n} + V^{\omega_1, \dots, \omega_n} + \sum_{j=2}^{n-1} \sum_{\omega' \dots \omega^j = \omega} U^{\|\omega'\|, \dots, \|\omega^j\|} V^{\omega'} \dots V^{\omega^j} = 0$$

qui explicitent (7b4). En dérivant (7b10) par rapport à ω_n et en raisonnant par récurrence sur r , on montre facilement que (7b7) est vrai pour $j = r$ si (7b8) l'est, et ceci achève la démonstration.

Pour toute factorisation $\omega' = (\omega_1, \dots, \omega_j)$, $\omega'' = (\omega_{j+1}, \dots, \omega_n)$ du multiindice $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_n)$ posons :

$$(7b11) \quad \omega' \wedge \omega'' = (\omega_1, \dots, \omega_j + \omega_{j+1}, \dots, \omega_n)$$

et introduisons les opérateurs :

$$(7b12) \quad d_{\omega', \omega''} = d_j = \frac{\|\omega'\| \|\omega''\|}{\|\omega'\| + \|\omega''\|} \left(\frac{\partial}{\partial \omega_j} - \frac{\partial}{\partial \omega_{j+1}} \right) \quad (*)$$

$$(7b13) \quad \partial_{\omega', \omega''} = \partial_j = -\frac{1}{2} \left(\omega_1 \frac{\partial}{\partial \omega_1} + \dots + \omega_j \frac{\partial}{\partial \omega_j} \right) + \frac{1}{2} \left(\omega_{j+1} \frac{\partial}{\partial \omega_{j+1}} + \dots + \omega_n \frac{\partial}{\partial \omega_n} \right) \quad (*)$$

Moyennant ces notations, les relations différentielles (6b7) et (6b8) revêtent une forme particulièrement simple :

Corollaire de la proposition 7b1 :

$$(7b14) \quad 2\pi i \quad d_j U^\omega = U^{\omega'} U^{\omega''} \quad (1 \leq j \leq n)$$

(*) On note que $[d_{j_1}, d_{j_2}] = [\partial_{j_1}, \partial_{j_2}] = 0$ mais $[d_{j_1}, \partial_{j_2}] \neq 0$ en général.

$$D_{(\omega_1 + \dots + \omega_j)(\omega_{i+1} + \dots + \omega_n)^{-1}} V^\omega = + V^{\omega_1, \dots, \omega_i} V^{\omega_{i+1}, \dots, \omega_n} \quad D_H \text{ dérivée}$$

- 230 -

$$D_{\omega_i(\omega_{i+1})^{-1}} U^\omega = -U^{\omega_1, \dots, \omega_{i-1}, \omega_i + \omega_{i+1}, \omega_{i+2}, \dots, \omega_n} \quad \text{la discontinuité}$$

correspondant à la
traverse de $\mathbb{R}^+$ pour t

$$(7b15) \quad 2\pi i \partial_j V^\omega = V^{\omega' \wedge \omega^2} \quad (1 \leq j \leq n)$$

On tire de là les équations différentielles du second degré :

$$(7b16) \quad \partial_j d_j U^\omega = 0 \quad (1 \leq j \leq n)$$

$$(7b17) \quad d_j \partial_j V^\omega = 0 \quad (1 \leq j \leq n)$$

Singularités des U^ω et des V^ω .

Proposition 7b2 :

Lorsque la variable ω_j tend vers 0, les autres restant constantes,
on a :

$$(7b18) \quad \begin{cases} 2\pi i U^{\omega_1, \dots, \omega_n} \sim (\log \omega_1) U^{\omega_1 + \omega_2, \dots, \omega_n} & (j=1) \\ 2\pi i U^{\omega_1, \dots, \omega_n} \sim (\log \omega_j) \left\{ -U^{\omega_1, \dots, \omega_{j-1} + \omega_j, \dots, \omega_n} + U^{\omega_1, \dots, \omega_j + \omega_{j+1}, \dots, \omega_n} \right\} & (1 < j < n) \\ 2\pi i U^{\omega_1, \dots, \omega_n} \sim -(\log \omega_j) U^{\omega_1, \dots, \omega_{n-1} + \omega_n} & (j=n) \end{cases}$$

De même, lorsque la somme $\omega_1 + \dots + \omega_j$ ou $\omega_{j+1} + \dots + \omega_n$ tend vers 0 pour une
valeur de j et une seule, on a respectivement :

$$(7b19) \quad \begin{cases} 2\pi i V^{\omega_1, \dots, \omega_n} \sim -(\log(\omega_1 + \dots + \omega_j)) V^{\omega_1, \dots, \omega_j} V^{\omega_{j+1}, \dots, \omega_n} \\ 2\pi i V^{\omega_1, \dots, \omega_n} \sim (\log(\omega_{j+1} + \dots + \omega_n)) V^{\omega_1, \dots, \omega_j} V^{\omega_{j+1}, \dots, \omega_n} \end{cases}$$

Démonstration : A partir de (7b3) et (7b4) on vérifie que :

$$U^{\omega_1, \omega_2} = -V^{\omega_1, \omega_2} = \begin{cases} \frac{1}{2\pi i} \log(\omega_1/\omega_2) & \text{si } \omega_1/\omega_2 \in \mathbb{R}^+ \\ \frac{1}{2\pi i} \log(-\omega_1/\omega_2) & (*) \text{ si } \omega_1/\omega_2 \notin \mathbb{R}^+ \end{cases}$$

Par suite, (7b18) et (7b19) équivaut à :

$$(7b18 \text{ bis}) \quad U^{\omega_1, \dots, \omega_n} \sim \sum_{j=1}^{n-1} U^{\omega_j, \omega_{j+1}} U^{\omega_1, \dots, \omega_j + \omega_{j+1}, \dots, \omega_n}$$

$$(7b19 \text{ bis}) \quad V^{\omega_1, \dots, \omega_n} \sim \sum_{j=1}^{n-1} V^{\omega_1 + \dots + \omega_j, \omega_{j+1} + \dots + \omega_n} V^{\omega_1, \dots, \omega_j} V^{\omega_{j+1}, \dots, \omega_n}$$

A partir de là, on suit la même démarche que pour démontrer la proposition 7b1. Autrement dit :

(i) on montre la compatibilité de (7b18 bis) et (7b19 bis) avec le caractère alterné des moules U^* et V^*

(ii) à partir de (7b3) on montre que (7b19 bis) est vraie pour $\omega_n \rightarrow 0$ et donc aussi pour $\omega_j \rightarrow 0 \quad (\forall j)$

(iii) à partir des relations (7b10), on montre l'équivalence de (7b18 bis) avec (7b19 bis).

Ceci acquis, calculons les exponentielles des opérateurs d_j et ∂_j définis en (7b12) et (7b13). Pour t petit et φ fonction localement définie, holomorphe en ω , on a :

(*) pour la détermination principale de $\log z$ dans $\mathbb{C}$ privé du demi-axe réel négatif.

$$\left\{ \begin{array}{l} \exp(t d_j) \varphi(\omega) = \varphi(h_j^t(\omega)) \quad \text{avec} \\ h_j^t(\omega) = (\omega_1 e^{-t/2}, \dots, \omega_j e^{-t/2}, \omega_{j+1} e^{+t/2}, \dots, \omega_n e^{+t/2}) \\ \exp(t \partial_j) \varphi(\omega) = \varphi(k_j^t(\omega)) \quad \text{avec} \\ k_j^t(\omega) = (\omega_1, \dots, \omega_j - \frac{\|\omega'\| \|\omega''\| (e^{-t} - 1)}{\|\omega'\| + \|\omega''\| e^{-t}}, \omega_{j+1} + \frac{\|\omega'\| \|\omega''\| (e^{-t} - 1)}{\|\omega'\| + \|\omega''\| e^{-t}}, \dots, \omega_n) \end{array} \right.$$

où bien sûr $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_n)$, $\omega' = (\omega_1, \dots, \omega_j)$, $\omega'' = (\omega_{j+1}, \dots, \omega_n)$
On note que h_j^t laisse invariants les quotients

$$\omega_1 / \omega_2, \dots, \omega_{j-1} / \omega_j, \omega_{j+1} / \omega_{j+2}, \dots, \omega_{n-1} / \omega_n$$

et multiplie par e^{-t} le quotient $\omega'_j = \omega_j / \omega_{j+1}$, tandis que k_j^t laisse invariants les coordonnées

$$\omega_1, \dots, \omega_j + \omega_{j+1}, \dots, \omega_n$$

et multiplie par e^t le quotient $\omega''_j = (\omega_1 + \dots + \omega_j) / (\omega_{j+1} + \dots + \omega_n)$. Ceci permet de définir les "dérivations tronquées" d_j^* et ∂_j^* : si dans l'un de ses domaines d'holomorphie, une fonction φ est polynomiale en $\log \omega'_j$ (resp. $\log \omega''_j$) pour ω'_j (resp. ω''_j) voisin de 0 ou ∞ , alors d_j^* (resp. ∂_j^*) désigne la dérivation par rapport aux seuls ω'_j (resp. ω''_j) situés à l'intérieur des logarithmes (*).

Moyennant ces notations, on peut énoncer :

(*) Cf. la définition de la dérivation tronquée ∂^* juste avant la proposition

Corollaire de la proposition 7b2 :

$$(7b20) \quad -2\pi i \quad \partial_j^* \quad U^\omega = U^{\omega' \wedge \omega^2} \quad (1 \leq j \leq n)$$

$$(7b21) \quad -2\pi i \quad d_j^* \quad V^\omega = V^{\omega'} V^{\omega^2} \quad (1 \leq j \leq n)$$

D'où l'on tire

$$(7b22) \quad d_j^* \quad \partial_j^* \quad U^\omega = 0 \quad (1 \leq j \leq n)$$

$$(7b23) \quad \partial_j^* \quad d_j^* \quad V^\omega = 0 \quad (1 \leq j \leq n)$$

Les relations (7b20), (7b21), (7b22), (7b23) sont valables partout, y compris à la frontière des domaines d'holomorphic. Elles montrent donc comment se prolongerait chacune des déterminations holomorphes de U^ω ou V^ω (en particulier la détermination principale) et à quelle surface de Riemann on aboutirait dans chaque cas.

La dualité $U^* \leftrightarrow V^*$.

La comparaison des propositions 7b1 et 7b2 ci-dessus (et de leurs corollaires) fait apparaître un nouvel aspect de la dualité $U^* \leftrightarrow V^*$. Les formules (7b14), (7b15), (7b20), (7b21) sont particulièrement suggestives : dans le cas de la représentation Δ -stable, le multiindice ω se scinde pour les dérivations ordinaires et se contracte pour les dérivations tronquées, tandis que dans le cas de la représentation ∂ -stable, le multiindice ω se contracte pour la dérivation ordinaire et se scinde pour les dérivations tronquées. Cet échange "différentiel $\leftrightarrow$ discret" a déjà été observé dans les modèles sectoriels à propos de la dualité $\mathcal{U}_\pm^* \leftrightarrow \mathcal{V}_\pm^*$ en évidence dans les formules (6d19), (6d20), (6d21), (6d22).

Les six moules hyperlogarithmiques $U^*, U_+^*, U_-^*, V^*, V_+^*, V_-^*$.

Comme la résolution (par récurrence) des systèmes différentiels (7b7) et (7b8) conduit manifestement à des fonctions hyperlogarithmiques, nous qualifierons les moules U^* et V^* de moules hyperlogarithmiques. Nous étendrons aussi cette désignation aux moules symétriques $U_{\pm}^*$ et $V_{\pm}^*$ qui interviennent dans les formules (6d51), (6d52), (6d67), (6d68), car ces moules se trouvent vérifier des systèmes différentiels analogues à (7b7) et (7b8). Voir à ce sujet l'exercice 6d4. Les six moules hyperlogarithmiques $U^*, U_+^*, U_-^*, V^*, V_+^*, V_-^*$ possèdent des transformées de Fourier remarquables, auxquelles est consacrée la section qui suit.

Section 7c : Les transformées de Fourier des moules hyperlogarithmiques.

A la proposition 7b2 on a décrit le comportement des fonctions $\omega \rightarrow U^{\omega}$ et V^{ω} en leurs singularités. C'est un comportement de fonctions localement intégrables, tant sur $\mathbb{C}^n$ que sur $\mathbb{R}^n$ (*). On pourrait en dire autant des fonctions $\omega \rightarrow U_{\pm}^{\omega}$ et $V_{\pm}^{\omega}$. Voir à ce sujet l'exercice 6d2. Par suite, les six moules hyperlogarithmiques $U^*, U_+^*, U_-^*, V^*, V_+^*, V_-^*$ définissent sans ambiguïté des moules-distributions sur $\mathbb{R}$ et on peut leur appliquer la transformation de Fourier (**).

Ceci dit, les factorisations (6d67) et (6d68) impliquent, ainsi qu'on l'a déjà observé, que les fonctions $U^{\omega_1, \dots, \omega_n}$ et $V^{\omega_1, \dots, \omega_n}$ sont chacune des superpositions (linéaires) de fonctions de $(n-1)$ variables au plus. Il s'ensuit que les transformées de Fourier $\mathcal{F} U^{t_1, \dots, t_n}$ et $\mathcal{F} V^{t_1, \dots, t_n}$ sont des distributions à densités concentrées sur les hyperplans-coordonnées, c'est-à-dire de la forme :

(*) ω = multiindice, $n = n(\omega)$

(**) Pour les moules-distributions, leur symétrie, leur alternance, leurs transformées de Fourier etc... voir la section 4c

$$(7c1) \quad A^{t_1, \dots, t_n} = \sum_{j=1}^n A_j^{t_1, \dots, \hat{t}_j, \dots, t_n} \delta(t_j)$$

où δ désigne le dirac et où la j -ième densité-coordonnée $A_j^{t_1, \dots, t_n}$ n'est évidemment pas fonction de t_j .

Il se trouve que les moules de la forme (7c1) sont stables tant pour la multiplication des moules $\times$ que pour leur composition convolutive $\hat{\circ}$, introduite à la section 4c (Pour $\times$ c'est évident, pour $\hat{\circ}$ cela se voit via la transformation de Fourier). Nous aurons souvent, dans cette section, à composer convolutivement des moules du type (7c1). C'est très avantageux en apparence, car la présence des diracs ramène, dans la convolution (4c21), toutes les intégrations à de simples évaluations en des points donnés. Et effectivement, l'application formelle de (4c21) à deux moules $A^\bullet$ et $B^\bullet$ du type (7c1) donne bien un moule $C^\bullet = A^\bullet \hat{\circ} B^\bullet$ qui est encore du type (7c1) et dont les densités-coordonnées $C_i^\bullet$ s'expriment simplement (i.e. sans intégration) en fonction des densités-coordonnées $A_j^\bullet$ et $B_k^\bullet$ de $A^\bullet$ et $B^\bullet$. Malheureusement, le résultat ainsi obtenu n'est juste que pour des densités-coordonnées $A_j^\bullet$ et $B_k^\bullet$ très régulières (par exemple globalement intégrables). Or nous aurons justement affaire à des densités-coordonnées qui ne sont intégrables ni localement, ni à l'infini et qui nécessitent la prise de valeurs principales. La formule (4c21) conduirait dans ces cas-là à des résultats erronés.

Cependant, lorsque seul le facteur $B^\bullet$ est du type (7c1) et que le facteur $A^\bullet$ possède une densité (partout) diffuse, il se trouve que le composé $C^\bullet = A^\bullet \hat{\circ} B^\bullet$ possède lui aussi une densité (partout) diffuse et que cette densité est bien celle que fournit (sans intégration) la formule (4c21). Explicitement :

$$(7c2) \quad C^t = (A^\bullet \hat{\circ} B^\bullet)^t = \sum_{t_1 \dots t_n = t} \sum_{t_j \in t^{d_j}} A^{t_1, \dots, t_{d_0}} B_{d_1}^{t - t_{d_1}} \dots B_{d_0}^{t - t_{d_0}}$$

Ici, les k^i sont des multiindices en facteur dans le multiindice k , chaque t_{j_i} est un indice simple contenu dans k^i et la notation abusive $k^i - t_{j_i}$ signifie que l'on retranche t_{j_i} de chacun des termes de k^i .

Abordons maintenant la transformation de Fourier des moules logarithmiques. Nous utiliserons non pas $\mathcal{F}$ mais $\overline{\mathcal{F}}$, car c'est ici un peu plus commode.

Les transformées de Fourier des moules symétriques $U_{\pm}^{\bullet}$ et $V_{\pm}^{\bullet}$.

Proposition 7c1 :

Les moules $U_{\pm}^{\bullet}$ et $V_{\pm}^{\bullet}$ ont pour transformées de Fourier des moules-distributions $\overline{\mathcal{F}} U_{\pm}^{\bullet}$ et $\overline{\mathcal{F}} V_{\pm}^{\bullet}$ à densités diffuses données par les formules suivantes :

$$(7c3) \quad \text{dens } \overline{\mathcal{F}} U_{+}^{t_1, \dots, t_n} = \left(\frac{1}{2\pi i} \right)^n \frac{\theta(t_1) \theta(t_2) \dots \theta(t_n)}{t_1 (t_2 - t_1) \dots (t_n - t_{n-1})}$$

$$(7c3bis) \quad \text{dens } \overline{\mathcal{F}} U_{-}^{t_1, \dots, t_n} = \left(-\frac{1}{2\pi i} \right)^n \frac{\theta(-t_1) \theta(-t_2) \dots \theta(-t_n)}{t_1 (t_2 - t_1) \dots (t_n - t_{n-1})}$$

$$(7c4) \quad \text{dens } \overline{\mathcal{F}} V_{+}^{t_1, \dots, t_n} = \left(\frac{1}{2\pi i} \right)^n \frac{\theta(t_1 - t_2) \dots \theta(t_{n-1} - t_n) \theta(t_n)}{t_1 t_2 \dots t_n}$$

$$(7c4bis) \quad \text{dens } \overline{\mathcal{F}} V_{-}^{t_1, \dots, t_n} = \left(-\frac{1}{2\pi i} \right)^n \frac{\theta(t_2 - t_1) \dots \theta(t_n - t_{n-1}) \theta(-t_n)}{t_1 t_2 \dots t_n}$$

où l'on a posé

$$(7c5) \quad \theta(x) = 1 \quad \text{si } x > 0 \quad \text{et } \theta(x) = 0 \quad \text{si } x < 0$$

Indication sur la démonstration :

On commence par $V_{\pm}^{\bullet}$. On se reporte à la formule (6d51) et on y fait

$z = \pm 1$, car pour cette valeur particulière de z le moule $\Lambda_{\pm}^{\bullet}(z)$ se réduit au moule unité $1^{\bullet}$. On peut alors écrire :

$$(7c6) \quad V_{\pm}^{\bullet} = (V_{\pm}^{\bullet} \circ J^{\bullet}) \times (2^{\bullet})^{-1}$$

Comme $2^{\bullet}$ est symétrique, son inverse multiplicatif est immédiatement calculable grâce à la formule (4b22). On porte alors dans (7c6) l'expression (6d23) du moule $V_{\pm}^{\bullet}$ et l'expression (6d55) du moule $2^{\bullet}$ et s'aperçoit que les $V_{\pm}^{\omega}$ se présentent précisément sous la forme d'une intégrale de Fourier, ou plus exactement, comme l'intégrale de Fourier d'une densité, qui est celle des formules (7c4) - (7c4bis), et d'une distribution complémentaire (non diffuse), qui provient de $2^{\bullet}$ et dont nous n'avons pas à nous soucier pour l'instant.

On peut de même calculer la densité de $\overline{F} U^{\bullet}$ en faisant $z = \pm 1$ dans la formule (6d52), mais il faut se donner un peu plus de peine (*). On peut aussi directement déduire $\overline{F} U_{\pm}^{\bullet}$ de $\overline{F} V_{\pm}^{\bullet}$ (**).

On observe que

$$(7c7) \quad \overline{F} U_{+}^{t_1, \dots, t_n} = \left(\frac{1}{2\pi i}\right)^n M^{t_1, \dots, t_n} X^{t_1, t_2, \dots, t_n}$$

$$(7c8) \quad \overline{F} V_{+}^{t_1, \dots, t_n} = \left(\frac{1}{2\pi i}\right)^n N^{t_1, \dots, t_n} L^{t_n, t_{n-1}, \dots, t_1}$$

- où $X^{\bullet}$ est le moule symétrique fondamental de type différence-polaire
- où $L^{\bullet}$ est le carré $S^{\bullet} \times S^{\bullet}$ (au sens des moules) du moule symétrique fondamental de type différence-plat.
- où $M^{t_1, \dots, t_n} = \prod_i \theta(t_i)$ et $N^{t_1, \dots, t_n} = \prod_i 1/t_i$ sont des moules de type séparé-plat et séparé-polaire respectivement.

(*) Voir l'exercice 7c2.

(**) Voir l'exercice 7c3.

Bien que les fonctions $M^{t_1, \dots, t_n}$ et $N^{t_1, \dots, t_n}$ soient évidemment symétriques, les moules $M^\bullet$ et $N^\bullet$ ne sont pas symétriques. Toutefois, multipliés (au sens des fonctions, non au sens des moules) par les moules symétriques $X^\bullet$ et $\tilde{L}^\bullet$, ils fournissent des moules symétriques.

Ce que nous retiendrons surtout, c'est le type mixte (différence-polaire et séparé-plat) des moules $\overline{\mathcal{F}} U_\pm^\bullet$ et le type mixte (différence-plat et séparé-polaire) des moules $\overline{\mathcal{F}} V_\pm^\bullet$. Cette propriété, comme on le verra, s'étend aux transformées de Fourier des autres moules hyperlogarithmiques.

Les transformées de Fourier des moules alternés $U_\pm^\bullet$ et $V_\pm^\bullet$.

Nous pouvons maintenant calculer les transformées de Fourier, non pas encore des moules $U^\bullet$ et $V^\bullet$, mais de leurs composés par les moules rotationnels $R_\pm^\bullet$ introduits à la section

$$(7c9) \quad U_\pm^\bullet = U^\bullet \circ R_\pm^{\bullet -1} \quad \text{et} \quad V_\pm^\bullet = R_\pm^\bullet \circ V^\bullet$$

Puisque les moules rotationnels $R_\pm^\bullet$ (et donc aussi leurs inverses de compositions $R_\pm^{\bullet -1}$) sont alternés, les moules $U_\pm^\bullet$ et $V_\pm^\bullet$ sont eux-mêmes alternés et mutuellement inverses (*)

$$(7c10) \quad U_+^\bullet \circ V_+^\bullet = U_-^\bullet \circ V_-^\bullet = U^\bullet \circ V^\bullet = I^\bullet$$

Proposition 7c2.

Les moules alternés $U_\pm^\bullet$ et $V_\pm^\bullet$ ont pour transformées de Fourier des moules-distributions aux densités concentrées sur les hyperplans-coordonnées et qui valent :

(*) pour la composition s'entend. Rappelons que l'inverse d'un moule alterné (resp. symétrique) signifie automatiquement l'inverse de composition (resp. l'inverse multiplicatif) car dans chaque cas on ne peut prendre que cet inverse-là

$$(7c11) \quad \overline{\mathcal{F}} U_{\pm}^{\bullet} = v.p. \left\{ \text{dens}(\overline{\mathcal{F}} U_{\pm}^{\bullet})^{-1} \times (\overline{\mathcal{F}} I^{\bullet}) \times \text{dens}(\overline{\mathcal{F}} U_{\pm}^{\bullet}) \right\}$$

$$(7c12) \quad \overline{\mathcal{F}} V_{\pm}^{\bullet} = v.p. \left\{ \text{dens}(\overline{\mathcal{F}} V_{\pm}^{\bullet}) \times (\overline{\mathcal{F}} I^{\bullet}) \times \text{dens}(\overline{\mathcal{F}} V_{\pm}^{\bullet})^{-1} \right\}$$

avec v.p. = valeur principale et dens = densité. Interprétons d'abord les formules (7c11) et (7c12). Le moule $\overline{\mathcal{F}} I^{\bullet} = \hat{I}^{\bullet}$ a pour expression

$$(7c13) \quad \hat{I}^{\phi} = 0 ; \quad \hat{I}^{t_1} = \delta(t_1) ; \quad \hat{I}^{t_1, \dots, t_n} = 0 \quad \text{si } n \geq 2$$

D'autre part les moules symétriques $U_{\pm}^{\bullet}$ et $V_{\pm}^{\bullet}$ ont des inverses (multiplicatifs) facilement calculables grâce à (4b24). Les formules (7c11) et (7c12) s'écrivent donc

$$(7c14) \quad \overline{\mathcal{F}} U_{\pm}^{t_1, \dots, t_n} = v.p. \sum_{j=1}^n (-1)^{j-1} \text{dens}(\overline{\mathcal{F}} U_{\pm}^{t_1, \dots, t_{j-1}}) \delta(t_j) \text{dens}(\overline{\mathcal{F}} U_{\pm}^{t_j, \dots, t_n})$$

$$(7c15) \quad \overline{\mathcal{F}} V_{\pm}^{t_1, \dots, t_n} = v.p. \sum_{j=1}^n (-1)^{n-j} \text{dens}(\overline{\mathcal{F}} V_{\pm}^{t_1, \dots, t_{j-1}}) \delta(t_j) \text{dens}(\overline{\mathcal{F}} V_{\pm}^{t_j, \dots, t_n})$$

avec les densités données par (7c3) et (7c4). Reste à interpréter ces distributions.

Pour (7c15) il n'y a de difficultés qu'à l'origine. La "valeur principale" signifie donc que l'on intègre dans le domaine $\bigcap_j \{ |t_j| > \eta \}$ puis que l'on fait tendre η vers 0. Pour chaque fonction d'épreuve, la somme des n intégrales tend alors vers une limite (mais chaque intégrale prise séparément peut diverger, si bien qu'on ne doit pas remplacer v.p. $\sum$ par $\sum v.p.$).

Pour (7c14) il y a deux difficultés. Une première difficulté, à l'origine, que l'on écarte comme ci-dessus, en intégrant dans $\bigcap_j \{ |t_j| > \eta \}$ puis en faisant tendre η vers 0. Et une seconde difficulté, pour $t_i = t_{i+1}$,

car sur ces hyperplans les densités de $\overline{F} U_{\pm}^{\circ}$ deviennent infinies. On écarte cette nouvelle difficulté en posant, pour toute fonction φ analytique sur $\mathbb{R}^n$ et décroissant rapidement à l'infini :

$$(7c16) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{v.p.} \int_{\eta}^{\infty} \dots \int_{\eta}^{\infty} \varphi(t_1, \dots, t_n) \frac{dt_1 \dots dt_n}{t_1 (t_2 - t_1) \dots (t_n - t_{n-1})} = \\ \sum_{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{n-1}} \lambda(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{n-1}) \int_{\mathcal{J}(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{n-1})} \varphi(z_1, \dots, z_n) \frac{dz_1 \dots dz_n}{z_1 (z_2 - z_1) \dots (z_n - z_{n-1})} \end{array} \right.$$

- où chaque ε_i prend les valeurs $+$ et $-$

- où $\mathcal{J}(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ désigne le multichemin qui consiste à intégrer par rapport à chaque z_j depuis η jusqu'à $+\infty$ en contournant le point z_{j+1} dans le sens positif lorsque $\varepsilon_j = +$ et dans le sens négatif lorsque $\varepsilon_j = -$ (évidemment, on ne s'écarte pas trop de $\mathbb{R}^n$, afin de rester dans le domaine d'holomorphie de φ)

- où chaque coefficient $\lambda(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{n-1})$ est égal au quotient par du nombre des permutations τ des entiers $\{1, \dots, n\}$ telles que $\tau(j+1) - \tau(j)$ soit du signe de ε_j pour $j = 1, 2, \dots, n-1$.

Cette définition du moule-distribution

$$\text{v.p.} \quad \left\{ \frac{\theta(t_1 - \eta) \dots \theta(t_n - \eta)}{t_1 (t_2 - t_1) \dots (t_n - t_{n-1})} \right\}$$

s'étend évidemment d'une manière unique aux fonctions d'épreuve φ qui ne sont pas analytiques, mais à support compact et indéfiniment dérivables. C'est d'ailleurs la seule définition qui rende symétrique ce moule-distribution.

Quant aux coefficients $\lambda(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{n-1})$, nous les avons déjà rencontrés à la proposition 6d3. Ils se trouvent liés aux nombres de Bernouilli

via le moule $S^\bullet$ et les coefficients $\chi_\pm(n)$ (*)

Deux mots maintenant sur la démonstration de la proposition 7c2.

Avec les notations (7c9), la transformation de Fourier appliquée aux factorisations (6d67) et (6d68) donne les formules :

$$(7c17) \quad \overline{\mathcal{F}} U_\pm^\bullet = (\overline{\mathcal{F}} U_\pm^\bullet)^{-1} \times (\overline{\mathcal{F}} I^\bullet) \times (\overline{\mathcal{F}} U_\pm^\bullet)$$

$$(7c18) \quad \overline{\mathcal{F}} V_\pm^\bullet = (\overline{\mathcal{F}} V_\pm^\bullet) \times (\overline{\mathcal{F}} I^\bullet) \times (\overline{\mathcal{F}} V_\pm^\bullet)^{-1}$$

où ne figurent que des moules-distributions. Pour passer de là aux formules (7c11) et (7c12), il faut évidemment calculer les distributions $\overline{\mathcal{F}} U_\pm^\bullet$ et $\overline{\mathcal{F}} V_\pm^\bullet$ (et non pas seulement leurs densités, comme à la proposition 7c1) puis montrer que les parties "non diffuses" de ces distributions se détruisent mutuellement dans les sommes $\sum_{j=1}^{j=n}$ figurant aux seconds membres de (7c14) et (7c15), si bien qu'il ne reste plus que des "densités" et des "valeurs principales". La vérification est laborieuse (**) et nous l'omettons ici.

Les transformées de Fourier des moules alternés $U^\bullet$ et $V^\bullet$.

En appliquant l'opérateur $\overline{\mathcal{F}}$ aux relations (7c9), on trouve :

$$(7c19) \quad \overline{\mathcal{F}} U^\bullet = (\overline{\mathcal{F}} U_\pm^\bullet) \hat{\circ} (\overline{\mathcal{F}} R_\pm^\bullet) \text{ et } \overline{\mathcal{F}} V^\bullet = (\overline{\mathcal{F}} R_\pm^{\bullet'}) \hat{\circ} (\overline{\mathcal{F}} V_\pm^\bullet)$$

Les moules-distributions $\overline{\mathcal{F}} U_\pm^\bullet$ et $\overline{\mathcal{F}} V_\pm^\bullet$ ont déjà été calculés à la proposition 7c2. Quant aux moules-distributions $\overline{\mathcal{F}} R_\pm^\bullet$ et $\overline{\mathcal{F}} R_\pm^{\bullet'}$, on les calcule sans peine grâce aux formules (4c35) qui donnent $R_\pm^{\omega_1, \dots, \omega_n}$ en

(*) Voir à ce sujet l'exercice 7c4. (**) Voir exercice 7c5.

fonction des $\Delta(\omega_i)$.

Les formules (7c19) ne contiennent donc que des termes connus aux seconds membres. Elles nous donnent donc, en un sens, ce que nous cherchons. Elles ont toutefois l'inconvénient de donner $\overline{\mathcal{F}} U^\bullet$ et $\overline{\mathcal{F}} V^\bullet$ comme composées convolutives $(\hat{0})$ de deux moules-distributions qui ont chacun leurs densités concentrées sur les hyperplans-coordonnées. Or on a vu en début de section que ces produits étaient délicats à calculer. Nous allons tourner la difficulté en trois étapes, que nous indiquons très succinctement.

Première étape :

Afin de remplacer les moules-distribution $\overline{\mathcal{F}} U_\pm^\bullet$ et $\overline{\mathcal{F}} V_\pm^\bullet$, aux densités concentrées sur des hyperplans, par des moules-distributions aux densités partout diffuses (et donc plus maniables) nous allons les composer par deux moules alternés $F^\bullet$ et $G^\bullet$ ainsi définis :

$$(7c20) \quad F^\phi = 0, \quad F^{\omega_1} = \frac{1}{2\pi i \omega_1}, \quad F^{\omega_1, \dots, \omega_n} = 0 \text{ si } n \geq 2.$$

$$(7c21) \quad G^\phi = 0, \quad G^{\omega_1} = \frac{1}{2} \Delta(\omega_1) = \frac{1}{2} \frac{\omega_1}{|\omega_1|}, \quad G^{\omega_1, \dots, \omega_n} = 0 \text{ si } n \geq 2$$

Ces moules, très simples, se correspondent par la transformation de Fourier :

$$(7c22) \quad \overline{\mathcal{F}} F^\bullet = G^\bullet \quad \overline{\mathcal{F}} G^\bullet = F^\bullet$$

Nous allons donc calculer les composés :

$$(7c23) \quad \overline{\mathcal{F}} (F^\bullet \circ U_\pm^\bullet) = - G^\bullet \hat{0} \overline{\mathcal{F}} U_\pm^\bullet$$

$$(7c24) \quad \overline{\mathcal{F}} (G^\bullet \circ V_\pm^\bullet) = + F^\bullet \hat{0} \overline{\mathcal{F}} V_\pm^\bullet$$

Les seconds membres comportent chacun le produit de composition convolutif ($\hat{\circ}$) d'un moule-distribution à densité diffuse (à savoir G^* ou F^*) par un moule-distribution à densité concentrée sur les hyperplans-coordonnées. On est donc dans le cas d'application de la formule (7c2). Le calcul, sur lequel nous passons, conduit à la :

Proposition 7c3.

Les moules-distributions $\overline{F}(F^* \circ U_{\pm}^*)$ et $\overline{F}(G^* \circ V_{\pm}^*)$ possèdent des densités diffuses qui valent :

$$(7c25) \quad \text{dens } \overline{F}(F^* \circ U_+^*)^{t_1, \dots, t_n} = - \left(\frac{1}{2\pi i} \right)^{n-1} \frac{\frac{1}{2} - \theta(-t_1) \dots \theta(-t_n)}{(t_1 - t_2) \dots (t_{n-1} - t_n)}$$

$$(7c26) \quad \text{dens } \overline{F}(F^* \circ U_-^*)^{t_1, \dots, t_n} = - \left(\frac{1}{2\pi i} \right)^{n-1} \frac{\theta(t_1) \dots \theta(t_n) - \frac{1}{2}}{(t_n - t_{n-1}) \dots (t_2 - t_1)}$$

$$(7c27) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{dens } \overline{F}(G^* \circ V_+^*)^{t_1, \dots, t_n} = \\ \left(\frac{1}{2\pi i} \right)^n \sum_{j=1}^n \frac{\theta(t_1 - t_2) \dots \theta(t_{j-1} - t_j) \theta(t_{j+1})}{(t_1 - t_2) \dots (t_{j-1} - t_j) t_j} \frac{(-1)^{n-j} \theta(t_{j+1}) \theta(-t_{j+1} + t_{j+2}) \dots \theta(-t_{n-1} + t_n)}{(t_{j+1} - t_j) \dots (t_n - t_{n-1})} \end{array} \right.$$

$$(7c28) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{dens } \overline{F}(G^* \circ V_-^*)^{t_1, \dots, t_n} = \\ \left(\frac{1}{2\pi i} \right)^n \sum_{j=1}^n \frac{\theta(-t_1 + t_2) \dots \theta(-t_{j-2} + t_{j-1}) \theta(-t_{j-1})}{(t_1 - t_2) \dots (t_{j-1} - t_j) t_j} \frac{(-1)^j \theta(-t_{j+1}) \theta(t_{j+1} - t_{j+2}) \dots \theta(t_{n-1} - t_n)}{(t_{j+1} - t_j) \dots (t_n - t_{n-1})} \end{array} \right.$$

avec θ défini comme en (7c5).

Deuxième étape :

On passe au calcul de $\overline{F}(F^* \circ U^*)$ et $\overline{F}(G^* \circ V^*)$. Pour $\overline{F}(F^* \circ U^*)$ on utilise les compositions convolutives

$$(7c29) \quad \overline{F}(F^* \circ U^*) = \overline{F}(F^* \circ U_+^*) \hat{\circ} (\overline{F} R_+^*) = \overline{F}(F^* \circ U_-^*) \hat{\circ} (\overline{F} R_-^*)$$

en appliquant à nouveau la formule (7c2), car les premiers facteurs sont à densités diffuses et les seconds à densités concentrées sur les hyperplans-coordonnées. On trouve ainsi :

$$\overline{F}(F \circ U)^{t_1} = -\frac{1}{2} \Delta(t_1)$$

$$\overline{F}(F \circ U)^{t_1, t_2} = -\frac{1}{2\pi i} \text{v.p.} \frac{1}{4} \left\{ \frac{1 - \Delta(t_1)\Delta(t_2)}{t_1 - t_2} \right\}$$

$$\overline{F}(F \circ U)^{t_1, t_2, t_3} = -\left(\frac{1}{2\pi i}\right)^2 \text{v.p.} \left\{ \begin{aligned} &\frac{1}{8} \frac{\Delta(t_1)\Delta(t_2)\Delta(t_3) - \Delta(t_1) - \Delta(t_2) - \Delta(t_3)}{(t_1 - t_2)(t_2 - t_3)} \\ &- \frac{1}{12} \frac{\Delta(t_1)}{(t_3 - t_1)(t_1 - t_2)} + \frac{1}{6} \frac{\Delta(t_2)}{(t_1 - t_2)(t_2 - t_3)} - \frac{1}{12} \frac{\Delta(t_3)}{(t_2 - t_3)(t_3 - t_1)} \end{aligned} \right\}$$

etc...

avec comme d'habitude $\Delta(t) = \frac{t}{|t|} = \text{signe}(t)$.

Pour $\overline{F}(G \circ V)$ on procède différemment. On commence par "séparer" soigneusement les $\Delta(w_i)$ dans $G \circ R_{\pm}^i$, puis on "sépare" les termes qui figurent dans l'expression de $G \circ R_{\pm}^i \circ V^*$ (*). On trouve alors :

$$\overline{F}(G \circ V)^{t_1} = \frac{1}{2\pi i} \frac{1}{t_1}$$

$$\overline{F}(G \circ V)^{t_1, t_2} = \left(\frac{1}{2\pi i}\right)^2 \frac{1}{2} \frac{\Delta(t_1 - t_2)}{t_1 t_2}$$

$$\overline{F}(G \circ V)^{t_1, t_2, t_3} = \left(\frac{1}{2\pi i}\right)^3 \frac{1}{4} \frac{\Delta(t_1 - t_2)\Delta(t_2 - t_3) + \frac{1}{3}}{t_1 t_2 t_3}$$

et d'une façon générale :

(*) Voir exercice 7c7.

$$(7c30) \quad \overline{F} (G \circ V)^{t_1, \dots, t_n} = \left(\frac{1}{2\pi i} \right)^n \frac{1}{t_1 t_2 \dots t_n} T^{t_1, t_2, \dots, t_n}$$

où T désigne le moule alterné de type différence-plat (c'est l'un des huit moules fondamentaux définis et calculés à la section 4c).

Troisième étape :

On passe au calcul direct de $\overline{F} U$ et $\overline{F} V$ en appliquant les formules

$$(7c31) \quad \overline{F} U^{t_1, \dots, t_n} = - \text{v.p.} \left(\frac{\partial}{\partial t_1} + \dots + \frac{\partial}{\partial t_n} \right) \overline{F} (F \circ U)^{t_1, \dots, t_n}$$

$$(7c32) \quad \overline{F} V^{t_1, \dots, t_n} = 2\pi i \text{ v.p.} (t_1 \delta(t_1) + \dots + t_n \delta(t_n)) \overline{F} (G \circ V)^{t_1, \dots, t_n}$$

La relation (7c31), où les dérivations doivent s'entendre au sens des distributions, s'obtient en appliquant la transformation de Fourier à la relation

$$U^{\omega_1, \dots, \omega_n} = (\omega_1 + \dots + \omega_n) (F \circ U)^{\omega_1, \dots, \omega_n}$$

qui elle-même tient directement à la définition du moule F . La relation (7c32) s'obtient pareillement en appliquant la transformation de Fourier à la relation suivante (*):

$$V^{\omega_1, \dots, \omega_n} = \frac{2}{\delta(\omega_1 + \dots + \omega_n)} (G \circ V)^{\omega_1, \dots, \omega_n} = 2\delta(\omega_1 + \dots + \omega_n) (G \circ V)^{\omega_1, \dots, \omega_n}$$

qui elle-même tient à la définition du moule G . Les notations $t_i \delta(t_i)$ qui figurent au second membre de (7c32) sont d'ailleurs abusives et ne reçoivent évidemment de sens qu'après division par le terme t_i qui d'après (7c30) se trouve au dénominateur de $\overline{F} (G \circ V)^{t_1, \dots, t_n}$.

Appliquant (7c31) et (7c32) on trouve :

(*) et en tenant compte de la forme très particulière de $\overline{F}(G \circ V)$

$$\overline{\mathcal{F}} U^{t_1} = \delta(t_1)$$

$$\overline{\mathcal{F}} U^{t_1, t_2} = \frac{1}{2\pi i} \text{v.p.} \frac{1}{2} \left(\frac{\Delta(t_2)}{t_2} \delta(t_1) - \frac{\Delta(t_1)}{t_1} \delta(t_2) \right)$$

$$\overline{\mathcal{F}} U^{t_1, t_2, t_3} = \left(\frac{1}{2\pi i} \right)^2 \text{v.p.} \left\{ \begin{aligned} & \left(\frac{1}{4} \frac{\Delta(t_2)\Delta(t_3)-1}{(-t_2)(t_2-t_3)} + \frac{1}{6} \frac{1}{t_2 t_3} \right) \delta(t_1) \\ & + \left(-\frac{1}{4} \frac{\Delta(t_1)\Delta(t_3)-1}{t_1 t_3} - \frac{1}{3} \frac{1}{t_1 t_3} \right) \delta(t_2) \\ & + \left(\frac{1}{4} \frac{\Delta(t_1)\Delta(t_2)-1}{(t_1-t_2) t_2} + \frac{1}{6} \frac{1}{t_1 t_2} \right) \delta(t_3) \end{aligned} \right.$$

etc...

$$\overline{\mathcal{F}} V^{t_1} = \delta(t_1)$$

$$\overline{\mathcal{F}} V^{t_1, t_2} = \frac{1}{2\pi i} \text{v.p.} \frac{1}{2} \left(\frac{\Delta(t_1)}{t_1} \delta(t_2) - \frac{\Delta(t_2)}{t_2} \delta(t_1) \right)$$

$$\overline{\mathcal{F}} V^{t_1, t_2, t_3} = \left(\frac{1}{2\pi i} \right)^2 \text{v.p.} \left\{ \begin{aligned} & \frac{1}{4} \frac{(\Delta(t_2)\Delta(t_3-t_2) + \frac{1}{3})}{t_2 t_3} \delta(t_1) \\ & + \frac{1}{4} \frac{(-\Delta(t_1)\Delta(t_3) + \frac{1}{3})}{t_1 t_3} \delta(t_2) \\ & + \frac{1}{4} \frac{(\Delta(t_2)\Delta(t_1-t_2) + \frac{1}{3})}{t_1 t_2} \delta(t_3) \end{aligned} \right.$$

etc...

Section 7d : Résumé du chapitre 7.

Ce chapitre introduit deux algèbres de résurgence, $\mathcal{A}(\mathbb{C})$ et $\overline{\mathcal{A}}(\mathbb{C})$ qui contiennent respectivement chaque $\mathcal{A}(\Omega)$ et chaque $\overline{\mathcal{A}}(\Omega)$ et qui ont pour éléments, non plus des fonctions holomorphes sur une surface de Riemann fixe, mais des germes analytiques "prolongeables partout sans coupure".

Malgré cette différence, on a ici encore des dérivations étangères, des pseudovariabiles et, pour ces dernières, des représentations ∂ -stables ou Δ -stables. Ces représentations donnent lieu à des moules indexés non plus sur Ω^* mais sur $\mathbb{C}^*$, ce qui présente un double intérêt.

D'une part, cela permet de différencier les moules U^* et V^* par rapport au multiindice et de préciser la dualité $U^* \leftrightarrow V^*$. On s'aperçoit en effet que le comportement différentiel de U^* est analogue au comportement de V^* en ses singularités et vice versa. (Pour une formulation précise, voir les propositions 7b1 et 7b2). On s'aperçoit aussi que la dépendance des U^ω et V^ω par rapport au multiindice ω est du type "hyperlogarithmique", d'où le nom de moules hyperlogarithmiques conféré aux deux moules alternés U^* et V^* ainsi qu'aux quatre moules symétriques $U_\pm^*$ et $V_\pm^*$ qui leur sont associés.

D'autre part, les six groupes hyperlogarithmiques $U^*, U_+^*, U_-^*, V^*, V_+^*, V_-^*$ s'avèrent localement intégrables par rapport au multiindice. On peut donc les considérer comme moules-distributions sur $\mathbb{R}$ et leur appliquer la transformation de Fourier. On s'aperçoit alors :

(i) que les trois moules U^*, U_+^*, U_-^* qui sont associés à la représentation Δ -stable ont pour transformées de Fourier des moules distributions de type mixte séparé-plat + différence-polaire.

(ii) que les trois moules V^*, V_+^*, V_-^* qui sont associés à la représentation ∂ -stable ont pour transformées de Fourier des moules distributions de type mixte séparé-polaire + différence-plat.

