

Université de Paris
Faculté des Sciences d'Orsay

GEOMETRIE CONFORME

par

R. OSSERMAN

Cours professé à la Faculté des Sciences à Orsay (1965-1966)

Rédigé par : Mesdames Sylviane Bergeron et

Pierrette Sentenac

Secrétariat de Mathématiques d'Orsay

1967

Université de Paris
Faculté des Sciences d'Orsay

GEOMETRIE CONFORME

par

R. OSSERMAN

Cours professé à la Faculté des Sciences à Orsay (1965-1966)

Rédigé par : Mesdames Sylviane Bergeron et
Pierrette Sentenac

Secrétariat de Mathématiques d'Orsay

1967

Première partie

Chapitre I.

Page 1. § 1 Rappels d'algèbre linéaire

Page 6. § 2 Transformations différentiables et transformations conformes

Page 12. § 3 Transformations différentiables du plan

Chapitre II.

Page 25. § 1 Généralités sur la théorie des surfaces

Page 32. § 2 Etalement. Revêtement

Page 34. § 3 Théorème de Monodromie

Page 37 § 4 Germes d'applications locales. Deuxième forme du théorème de
Monodromie

Chapitre III.

Page 41. § 1 Fonctions harmoniques sur une surface de Riemann

Page 51. § 2 Résolution du problème de Dirichlet

Chapitre IV.

Page 57. § 1 Surfaces hyperboliques connexes.

- définitions

- caractérisation

Page 63. - théorème d'uniformisation

Page 68. § 2 Surfaces paraboliques connexes et simplement connexes.

Classification des surfaces connexes et simplement connexes.

Page 77. § 3 Théorie des revêtements

Revêtement universel

Groupe fondamental d'une surface

Page 86. § 4 Classification générale des Surfaces de Riemann connexes.

Deuxième partie

Chapitre I.

Page 89. Définition du plan hyperbolique

Chapitre II.

Page 99. Théorie des surfaces dans un espace euclidien E^n

§ 1 Généralités

Page 106. § 2 Equations fondamentales de la théorie des surfaces

Chapitre III. Surfaces Minima

Page 110. § 1 Généralités

Page 112. § 2 Etude des surfaces minima sous forme non paramétrique

Page 114. § 3 Paramètres isothermes

Page 119. § 4 Application de Gauss

Chapitre IV.

Page 125. Géométrie différentielle globale

Première partie

Chapitre 1

§ 1. - Rappels d'algèbre linéaire

§ 2. - Transformations différentiables et transformations conformes

§ 3. - Transformations différentiables du plan.

§ 1.- 1. Conventions

- $\mathcal{M}(m, n)$ désigne l'ensemble des matrices à m lignes et n colonnes
- Un élément de $\mathcal{M}(m, n)$ sera souvent désigné par l'expression : une matrice $\begin{smallmatrix} (m, n) \end{smallmatrix}$
- m_j^i désigne le coefficient de la $i^{\text{ème}}$ ligne de la $j^{\text{ème}}$ colonne de la matrice M
- On adoptera la convention d'Einstein : $\sum_i a_j^i b_i^k = a_j^i b_i^k$
- Soit A une matrice, de coefficient a_j^i , on désignera par $\tilde{a}_j^i$ le coefficient de ${}^t A$.

2. Théorème.- Toute matrice $M \in \mathcal{M}(m, n)$, réelle, peut-être mise sous la forme :

$$(2.1) \quad M = O_1 D O_2$$

où O_1 désigne une matrice orthogonale (m, m) , O_2 désigne une matrice orthogonale (n, n) et D une matrice diagonale (m, n) c'est à dire dont les éléments d_j^i sont nuls si $i \neq j$.

Preuve.-

Rappel : Toute matrice réelle symétrique est diagonalisable. Posons $G = {}^t M M$ alors G est une matrice (n, n) , symétrique, et positive semi-définie.

En effet, soit $x \in E^n$, X la matrice associée $\begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix}$.

Soit T la transformation linéaire : $E^n \longrightarrow E^m$ associée à M .

Posons $y = T(x)$, Y étant la matrice $\begin{pmatrix} y^1 \\ \vdots \\ y^m \end{pmatrix}$ on a

$${}^tXGX = g_j^k x^k x^j.$$

Dire que G définit une forme quadratique semi-définie positive, c'est dire que

$$g_j^k x_1^k x_1^j \geq 0.$$

Quel que soit $x \in E^n$ on a :

$${}^tXGX = {}^tX {}^tMMX = {}^t(MX)MX = {}^tYY = \sum_i (y^i)^2 \geq 0.$$

Il existe une matrice orthogonale (n, n) O_3 telle que ${}^tO_3 G O_3$ soit diagonale.

Posons alors $A = M O_3$. Alors $A \in \mathcal{M}(m, n)$ et $B = {}^tAA$ on a

$$B = {}^t(M O_3) M O_3 = {}^tO_3 G O_3$$

donc B est une matrice diagonale.

Mais on a

$$b_j^i = \tilde{a}_k^i a_j^k = \sum_k a_i^k a_j^k \quad \text{où} \quad \tilde{a}_k^i = a_i^k$$

donc

$$\sum_k a_i^k a_j^k = 0 \quad \text{si} \quad i \neq j$$

ce qui signifie que les vecteurs colonnes de A sont deux à deux orthogonaux. Si

$\{\vec{e}_i\}_{i=1, \dots, n}$ désigne la base canonique de E^n , les vecteurs colonnes de A sont, les matrices $(n, 1)$ dont les coefficients sont donnés par les composantes dans la base canonique des vecteurs $A(\vec{e}_j)$.

On peut toujours permuter par σ les vecteurs $\vec{e}_j$ de telle sorte que pour $i = 1, \dots, r$ on ait $A(\vec{e}_{\sigma(i)}) \neq 0$ et pour $i = r+1, \dots, n$ on ait $A(\vec{e}_{\sigma(i)}) = 0$ les vecteurs

$$\vec{f}_i = \frac{A(\vec{e}_i)}{|A(\vec{e}_i)|}$$

pour $i = 1, \dots, r$ sont alors des vecteurs orthonormés.

Complétons ce système de vecteurs de façon à avoir une base $\{\vec{f}_i\}_{i=1, \dots, n}$ orthonormée de E^n .

Dans cette nouvelle base A se lit comme une matrice diagonale D . Les matrices des changements de base effectués étant toutes orthogonales, on a

$$A = {}^tO_4 D O_4 = M O_3 \Rightarrow M = {}^tO_4 D (O_4 {}^tO_3) \quad \text{c.q.f.d.}$$

Remarque.— Si M est une matrice carrée régulière la démonstration se simplifie.

2.1. Corollaire.— La matrice D peut s'écrire : $\begin{pmatrix} d_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & d_n \end{pmatrix}$ et alors

$$\det G = \prod_{i=1}^n d_i^2.$$

Preuve.— On a

$$\begin{aligned} \det G &= \det({}^tMM) = \det[{}^t(O_1 D O_2)(O_1 D O_2)] = \det[{}^tO_2 D^2 O_2] = \det D^2 \det {}^tO_2 \det O_2 = \\ &= \det D^2 = \prod_{i=1}^n d_i^2 \quad \text{c.q.f.d.} \end{aligned}$$

2.2. Corollaire.— Soit $T : E^n \rightarrow E^m$ une application linéaire de matrice M . Alors tout volume n dimensionnel est multiplié par $\sqrt{\det G}$ sous la transformation T .

Preuve.— T est la composition des trois transformations T_1, T_2, T_3 associées respectivement à O_1, D et O_2 dans la formule (2.1.) Les transformations T_1 et T_3 étant orthogonales conservent la distance donc le volume.

Quant à la transformation T_2 c'est une suite d'affinités donc chacune multiplie la longueur dans une direction donnée par $|d_i|$ et conserve la longueur des directions orthogonales. Si bien que l'effet total multiplie le volume par

$$\prod_{i=1}^n |d_i| = \sqrt{\det G}.$$

Remarque.— Les quantités d_i^2 sont les valeurs propres de la matrice $G = {}^tMM$.

3. Théorème.— Soit $T : E^n \rightarrow E^m$, linéaire, à matrice M .

Les conditions suivantes sont équivalentes :

(a) Il existe une constante λ telle que, par T toute distance est multipliée par λ .

(b) $\langle TX_1, TX_2 \rangle = \lambda^2 \langle X_1, X_2 \rangle$; $\langle X, Y \rangle$ désignant le produit scalaire de X et de Y

(c) Les vecteurs colonnes de M sont deux à deux orthogonaux, et ont la même longueur λ .

(d) $G = {}^tMM = \lambda^2 I$.

(e) Dans la représentation du théorème précédent on a $d_j^1 = \pm \lambda \delta_j^1$.

Si $\lambda \neq 0$ on a de plus

(f) Tout angle est conservé par T .

(g) L'image inverse de la sphère $|Y| = 1$ est la sphère $|X| = \frac{1}{\lambda}$.

Preuve.— (a) $\Leftrightarrow$ (b). $|X|^2 = \langle X, X \rangle =$ et $d(X, Y) = |X - Y|$.

Supposons (a). $\exists \lambda$ telle que $d(TX, TY) = \lambda d(X, Y)$. Donc, en particulier, $d(TX, T \cdot 0) = \lambda d(X, 0)$ ce qui s'écrit encore $|TX| = \lambda |X|$.

Donc $|TX - TY|^2 = |T(X - Y)|^2 = \lambda^2 |X - Y|^2$

ou encore $\langle TX - TY, TX - TY \rangle = \lambda^2 \langle X - Y, X - Y \rangle$.

Développons, $\langle TX, TX \rangle + \langle TY, TY \rangle - 2 \langle TX, TY \rangle = \lambda^2 (\langle X, X \rangle + \langle Y, Y \rangle - 2 \langle X, Y \rangle)$

simplifions, on obtient $\langle TX, TY \rangle = \lambda^2 \langle X, Y \rangle$ donc (a) $\Rightarrow$ (b).

Supposons (b) $\langle TX, TY \rangle = \lambda^2 \langle X, Y \rangle$

$$\Rightarrow |TX| = \lambda |X|$$

$$\Rightarrow |T(X - Y)| = \lambda |X - Y| \quad \text{soit (a).}$$

(c) $\Leftrightarrow$ (d).

Posons $M = (m_j^i)$
 $G = (g_j^i)$

alors
$$g_j^i = \tilde{m}_k^i m_j^k = \sum_k m_i^k m_j^k$$

on a M satisfait $(c) \iff \sum_k m_i^k m_j^k = \lambda^2 \delta_i^j \iff (d).$

Prouvons que $(e) \implies (d).$

D'après le théorème 2 on a $M = O_1 D O_2$, qu'on va plutôt écrire $M = A D B$, on a $G = {}^t M M = {}^t B D^2 B$ or $D^2 = \lambda^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ d'après (e) donc $G = \lambda^2 {}^t B B = \lambda^2 I.$

Prouvons que $(d) \implies (a).$

On a $G = {}^t M M = \lambda^2 I$ et $|MX|^2 = {}^t (MX) MX = {}^t X G X = \lambda^2 {}^t X X = \lambda^2 |X|^2$ ce qui est (a).

Prouvons que $(a) \implies (d).$

On a $|TX - TY| = \lambda |X - Y|$

$$\implies |TX| = \lambda |X| \implies |TX|^2 = \lambda^2 |X|^2$$

donc ${}^t (MX) MX = \lambda^2 {}^t X X$ donc

$${}^t X G X = {}^t X \lambda^2 I X \implies G = \lambda^2 I.$$

Prouvons que $(a) \implies (e).$

$$d(TX, TY) = \lambda d(X, Y), \quad M = O_1 D O_2.$$

Si Δ est la transformation associée à D , O_1 et O_2 conservant les distances on a

$$d(\Delta X, \Delta Y) = \lambda d(X, Y)$$

Δ joue le rôle de T , Δ satisfait à (a) donc à (d) et on a ${}^t \Delta \Delta = \lambda^2 I$ ce qui n'est autre que (e).

On a démontré $(a) \iff (b) \iff (c) \iff (d) \iff (e).$

Supposons maintenant $\lambda \neq 0$

Définissons l'angle de deux vecteurs par $\cos(X, Y) = \frac{\langle X, Y \rangle}{|X| |Y|}.$

Montrons que $(b) \implies (f)$

Il faut montrer que $\cos(TX, TY) = \cos(X, Y).$

ou que $\frac{\langle TX, TY \rangle}{|TX| |TY|} = \frac{\langle X, Y \rangle}{|X| |Y|}$ or, d'après (b) $\frac{\langle TX, TY \rangle}{|TX| |TY|} = \frac{\lambda^2 \langle X, Y \rangle}{\lambda^2 |X| |Y|} = \frac{\langle X, Y \rangle}{|X| |Y|}$.

Montrons que (f) $\Rightarrow$ (b)

Supposons que (b) ne soit pas vrai, c'est à dire que (e) ne soit pas vrai ; alors il existe i et j , $i \neq j$, tels que $d_i \neq d_j$.

On a alors

$$D(e_i + e_j) = d_i e_i + d_j e_j$$

$$D(e_i - e_j) = d_i e_i - d_j e_j$$

et $D(e_i + e_j)$ non orthogonal à $D(e_i - e_j)$ par conséquent. Or $e_i + e_j$ et $e_i - e_j$ sont orthogonaux.

Donc non (b) $\Rightarrow$ non (f).

Montrons que (g) $\Leftrightarrow$ (d).

Posons $Y = MX$ on a $|Y| = 1 \Leftrightarrow |MX| = 1 \Leftrightarrow {}^t(MX)MX = 1 \Leftrightarrow {}^tXGX = 1$.

L'image inverse de $|Y| = 1$ est donc ${}^tXGX = 1$ donc $G = \lambda^2 I$, c'est à dire que l'image inverse de $|Y| = 1$ est la sphère $|X| = \frac{1}{\lambda}$.

3.1. Corollaire.— Si $m = n$, (a) est équivalent à (h) : $M = \lambda O_3$ où O_3 est orthogonale.

Preuve : (h) $\Rightarrow$ (d), en effet,

$${}^tMM = \lambda^2 {}^tO_3 O_3 = \lambda^2 I.$$

(d) $\Rightarrow$ (h), car la transformation $\frac{T}{\lambda}$ conserve toute distance donc est orthogonale et on a $\frac{M}{\lambda} = O_3$. c.q.f.d.

§ 2.- Transformations différentiables et transformations conformes.

1. Définitions

Soit Δ un domaine $\subset E^n$, $F : \Delta \longrightarrow E^m$

Soit $x \in E^n$, $x = (x^1, x^2, \dots, x^n)$

Posons $y = F(x)$, $y = (y^1, y^2, \dots, y^m)$

F est de classe r , sur Δ ce qu'on note $F \in C^r(\Delta)$

Si $\forall k = 1, 2, \dots, n ; y^k(x^1, \dots, x^n) \in C^r(\Delta)$.

1.1.- F est dite différentiable sur Δ si $F \in C^r(\Delta)$ avec $r \geq 1$.

1.2.- Une courbe Γ dans E^m est une application différentiable d'un intervalle $I \subset \mathbb{R}$ dans E^m .

Γ est définie par $y(t)$ pour $t \in I$.

1.3.- Le vecteur tangent à la courbe $y(t)$ au point $y_0 = y(t_0)$ est le vecteur

$$y'(t_0).1 = \left\{ \frac{dy^1}{dt}(t_0).1, \frac{dy^2}{dt}(t_0).1, \dots, \frac{dy^m}{dt}(t_0).1 \right\}.$$

[On convient de noter $y'(t)$ le vecteur $y'(t).1$ de E^m , quand aucune confusion n'est possible.]

Soit alors F une application différentiable de l'ouvert Δ de E^n dans E^m .

Soit $x(t)$ pour $t \in I$ une courbe dans Δ .

Soit $t_0 \in I$, $x_0 = x(t_0)$ et $y_0 = F(x_0)$.

Par la transformation F , la courbe $x(t)$ a une image dans $F(\Delta) \subset E^m$. Et

$y(t) = F[x(t)]$ est une application différentiable de I dans E^m donc une courbe de E^m et $y(t_0) = y_0$. Le vecteur tangent en y_0 est alors, par définition

$$y'(t_0) = \left\{ \frac{dy^1}{dt}(t_0), \dots, \frac{dy^m}{dt}(t_0) \right\}.$$

Or

$$y'(t_0) = F'(x_0) \circ x'(t_0)$$

et

$$\frac{dy^i}{dt}(t_0) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial y^i}{\partial x^j}(x_0) \frac{dx^j}{dt}(t_0).$$

Sous cette forme on voit que le vecteur tangent en y_0 dépend du vecteur tangent en x_0 mais pas de la courbe $x(t)$. La transformation $x'(t_0) \rightarrow y'(t_0)$ est une transformation induite par F . Elle envoie les vecteurs tangents en x_0 sur les

vecteurs tangents en y_0 .

C'est une transformation linéaire de E^n dans E^m , soit $M_{x_0} = (m_{x_0}^i{}_j)$ sa matrice, avec $m_{x_0}^i{}_j = \frac{\partial y^i}{\partial x^j}(x_0)$.

1.4.- La matrice M est appelée matrice jacobienne de F et la transformation linéaire induite, différentielle de F en x_0 , et notée dF_{x_0} .

On a donc

$$dF_{x_0} \in \mathcal{L}(E^n; E^m) \text{ et } dF_{x_0} \cdot (x'(t_0).1) = y'(t_0).1.$$

Remarque.

On peut introduire la différentielle de F en x_0 d'une autre manière.

Soit F une application d'un ouvert Δ de E^n dans E^m .

Soit $x_0 \in \Delta$.

Supposons qu'il existe $L_{x_0} \in \mathcal{L}(E^n; E^m)$ telle que :

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{F(x) - F(x_0) - L_{x_0}(x - x_0)}{|x - x_0|} = 0.$$

On démontre qu'alors L_{x_0} est unique et on dit que F est différentiable en x_0 .

Si $F \in C^1$, $dF_{x_0} = L_{x_0}$.

1.5.- Soit Δ un ouvert de E^n , $F: \Delta \rightarrow E^m$, $F \in C^1(\Delta)$ supposons que $m \geq n$. F est appelée immersion de Δ dans E^m si dF_x est injective en tout point x de Δ . Autrement dit, si M_x est de rang maximum, en tout point x de Δ .

Notation.-

Si on note $G_x = {}^t M_x M_x = (g_x^i{}_j)$. On a $g_x^i{}_j = \tilde{m}_x^i{}_k m_x^k{}_j =$

$$= \sum_{k=1}^n m_x^k{}_i m_x^k{}_j = \sum_{k=1}^n \frac{\partial y^k}{\partial x^i}(x) \frac{\partial y^k}{\partial x^j}(x)$$

ce qui peut encore s'écrire, si on désigne par $\frac{\partial y}{\partial x^i}(x)$ le $i^{\text{ème}}$ vecteur-colonne de M_x

$$g_{xj}^i = \frac{\partial y}{\partial x^i}(x) \cdot \frac{\partial y}{\partial x^j}(x).$$

2. Longueur de la courbe $y(t)$ dans $F(\Delta)$.

On note M et G les matrices M_x et G_x associées à F .

Soit $x(t)$ pour $t \in [\alpha, \beta]$ une courbe dans Δ . Et $F \in C^1(\Delta)$;

$F: \Delta \rightarrow E^m$. Δ ouvert de E^n . On a, en notant L la longueur de la courbe

$$L = \int_{\alpha}^{\beta} |y'(t)| dt = \int_{\alpha}^{\beta} |M_x x'(t)| dt$$

ce qui peut encore s'écrire :

$$L = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{{}^t x'(t) \cdot {}^t M \cdot M_x x'(t)} dt = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{{}^t x'(t) \cdot G_x x'(t)} dt$$

ou, en développant

$$L = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{g_{\ell}^k \frac{dx^k}{dt}(t) \cdot \frac{dx^{\ell}}{dt}(t)} dt.$$

3. Volume n-dimensionnel de $F(\Delta)$.

Soit F appartenant à $C^1(\Delta)$. En notant par $V(F(\Delta))$ ce volume on a

$$V(F(\Delta)) = \int_{\Delta} \sqrt{\det G} dx^1 \dots dx^n$$

d'après le corollaire § 1. 2.2.

(Cette intégrale a un sens car G dépend continuellement de x .)

4. Transformation conforme

4.1.- Une transformation conforme est une transformation différentiable qui conserve les angles. Alors il est clair que : F conforme $\Leftrightarrow dF_x$ est une similitude.

4.2. Théorème.- Soit $F \in C^1(\Delta)$ $F: \Delta \rightarrow E^m$ Δ étant un ouvert.

Alors : F conforme $\Leftrightarrow G_x = \lambda^2(x) \cdot I$.

Preuve.- C'est le théorème 3 § 1.

Interprétation géométrique.

$$F \text{ conforme} \Leftrightarrow \frac{\partial y_i}{\partial x_j}(x) \perp \frac{\partial y_j}{\partial x_i}(x) \text{ si } i \neq j$$

$$\text{et } \left| \frac{\partial y_i}{\partial x_i} \right| = \lambda \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

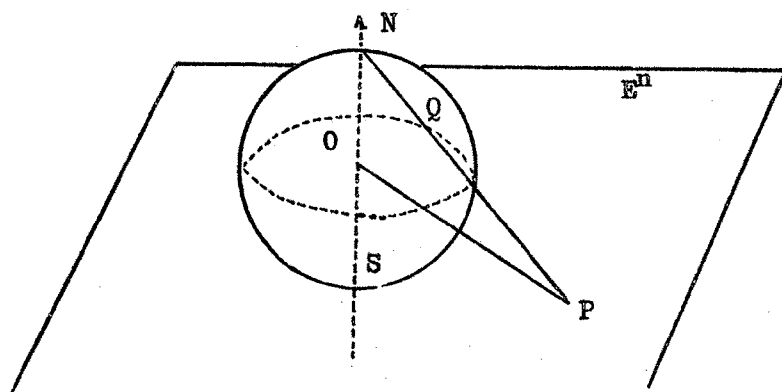
4.3.- Exemple de transformation conforme : la projection stéréographique.

Notons par S_n la sphère unité ^{dans} $\mathbb{E}^{n+1}$.

On sait ce qu'est la projection stéréographique. Notons

$F_N : \mathbb{E}^n \rightarrow S_n - \{\text{pôle nord}\}$ la dite projection.

Explicitons F_N



$$\text{On a } \overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{ON} + \overrightarrow{NQ}$$

$$\text{avec } \overrightarrow{NQ} = \mu \overrightarrow{NP}$$

$$\text{donc } \overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{ON} + \mu \overrightarrow{NP}$$

$$N = (0, 0, \dots, 1)$$

$$P = (x^1, \dots, x^n, 0)$$

$$Q = (y^1, \dots, y^n, y^{n+1})$$

donc $y = (0, 0, \dots, 0, 1) + \mu(x^1, \dots, x^n, -1)$. C'est à dire

$$y = (\mu x^1, \mu x^2, \dots, \mu x^n, 1 - \mu). \text{ Or } y \in S_n \Rightarrow |y| = 1 \text{ donc } \mu[\mu(|x|^2 + 1) - 2] = 0$$

or $\mu \neq 0$ car $Q \neq N$. Donc $\mu = \frac{2}{|x|^2 + 1}$ si bien que la formule

$$y = \left(\frac{2x^1}{|x|^2 + 1}, \frac{2x^2}{|x|^2 + 1}, \dots, \frac{2x^n}{|x|^2 + 1}, \frac{|x|^2 - 1}{|x|^2 + 1} \right)$$

définit $F_N(x)$.

Si on calcule g_{ij} , on trouve $g_{ij} = \mu^2 \delta_{ij}$ où $\mu = \frac{2}{1 + |x|^2}$, $g_{ij} = \frac{4}{[1 + |x|^2]^2} \delta_{ij}$

Ce qui prouve que $F_N(x)$ est une transformation conforme.

Calcul de la transformation inverse

$$\text{de } y^{n+1} = \frac{|x|^2 - 1}{|x|^2 + 1} \text{ on tire } |x|^2 + 1 = \frac{2}{1-y^{n+1}}$$

$$\text{d'où } x = \left(\frac{y^2}{1-y^{n+1}}, \frac{y^2}{1-y^{n+1}}, \dots, \frac{y^n}{1-y^{n+1}} \right).$$

F est donc une bijection et même un homéomorphisme de E^n sur $S_n - \{0, 0, \dots, 1\}$.

Calcul de la projection stéréographique de pôle Sud : F_S

Si on note par S la symétrie par rapport à E^n on a : $F_S = S \circ F_N$ d'où

$$y = \left(\frac{2x^1}{|x|^2 + 1}, \dots, \frac{2x^n}{|x|^2 + 1}, \frac{1 - |x|^2}{|x|^2 + 1} \right).$$

F_S est un homéomorphisme de E^n sur $S_n - \{0, 0, \dots, 0, -1\}$.

Inversion dans la sphère $|x| = 1$

Posons $J = F_S^{-1} \circ F_N$.

F_S^{-1} est définie sur $S_n - \{0, 0, \dots, -1\} \Rightarrow J$ est définie sur $E^n - \{0, 0, \dots, 0\}$.

Le domaine des valeurs de F_N est $S_n - \{0, 0, \dots, 1\} \Rightarrow$ celui de J est

$E^n - \{0, \dots, 0\}$. Posons $\Delta = E^n - \{0, 0, \dots, 0\}$. Alors J applique Δ sur Δ .

On calcule aisément J et J^{-1} .

$$J(x^1, \dots, x^n) = \left(\frac{x^1}{|x|^2}, \dots, \frac{x^n}{|x|^2} \right).$$

$$J^{-1}(y^1, \dots, y^n) = \left(\frac{y^1}{|y|^2}, \dots, \frac{y^n}{|y|^2} \right) \text{ donc } J^{-1} = J.$$

Cette transformation J est appelée inversion dans la sphère unité.

D'après le théorème de Liouville chaque transformation conforme d'un domaine

$\Delta \subset E^n$ dans E^n (avec $n > 2$) est la composition de translations, similitudes, et inversions.

§ 3.- Transformations différentiables du plan

A.- Transformations linéaires du plan

Notations

A toute transformation linéaire T du plan on associe la matrice $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

Si on pose $T(x, y) = (u, v)$ on a $u = ax + by$ et $v = cx + dy$.

Si on pose $G = {}^tMM = \begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix}$ on a :

$$e = a^2 + c^2$$

$$f = ab + cd$$

$$g = b^2 + d^2.$$

1.- Théorème

Soit $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ $X, Y \in \mathbb{R}^2$. Les conditions suivantes sont équivalentes.

(a) $\exists \lambda$ telle que $\lambda d(X, Y) = d(T(X), T(Y))$.

(b) $\langle TX, TY \rangle = \lambda^2 \langle X, Y \rangle$.

(c) $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \perp \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$: ou $ab + cd = 0$, et $|\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}| = |\begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}| = \lambda$, ou $a^2 + c^2 = b^2 + d^2 = \lambda^2$

(d) $G = \lambda^2 I$ ou $e = g = \lambda^2$ et $f = 0$.

(e) Dans la représentation $M = O_1 D O_2$ on a $d_j^i = \pm \lambda \delta_j^i$.

Si $\lambda \neq 0$ on a de plus

(f) Tout angle est conservé par T , c'est à dire T est une similitude.

(g) L'image inverse du cercle $|Y| = 1$ est le cercle $|X| = \frac{1}{\lambda}$.

(h) $M = \lambda O_3$ avec O_3 orthogonal

(i) $(a = d, b = -c)$ ou $(a = -d, b = c)$.

Preuve.- Les huit premières conditions ne sont que la transcription du théorème 3§1 dans ce cas particulier et (h) $\iff$ (i) car les transformations orthogonales du plan sont de deux formes :

ou $\det O_3 > 0 \Rightarrow O_3 = \begin{pmatrix} \cos U & \sin U \\ -\sin U & \cos U \end{pmatrix}$ et T est une rotation

ou $\det O_3 < 0 \Rightarrow O_3 = \begin{pmatrix} \cos U & \sin U \\ \sin U & -\cos U \end{pmatrix}$ et T est une symétrie

donc (h) $\Rightarrow$ (i).

Inversement, si $a = d$ et $b = -c$ on a :

$$M = \sqrt{a^2 + b^2} \begin{pmatrix} \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} & \frac{-b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \\ \frac{-b}{\sqrt{a^2 + b^2}} & \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} \cos U & \sin U \\ -\sin U & \cos U \end{pmatrix}$$

calcul analogue si $a = -d$ et $b = c$. Donc (i) $\Rightarrow$ (h).

Remarques.

1.1.- On sait que G est semblable à une matrice diagonale (G étant semi-définie positive, ses valeurs propres sont ≥ 0 donc $G = {}^t O \begin{pmatrix} \lambda_1^2 & 0 \\ 0 & \lambda_2^2 \end{pmatrix} O$ (supposons

$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq 0$)), avec O orthogonale.

On sait que $\lambda_1^2 = \max_{|X|=1} {}^t X G X$ et que $\lambda_2^2 = \min_{|X|=1} {}^t X G X$.

D'autre part, il est clair que

$$\begin{aligned} \text{tr } G &= e + g = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \\ \det G &= eg - f^2 = \lambda_1^2 \lambda_2^2 = (ad - bc)^2 = (\det M)^2. \end{aligned}$$

1.2.- Signification géométrique

Posons $X(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$ et $\varphi(t) = {}^t X(t) G X(t)$.

Alors $\varphi(t) = e \cos^2 t + 2f \cos t \sin t + g \sin^2 t$.

$$\varphi'(t) = 0 \Leftrightarrow \tan 2t = \frac{2f}{e-g},$$

pour $t \in [0, \pi[$ on constate qu'il y a deux valeurs t_0 et t_1 telles que $\tan 2t = \frac{2f}{e-g}$, ces deux valeurs sont d'ailleurs liées par la relation $2t_0 + \pi = 2t_1$,

et on a $\overrightarrow{X(t_0)} \cdot \overrightarrow{X(t_1)} = 0$. Ces deux directions perpendiculaires correspondent aux valeurs de t pour lesquelles $\varphi(t)$ atteint ses extremums.

L'équation $\varphi(t) = {}^tX(t) G X(t) = 1$ représente une ellipse. En choisissant comme nouveaux axes les directions $\overrightarrow{X(t_0)}$ et $\overrightarrow{X(t_1)}$ l'équation de l'ellipse sera de la forme $\lambda_1^2 x^2 + \lambda_2^2 y^2 = 1$. Donc $\frac{1}{\lambda_1}$ et $\frac{1}{\lambda_2}$ représentent la longueur des demi-axes.

L'ellipse ${}^tX G X = 1$ est l'image inverse de $|X| = 1$, elle ne dépend que de G .

Notations complexes

On a $T(x, y) = (u, v)$

posons $z = x + iy$ et $w = u + iv$

on a alors $x = \frac{z + \bar{z}}{2}$ et $y = \frac{z - \bar{z}}{2i}$

si on calcule w en fonction de z et de $\bar{z}$ on trouve que w est de la forme :

$$w = \alpha z + \beta \bar{z} \text{ avec } \alpha = \frac{a + d + i(c-b)}{2} \text{ et } \beta = \frac{a - d + i(c+b)}{2}$$

1.3.- $\beta = 0 \Leftrightarrow a = d$ et $c = -b \Leftrightarrow T$ est une similitude avec $\det M > 0$

$$\Leftrightarrow w = \alpha z \text{ avec } \alpha = a + ic = a - ib.$$

1.4.- $\alpha = 0 \Leftrightarrow a = -d$ et $b = c \Leftrightarrow T$, T est le produit d'une similitude par une symétrie. $\det M < 0 \Leftrightarrow w = \beta \bar{z}$.

Formules.

$$(1.1) \quad |\alpha|^2 = \frac{1}{4} [a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + 2(ad - bc)] = \frac{1}{4} [e + g + 2\sqrt{eg - f^2}] =$$

$$(1.2) \quad |\beta|^2 = \frac{1}{4} [a^2 + b^2 + c^2 + d^2 - 2(ed - bc)] = \frac{1}{4} [e + g - 2\sqrt{eg - f^2}] = \left(\frac{\lambda_1 - \lambda_2}{2}\right)^2$$

$$(1.3) \quad \det M = ad - bc = |\alpha|^2 - |\beta|^2$$

on remarque que $\det M > 0 \Leftrightarrow |\alpha|^2 > |\beta|^2 \Rightarrow \alpha \neq 0$. On supposera désormais que

$\det M > 0$.

2.- Théorème.— Soient $w = \alpha z + \beta \bar{z}$ et $w_1 = \alpha_1 z + \beta_1 \bar{z}$ deux transformations linéaires à déterminant positif. Alors les conditions suivantes sont équivalentes

(a) il existe γ tel que $w_1 = \gamma w$

(b) $\frac{\beta}{\alpha} = \frac{\beta_1}{\alpha_1}$.

Preuve.— Supposons la propriété (a) vérifiée, alors

$(\alpha \gamma)z + (\beta \gamma)\bar{z} = \alpha_1 z + \beta_1 \bar{z}$ pour tout z et $\bar{z} \Rightarrow \alpha \gamma = \alpha_1$ et $\beta \gamma = \beta_1$.

Inversement, si $\frac{\beta_1}{\alpha_1} = \frac{\beta}{\alpha}$ comme

$$\frac{w_1}{w} = \frac{\alpha_1}{\alpha} \frac{(z + \frac{\beta_1}{\alpha_1} \bar{z})}{(z + \frac{\beta}{\alpha} \bar{z})}$$

on a $\frac{w_1}{w} = \frac{\alpha_1}{\alpha} \Rightarrow w_1 = \gamma w$. c.q.f.d.

Posons $\mu = \frac{\beta}{\alpha}$ alors le théorème précédent se lit : si w et w_1 sont deux transformations linéaires à déterminant positif, c'est à dire telles que $|\mu|$ et $|\mu_1|$ soient inférieurs à 1, alors $\mu = \mu_1 \Leftrightarrow w_1 = \gamma w$.

Notations

Posons $Q = \frac{\lambda_1}{\lambda_2}$ alors $Q > 1$ et l'on a :

$$(2.1) \quad |\mu| = \frac{|\beta|}{|\alpha|} = \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2} = \frac{\frac{\lambda_1}{\lambda_2} - 1}{\frac{\lambda_1}{\lambda_2} + 1} = \frac{Q - 1}{Q + 1}$$

On a encore :

$$(2.2) \quad \mu = \frac{e - g + 2if}{e + g + 2\sqrt{eg - f^2}} = |\mu| e^{i\varphi} \text{ avec } \operatorname{tg} \varphi = \frac{2f}{e - g}, \varphi = 2t.$$

La connaissance de μ équivaut donc à la connaissance du rapport des deux axes de l'ellipse définie dans 1.2 et de l'angle des axes de l'ellipse avec les axes de coordonnées.

3.- Théorème fondamental.— Soit $ex^2 + 2fxy + gy^2$ une forme quadratique définie positive. Posons $z = x + iy$, $\bar{z} = x - iy$, alors toutes les transformations linéaires $w = \alpha z + \beta \bar{z}$ à déterminant positif telle que $|w|^2 = \rho(ex^2 + 2fxy + gy^2)$ sont obte-

nues en choisissant arbitrairement $\alpha \neq 0$ et $\beta = \mu \alpha$ avec

$$\mu = \frac{e - g + 2if}{e + g + 2\sqrt{eg - f^2}}.$$

Preuve.— Soient α et β ainsi choisis. Calculons $|w|^2$. On trouve :

$$|w|^2 = \frac{4|\alpha|^2}{e + g + 2\sqrt{eg - f^2}} (ex^2 + 2fxy + gy^2).$$

Inversement, soient w_1 et w_2 deux transformations linéaires à déterminant positif de la forme $|w_i|^2 = \rho_i(ex^2 + 2fxy + gy^2)$. Alors, pour tout z , on aura

$$\left| \frac{w_1}{w_2} \right| = \sqrt{\frac{\rho_1}{\rho_2}} = \text{constante}.$$

La transformation $w_2 \rightarrow w_1$ multiplie les distances par une constante, il s'ensuit que $w_1 = \gamma w_2$ donc $\mu_1 = \mu_2 = \mu$ et $\beta_i = \mu \alpha_i$, $i = 1, 2$ c.q.f.d.

3.1.— Corollaire.— Soit alors une forme quadratique définie positive $ex^2 + 2fxy + gy^2$. Choisissons α tel que $|\alpha|^2 = \frac{e + g + 2\sqrt{eg - f^2}}{4}$ et posons $\beta = \mu \alpha$ avec

$$\mu = \frac{e - g + 2if}{e + g + 2\sqrt{eg - f^2}}$$

alors, la transformation linéaire à $\det > 0$ $w = \alpha z + \beta \bar{z}$ sera telle que :

$$|w|^2 = ex^2 + 2fxy + gy^2.$$

Dans ce cas particulier les expressions définies dans 1 et 2 donnent

$$\lambda_1^2 = \max_{x^2 + y^2 \neq 0} \frac{ex^2 + 2fxy + gy^2}{x^2 + y^2}$$

et

$$\lambda_2^2 = \min_{x^2 + y^2 \neq 0} \frac{ex^2 + 2fxy + gy^2}{x^2 + y^2}$$

ou encore

$$\lambda_1 = \max_{z \neq 0} \left| \frac{w}{z} \right| \quad \text{et} \quad \lambda_2 = \min_{z \neq 0} \left| \frac{w}{z} \right|$$

$$|\alpha| = \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2} \quad |\beta| = \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{2}$$

$$Q = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{|\alpha| + |\beta|}{|\alpha| - |\beta|} = \frac{1 + |\mu|}{1 - |\mu|} > 1.$$

Si on pose

$$P = \frac{\lambda_1^2 + \lambda_2^2}{2\lambda_1\lambda_2} \quad \text{alors} \quad P = \frac{|\alpha|^2 + |\beta|^2}{|\alpha|^2 - |\beta|^2} = \frac{1}{2}\left(Q + \frac{1}{Q}\right) > 1$$

et

$$|\mu|^2 = \frac{P - 1}{P + 1}$$

$$\lambda_1^2 = \frac{\lambda_1}{\lambda_2}(\lambda_1\lambda_2) = Q \det M. \quad \text{et} \quad \lambda_2^2 = \frac{\lambda_1}{\lambda_2}(\lambda_1\lambda_2) = \frac{1}{Q} \det M.$$

Interprétation géométrique de la quantité Q.

Soit la transformation linéaire $w = \alpha z + \beta \bar{z}$ à $\det > 0$.

Soit $A(z)$ l'aire d'un domaine dans le plan des z et $A(w)$ l'aire de son image par w .

Il est clair que $\frac{A(w)}{A(z)} = \det M$, on a donc

$$Q = \lambda_1^2 \frac{A(w)}{A(z)} = \max_{z \neq 0} \left| \frac{w}{z} \right|^2 \frac{A(w)}{A(z)}$$

et

$$\frac{1}{Q} = \min_{z \neq 0} \left| \frac{w}{z} \right|^2 \frac{A(w)}{A(z)}.$$

3.2.- Remarque.

$$\forall e, f, g \text{ on a } \sqrt{eg - f^2} \leq \sqrt{eg} \leq \frac{e + g}{2}.$$

Donc $\sqrt{eg - f^2} \leq \frac{e + g}{2}$ et l'égalité a lieu si et seulement si :

$$e = g \text{ et } f = 0 \iff P = 1 \iff Q = 1 \iff \mu = 0 \iff \lambda_1 = \lambda_2.$$

3.4.- Calcul de l'inverse de la transformation $w = \alpha z + \beta \bar{z}$.

On a $w = \alpha z + \beta \bar{z}$ donc $\bar{w} = \bar{\alpha} \bar{z} + \bar{\beta} z$ d'où l'on tire

$$z = \frac{\bar{\alpha}}{\alpha\bar{\alpha} - \beta\bar{\beta}} w - \frac{\beta}{\alpha\bar{\alpha} - \beta\bar{\beta}} \bar{w}$$

z est donc de la forme $z = \alpha^* w + \beta^* \bar{w}$. Calculons μ^* :

$$\mu^* = \frac{\beta^*}{\alpha^*} = -\frac{\beta}{\alpha} \quad \text{donc} \quad |\mu^*| = |\mu|.$$

B.- Transformations différentiables du plan

Introduction.— On considère les applications F d'un domaine Δ du plan dans le plan, de classe C^1

$$F : \Delta \longrightarrow \mathbb{R}^2 \quad F \in C^1(\Delta).$$

Posons $F(x, y) = (u, v)$. A la différentielle $dF \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$, on associe sa matrice $M = \begin{pmatrix} u'_x & u'_y \\ v'_x & v'_y \end{pmatrix}$; on note $\det M = \frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)}$.

1.- Etude de dF au voisinage d'un point (x_0, y_0)

On suppose $dF(x_0, y_0) \neq 0$.

1er cas.— $\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)}(x_0, y_0) = 0$, c'est à dire que dF est singulière au point (x_0, y_0) , alors l'image par $dF(x_0, y_0)$ des vecteurs tangents en (x_0, y_0) est de dimension 1. Tous les vecteurs tangents en (x_0, y_0) sont donc envoyés sur une même tangente en $F(x_0, y_0)$.

2me cas.— $\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)}(x_0, y_0) \neq 0$, donc $dF(x_0, y_0)$ est bijective, de plus,

il existe un voisinage de (x_0, y_0) dans lequel F est un difféomorphisme. On s'intéressera désormais à ce 2me cas.

Remarque.— Pour que F conserve les angles, il faut et il suffit que :

$$\left. \begin{array}{l} u_x = v_y \\ u_y = -v_x \end{array} \right\} \text{conditions de Cauchy-Riemann,}$$

ou que $u_x = -v_y$ et $u_y = v_x$. (A.1.(f), (i)).

Etude sous forme complexe de la transformation

On a $F \in C^1(\Delta)$. $F(x, y) = (u, v)$. Posons $z = x + iy$ et $w = u + iv$.

Soit $z(t)$ une courbe dans Δ , et $w(t)$ la transformée. Nous avons vu qu'un vecteur tangent en $(x_0, y_0) = M_0$ s'écrit $z'(t_0) = x'(t_0) + iy'(t_0)$ et que $w'(t_0) = u'(t_0) + iv'(t_0)$ on a $dF(M_0) : z'(t_0) \rightarrow w'(t_0)$. On a vu que $w'(t_0)$ pouvait s'écrire sous la forme : $w'(t_0) = \alpha_0 z'(t_0) + \beta_0 \overline{z'(t_0)}$ où α_0 et β_0 dépendent des coefficients de la matrice

$$\begin{pmatrix} u'_x & u'_y \\ v'_x & v'_y \end{pmatrix} \text{ au point } M_0.$$

Considérons l'expression $\frac{w(z) - w(z_0)}{z - z_0}$ et faisons tendre z vers z_0 . Si

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{w(z) - w(z_0)}{z - z_0} \text{ existe, posons}$$

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{w(z) - w(z_0)}{z - z_0} = w'(z_0).$$

Soit une courbe $z(t)$ dans Δ , telle que $z(t_0) = z_0$. Supposons que

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \frac{w(t) - w(t_0)}{z(t) - z(t_0)} \text{ existe, elle est alors égale à :}$$

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \frac{w(t) - w(t_0)}{t - t_0} / \frac{z(t) - z(t_0)}{t - t_0} = \frac{w'(t_0)}{z'(t_0)} = \alpha_0 + \beta_0 \frac{\overline{z'(t_0)}}{z'(t_0)}.$$

Il est clair que $\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{w - w_0}{z - z_0}$ existe entraîne $\beta_0 = 0$, et qu'on a alors

$$w'(z_0) = \alpha_0.$$

Inversement, puisque la différentielle dF satisfait toujours à :

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \left| \frac{w(z) - w(z_0) - dF(z)}{z - z_0} \right| = 0$$

et puisque $dF(z) = \alpha(z - z_0) + \beta(\overline{z - z_0})$, on voit que

$$\beta = 0 \Rightarrow \lim_{z \rightarrow z_0} \left| \frac{w(z) - w(z_0)}{z - z_0} - \alpha \right| = 0 \Rightarrow w'(z_0) \text{ existe.}$$

Notations.— On appelle dérivée formelle par rapport à z et on note w_z la quantité $w_z = \alpha = \frac{1}{2}(w_x - iw_y)$. De même on note $w_{\bar{z}} = \beta = \frac{1}{2}(w_x + iw_y)$. Il en résulte les formules suivantes

$$(B\ 1) \quad \frac{dw}{dz} = w_z \frac{dz}{dz} + w_{\bar{z}} \frac{d\bar{z}}{dz}.$$

$w'(z)$ existe $\Leftrightarrow w_{\bar{z}} = 0$ et alors $w_z = w'(z)$.

La fonction $w(z)$ est analytique (complexe) si $w'(z)$ existe partout dans le domaine de définition de $w(z)$. Donc $w(z)$ est analytique si et seulement si $w_{\bar{z}} = 0$.

Définition.— Un opérateur D sur une classe de fonctions est appelé dérivation si il est linéaire et vérifie $D(fg) = (Df)g + f(Dg)$.

Conséquences.— Une dérivation D vérifie

$$D(1) = 0 ; \quad D(\alpha) = 0 , \quad D\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{g Df - f Dg}{g^2} .$$

Remarque.— Les opérateurs $\frac{\partial}{\partial z}$ et $\frac{\partial}{\partial \bar{z}}$ sont des dérivations.

2.— Propriétés des expressions w_z et $w_{\bar{z}}$.

On a les relations

$$(2.1) \quad |w_z|^2 - |w_{\bar{z}}|^2 = \det M$$

$$(2.2) \quad |w_z|^2 + |w_{\bar{z}}|^2 = \frac{u_x'^2 + u_y'^2 + v_x'^2 + v_y'^2}{2}$$

$$(2.3) \quad \overline{w_{\bar{z}}} = (\bar{w})_z .$$

Soit $\zeta \rightarrow z(\zeta)$ alors on a :

$$w_{\zeta} = w_z z_{\zeta} + w_{\bar{z}} \bar{z}_{\zeta} , \quad w_{\bar{\zeta}} = w_z z_{\bar{\zeta}} + w_{\bar{z}} \bar{z}_{\bar{\zeta}}$$

$$(2.4) \quad (w_z)_{\bar{z}} = (w_{\bar{z}})_z = \frac{1}{4}(w''_{xx} + w''_{yy}) = \frac{1}{4} \Delta w .$$

2.1.— Lemme.— w harmonique $\Leftrightarrow w_z$ analytique.

Preuve.— $\Delta w = 0 \Rightarrow (w_z)_{\bar{z}} = 0$.

2.2.— Lemme.—

$$(2.5) \quad z(\zeta) \text{ analytique} \Rightarrow \Delta_{\zeta} w = \Delta_z w |z'(\zeta)|^2$$

on note par $\Delta_{\zeta} w = 4 w_{\zeta \bar{\zeta}}$.

Preuve.— $Z(\zeta)$ analytique $\Leftrightarrow Z_{\bar{\zeta}} = 0$ or $\bar{Z}_{\zeta} = \overline{Z_{\bar{\zeta}}}$ donc $Z(\zeta)$ analytique $\Leftrightarrow \bar{Z}_{\zeta} = 0$ on a :

$$W_{\zeta} = W_Z Z_{\zeta} + W_{\bar{Z}} \bar{Z}_{\zeta} = W_Z Z_{\zeta} \quad \text{et} \quad W_{\zeta \bar{\zeta}} = W_Z Z_{\zeta \bar{\zeta}} + (W_{ZZ} Z_{\zeta} + W_{Z\bar{Z}} \bar{Z}_{\zeta}) Z_{\bar{\zeta}}.$$

Mais $Z_{\zeta \bar{\zeta}} = 0$ car $Z_{\zeta \bar{\zeta}} = (Z_{\bar{\zeta}})_{\zeta} = 0$ et $Z_{\bar{\zeta}} = 0$ donc

$$W_{\zeta \bar{\zeta}} = W_{Z\bar{Z}} \bar{Z}_{\zeta} Z_{\bar{\zeta}} \quad \text{mais} \quad \bar{Z}_{\zeta} = \overline{(Z_{\bar{\zeta}})} \quad \text{donc}$$

$$W_{\zeta \bar{\zeta}} = W_{Z\bar{Z}} |Z_{\zeta}|^2 \quad \text{ce qui s'écrit encore} \quad \frac{1}{4} \Delta_{\zeta} W = \frac{1}{4} \Delta_Z W |Z_{\zeta}|^2 \quad \text{ce qui est (2.5)}.$$

Si on suppose $\det M > 0$ on a $|W_Z|^2 > |W_{\bar{Z}}|^2 \geq 0 \Rightarrow W_Z \neq 0$.

On peut alors poser $\mu = \frac{W_{\bar{Z}}}{W_Z} = \frac{\beta}{\alpha} \mu$, de même que les grandeurs $P, Q, \lambda_1, \lambda_2$ définies précédemment est une fonction de Z .

2.3.— Lemme.— Soient $W(Z)$ et $W^*(Z) \in C^1(\Delta)$ à jacobien > 0 . Alors dans un voisinage de chaque point $Z_0 \in \Delta$ on aura $w^*(w)$ analytique si et seulement si $\mu^* \equiv \mu$.

Preuve.— $\mu^* \equiv \mu \Leftrightarrow w^{*'}(t) = \gamma w'(t)$

$$\frac{dw^*}{dt} = w^* \frac{dw}{dt} + \frac{w^*}{w} \frac{d\bar{w}}{dt} = \gamma \frac{dw}{dt} \Leftrightarrow \frac{w^*}{w} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{w^*}{w} = \gamma.$$

Et $\frac{w^*}{w} = 0 \Leftrightarrow w^*(w)$ analytique.

Problème.— Soit $\mu(z) \in C^0(\Delta)$, telle que $|\mu(z)| < 1$.

Existe-t-il une fonction $w(z) \in C^1$ au voisinage de chaque point Z_0 de Δ satisfaisant à $\frac{w}{\bar{z}} = \mu w_z$ (équation de Beltrami)?

Définition.— Soit $\alpha > 0$ on dit que $\mu(z)$ satisfait à une condition de Hölder d'exposant α dans un domaine $\Delta \Leftrightarrow \exists K > 0$ tel que :

$$\forall z_1, z_2 \in \Delta \quad |\mu(z_1) - \mu(z_2)| \leq K |z_1 - z_2|^{\alpha}.$$

3.— Théorème.— Si $\mu(z)$ satisfait à la condition de Hölder d'exposant α au voisinage de $z = 0$, si $|\mu(z)| < 1$, l'équation $\frac{w}{\bar{z}} = \mu w_z$ (3.1) a une solution

$w(z)$ au voisinage de 0 telle que

$$- w_z(0) \neq 0$$

- les dérivées de $w(z)$ satisfont la condition de Hölder d'exposant α .

Référence : Courant-Hilbert M.M.P. II, pp. 350-352 (1962), ed. anglaise.

Remarque.- Si $w(z)$ est solution de (3.1), si $f(z)$ est une fonction analytique, et si $f[w(z)]$ est définie, c'est une solution de (3.1).

3.1.- Corollaire.- Soient $e, f, g \in C^1(\Delta)$, tel que $M = \begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix}$ soit partout définie positive.

Alors, au voisinage de tout point $z_0 \in \Delta$, $\exists w(z) \in C^1(\Delta)$ tel que :

$$\left| \frac{dw}{dt} \right|^2 = \rho \left[e \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + 2f \frac{dx}{dt} \frac{dy}{dt} + g \left(\frac{dy}{dt} \right)^2 \right] \quad \text{où } \rho = \rho(z).$$

Preuve.-

$$\text{Soit } \mu(z) = \frac{e(z) - g(z) + 2if(z)}{e(z) + g(z) + 2\sqrt{e(z)g(z) - f(z)^2}}$$

alors $\mu \in C^1(\Delta)$ (car $e + g + 2\sqrt{eg - f^2} \gg 4\sqrt{eg - f^2} > 0 \Rightarrow \mu$

satisfait la condition de Hölder, avec $\alpha = 1$ au voisinage de tout point $z_0 \in \Delta$),

et $|\mu(z)| < 1$ car $\det M > 0$ on applique alors le théorème 3. $\exists w(z)$ au voisinage de $z_0 \in \Delta$ telle que $w_z = \mu \bar{w}_z$. Donc

$$w'(t) = z'(t) + \beta \bar{z}'(t)$$

et le résultat suit du théorème fondamental (§ 1.3).

C.- Transformations quasi-conformes.

1.- Définitions.

1.1.- Soient des fonctions $w(z) \in C^1(\Delta)$ vérifiant :

- $z \rightarrow w(z)$ est biunivoque

- $\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} > 0$ ($w(z)$ s'écrivant $w(z) = u(x, y) + iv(x, y)$) on dit

que ces fonctions sont quasi-conformes si en outre elles vérifient : $\exists k < 1$ telle que

$$|\mu| = \left| \frac{w_z}{z} \right| \leq k \text{ dans } \Delta.$$

Il est équivalent de dire que ces fonctions vérifient P ou Q uniformément bornés sur Δ .

1.2.- Si Q , qui est égal à $\frac{1+|\mu|}{1-|\mu|}$, est majoré par K , (ce qui signifie que $|\mu|$ "n'approche pas" 1) on dit que $w(z)$ est K -quasi-conforme.

2.- Propriétés des transformations quasi-conformes.

2.1.- Une transformation 1-quasi-conforme est conforme.

Preuve.- On a $Q \leq 1$, or on sait que $Q \geq 1$ donc $Q = 1$ mais $|\mu| = \frac{Q-1}{Q+1}$ donc $|\mu| = 0 \Leftrightarrow \left| \frac{w_z}{z} \right| = 0$.

2.2.- Si une transformation $w(z)$ est K -quasi-conforme l'inverse $z(w)$ est aussi K -quasi-conforme.

Preuve.- Soit μ relatif à $w(z)$ et μ^* relatif à $z(w)$ on sait que $|\mu| = |\mu^*|$ (§ 3A 3.4).

2.3.- Si $w(z)$ est K_1 -quasi-conforme et $z(\zeta)$ K_2 -quasi-conforme la fonction $w(\zeta)$, partout où elle est définie, est K -quasi-conforme avec $K \leq K_1 K_2$.

Preuve.- Soient Q_1 et Q_2 relatifs respectivement à $w(z)$ et $z(\zeta)$ et Q relatif à $w(\zeta)$, on a

$$\max_{\zeta'(t) \neq 0} \left| \frac{w'(t)}{\zeta'(t)} \right|^2 \leq \max_{z'(t) \neq 0} \left| \frac{w'(t)}{z'(t)} \right|^2 \times \max_{\zeta'(t) \neq 0} \left| \frac{z'(t)}{\zeta'(t)} \right|^2$$

donc $Q \leq Q_1 Q_2 \leq K_1 K_2$.

2.4.- Si $w(z)$ est K -quasi-conforme, on a :

$$\left| \frac{w'(t)}{z'(t)} \right|^2 \leq K \frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)}.$$

Preuve :

$$Q \leq K, \text{ or } Q = \max_{z'(t) \neq 0} \left| \frac{w'(t)}{z'(t)} \right|^2 / \frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)}$$

3.- Théorème de Teichmüller. - Il n'existe pas de transformations quasi-conformes du plan dans le cercle unité.

Preuve. - Supposons que $w(z)$ soit une transformation K -quasi-conforme du plan z sur le disque $|w| < 1$. Soit r, ϑ et ρ, φ des coordonnées polaires dans les plans z et w . Soit Γ_r l'image du cercle $|z| = r$, et soit $L(r)$ sa longueur. On peut supposer que $w(0) = 0$. Alors Γ_r ne passe pas par l'origine, et l'on a

$$L(r) = \int_0^{2\pi} \left| \frac{dw}{d\vartheta} \right| d\vartheta = \int_0^{2\pi} \sqrt{\left(\frac{d\rho}{d\vartheta} \right)^2 + \rho^2 \left(\frac{d\varphi}{d\vartheta} \right)^2} d\vartheta.$$

L'image du domaine $|z| < 1$ étant un ouvert contenant l'origine $w = 0$, il existe $\eta > 0$ tel que $|z| \geq 1 \Rightarrow |w(z)| \geq \eta$. Du fait que le cercle $|z| = r$ sépare l'origine de l'infini, il s'ensuit que la courbe Γ_r sépare l'origine $w = 0$ de la frontière $|w| = 1$. Donc chaque rayon $\arg w = \varphi_0$ rencontre Γ_r . Alors, pour $r \geq 1$ on a

$$L(r) \geq \int_0^{2\pi} \rho \left| \frac{d\varphi}{d\vartheta} \right| d\vartheta \geq \eta \int_0^{2\pi} \left| \frac{d\varphi}{d\vartheta} \right| d\vartheta \geq 2\pi\eta$$

de l'autre côté, nous avons

$$\begin{aligned} (L(r))^2 &= \left(\int_0^{2\pi} \left| \frac{dw}{d\vartheta} \right| d\vartheta \right)^2 = \left(\int_0^{2\pi} \frac{\left| \frac{dw}{d\vartheta} \right|}{\left| \frac{dz}{d\vartheta} \right|} r d\vartheta \right)^2 \leq r^2 \int_0^{2\pi} d\vartheta \int_0^{2\pi} \left(\frac{\left| \frac{dw}{d\vartheta} \right|}{\left| \frac{dz}{d\vartheta} \right|} \right)^2 d\vartheta \\ &\leq 2\pi r^2 K \int_0^{2\pi} \frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} d\vartheta \end{aligned}$$

en employant la propriété (C 2.4).

Donc

$$\frac{2\pi\eta^2}{r} \leq K \int_0^{2\pi} \frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} r d\vartheta$$

pour tout $r \geq 1$

$$\int_1^{r_0} \frac{2\pi\eta^2}{r} dr \leq K \int_1^{r_0} \int_0^{2\pi} \frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} r dr d\vartheta = K A(r_0)$$

où $A(r_0)$ = l'aire de l'image de l'anneau $1 \leq |z| \leq r_0$. Mais $A(r_0) \leq \pi$, donc

$$2\eta^2 \log r_0 \leq K$$

ce qui contredit l'hypothèse que $w(z)$ était définie dans tout le plan z .

Chapitre II

§ 1.- Généralités sur la théorie des surfaces

1.- Définitions relatives aux surfaces

1.1. Une surface est un espace topologique séparé tel que chaque point possède un voisinage homéomorphe à un domaine du plan

1.2. Une carte d'une surface S est un homéomorphisme φ_α d'un domaine R_α du plan sur un domaine O_α de S .

1.3. Un atlas de S est un ensemble de cartes φ_α telles que $S \subset \bigcup \alpha$.

1.4. Une carte normalisée à p_0 est telle que $\varphi(0) = p_0$

R_α contient le domaine $|z| \leq R$ où $R > 1$

1.5. Un atlas C^m est un atlas tel que $\varphi_\beta^{-1} \circ \varphi_\alpha \in C^m$ là où $\varphi_\beta^{-1} \circ \varphi_\alpha$ est défini

$m \in \mathbb{N} \quad m = \infty \quad m = \omega \quad \text{analytique réel}$
 $m = A \quad \text{analytique complexe.}$

1.6. Une surface de Riemann est une surface munie d'un atlas C^A

1.7. Une surface est orientable si elle possède un atlas tel que $\varphi_\beta^{-1} \circ \varphi_\alpha$ conserve toujours l'orientation du plan. Dans ce cas l'atlas est dit orienté. "Choisir une orientation" signifie choisir un atlas orienté.

1.8. Exemple de surface de Riemann.

S sphère unité dans R^3

Les projections stéréographiques de pôles nord et sud forment 2 cartes

$$w = \frac{1}{z} \quad \text{Posons} \quad \zeta = \bar{w}$$

$$\zeta = \frac{1}{z} \in C^A.$$

1.9. Lemme.- Toute surface de Riemann est orientable. En effet, toute application analytique complexe $f(z) = u + iv$ est à jacobien $J = u_x^2 + u_y^2 > 0$, donc conserve l'orientation du plan.

2.- Variétés riemanniennes

2.1.- Définitions.- Une variété riemannienne à deux dimensions est une surface C^m , $m > 1$, munie d'un ensemble de matrices M_α

- symétriques
- définies positives
- dont les éléments sont des fonctions C^m dans R_α
- satisfaisant $M_\alpha = J^t M_\beta J$ dans $R_\alpha \cap R_\beta$ où J est matrice jacobienne de $\varphi_\beta^{-1} \circ \varphi_\alpha$

2.2.- Lemme.- Toute variété riemannienne à 2 dimensions, orientable, possède une structure naturelle de surface de Riemann.

Démonstration.- Soit $\{\varphi_\alpha\}$ un atlas orienté. Soit φ_α une carte en p_0 de S , homéomorphisme de R_α sur O_α

$$z_0 = \varphi_\alpha^{-1}(p_0).$$

Si x_α et y_α sont coordonnées dans R_α

$$z_\alpha = x_\alpha + iy_\alpha$$

$$M_\alpha = \begin{pmatrix} e_\alpha & f_\alpha \\ f_\alpha & g_\alpha \end{pmatrix}.$$

Il existe un difféomorphisme F_α d'un voisinage de z_0 sur un domaine $\hat{R}_\alpha$ du plan complexe tel que pour toute courbe $z(t)$ de classe C^1 dans $F_\alpha^{-1}[\hat{R}_\alpha]$ on ait

$$|w'_\alpha(t)|^2 = \rho_\alpha(x_\alpha, y_\alpha) [e_\alpha x'^2_\alpha + 2f_\alpha x'_\alpha y'_\alpha + g_\alpha y'^2_\alpha]$$

$$w_\alpha = F_\alpha(z)$$

$$w_{\alpha_{z_\alpha}} = \mu(z_\alpha) w_{\alpha_{z_\alpha}} \text{ avec } |\mu(z_\alpha)| < 1$$

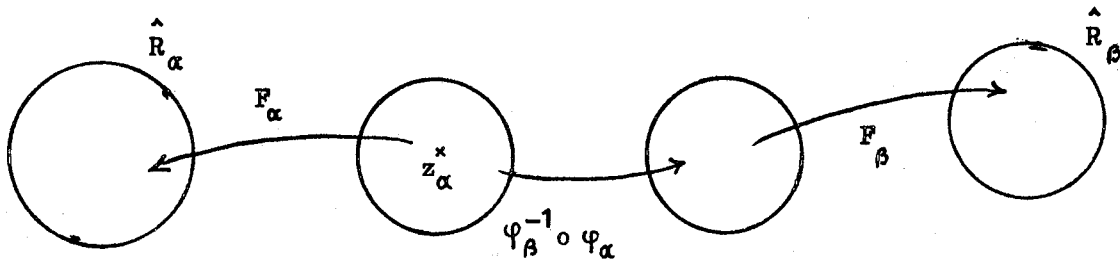
F_α est à jacobien > 0 (I. B. 3.1).

Posons $\hat{\varphi}_\alpha = \varphi_\alpha \circ F_\alpha^{-1}$ $\hat{O}_\alpha = \hat{F}_\alpha(\hat{R}_\alpha)$. Montrons que les $\hat{\varphi}_\alpha$ constituent un atlas C^A pour S .

Soit $\hat{\varphi}_\beta$ une autre carte $\hat{\varphi}_\beta = \varphi_\beta \circ F_\beta^{-1}$ homéomorphisme de $\hat{R}_\beta$ sur $\hat{O}_\beta$.

Le changement de carte est $\hat{\varphi}_\beta^{-1} \circ \hat{\varphi}_\alpha = F_\beta \circ \varphi_\beta^{-1} \circ \varphi_\alpha \circ F_\alpha^{-1}$. Posons $g_{\alpha\beta} = \varphi_\beta^{-1} \circ \varphi_\alpha$.

$g_{\alpha\beta}$ est un homéomorphisme de U_α sur U_β de matrice jacobienne J à déterminant > 0



$$U_\alpha = [F_\alpha^{-1} \hat{R}_\alpha] \cap g_{\alpha\beta} [F_\beta^{-1} (\hat{R}_\beta)].$$

Soit $z_\alpha(t)$ une courbe de classe C^1 dans U_α .

$z_\beta(t)$ l'image de $z_\alpha(t)$ par $g_{\alpha\beta}$

$$\begin{aligned} |w'_\beta(t)|^2 &= \rho_\beta(x_\beta, y_\beta) [e_\beta x_\beta'^2 + 2f_\beta x_\beta' y_\beta' + g_\beta y_\beta'^2] \\ &= \rho_\beta \begin{bmatrix} x_\beta' & y_\beta' \end{bmatrix} M_\beta \begin{bmatrix} x_\beta' \\ y_\beta' \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\text{Mais } M_\alpha = J^t M_\beta J, \begin{bmatrix} x_\beta' \\ y_\beta' \end{bmatrix} = J \begin{bmatrix} x_\alpha' \\ y_\alpha' \end{bmatrix};$$

$$\begin{aligned} |w'_\beta(t)|^2 &= \rho_\beta [x_\alpha' \ y_\alpha'] M \begin{bmatrix} x_\alpha' \\ y_\alpha' \end{bmatrix} \\ &= \frac{\rho_\beta}{\rho_\alpha} |w'_\alpha(t)|^2. \end{aligned}$$

$$\frac{|w'_\beta(t)|^2}{|w'_\alpha(t)|^2} = \frac{\rho_\beta}{\rho_\alpha}. \text{ Il en résulte que } \begin{aligned} w_\alpha &= F_\alpha(z_\alpha) \\ w_\beta &= F_\beta \circ g_{\alpha\beta}(z_\alpha) \end{aligned}$$

sont différentiables à jacobien > 0 et définissent sur le point z_0 une fonction

$w_\beta(w_\alpha)$ qui est analytique:

$$\begin{aligned} w_\beta(w_\alpha) &= F_\beta \circ g_{\alpha\beta} \circ F_\alpha^{-1} \\ &= \hat{\varphi}_\beta^{-1} \circ \hat{\varphi}_\alpha. \end{aligned}$$

N.B.- a) Si les angles sont invariants par $\varphi_\beta^{-1} \circ \varphi_\alpha$ on a une structure conforme.

Se donner un atlas C^A équivaut à se donner une structure conforme orientée.

b) On peut définir la notion d'angle sur une surface de Riemann sur une variété riemannienne. Le fait que $|w'_\alpha(t)|^2 \frac{1}{\rho_\alpha}$ soit invariant par changement de carte va permettre de définir une distance sur la variété.

3.- Courbes, chemins sur une surface.

3.1.- Une courbe sur une surface S est une application continue d'un intervalle de $\mathbb{R}$ dans S .

3.2.- Une courbe différentiable sur une surface C^m , $m \geq 1$ est une courbe $p(t)$ telle que

$$\varphi_\alpha^{-1}[p(t)] \in C^1 \quad (\text{là où elle est définie}).$$

N.B.- C'est indépendant de la carte.

3.3.- Longueur $L[p(t)]$ d'une courbe différentiable $p(t)$, $t \in [a, b]$.

$$L[p(t)] = \int_a^b h(t) dt$$

où $\forall t_0 \in [a, b]$ on choisit une carte φ_α en t_0 telle que $p(t) \in O_\alpha$

$$h(t) = [e_\alpha x_\alpha^i(t) + 2f_\alpha x_\alpha^i y_\alpha^i + g_\alpha y_\alpha^{i2}]^{\frac{1}{2}}$$

$h(t)$ est bien indépendant de la carte choisie ; dans une variété riemannienne on dit que les M_α définissent une métrique riemannienne.

3.4.- Un chemin sur une surface S est une application continue de $[0, 1[$ dans S .

3.5.- Un chemin sur S tend vers la frontière si pour toute partie compacte $K \subset$

$$\exists t_0 \in [0, 1[: t > t_0 \implies p(t) \notin K.$$

N.B.- Une surface compacte n'a pas de frontière.

3.6.- Une courbe $p(t)$ sur une surface C^m est dite différentiable par morceaux si il existe une décomposition de $[a, b] = \bigcup_1^p [a_n, b_n]$ où

$$\begin{aligned} a_1 &= a \\ a_n &= b_{n-1} \\ b_p &= b. \end{aligned}$$

Telle que $p(t)|_{[a_n, b_n]}$ soit une courbe différentiable $p_n(t)$.

3.7.- La longueur d'une courbe différentiable par morceaux $= \sum L[p_n(t)]$ (sur une variété riemannienne).

4.- Définition d'une distance sur une variété riemannienne connexe.

Soient p_1 et p_2 deux points d'une variété riemannienne. Posons

$d(p_1, p_2) = \inf_{p(t) \in \mathcal{L}} L[p(t)]$. $\mathcal{L}$ ensemble des courbes différentiables par morceaux joignant p_1 à p_2 .

4.1.- Lemme.— $d(p_1, p_2)$ définit sur S une structure d'espace métrique.

Démontrons que $d(p_1, p_2)$ définit une distance

- $d(p_1, p_2) = 0 \iff p_1 = p_2$
- $d(p_1, p_2) = d(p_2, p_1)$
- $d(p_1, p_3) \leq d(p_1, p_2) + d(p_2, p_3)$.

Soient L_{ij} les longueurs des courbes joignant p_i à p_j

$$\inf L_{13} \leq \inf L_{12} + \inf L_{23}$$

- $d(p_1, p_2) > 0$ pour $p_1 \neq p_2$.

En effet, $h(t)^2 = ex'^2 + 2f x'y' + gy'^2$

$$= \lambda_1^2 X'^2 + \lambda_2 Y'^2$$

$$\geq \lambda_2 (X'^2 + Y'^2)$$

où λ_2 = la plus petite valeur propre de M .

$$\geq \lambda_2^2 (z'_t)^2$$

$$h(t) \geq \lambda_2 |z'_t| \quad \text{donc} \quad \inf L[p(t)] > 0.$$

Chaque variété riemannienne de dimension 2 est donc munie d'une métrique naturelle donc d'une topologie naturelle $\mathcal{C}_m$ induite par cette métrique.

4.2.- Lemme.- La topologie $\mathcal{C}_m$ est identique à la topologie originale $\mathcal{C}_0$.

Preuve.- Nous avons vu que

$$h(t) = [\lambda_1^2 x'^2 + \lambda_2^2 y'^2]^{\frac{1}{2}}.$$

Supposons que $\lambda_1 > \lambda_2 > 0$

$$\lambda_2 [x'^2 + y'^2]^{\frac{1}{2}} \leq h(t) \leq \lambda_1 [x'^2 + y'^2]^{\frac{1}{2}}$$

$$\lambda_2 |z'_t| \leq h(t) \leq \lambda_1 |z'_t|$$

donc

$$\int_a^b \lambda_2 |z'_t| dt \leq \int_a^b h(t) dt \leq \int_a^b \lambda_1 |z'_t| dt$$

$$\inf \int_a^b \lambda_2 |z'_t| dt \leq \inf \int_a^b h(t) dt \leq \inf \int_a^b \lambda_1 |z'_t| dt.$$

Soit $p_0 \in S$, $p \in S$. $\varphi_\alpha(z)$ une carte à p_0 normalisée : $\varphi_\alpha : R_\alpha \rightarrow O_\alpha$

$p \rightarrow p_0$ pour $\mathcal{C}_0 \iff z \rightarrow 0$ puisque φ_α est un homéomorphisme.

Or

$$\begin{aligned} d(p_1, p_0) &\leq \inf \int_a^b \lambda_1 |z'_t| dt \\ &\leq \left(\sup_{\text{dans } O_\alpha} \lambda_1 \right) \inf \int_a^b |z'_t| dt \\ &\leq \left(\sup \lambda_1 \right) |z|. \end{aligned}$$

Si on se restreint à un voisinage O_α de p_0 , relativement compact ; λ_1 est continue sur $\overline{O}_\alpha$

$$\begin{aligned} \sup \lambda_1 &< +\infty \\ \text{dans } O_\alpha \end{aligned}$$

$$d(p_1, p_0) \leq \left(\sup \lambda_1 \right) |z| \implies \text{si } z \rightarrow 0 \text{ alors } d(p_1, p_0) \rightarrow 0.$$

Réciproquement, montrons que si $d(p_1, p_0) \rightarrow 0$ alors $|z| \rightarrow 0$ $d(p_1, p_0) \rightarrow 0$

on peut donc prendre $p \in O_\alpha$ sinon :

si $p \notin O_\alpha$

il n'existe pas de $z \in R_\alpha$ tel que $\varphi_\alpha(z) = p$ donc $d(p_1, p_0) \geq \left(\inf_{O_\alpha} \lambda_2 \right) |z_1|$

où z_1 est le point de la frontière de R_α le plus proche de 0.

λ_2 est continue sur $\bar{O}_\alpha$ qui est compact. $\lambda_2 > 0$ car la matrice M_α est définie positive. Donc $\inf \lambda_2 > 0$. Donc $d(p_1, p_0) \not\rightarrow 0$ donc $p \in O_\alpha$

et $d(p_1, p_0) \geq (\inf \lambda_2) |z|$

sur O_α

$$d(p_1, p_0) \rightarrow 0 \Rightarrow |z| \rightarrow 0.$$

5.- Complétion

Soit S , $S \in C^m$, $m \geq 1$.

5.1.- Un chemin est différentiable par morceaux si $\forall b \in [0, 1[\quad p_b(t) = p|_{[0, b]}$ est une courbe différentiable par morceaux.

5.2.- La longueur d'un chemin différentiable par morceaux est :

$$L[p(t)] = \lim_{b \rightarrow 1} L[p_b(t)] < +\infty.$$

5.3.- La distance d'un point p_0 à la frontière de S égale $\inf L[p(t)]$ pour tous les chemins différentiables par morceaux qui tendent vers la frontière et tels que $p(0) = p_0$.

5.4.- Soit une variété riemannienne S . Si la distance à la frontière est finie pour un point p_0 , elle l'est pour tout point de S .

Démonstration. - Elle résulte de l'inégalité triangulaire

$$L[p_p(t)] \leq L[p_{p_0}(t)] + L[p_{p, p_0}(t)]$$

d'où l'inégalité à démontrer en passant aux bornes inférieures.

5.5.- Définition. - Une variété riemannienne est complète si la distance à la frontière est infinie.

5.6.- Lemme. - Si on enlève un ensemble E fermé d'une variété riemannienne connexe, ce qui reste n'est pas complet.

Démonstration. - $p_0 \in S - E$

$$p_1 \in E$$

S étant connexe, il existe une courbe $p(t)$ joignant p_0 à p_1 ; elle rencontre

la frontière en au moins un point ; soit q le premier point à partir de p_0 .

$d(p_0, q)$ est finie et la partie de la courbe de p_0 à q représente un chemin sur S qui tend vers la frontière.

5.7.- Théorème de Hopf-Rinow.- Une variété riemannienne est complète $\iff$ l'espace métrique est complet (au sens usuel)

$\iff$ toute géodésique peut être prolongée indéfiniment dans n'importe quelle direction, ou forme une courbe fermée

$\iff$ tout ensemble borné est relativement compact.

§ 2.- Étalement. Revêtement.

1.- Définitions

1.1.- Deux courbes $p(t)$ et $q(t)$ définies sur $[0,1]$ sont homotopes si il existe une application continue F de $[0,1]^2$ dans S telle que :

$$\begin{array}{ll} F(t, 0) = p(t) & F(0, u) = p_0 \\ F(t, 1) = q(t) & F(1, u) = p_1 \end{array} \quad \forall u.$$

N.B.- $\implies p(0) = q(0)$
 $p(1) = q(1).$

1.2.- Une surface de Riemann S est simplement connexe si pour tout couple de courbes ayant mêmes extrémités ces deux courbes sont homotopes.

1.3.- Définition d'un étalement. Soient S et $\hat{S}$, deux surfaces

f continue : $\hat{S} \rightarrow S$.

Si $\forall \hat{p} \in \hat{S}$ il existe $\hat{V}$ voisinage de $\hat{p}$ sur $\hat{S}$ tel que $f|_{\hat{V}}$ soit un homéomorphisme sur un ouvert V de S . On dit que $\hat{S}$ est étalée sur S .

1.4.- Définition d'un relèvement.

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Si } \hat{S} \text{ est étalée sur } S \text{ à projection } f \\ \text{Si } p(t) : t \in [a,b] \text{ est une courbe dans } S \\ \text{Si } \hat{p}_0 \in f^{-1}[p(a)] \end{array} \right.$$

on dit qu'il y a relèvement de $p(t)$ dans $\hat{S}$ à partir de $\hat{p}_0$ (ou que $\hat{S}$ peut être continuée à partir de $\hat{p}_0$) si il existe une courbe $\hat{p}(t)$, $t \in [a, b]$, dans $\hat{S}$ telle que

$$f[\hat{p}(t)] \equiv p(t)$$

$$\hat{p}(a) = \hat{p}_0.$$

2.- Lemme.- Si $\hat{S}$ est étalée sur S et si il existe un relèvement d'une courbe $p(t)$ à partir de $\hat{p}_0$, le relèvement est unique.

Démonstration.- Soit $\hat{p}(t)$ et $\tilde{p}(t)$ deux relèvements de $p(t)$ à partir de $\hat{p}_0$.

$$\text{Soit } E = \{t; t \in [a, b] \quad \hat{p}(t) = \tilde{p}(t)\}$$

E est fermé car $\hat{p}$ et $\tilde{p}$ sont continues

E est ouvert

$$\text{Soit } t_1 \in E \quad \hat{p}(t_1) = \tilde{p}(t_1) = \hat{p}_1$$

$\hat{p}_1 \in S \implies$ il existe un voisinage $\hat{V}$ de $\hat{p}_1$ tel que $f|_{\hat{V}}$ soit un homéomorphisme de $\hat{V}$ sur V

$$\exists \delta > 0 \quad (t - t_0) < \delta \implies \begin{matrix} \hat{p}(t) \in \hat{V} \\ \tilde{p}(t) \in \hat{V} \end{matrix}$$

$$f[\tilde{p}(t)] = f[\hat{p}(t)] \implies \tilde{p}(t) = \hat{p}(t) \quad \text{pour } (t - t_0) < \delta$$

donc E est ouvert.

$$-1 E \neq \emptyset \quad \text{car } a \in E.$$

E est une partie connexe non vide de $[a, b]$ donc $E = [a, b]$.

Définition $\{\hat{S}, f\}$ est un revêtement de S si : $\hat{S}$ est étalée sur S et si chaque point de S possède un voisinage V tel que $f^{-1}(V) = \bigcup_{\alpha} \hat{V}_{\alpha}$ où $\hat{V}_{\alpha}$ sont des ouverts

3.- Lemme. disjoints tel que $f|_{\hat{V}_{\alpha}}$ soit un homéomorphisme sur V .

Si $\{\hat{S}, f\}$ est un revêtement de S , alors pour toute courbe $p(t)$ $t \in [a, b]$ de S et tout point $\hat{p}_0$ de $\hat{S}$ tel que $\hat{p}_0 = f^{-1}[p(a)]$ il existe un relèvement de $p(t)$ à partir de $\hat{p}_0$.

Démonstration.

$$\text{Soit } E = \{t_0 : t_0 \in [a, b] \text{ il existe un relèvement jusqu'à } t_0 \text{ de } p(t)\}$$

1°) $E \neq \emptyset$ car $a \in E$

2°) E est un intervalle.

Soit t_1 la borne supérieure de E . Montrons que $t_1 = b$.

Soit V_1 un voisinage de $p(t_1)$ tel que $f^{-1}(V_1) = \bigcup_{\alpha} \hat{V}_{\alpha}$.

p est continue en t_1 , donc il existe δ $(t - t_1) < \delta \implies f(t) \in V_1$. Soit $t_2 < t_1$

$|t_2 - t_1| < \delta$ alors $f(t_2) \in V_1$ et $t_2 \in E$

$p(t)$ est relevée à partir de $\hat{p}_0$ jusqu'à $\hat{p}(t_2)$ soit $\hat{V}_{\alpha}^{-1} \subset f^{-1}(V_1)$ et $\hat{p}(t_2) \in \hat{V}_{\alpha}^{-1}$.

Soit g la réciproque de $f|_{\hat{V}_{\alpha}^{-1}}$, alors $g \circ p(t)$ coïncide avec $\hat{p}(t)$ pour $t < t_1$ et prolonge $\hat{p}(t)$ pour $t \geq t_1$ et $|t - t_1| < \delta$ si $t_1 \neq b$ ceci contredit le fait que t_1 est la borne supérieure de E

donc $t_1 = b$ et $E = [a, b]$.

§ 3.- Théorème de monodromie. 1re forme.

Soit $\hat{S}$ une surface étalée sur S par la projection f et $\hat{S}$ peut être continuée le long de toute courbe $p(t)$ de S à partir de chaque point $\hat{p}_0 \in f^{-1}(p_0)$.

Si $p(t)$ et $q(t)$ sont deux courbes homotopes dans S , $\hat{p}(t)$ et $\hat{q}(t)$ les relèvements de $p(t)$ et $q(t)$ à partir de $\hat{p}_0 \in \hat{S}$ ($p(0) = q(0) = f(\hat{p}_0)$) alors :

$$1) \hat{p}(1) = \hat{q}(1)$$

$$2) \hat{p}(t) \text{ et } \hat{q}(t) \text{ sont homotopes sur } \hat{S}.$$

Démonstration.— $p(t)$ et $q(t)$ sont homotopes : soit $F(t, u)$ une application continue de $[0, 1] \times [0, 1]$ dans S telle que

$$F(t, 0) = p(t) \quad F(0, u) = p(0) = q(0)$$

$$F(t, 1) = q(t) \quad F(1, u) = p(1) = q(1).$$

Pour u fixé, $F(t, u)$ est une courbe joignant $p(0)$ et $p(1)$. On peut effectuer le relèvement de $F(t, u)$ à partir de $\hat{p}_0$; soit $\hat{F}(t, u)$ avec $\hat{F}(0, u) = \hat{p}_0$.

1) Montrons que $\hat{F}(t, u)$ est une fonction continue de $[0, 1] \times [0, 1]$ dans $\hat{S}$.

Pour u_0 fixé on définit E :

$$E = \{t_0 \mid t_0 \in [0, 1] ; \hat{F}(t, u) \text{ est continue en } (t, u_0) \mid 0 \leq t \leq t_0\}$$

a) E est un intervalle $E \neq \{0\}$.

En effet, soit $\hat{V}_0$ un voisinage de $\hat{p}_0$ tel que $f|_{\hat{V}_0}$ est un homéomorphisme de $\hat{V}_0$ sur $f(\hat{V}_0) = V_0$.

$F(t, u)$ est continue au point $(0, u_0)$:

$$\exists \delta > 0, \text{ tel que } |t| < \delta \implies F(t, u) \in V_0 \\ |u - u_0| < \delta$$

Soit $\hat{G}(t, u) = g \circ F(t, u)$ avec $g = (f|_{\hat{V}_0})^{-1}$. $\hat{G}$ est continue en tout point (t, u_0) pour $|t| < \delta$. $f(\hat{G}(t, u)) = F(t, u)$ donc $\hat{G}(t, u)$ est le relèvement unique de $F(t, u)$ à partir de $\hat{p}_0$.

$$E \supset \{t \mid 0 \leq t < \delta\}.$$

b) Soit t_1 la borne supérieure de E .

$\hat{S}$ est étalée sur S : il existe un voisinage $\hat{V}_1$ de $\hat{F}(t_1, u_0)$ tel que la restriction de f à $\hat{V}_1$ soit un homéomorphisme de $\hat{V}_1$ sur $f(\hat{V}_1) = V_1$.

$\hat{F}(t, u_0)$ est continue au point (t_1, u_0)

$F(t, u)$ est continue au point (t_1, u_0)

il existe donc $\delta_1 > 0$ tel que : $|t - t_1| < \delta_1$
 $|u - u_0| < \delta_1$

entraîne $\hat{F}(t, u_0) \in \hat{V}_1$
 $F(t, u) \in V_1$.

Soit $t_2 < t_1$ avec $|t_2 - t_1| < \delta_1$, donc $t_2 \in E$, et $\hat{F}(t_2, u_0) \in \hat{V}_1$. Il en résulte que l'application $u \longrightarrow \hat{F}(t_2, u)$ est continue au point (t_2, u_0) :

$$\exists \eta \text{ tel que } |u - u_0| < \eta \implies \hat{F}(t_2, u) \in \hat{V}_1.$$

Soit $\hat{G}(t, u) = g \circ F(t, u)$ ($g = (f|_{\hat{V}_1})^{-1}$)

Pour $|t - t_1| < \delta_1$, $|u - u_0| < \inf(\delta_1, \eta)$, $\hat{G}(t, u)$ est une application continue de (t, u) en tout point (t, u_0) $f(\hat{G}(t, u)) = F(t, u)$, c'est donc le relèvement unique de $F(t, u)$ dans $\hat{V}_1$ à partir de $\hat{F}(t_2, u)$.

Conséquence. 1) $t_1 \in E$

2) si $t_1 \neq 1$ alors il existe $t_1 < t_3 < 1$ et $t_3 - t_1 < \delta_1$ donc $t_3 \in E$, ce qui contredit l'hypothèse $t_1 = \sup E$.

En conclusion $t_1 = 1$, $t_1 \in E$, c'est à dire $E = [0, 1]$.

2) Montrons que $\hat{F}(1, u) = \hat{F}(1, 0)$.

L'application $u \rightarrow \hat{F}(1, u)$ est localement constante. Soit $\hat{V}_0$ un voisinage de $\hat{F}(1, u_0)$ tel que $f|_{\hat{V}_0}$ soit un homéomorphisme de $\hat{V}_0$ sur $f(\hat{V}_0)$.

L'application $u \rightarrow \hat{F}(1, u)$ est continue en u_0 :

$$\exists \alpha > 0, \text{ tel que } |u - u_0| < \alpha \implies \hat{F}(1, u) \in \hat{V}_0.$$

Or $f(\hat{F}(1, u)) = f(\hat{F}(1, u_0)) = p(1)$, f étant bijective. On a $\hat{F}(t, u) = \hat{F}(1, u_0)$.

Toute application localement constante sur un ensemble connexe $[0, 1]$ est constante.

1.1.- Corollaire.- Soit $\hat{S}$ une surface connexe étalée sur S par la projection f et pouvant être continuée le long de toute courbe $p(t)$ de S à partir de $\hat{p}_0 \in f^{-1}(p(0))$. Si S est simplement connexe f est un homéomorphisme de $\hat{S}$ sur S .

Démonstration.- f est un homéomorphisme local. Montrons que f est bijective.

Soit $\hat{p}_1$ et $\hat{p}_2$ deux points de $\hat{S}$ tels que $f(\hat{p}_1) = f(\hat{p}_2) = p_0$. $\hat{S}$ est connexe.

Il existe une courbe $\hat{p}(t)$ joignant $\hat{p}_1$ et $\hat{p}_2$. Soit $p(t) = f(\hat{p}(t))$, $q(t) = p_0$.

S est simplement connexe, donc $p(t)$ et $q(t)$ sont homotopes. Leurs relèvements à partir de $\hat{p}_1$ sont homotopes, donc $\hat{p}_1 = \hat{p}(1) = \hat{q}(1) = \hat{p}_2$. L'application f est injective. Elle est surjective par hypothèse donc f est bijective.

Remarques.

1.1.1.- Si S_1 et S_2 sont homéomorphes et si S_1 est simplement connexe alors S_2 est simplement connexe.

1.1.2. Un domaine D du plan convexe est simplement connexe : si $p(t)$ et $q(t)$ sont deux courbes de D telles que $p(0) = q(0)$; $p(1) = q(1)$ elles sont homotopes. En effet, $F(t,u) = (1-u)p(t) + u q(t)$ est une application continue de $[0,1] \times [0,1]$

sur D avec $F(0,u) = p(0)$
 $F(1,u) = p(1)$
 $F(t,0) = p(t)$
 $F(t,1) = q(t)$.

1.2.- Corollaire.- Tout point d'une surface possède un voisinage simplement connexe.

Tout ouvert R_α du plan homéomorphe à un ouvert O_α de S contient un disque convexe donc simplement connexe et l'image par l'homéomorphisme est simplement connexe.

2.- Lemme.- Si $\hat{S}$ est étalée sur S par la projection f et si $\hat{S}$ peut être continuée le long de chaque courbe $p(t)$ de S alors pour tout voisinage V simplement connexe dans S , la restriction de f à chaque composante connexe de l'image réciproque $f^{-1}(V)$ est un homéomorphisme sur V .

Démonstration. Soit V un voisinage simplement connexe de S et $\hat{V}$ une composante connexe de $f^{-1}(V)$. $\hat{V}$ est étalée sur V et $\hat{V}$ peut être continuée le long de chaque courbe $p(t)$ de V : le relèvement de chaque courbe $p(t)$ de S à partir de $\hat{p}_0 \in \hat{V}$ est contenu dans la composante connexe $\hat{V}$.

Les conditions du corollaire ^{1.1,} sont donc satisfaites. f est un homéomorphisme de $\hat{V}$ sur V .

2.1.- Corollaire.- Les conditions suivantes sont équivalentes

(p) $\{\hat{S}, f\}$ est un revêtement de S

(p') $\hat{S}$ étalée sur S par la projection f peut être continuée le long de chaque courbe $p(t)$ de S à partir de $\hat{p}_0 \in f^{-1}(p(0))$.

§ 4.- Germes d'applications locales. Deuxième forme du théorème de Monodromie.

1.- Définition.- Soient S_1 et S_0 deux surfaces de classe C^m , f une application

d'un ouvert V de S_1 dans S_0 .

f est de classe C^p ($p \leq m$) si pour chaque carte φ_α de S_1

$$\varphi_\beta \text{ de } S_0, \quad \varphi_\beta^{-1} \circ f \circ \varphi_\alpha \text{ est de classe } C^p.$$

Etant données deux surfaces S_1 et S_0 de classe C^m , on considère la classe $\mathcal{C}$ des applications d'un ouvert V_k dans S_0 ayant la propriété suivante : si f_1 et f_2 coïncident sur une suite de points tendant vers p_0 dans V_k elles coïncident dans un voisinage de p_0 . (Par exemple les fonctions C^A appartiennent à cette classe).

Dans la classe $\mathcal{C}$, on définit une relation d'équivalence : soit $p \in S_1$; on dit que $f_1 \sim f_2$ s'il existe un voisinage V_3 de p où $f_1 \equiv f_2$ $\left(\begin{array}{l} f_1 : V_1 \longrightarrow S_0 \\ f_2 : V_2 \longrightarrow S_0 \end{array} \right)$.

2.- Définition.- La classe d'équivalence d'une fonction f est un germe d'applications locales de S_1 dans S_0 . On le note $\gamma_p(f)$.

3.- Etude de l'ensemble Γ des germes d'applications locales.

3.1.- Voisinage d'un point de Γ

Soit $\gamma_p(f) \in \Gamma$. On définit $\mathcal{V}(\gamma_p(f)) = \{ \gamma_q(f), q \in V, V \text{ est un voisinage de } p \text{ où } f \text{ est définie} \}$. $\{ \mathcal{V}(\gamma_p(f)) \}$ forme une base de voisinages pour une topologie sur Γ . On vérifie immédiatement que les axiomes des bases de voisinages sont vérifiées pour les ensembles ainsi définis.

3.2.- Lemme.- Γ est un espace topologique séparé.

Démonstration.- Soient $\gamma_p(f)$ et $\gamma_q(g)$ deux points distincts de Γ .

1) $p \neq q$. Soient V_1 et V_2 deux voisinages disjoints de p et q , alors $\mathcal{V}^1 \gamma_p(f) \cap \mathcal{V}^2 \gamma_q(g) = \emptyset$.

2) $p = q$. $f(p) \neq g(q)$. Soient V_1^0 et V_2^0 deux voisinages disjoints de $f(p)$ et $g(q)$ dans S_0 . Alors il existe V voisinage de p tel que $f(V) \subset V_1^0$ et $g(V) \subset V_2^0$

donc $\forall p_1 \in V, f(p_1) \neq g(p_1) \Rightarrow \mathcal{V}_{p_1}^1 \gamma_p(f) = \{ \gamma_{p_1}(f) ; p_1 \in V \}$ et

$$\mathcal{V}^2(\gamma_q(g)) = \{\gamma_{p_1}(g) \mid p_1 \in V\} \text{ disjoints.}$$

2') $f(p) = g(q)$ mais $\gamma_p(f) \neq \gamma_q(g)$, alors il existe un voisinage V de $p = q$, tel que pour tout p_1 de V distinct de p , $f(p_1) \neq g(p_1)$. En effet ; sinon il existerait une suite $\{p_n\}$ convergeant vers p telle que $f(p_n) = g(p_n)$, c'est à dire $f = g$ dans un voisinage de p donc $f \sim g$ et $\gamma_p(f) = \gamma_q(g)$ ce qui contredit l'hypothèse.

$$\text{Donc : } \forall p_1 \in V \quad f(p_1) \neq g(p_1) \quad \gamma_{p_1}(f) \neq \gamma_{p_1}(g).$$

3.3.- Définition.- Γ munie de cette topologie est le faisceau des germes d'applications locales de S_1 dans S_0 .

3.4.- Lemme.- L'application $F : \Gamma \rightarrow S_1$ définie par $\gamma_p \rightarrow p$ fait de Γ une surface étalée sur S_1 .

F est un homéomorphisme local de Γ sur S_1 .

Soit $\mathcal{U}$ un ouvert de S_1 , Θ un ouvert de Γ , alors $F^{-1}(\mathcal{U})$ et $F(\Theta)$ sont respectivement des ouverts de Γ et de S_1 : ceci résulte de la topologie de Γ définie à partir de celle de S_1 .

F est localement bijective :

F est surjective : évident

F est localement injective. Soit $\gamma_p(f)$ un point de Γ et $\mathcal{V}(\gamma_p(f))$ un voisinage de $\gamma_p(f)$ défini à partir d'un voisinage V de p . F est un homéomorphisme de $\mathcal{V}$ sur V .

3.5.- Remarque.- Si on considère les germes de fonctions analytiques. Γ a une structure naturelle de surface de Riemann.

Exemples : 1 Si S_1 et S_0 sont le plan complexe, les germes γ_p de fonctions analytiques peuvent être identifiés aux développements de Taylor, c'est à dire aux séries entières convergentes.

2 Si S_1 est la sphère de Riemann, Γ est le faisceau des germes de fonctions méromorphes sur S_1 .

3.6.- Définition.- Soit γ_p un point de Γ , la composante connexe de γ_p dans Γ s'appelle le prolongement complet de γ_p .

γ_p peut être prolongé le long d'une courbe $p(t)$ s'il existe un relèvement de $p(t)$ dans Γ à partir de γ_p .

(Γ est étalée sur S_1 ; si donc le relèvement existe, il est unique).

4.- Théorème de Monodromie (deuxième forme).

Soient S_1 et S_0 deux surfaces de classe C^m , γ_p un germe d'applications locales de S_1 dans S_0 . Si γ_p peut être prolongé le long de chaque courbe $p(t)$ dans S_1 et si S_1 est simplement connexe, il existe une transformation g de S_1 dans S_0 définie sur S_1 telle que chaque germe γ_q obtenu en prolongeant γ_p soit de la forme $\gamma_q(g)$.

Démonstration.- Soit $\hat{S}$ la composante connexe de γ_p dans Γ .

$\hat{S}$ est étalée sur S_1 par la projection F

$\hat{S}$ peut être continuée le long de chaque courbe $p(t)$ de S_1 à partir de γ_p d'après le lemme (2 § 3) F est un homéomorphisme de $\hat{S}$ sur S_1 .

Pour $q \in S_1$ il existe $\gamma_q = F^{-1}(q)$ unique dans $\hat{S}$. On prend $g(q)$ égale à la valeur en q du germe γ_q .

Chapitre III

§ 1.- Fonctions harmoniques et sous-harmoniques sur une surface de Riemann

A.- Fonctions harmoniques sur une surface de Riemann S

1.- Définition.- Une fonction à valeur réelle $p \rightarrow h(p)$ est harmonique au voisinage du point p_0 si pour toute carte φ_α de S en p_0 , la fonction $h \circ \varphi_\alpha(z)$ est harmonique au voisinage de $z_0 = \varphi_\alpha^{-1}(p_0)$.

Justification : si φ_β est une autre carte en p_0 de S, $g_{\alpha\beta} = \varphi_\alpha^{-1} \circ \varphi_\beta$ est analytique et $h \circ \varphi_\beta = h \circ \varphi_\alpha \circ g_{\alpha\beta}$

$$\left. \begin{array}{l} g_{\alpha\beta} \text{ est analytique} \\ h \circ \varphi_\alpha \text{ est harmonique} \end{array} \right\} \Rightarrow h \circ \varphi_\beta \text{ est harmonique au voisinage de } z = \varphi_\beta^{-1}(p_0).$$

Une fonction harmonique sur D est une fonction harmonique dans le voisinage de chaque point de D.

2.- Propriété des fonctions harmoniques

Principe du maximum : si $h(p)$ est harmonique non constante sur un domaine D elle n'a ni maximum, ni minimum sur D.

Corollaire.- Si $h(p)$ est continue sur un compact K, harmonique à l'intérieur de K, elle atteint son maximum sur la frontière.

3.- Problème de Dirichlet.- Etant donné un domaine $\mathcal{D}$, de frontière $\partial\mathcal{D} \neq \emptyset$ sur une surface de Riemann S et une fonction f continue, définie sur $\partial\mathcal{D}$, existe-t-il une fonction harmonique dans $\mathcal{D}$, continue à la frontière et égale à f sur $\partial\mathcal{D}$?

Rappel.- Ce problème est résolu simplement si D est le disque de rayon R.

Soit $f(Z)$ une fonction continue sur $|Z| = R$; il existe une fonction $h(Z)$ harmonique dans $|Z| < R$, continue sur le disque $|Z| \leq R$ et égale à $f(Z)$ sur la frontière.

$$|Z| < R \quad h(Z) = \int_0^{2\pi} K(\zeta, Z) f(\zeta) d\theta$$

où $\zeta = Re^{i\theta}$ $K(\zeta, z) = \frac{1}{2\pi} \frac{|\zeta|^2 - |z|^2}{|\zeta - z|^2}$ (noyau de Poisson).

La résolution du problème de Dirichlet nous conduit à faire une étude préalable des fonctions sous-harmoniques.

B.- Fonctions sous-harmoniques

1.- Définition.- Une fonction réelle $p \rightarrow u(p)$ définie sur une surface de Riemann S est sous harmonique dans S si elle vérifie les propriétés (p) et (p').

(p) Pour tout compact K contenu dans S et toute fonction $h(p)$ continue sur K , harmonique dans $\overset{\circ}{K}$ (intérieur de K) l'inégalité $u(q) \leq h(q)$ pour $q \in \partial K$ entraîne $u(p) \leq h(p)$ pour $p \in K$.

(p') f est semi continue supérieurement. On ne considère que les fonctions sous harmoniques continues dans S .

2.- Propriétés

Lemme 1.- Si $u_1, \dots, u_n$, sont n fonctions sous harmoniques, continues dans S la fonction $u = \text{Max}(u_i)_{i=1, \dots, n}$ est sous-harmonique continue.

Démonstration :

1) $u = \text{Max}(u_i)_{i=1, \dots, n}$ est continue dans S

2) soit $K \subset S$ et $h(p)$ harmonique dans $\overset{\circ}{K}$, continue sur K telle que $u(q) \leq h(q)$ pour $q \in \partial K$, alors $\forall i, u_i(q) \leq h(q)$ pour $q \in \partial K$

donc $\forall i, u_i(p) \leq h(p)$ pour $p \in K \Rightarrow u(p) \leq h(p)$ pour $p \in K$.

Lemme 2.- Soit u_n une suite ^{non} croissante de fonctions sous harmoniques continues dans S , convergeant vers une fonction continue u . Alors u est sous harmonique.

Démonstration. Soit K un compact, $\overset{\circ}{K}$ l'intérieur de K , ∂K la frontière de K et $h(p)$ harmonique dans $\overset{\circ}{K}$, continue sur K telle que

$$u(q) \leq h(q) \text{ pour } q \in \partial K.$$

Montrons que pour p appartenant à K : $u(p) \leq h(p)$.

1) $u_n(p)$ converge uniformément vers $u(p)$: Soit $p_0 \in S$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n(p_0) = u(p_0) = \inf_n u_n(p_0).$$

$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0$ tel que

$$u(p_0) \leq u_{n_0}(p_0) \leq u(p_0) + \frac{\varepsilon}{3}.$$

Les fonctions $u_{n_0}(p)$ et $u(p)$ sont continue en p_0 .

$\forall \varepsilon > 0, \exists V_0$ (voisinage de p_0) tel que :

$$\forall p \in V_0 \implies |u(p) - u(p_0)| < \frac{\varepsilon}{3}$$

$$\implies |u_{n_0}(p) - u_{n_0}(p_0)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Il s'ensuit que pour p dans V_0 on a :

$$|u(p) - u_{n_0}(p)| \leq |u(p) - u(p_0)| + |u(p_0) - u_{n_0}(p_0)| + |u_{n_0}(p_0) - u_{n_0}(p)|$$

d'où $u_{n_0}(p) \leq \varepsilon + u(p)$,

et pour $n \geq n_0$

$$p \in V_0 \implies u_n(p) \leq u_{n_0}(p) \leq u(p) + \varepsilon.$$

K est un compact : soit $\{V_0\}_{p_0 \in K}$ un recouvrement de K , on peut en extraire un

recouvrement fini : soit $V_0, V_1, \dots, V_i, V_r$ les voisinages de $p_0, p_1, \dots, p_i, p_r$.

Pour chaque point p , il existe un entier n_i tel que pour $n \geq n_i, p \in V_i$,

$$u_n(p) \leq u_{n_i}(p) \leq u(p) + \varepsilon.$$

Soit $N_0 = \max(n_i)$:

$\forall p \in S$: $\exists i$ tel que $p \in V_i$ et pour $n \geq N_0$

$$u_n(p) \leq u(p) + \varepsilon.$$

2) La suite converge uniformément, donc pour $n \gg N_0$ et pour $q \in \partial K$

$$u_n(q) \leq u(q) + \varepsilon \leq h(q) + \varepsilon.$$

La fonction u_n est sous harmonique on a :

$$\text{pour } \begin{matrix} p \in K \\ n \gg N_0 \end{matrix} \quad u_n(p) \leq h(p) + \varepsilon.$$

Soit en passant à la limite $u(p) \leq h(p) + \varepsilon$, pour $p \in K$, et pour $\varepsilon > 0$.

L'inégalité étant vraie pour tout ε positif, on a : pour $p \in K$ $u(p) \leq h(p)$,

ce qui démontre le lemme.

Lemme 3.— Soit $u(p)$, continue, sous harmonique dans S . Soit $p_0 \in S$ et φ_α une carte normalisée en p_0 , alors la fonction $U(z) = u \circ \varphi_\alpha(z)$ définie sur le disque $|z| \leq r$ satisfait

$$(1) \quad U(0) \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} U(re^{i\theta}) d\theta$$

Démonstration. $U(z) = u \circ \varphi_\alpha(z)$ est continue sur le disque $|z| \leq r$, il en résulte que la fonction $H(z) = \int_0^{2\pi} K(\zeta, z) U(\zeta) d\theta$ ($\zeta = re^{i\theta}$ $K(\zeta, z)$ noyau de Poisson) est harmonique à l'intérieur du disque, continue sur le disque fermé et égale à $U(z)$ sur la frontière.

D'après la propriété de la valeur moyenne d'une fonction harmonique on a :

$$H(0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} U(\zeta) d\theta \quad \zeta = re^{i\theta}$$

or $U(z) = H(z)$ pour $|z| = r \implies U(z) \leq H(z)$ pour $|z| \leq r$, en particulier

$$U(0) \leq H(0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} U(re^{i\theta}) d\theta.$$

Lemme 4.— Soit $w(p)$ une fonction continue, satisfaisant à l'inégalité (1) du lemme 3, pour toute carte normalisée en tout point d'un domaine D . Soit $h(p)$ une fonction harmonique dans D telle que $w(p) \leq h(p)$ dans D . S'il existe un point p_0 de D où $w(p_0) = h(p_0)$ alors pour tout point p de D on a $w(p) = h(p)$.

Remarque.- Les fonctions sous harmoniques continues dans D satisfaisant à l'inégalité (1) vérifient la propriété du lemme 4.

Démonstration.- Soit $E = \{p/p \in E : w(p) = h(p)\}$.

1) $E \neq \emptyset$ $p_0 \in E$

2) E est fermé car $w - h$ est continue et $E = (w - h)^{-1} \{0\}$.

3) E est ouvert : Soit $p_0 \in E$ et $w(p_0) = h(p_0)$. Soit φ_α une carte normalisée en p_0 , on considère les fonctions

$$W(z) = w \circ \varphi_\alpha(z)$$

$$H(z) = h \circ \varphi_\alpha(z).$$

On a $W(0) - H(0) = 0$.

Par hypothèse

$$W(0) \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} W(\rho e^{i\theta}) d\theta$$

$$H(0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} H(\rho e^{i\theta}) d\theta$$

pour $\rho \leq r$

$$0 = W(0) - H(0) \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (W(\rho e^{i\theta}) - H(\rho e^{i\theta})) d\theta$$

or W et H sont continues et $W(\rho e^{i\theta}) \leq H(\rho e^{i\theta})$ par hypothèse, donc

$$W(\rho e^{i\theta}) = H(\rho e^{i\theta}) \text{ pour } \rho \leq r \implies W(z) = H(z) \text{ pour } |z| \leq r \implies w(p) = h(p)$$

pour $p \in \varphi_\alpha \{z ; |z| \leq r\}$.

E est ouvert et fermé dans D donc $E = D$.

3.- Théorème fondamental. Les propriétés (p) et (p') sont équivalentes :

(p) $u(p)$ est continue sous-harmonique dans S

(p') $u(p)$ est continue et pour toute carte φ_α normalisée en $p_0 \in S$ la fonction

$U(z) = u \circ \varphi_\alpha(z)$ satisfait à l'inégalité (1)

$$U(0) \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} U(\rho e^{i\theta}) d\theta.$$

Démonstration.

I. (p) $\implies$ (p') : lemme 3

II. (p') $\implies$ (p) : $u(p)$ est continue. Soit K un compact de S , $h(p)$ harmonique

dans $\overset{\circ}{K}$, continue sur K et telle que $u(q) \leq h(q)$ pour $q \in \partial K$.

u et h sont continues : soit $m = \max_{p \in K} (u - h)(p)$.

Soit $E = \{p \in \overset{\circ}{K}, u(p) - h(p) = m\}$.

Deux cas : 1) $E = \emptyset$, donc m est atteint sur la frontière $\Rightarrow m \leq 0 \Rightarrow u(p) - h(p) \leq m \leq 0 \Rightarrow u(p) \leq h(p) \quad p \in K$.

2) $E \neq \emptyset$, il existe $p_0 \in \overset{\circ}{K}$ tel que $u(p_0) - h(p_0) = m$, or $h(p) + m$ est harmonique dans $\overset{\circ}{K}$, $u(p) \leq h(p) + m$ et $u(p) = h(p) + m$ dans la composante connexe K_1 de K contenant p_0 (lemme 4).

$$u(p) = h(p) + m \quad \text{sur} \quad \partial K_1 \subset \partial K \quad \text{donc} \quad m \leq 0$$

donc $u(p) \leq h(p)$ pour $p \in K$.

$\Rightarrow u(p)$ est sous-harmonique.

3.1.- Corollaire.- La propriété (p') caractérisant les fonctions sous-harmoniques met en évidence le caractère local de la sous-harmonicité d'une fonction.

3.2.- Corollaire.- Si $u_1, \dots, u_n$ sont sous harmoniques, continues dans S ,
alors Si $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sont des scalaires positifs

$$u = \sum_i \lambda_i u_i \quad \text{est sous harmonique continue.}$$

Démonstration.- 1) u est continue

2) Montrons que u vérifie (p') .

Soit φ_α une carte normalisée en $p_0 \in S$.

$$U(0) = u \circ \varphi_\alpha(0) = \sum_{i=1}^n \lambda_i u_i \circ \varphi_\alpha(0)$$

$$U(0) \leq \sum_{i=1}^n \frac{\lambda_i}{2\pi} \int_0^{2\pi} u_i(re^{i\theta}) d\theta$$

$$U(0) \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} U(re^{i\theta}) d\theta$$

Lemme 5.- Principe du maximum.

Soit $u(p)$ une fonction continue, sous harmonique dans un domaine D relativement

compact ($\bar{D}$ compact). Si $\overline{\lim}_{p \rightarrow q} u(p) \leq M$ pour tout point $q \in \partial D$ alors $u(p) \leq M$ pour $p \in D$.

Démonstration.— Soit $m = \sup_{p \in D} u(p)$. Il existe une suite $\{p_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ telle que $\lim_{k \rightarrow \infty} u(p_k) = m$. Or $\{p_k\} \subset \bar{D}$ compact, on peut extraire une sous suite convergente $\{p_{k_n}\}$.

1) $\{p_{k_n}\}$ converge vers $p_0 \in D$.

u est continue $\implies \lim_{n \rightarrow \infty} u(p_{k_n}) = u(p_0) = m$. La fonction $h(p) = m$ est harmonique dans D et satisfait à $u(p) \leq m$ d'après le lemme 4, $u(p) = m$ dans D , il en résulte $m = \overline{\lim}_{p \rightarrow q} u(p) \leq M$.

2) $\{p_{k_n}\}$ converge vers $q_0 \in \partial D$

$$m = \lim_{n \rightarrow \infty} u(p_{k_n}) \leq \overline{\lim}_{p \rightarrow q_0} u(p) \leq M.$$

Lemme 6.— Critère de sous-harmonicité.

Soit $u(p)$ une fonction de classe C^2 dans S , les conditions suivantes sont équivalentes :

a) $u(p)$ est sous-harmonique

b) pour toute carte φ_α normalisée en p_0 : $\mathcal{U} = u \circ \varphi_\alpha$ satisfait à $\Delta \mathcal{U} \geq 0$.

Démonstration.— $a \implies b$: si $\mathcal{U} = u \circ \varphi_\alpha$, u de classe $C^2 \implies \mathcal{U}$ de classe C^2 .

$$z = x + iy$$

$$\mathcal{U}(z) = \mathcal{U}(0) + x \mathcal{U}_x(0) + y \mathcal{U}_y(0) + \left[\frac{1}{2} x^2 \mathcal{U}_{xx}(0) + 2xy \mathcal{U}_{xy}(0) + y^2 \mathcal{U}_{yy}(0) \right] + \mathcal{R}(x, y)$$

$$\text{avec } \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{\mathcal{R}(x, y)}{(x^2 + y^2)} = 0.$$

$$z = re^{i\theta}$$

$$\int_0^{2\pi} \mathcal{U}(re^{i\theta}) d\theta = 2\pi \mathcal{U}(0) + \frac{1}{2} \left[\pi r^2 \mathcal{U}_{xx}(0) + \pi r^2 \mathcal{U}_{yy}(0) \right] + R_1$$

$$(2) \quad \Delta \mathcal{U}(0) = \mathcal{U}_{xx}(0) + \mathcal{U}_{yy}(0) = 4 \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{r^2} \left[\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (\mathcal{U}(re^{i\theta}) - \mathcal{U}(0)) d\theta \right]$$

car $\frac{1}{r^2} R \rightarrow 0$, $\frac{R_1}{r^2} = \int_0^{2\pi} \frac{R(re^{i\theta})}{r^2} d\theta \rightarrow 0$.

D'après le lemme 3 : $\int_0^{2\pi} \mathcal{U}(re^{i\theta}) d\theta \gg \mathcal{U}(0)$ donc $\Delta \mathcal{U}(0) \gg 0$.

$b \Rightarrow a$.

- Si $\Delta \mathcal{U} > 0$ alors la formule (2) montre que $\mathcal{U}(0) \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \mathcal{U}(re^{i\theta}) d\theta$; ce qui d'après le théorème fondamental est caractéristique des fonctions sous harmoniques.

- Si $\Delta \mathcal{U} \geq 0$, on considère $V(z) = \mathcal{U}(z) + \varepsilon |z|^2$.

$\Delta V = \Delta \mathcal{U} + 4\varepsilon$ donc $\Delta V > 0$ donc V est sous harmonique. Ceci est vrai pour tout $\varepsilon > 0$, donc $\mathcal{U}$ est sous harmonique d'après le lemme 2.

4.- Fonction harmonique associée à une fonction sous harmonique

Soit $u(p)$ continue, dans S , $p_0 \in S$ et φ_α une carte normalisée en p_0 .

Soit $G = \varphi_\alpha \{ z ; |z| < R \}$ G est un ouvert de O_α .

4.1.- Définition.- On définit la fonction $v(p) = P_G u(p)$ de la façon suivante

si $p \notin G$ $v(p) = u(p)$

si $p \in G$ $v(p) = V[\varphi_\alpha^{-1}(p)]$ où $V(z) = \int_0^{2\pi} K(\zeta, z) U(\zeta) d\theta$

avec $\zeta = Re^{i\theta}$ $K(\zeta, z) = \frac{1}{2\pi} \frac{|\zeta|^2 - |z|^2}{|\zeta - z|^2}$, $U(\zeta) = u(\varphi_\alpha(\zeta))$.

4.2.- Propriété de $P_G u$

1) $P_G(u)$ est continue. En effet, $v(p)$ est continue dans G et $\bar{G}$.

Sur la frontière on a ($q \in$ frontière de G) : $\lim_{\substack{p \rightarrow q \\ p \in G}} u(p) = \lim_{\substack{p \rightarrow q \\ p \in G}} v(p) = u(q)$.

2) $P_G(u) \geq u$

$p \notin G$ $P_G u(p) = u(p)$

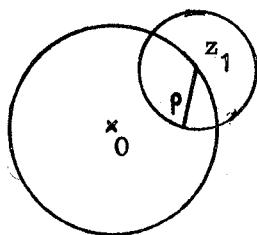
$p \in G$ $P_G(u) = v(p) \geq u(p)$ [$v(p)$ fonction harmonique associée à $u(p)$].

Lemme 7.- Si u est sous harmonique dans S , $P_G u$ est harmonique dans G , sous harmonique dans S .

Démonstration.— $P_G u$ est harmonique dans G (évident d'après sa construction)

$P_G u$ est sous harmonique dans $\overset{0}{CG}$ car égale à $u(p)$.

Plaçons nous en un point p_1 de la frontière de G . $p_1 \in \partial G$ soit $\varphi_\alpha^{-1}(p_1) = z_1$
et $\mathcal{V}(z) = P_G u \circ \varphi_\alpha(z)$.



$$z \in G \quad \mathcal{V}(z) = V(z)$$

$$z \notin G \quad \mathcal{V}(z) = U(z).$$

$$\mathcal{V}(z_1) = U(z_1) \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} U(z_1 + \rho e^{i\varphi}) d\varphi.$$

Or $U(z) \leq \mathcal{V}(z)$ (propriété 2), donc

$$\mathcal{V}(z_1) \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \mathcal{V}(z_1 + \rho e^{i\varphi}) d\varphi.$$

$\mathcal{V}$ satisfait à (p'). $P_G u$ est sous harmonique dans S .

5.- Famille de Perron de fonctions

5.1.- Définition.— Une famille $\mathcal{F}$ de fonctions sous harmoniques dans un domaine D est une famille de Perron si elle satisfait aux propriétés suivantes :

$$a) \text{ si } u_1, u_2 \in \mathcal{F} \implies \text{Max}(u_1, u_2) \in \mathcal{F}$$

$$b) \quad \forall u \in \mathcal{F}, \quad v = P_G u \in \mathcal{F}.$$

5.2.- Théorème fondamental.— Si $\mathcal{F}$ est une famille de Perron et si $h(p) = \sup_{v \in \mathcal{F}} v(p)$
alors

ou bien $h(p) = +\infty$

ou bien $h(p)$ est harmonique dans D

Démonstration.— Soit $p_0 \in D$, $h(p_0) = \sup_{v \in \mathcal{F}} v(p_0)$. Il existe une suite $\{v_n\}$
 $v_n(p_0) \rightarrow h(p_0)$. Soit φ_α une carte normalisée en p_0 et $G = \varphi_\alpha \{ |z| < R \}$.

On définit par récurrence :

$$u_1 = P_G(v_1), \dots, u_{n+1} = P_G(\text{Max}\{u_n, v_{n+1}\}).$$

- $\{u_n\} \in \mathcal{F}$ et forment une suite non décroissante de fonctions harmoniques dans G .
- $v_n(p_0) \leq u_n(p_0) \leq h(p_0) \implies$ cette suite converge vers $h(p_0)$.

Soit $U_n(z) = u_n \circ \varphi_\alpha(z)$.

Soit $\rho < R$. Posons

$$K_0 = \min_{\substack{|\zeta| = R \\ |z| \leq \rho \\ K_0 > 0}} K(\zeta, z) \quad K_1 = \max_{\substack{|\zeta| = R \\ |z| \leq \rho \\ K_1 < \infty}} K(\zeta, z)$$

$\forall m, n, \in \mathbb{N}$ on a

$$m > n \quad 0 \leq U_m(z) - U_n(z) = \int_0^{2\pi} K(\zeta, z) (U_m(\zeta) - U_n(\zeta)) d\theta$$

$$K_0 \int_0^{2\pi} (U_m(\zeta) - U_n(\zeta)) d\theta \leq U_m(z) - U_n(z) \leq K_1 \int_0^{2\pi} (U_m(\zeta) - U_n(\zeta)) d\theta$$

$$2\pi K_0 (U_m(0) - U_n(0)) \leq U_m(z) - U_n(z) \leq 2\pi K_1 (U_m(0) - U_n(0)),$$

donc pour $p \in G$ et $|\varphi_\alpha^{-1}(p)| = \rho$ $\rho < R$, on a :

$$2\pi K_0 (u_m(p_0) - u_n(p_0)) \leq u_m(p) - u_n(p) \leq 2\pi K_1 (u_m(p_0) - u_n(p_0)).$$

1) Si $h(p_0) \equiv +\infty$. Quand $m \rightarrow +\infty$, $u_m(p_0) \rightarrow +\infty$, donc

$$\lim u_n(p) = +\infty \implies h(p) = +\infty \text{ pour } p \in \varphi_\alpha\{|z| = \rho\}.$$

Donc, $h(p_0) = \infty \implies h(p) = \infty$ dans l'ouvert $\varphi_\alpha\{|z| < R\}$.

2) Si $h(p_0) < +\infty$, alors $u_m(p)$ converge uniformément dans l'ouvert

$\varphi_\alpha\{|z| < \rho\}$, $\rho < R$. La limite uniforme de fonctions harmoniques est harmonique.

Soit $H(z) = \lim_{m \rightarrow \infty} U_m(z)$ $H(z)$ est harmonique dans $|z| < R$ et $H(0) = h(p_0)$.

Soit $p_1 = \varphi_\alpha(z_1)$ $p_1 \in G$ et $|z_1| < \frac{R}{2}$.

Soit $\tilde{G} = \varphi_\alpha\{|z - z_1| < R_1\}$, $R_1 = \frac{R}{2}$.

Soit $\{\tilde{v}_n\}$ une suite $\tilde{v}_n(p_1)$ tendant vers $h(p_1)$. On définit

$$\tilde{u}_1 = P_{\tilde{G}}(\tilde{v}_1), \dots, \tilde{u}_{n+1} = P_{\tilde{G}}(\text{Max}\{\tilde{u}_n, \tilde{v}_{n+1}, u_{n+1}\}).$$

On a :

$$\tilde{u}_n(p) \leq \tilde{u}_{n+1}(p)$$

$$\tilde{v}_n(p_1) \leq \tilde{u}_n(p_1) \leq h(p_1) \implies \tilde{u}_n(p_1) \text{ tend vers } h(p_1).$$

Soit $\tilde{u}_n(z) = \tilde{u}_n \circ \varphi_\alpha(z)$.

1) Supposons $h(p_1) = \infty$ alors $\tilde{u}_m(z) \rightarrow +\infty$ dans $|z - z_1| < R_1$ en particulier $\tilde{u}_m(0) \rightarrow \infty$ or $\tilde{u}_n(0) \leq h(p_0) < +\infty$ d'où la contradiction.

2) $h(p_1) < +\infty$ alors $\tilde{u}_m(z)$ tend uniformément vers $\tilde{H}(z)$ dans le disque $|z - z_1| < R_1$ et $\tilde{H}(z)$ est harmonique. En p_0 : $\tilde{H}(0) \leq H(0) = h(p_0)$. Mais $\tilde{u}_n \geq u_n$ pour tout $n \implies \tilde{H}(z) \geq H(z)$. D'après le lemme 4 $\tilde{H}(z) = H(z)$.

Donc $h(p_1) = \tilde{H}(z_1) = H(z_1)$. Alors $h(p) = H(\varphi_\alpha^{-1}(p))$ dans un voisinage de p_0 .

Il s'ensuit que $\{p : h(p) < \infty\}$ est ouvert, et que $h(p)$ est harmonique dans cet ensemble. Puisque $\{p : h(p) \equiv \infty\}$ est aussi ouvert, un de ces ensembles est vide.

§ 2.- Résolution du problème de Dirichlet

2.1.- Principe de Perron

Soit D = domaine d'une surface de Riemann

Sa frontière $\partial D \neq \emptyset$.

$f(q)$ une fonction réelle définie sur ∂D .

Soit $\mathcal{F} = \{v ; \text{ sous harmonique dans } D \text{ telles que } \forall q \in \partial D \lim_{p \rightarrow q} v(p) \leq f(q)\}$.

Alors $\mathcal{F}$ est une famille de Perron c'est à dire

si v_1 et $v_2 \in \mathcal{F}$ $\sup(v_1, v_2) \in \mathcal{F}$.

si $v \in \mathcal{F}$ $P_G(v) \in \mathcal{F} \forall G \subset D$

Si $\mathcal{F} \neq \emptyset$ $h(p) = \sup_{v \in \mathcal{F}} v(p)$ est une fonction harmonique ou infinie dans D .

$h(p)$ est la fonction de Perron correspondant aux valeurs aux bords $f(q)$.

Remarque 1.- Notons que $\lim_{p \rightarrow q} v(p) \leq f(q)$ et que $h(p) = \sup v(p)$.

Mais que nous n'avons pas : $\overline{\lim}_{p \rightarrow q} h(p) \leq f(q)$.

Exemple : Soit $D = \{Z ; 0 < |Z| < 1\}$

$$\partial D = \{|Z| = 1 \quad Z \neq 0\}$$

$$f(z) = |z|.$$

$\mathcal{F} = \{v : \text{sous harmonique telle que}$

$$\begin{aligned} &\overline{\lim}_{p \rightarrow q} v(p) \leq 1 \quad \text{sur } |Z| = 1 \\ &\overline{\lim}_{p \rightarrow 0} v(p) \leq 0 \quad \text{sur } |Z| = 0 \end{aligned} \}.$$

Posons $v_\varepsilon(Z) = +\varepsilon \log |Z| \quad \varepsilon > 0$

$$v_\varepsilon(Z) \in \mathcal{F} \quad \forall \varepsilon \implies$$

$$\forall Z \quad h(Z) \geq \varepsilon \log |Z| + 1 \quad \text{donc } h(Z) \geq 1$$

donc $\overline{\lim}_{Z \rightarrow 0} h(Z) \geq 1 > f(0) \quad v(Z) \in \mathcal{F} \implies v(Z) \leq 1 \quad \text{donc } h(Z) \leq 1 \quad \text{d'où } h(Z) \equiv 1$

$$p \rightarrow q$$

Remarque 2.-

$\mathcal{F} = \{v : \text{sous harmonique dans } D, \text{ telle que } \overline{\lim}_{p \rightarrow q} v(p) \leq f(q) \text{ et}$

$$\underline{|v(p)| < M \}$$

$\mathcal{F}$ est encore une famille de Perron

$|h(p)| \leq M$ donc $h(p)$ ne peut être infinie

et $h(p)$ est harmonique dans D .

2.2.- Point régulier de la frontière d'un domaine

2.2.1.- Définition

a) Soit D un domaine de S . $q \in \partial D$ sa frontière. Une fonction $\beta(p)$ sous harmonique dans D , est une barrière à q si il existe un voisinage de q tel que

$$\beta(p) = -1 \quad p \notin V$$

$$\beta(p) \leq 0 \quad p \in D$$

$$\lim_{p \rightarrow q} \beta(p) = 0$$

b) $q \in \partial D$ est régulier $\iff \forall V$ voisinage de q , il existe une fonction barrière $\beta(p)$.

2.2.1.- Condition suffisante pour qu'un point soit régulier.

Définition.- Une courbe $p(t)$ de S , $t \in [a, b]$ est analytique $\iff$ pour tout t_0 , φ_α étant une carte à $p(t_0)$, la fonction

$$Z(t) = \varphi_\alpha^{-1}[p(t)] \quad \text{a une représentation}$$

$$Z(t) = \sum a_n (t - t_0)^n \quad \text{pour } |t - t_0| < \varepsilon \quad \text{avec } a_1 \neq 0.$$

Condition.- Soit $q_0 \in \partial D$, pour que q_0 soit régulier, il suffit qu'il existe une courbe analytique $p(t) \subset$ complémentaire de D , $t \in [a, b]$ où $p(a) = q_0$.

Démonstration.-

$$z(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (t - a)^n \quad \text{posons } \zeta = t + i$$

$$z(\zeta) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (\zeta - a)^n \quad |\zeta - a| < \varepsilon.$$

$z(\zeta)$ est une fonction holomorphe donc injective pour $|\zeta - a| < \delta$, car $a_1 \neq 0$ et on peut définir la fonction inverse

$$\zeta = \zeta(z) : \tilde{V} \longrightarrow |\zeta - a| < \delta.$$

Posons $\omega = |\zeta - a|^{\frac{1}{2}}$, choisissons la détermination de $\arg(\zeta - a) \in [0, 2\pi[$

$$\arg \omega \in [0, \pi[\quad \omega : \{|\zeta - a| < \delta \quad \zeta - a \neq \text{réel} > 0\} \longrightarrow$$

$\{|\omega| < \delta^{\frac{1}{2}} \quad \text{Im} > 0\}$. est définie dans $\tilde{V} \cap \varphi_\alpha^{-1}(D)$. Il existe une transformation holomorphe :

$$\omega \longrightarrow W = \frac{c\omega + d}{e\omega + f} \quad \text{telle que}$$

$$\begin{cases} W(0) = 0 \\ \text{Im} W(e^{i\theta} \delta^{\frac{1}{2}}) = -1, \quad 0 \leq \theta \leq \pi \\ \text{Im} W < 0 \end{cases}$$

$$\text{Posons} \quad \beta(Z) = \begin{cases} -1 & Z \notin \tilde{V} \\ \text{Im} W(Z) & \text{pour } Z \in \tilde{V} \cap D \end{cases}$$

$\beta(Z)$ est une fonction barrière pour $p(a)$.

2.3.- Théorème.

Soit $\left\{ \begin{array}{l} D \text{ un domaine de } S \\ q_0 \text{ point régulier de } \partial D \\ f(q) \text{ une fonction réelle définie sur } \partial D \text{ } |f(q)| < M. \end{array} \right.$

Soit $h(p)$ la fonction de Perron associée à la famille

$$\mathcal{H} = \left\{ v ; \text{ sous harmonique } |v(p)| < M \quad \forall q \in \partial D \quad \lim_{p \rightarrow q} v(p) \leq f(q) \right.$$

$$\text{alors } \lim_{q \rightarrow q_0} f(q) \leq \lim_{p \rightarrow q_0} h(p) \leq \overline{\lim}_{p \rightarrow q_0} h(p) \leq \overline{\lim}_{q \rightarrow q_0} f(q).$$

Démonstration.

$$a) \text{ Soit } A = \lim_{q \rightarrow q_0} f(q) \quad -M \leq A.$$

Soit $\varepsilon > 0$, il existe un voisinage V de q_0 tel que

$$q \in V \cap \partial D \implies A - \varepsilon < f(q)$$

q_0 régulier $\implies$ il existe une barrière $\beta(p)$ telle que $\beta(p) \equiv -1$ hors de V .

$$\text{Soit } v(p) = (A + M) \beta(p) + A - \varepsilon$$

$$A + M \geq 0 \implies v(p) \text{ sous harmonique.}$$

$$\text{Si } p \notin V \quad v(p) = -M - \varepsilon < \inf_{q \in \partial D} f(q)$$

$$\text{Si } p \in V \quad v(p) \leq A - \varepsilon \leq \inf_{q \in \partial D \cap V} f(q)$$

$$\text{donc } \lim_{p \rightarrow q \in \partial D} v(p) \leq f(q)$$

$$\text{et } \underline{v \in \mathcal{H}}$$

$$\text{donc } h(p) \geq v(p)$$

$$\text{et } \lim_{p \rightarrow q_0} h(p) \geq \lim_{p \rightarrow q_0} v(p) = A - \varepsilon$$

$$\varepsilon \text{ étant arbitraire : } \lim_{p \rightarrow q_0} h(p) \geq A$$

b) Soit $\overline{\lim}_{q \rightarrow q_0} f(q) = B < M$.

Soit V' un voisinage de q_0 tel que

$$\begin{cases} q \in V' \cap \partial D \implies f(q) < B + \varepsilon \\ V' \text{ compact.} \end{cases}$$

Soit $\beta(p)$ barrière à q_0 telle que $\beta(p) = -1$ $p \notin V$, soit $v(p) \in \mathcal{F}$.

Posons $u(p) = v(p) + (M - B)\beta(p) - B$ Considérons le domaine $\Delta = V \cap D$
 $\bar{\Delta}$ est compact.

- si $p \in V$ $\beta(p) < 0$ donc $u(p) < v(p) - B$

donc $\overline{\lim}_{p \rightarrow q} u(p) < \varepsilon$ $p \in \Delta$, $q \in \bar{V} \cap \partial D$.

- si $p \in \partial \Delta \cap D$ $u(p) = v(p) - M < 0$.

Si nous appliquons le principe du maximum à Δ

$u(p) < \varepsilon$ dans $\bar{\Delta}$

donc $v(p) < B + (B - M)\beta(p) + \varepsilon$ $\forall v \in \mathcal{F}$ $\forall p \in \Delta$

$h(p) < B + (B - M)\beta(p) + \varepsilon$ $\forall p \in \Delta$

$\overline{\lim}_{p \rightarrow q_0} h(p) < B + \varepsilon$ $\forall \varepsilon$

donc

$\overline{\lim}_{p \rightarrow q_0} h(p) < B$.

Remarque. - La propriété d'être régulier pour un point frontière est une propriété locale.

Soient $\frac{D}{\tilde{D}}$ tel $q_0 \in \partial D \cap \partial \tilde{D}$.

Si il existe v voisinage de q_0 $D \cap v = \tilde{D} \cap v$. q_0 régulier pour $D \iff q_0$ régulier pour $\tilde{D}$.

2.4.- Corollaire.-

D domaine sur S .

Le problème de Dirichlet peut être résolu pour toute fonction f continue, bornée
 $\iff$ tout point de ∂D est régulier.

Démonstration.

a) Tout $q \in \partial D$ est régulier. f est bornée. Nous pouvons appliquer le théorème

2.3.

$$f \text{ continue en } q_0 \iff \lim_{q \rightarrow q_0} f(q) = \overline{\lim}_{q \rightarrow q_0} f(q).$$

Les inégalités du théorème 2.3 deviennent des égalités ; la fonction de Perron $h(p)$ est solution.

b) Réciproquement si le problème est soluble. Soit $q_0 \in \partial D$. Soit $f(q)$ continue et

bornée sur ∂D telle que $f(q_0) = 0$
 $f(q) < 0$ pour $q \neq q_0$.

Soit $h(p)$ la solution du problème avec ces valeurs aux bords. Soit v un voisinage de q_0 . Construisons une barrière :

$$\text{Soit } -\eta = \sup_{p \in D \cap \partial v} h(p)$$

$$\beta(p) = \begin{cases} -1 & p \notin v \\ \sup \left[\frac{h(p)}{\eta}, -1 \right] & \text{si } p \in v \end{cases}$$

$\beta(p)$ est une barrière à q_0 , donc q_0 est régulier.

Chapitre IV

Définition. Une surface de Riemann est

- hyperbolique $\iff$ il existe une fonction $v(p)$ sous harmonique négative, non constante sur S
- parabolique $\iff$ il n'existe pas de telle fonction
- elliptique $\iff S$ est compacte.

N.B.- On dit parfois "ouverte" pour non compacte
"fermée" pour compacte.

§ 1.- Surfaces hyperboliques connexes

A.- Définitions.

A.1.- Mesure harmonique d'un domaine. Définition.- Soit D un domaine de S tel que $S - D$ soit compact. Soit $u(p)$ harmonique de D telle que

$$(a) \lim_{p \rightarrow \partial D} u(p) = 1$$

$$(b) 0 < u(p) < 1 \text{ pour tout } p \in D$$

$$(c) \text{ si } \tilde{u}(p) \text{ satisfait (a) et (b) alors } u(p) \leq \tilde{u}(p).$$

C'est à dire $u(p)$ est la plus petite des fonctions vérifiant (a) et (b).

$u(p)$ s'appelle la mesure harmonique de D

N.B. (c) entraîne que si $u(p)$ existe, $u(p)$ est unique.

A.2.- fonction de Green. Définition.

Soit p_0 sur une surface de Riemann sur S . Soit $g(p, p_0)$ une fonction de p harmonique si $p \neq p_0$ telle que

$$(a) g(p, p_0) > 0$$

$$(b) g(p, p_0) + \log z \text{ est harmonique au voisinage de } p_0 \text{ où } p = \varphi_\alpha(z)$$

$$p_0 = \varphi_\alpha(z_0)$$

(c) si $\tilde{g}(p, p_0)$ est une autre fonction vérifiant (a) et (b) $\tilde{g}(p, p_0) \geq g(p, p_0)$ c'est à dire $g(p, p_0)$ est la plus petite des fonctions vérifiant (a) et (b).

Alors $g(p, p_0)$ est la fonction de Green avec pôle en p_0 .

N.B. (b) est une propriété indépendante du choix de φ_α .

(c) $\Rightarrow$ si $g(p, p_0)$ existe, elle est unique.

A.3.- Principe du maximum

Soit D un domaine d'une surface S dont la frontière ∂D est non vide.

Nous dirons que le principe du maximum est valable pour D si

$$\left. \begin{array}{l} \forall v(p) \text{ sous harmonique dans } D \\ v(p) < M \text{ dans } D \end{array} \right\}$$

$$\lim_{p \rightarrow \partial D} v(p) \leq m \Rightarrow v(p) \leq m \text{ dans } D.$$

N.B.- Nous avons démontré que le principe du maximum est valable pour tous les domaines D relativement compacts.

B.- Caractérisation des surfaces hyperboliques connexes et simplement connexes.

Les conditions suivantes sont équivalentes

- (a) S est hyperbolique connexe
- (b) il existe un domaine D de S à frontière $\partial D \neq \emptyset$ tel que le principe du maximum soit non valable.

(c) $\forall p_0 \in S, g(p, p_0)$ existe

(d) il existe un point $p_0 \in S$ pour lequel $g(p, p_0)$ existe

(e) pour tout domaine D tel que

$$\left\{ \begin{array}{l} S - D \text{ est compact} \\ \partial D = \text{réunion de courbes analytiques} \end{array} \right.$$

la mesure harmonique de D existe

(f) il existe un domaine D ayant la propriété énoncée dans (e).

Démonstration.B.1. (a) $\implies$ (p)S est hyperbolique, c'est à dire $\exists v(p)$ non constante v sous harmonique

sur S.

 $v < 0$ Soit $p_0 \in S$, $D = S - \{p_0\}$.

Si le principe du maximum est valable pour D

$$\overline{\lim}_{p \rightarrow \partial D} v(p) = v(p_0) \implies v(p) \leq v(p_0) \text{ dans } D.$$

La fonction constante $= v(p_0)$ est harmonique sur S ; elle majore $v(p)$ qui l'attend en p_0 . Donc $v(p) \equiv v(p_0)$ ce qui est impossible puisque $v(p)$ est non constante.

Donc le principe du maximum est non valable pour D.

B.2. (b) $\implies$ (a).

Soit D un domaine pour lequel le principe du maximum est non valable.

Soit $v(p)$ sous harmonique dans D telle que

$$\begin{cases} v(p) < M \\ \overline{\lim}_{p \rightarrow \partial D} v(p) \leq m \\ \text{il existe } p_0 \in D \text{ tel que } v(p_0) > m. \end{cases}$$

$$\text{Soit } \tilde{v}(p) = \begin{cases} m - M & \text{dans } S - D \\ \sup \{v(p), m\} - M & \text{dans } D \end{cases}$$

 $\tilde{v}(p)$ est sous harmonique négative sur S $\tilde{v}(p_0) > m - M$ donc $\tilde{v}$ est non constante sur S. S est hyperbolique.B.3. (f) $\implies$ (a).

Soit $u(p)$ mesure harmonique de D. Posons $v(p) = \begin{cases} -u(p) & p \in D \\ -1 & p \in S - D \end{cases}$

$v(p)$ est non constante, négative, sous harmonique. Donc S est hyperbolique.

B.4. (a) $\implies$ (e)

Soit $\mathcal{F} = \{v ; v \text{ sous harmonique dans } D, v(p) \leq 1\}$

$$\overline{\lim}_{p \rightarrow \partial D} v(p) \leq 0$$

$\mathcal{F}$ est une famille de Perron $\neq \emptyset$ car $v \equiv 0 \in \mathcal{F}$.

$$h(p) = \sup_{v \in \mathcal{F}} v(p)$$

- $h(p)$ est harmonique dans D (car non infinie)
- $0 \leq h(p) \leq 1$ car $v \equiv 0 \in \mathcal{F}$ et $v(p) \leq 1 \quad \forall v \in \mathcal{F}$
- Démontrons que $h(p) \neq 0$.

Nous allons démontrer que $\mathcal{F}$ contient une fonction strictement positive en au moins un point.

Soit $\tilde{v}(p)$ une fonction négative sous harmonique non constante sur S .

$$\text{Soit } -\eta = \max_{p \in \partial D} \tilde{v}(p)$$

$S - D$ étant compact, le principe du maximum appliqué à $S - D \implies$

$$\tilde{v}(p) \leq -\eta \quad \text{pour } p \in S - D$$

donc il existe $p_1 \in D$ tel que $\tilde{v}(p_1) > -\eta$ car $\tilde{v}(p)$ ne peut avoir un maximum local sans être constante. Pour la même raison $\eta > 0$.

$$\text{Soit } v(p) = \frac{\tilde{v}(p)}{\eta} + 1$$

$$\left\{ \begin{array}{l} v(p) \text{ est sous harmonique} \\ v(p) < 1 \\ \overline{\lim}_{p \rightarrow D} v(p) \leq 0 \end{array} \right.$$

donc $v(p) \in \mathcal{F}$

or $v(p_1) > 0 \implies h(p_1) > 0$ donc $h(p) \neq 0$.

- Démontrons que $\lim_{p \rightarrow \partial D} h(D) = 0$.

$\partial D = U$ arcs analytiques, donc tous les points de ∂D sont réguliers. Le problème de Dirichlet correspondant aux valeurs au bord $\equiv 0$ est résolu par $h(p)$, la fonction de Perron de la famille $\mathcal{F} \implies \lim_{p \rightarrow \partial D} h(p) = 0$.

Soit $u(p) = 1 - h(p)$

$u(p)$ est la mesure harmonique de D car :

- $u(p)$ est harmonique
- $0 \leq u(p) \leq 1$
- $\lim_{p \rightarrow \partial D} u(p) = 1$
- si $\tilde{u}$ vérifie ces conditions $1 - \tilde{u} \in \mathcal{F}$ donc $1 - \tilde{u} \leq h$ donc $\tilde{u} \geq u$.

B.5. (d) $\implies$ (a)

Hypothèse : il existe $p_0 \in S$ tel que $g(p, p_0)$ existe. g est harmonique > 0 pour $p \neq p_0$. Soit $v(p) = \max[-g, -M]$ où $M = g(p_1)$ $p_1 \neq p_0$.

- $v(p)$ est sous harmonique $\forall p \neq p_0$
- pour $p \rightarrow p_0$ $g \rightarrow +\infty$ donc au voisinage de p_0 $v = -M$
- g non constante $\implies -g$ n'a pas de maximum local, donc v est non constante.

B.6. (e) $\implies$ (c). Soit $p_0 \in S$ $\varphi(z)$ une carte normalisée à p_0 .

Soit $\mathcal{F} = \{v(p) : v \text{ sous harmonique dans } S - \{p_0\}, \text{ telles que}$

- a) $v \geq 0$
- b) $v \equiv 0$ hors d'un compact $K \subset S$
- c) $v[\varphi(z)] + \log|z|$ est sous harmonique dans $|z| < R$.

$\mathcal{F}$ est une famille de Perron.

Soit $\tilde{v}(p) = \begin{cases} -\log|z| + \log R & \text{pour } |z| \leq R \\ 0 & |z| > R \end{cases}$

$\tilde{v}(p) \in \mathcal{F}$ donc $\mathcal{F} \neq \emptyset$.

Soit $h(p)$ la fonction de Perron correspondante. Montrons que c'est la fonction de Green avec pole p_0 .

1. $h(p)$ est harmonique dans $S - p_0$.

Démontrons que $h(p) \neq \infty$. Posons $D = S - \varphi\{|z| \leq R_1 < R\}$

$$\partial D = \varphi\{|z| = R_1\},$$

d'après (e) il existe $u(p)$ mesure harmonique de D .

$$\begin{cases} u(p) \equiv 1 & \text{sur } \partial D \\ 0 < u(p) < 1. \end{cases}$$

$$+ \text{ Soit } v(p) \in \mathcal{H} \quad m_1 = \max_{p \in \partial D} v(p)$$

$$m_2 = \max_{|z| = R} v(p)$$

$$\cdot v(p) - m_1 u(p) \leq 0 \quad \text{sur } \partial(K \cap D)$$

$$v(p) - m_1 u(p) \leq 0 \quad \text{hors de } K.$$

$$v(p) \text{ sous harmonique} \implies v(p) \leq m_1 u(p) \text{ dans } D.$$

$$\cdot m_2 = \max_{|z| = R} v(p) \leq m_1 \max_{|z| = R} u(p) = m_1 \eta$$

$$\text{où } \eta = \sup_{|z| = R} u(p) < 1$$

$$\text{donc } m_2 \leq m_1 \eta$$

+ $v(p) + \log|z|$ est sous harmonique dans $|z| \leq R$ donc

$$m_1 + \log R_1 \leq m_2 + \log R$$

$$m_1 \leq m_1 \eta + \log \frac{R}{R_1}$$

$$m_1 \leq \frac{1}{1-\eta} \log \frac{R}{R_1}.$$

Cette borne est indépendante de v donc $h(p) \leq$ cette borne sur $|z| = R_1$ donc $h(p) \neq \infty$.

2.

p) est harmonique et non constante

$$h(p) \geq 0 \implies h(p) > 0.$$

3. Soit $\tilde{g}(p, p_0)$ une fonction harmonique dans $S - \{p_0\}$ telle que $\tilde{g}(p, p_0) + \log |z|$ soit harmonique en p_0 .

$\forall v \in \mathcal{H} \quad v(p) - \tilde{g}(p, p_0)$ est sous harmonique sur S ; négative hors de K .

Donc $v(p) < \tilde{g}(p, p_0)$

$h(p) \leq \tilde{g}(p, p_0)$

La fonction de Green cherchée est donc $h(p)$.

C.- Théorème d'uniformisation

Enoncé du théorème.— Soit S une surface de Riemann simplement connexe. S est hyperbolique si et seulement s'il existe une transformation conforme de la surface sur le disque unité.

C-1. Lemme.— S'il existe une transformation conforme $W = f(p)$ d'une surface de Riemann S sur le disque unité, alors S est hyperbolique.

Démonstration. Il suffit de mettre en évidence la fonction de Green en un point p_0 de S . Soit $p_0 = f^{-1}(0)$, posons $g(p, p_0) = -\log |f(p)|$.

① $g(p, p_0)$ est harmonique pour $p \neq p_0$ et $g(p, p_0) > 0$

② $\varphi(W) = f^{-1}(W)$ est une carte en $p_0 = f^{-1}(0)$.

$-\log |f \varphi(W)| + \log |W| \equiv 0$ c'est donc une fonction harmonique au voisinage de 0.

③ Soit $\tilde{g}(p, p_0)$ une fonction satisfaisant à ① et ②

$-\log |f(p)| - \tilde{g}(p, p_0)$ est harmonique dans le disque $|W| < 1$

$\lim_{|W| \rightarrow 1} (-\log |f(p)| - \tilde{g}(p, p_0)) \leq 0$, d'après le principe du maximum on a :

$-\log |f(p)| \leq \tilde{g}(p, p_0)$ d'où $g(p, p_0) \leq \tilde{g}(p, p_0)$.

C-2. Théorème.— Si S est hyperbolique et simplement connexe, il existe une transformation conforme de S sur le disque unité $|W| < 1$.

Démonstration.

① Existence d'une application analytique de S dans le disque.

Soit p_0 un point de S et $g(p, p_0)$ la fonction de Green en p_0 .

Soit $p = \varphi(Z)$ une carte normalisée en p_0 .

La fonction $u(Z) = g(p, p_0) + \log|Z|$ est harmonique pour $|Z| < R$: soit $u(Z)$ une fonction conjuguée de $u(Z)$. On définit $f(Z) = Ze^{u(Z)-iv(Z)}$

$f(Z)$ est analytique pour $|Z| < R$

$$f(0) = 0$$

$$\log|f(Z)| = \log|Z| - u(Z) = -g(p, p_0).$$

Dans un voisinage V_0 de p_0 $f(Z)$ définit une fonction $f(p)$, analytique, s'annulant au point p_0 , et satisfaisant à $\log|f(p)| = -g(p, p_0)$ donc à $|f(p)| < 1$.

Soit p_1 distinct de p_0 ; dans un voisinage V_1 de p_1 , soit $h(p)$ conjuguée de $g(p, p_0)$ et $\tilde{f}(p) = e^{-g(p, p_0)-ih(p)}$.

$\tilde{f}(p)$ est analytique dans V_1

$$\log|\tilde{f}(p)| = -g(p, p_0).$$

Pour chaque point p_1 de S , il existe un voisinage V_1 de p_1 dans lequel on sait définir une fonction analytique $\tilde{f}$ satisfaisant à $\log|\tilde{f}(p)| = -g(p, p_0)$.

Remarque. Si $p \in V_0 \cap V_1$, on a défini $f(p)$ et $\tilde{f}(p)$ telles que $\log|f(p)| = \log|\tilde{f}(p)| = -g(p, p_0)$, il en résulte que pour $p \in V_0 \cap V_1$ $\tilde{f}(p) = e^{i\alpha} f(p)$. Par conséquent :

Au voisinage de chaque point de S on a une fonction analytique, définie à un facteur multiplicatif près de la forme $e^{i\alpha}$, satisfaisant à $\log|f(p)| = -g(p, p_0)$.

Considérons l'espace Γ des germes des fonctions analytiques f sur S . Montrons que Γ peut être continué le long de chaque courbe $p(t)$ de S à partir de $\hat{p}_0 = \gamma_{p_0}(f)$.

Soit $p(t)$ une courbe de S telle que $p(0) = p_0$. La courbe $p(t)$ peut être recouverte par un nombre fini de voisinages $V_0, V_1, \dots, V_n$ dans chacun desquels on peut définir $f, f_1, \dots, f_n$.

$V_0 \cap V_1 \neq \emptyset$ on choisit f_1 telle qu'elle coïncide avec f sur $V_0 \cap V_1$. On construit

de proche en proche $f_2, \dots, f_n$.

On a ainsi défini une fonction $f(p)$ continue sur la courbe.

Soit $\hat{p}(t) = \gamma_{p(t)}(f)$ alors $\hat{p}(t)$ est le relèvement de $p(t)$ à partir de $\hat{p}_0$.

D'après le théorème de monodromie, il existe une fonction analytique $F_{p_0}(p)$, définie sur S telle que $\log|F_{p_0}(p)| = -g(p, p_0)$.

$|F_{p_0}(p)| < 1$ donc $F_{p_0}(p)$ est une application analytique de S dans le disque unité.

On a de plus $F_{p_0}(p_0) = 0$ et F_{p_0} ne s'annule qu'en p_0 .

2 $F_{p_0}(p)$ est bijective.

C-2-1. Lemme.— Si $G_{p_0}(p)$ est analytique dans S , à valeur dans le disque unité et si $G_{p_0}(p_0) = 0$ on a : $\forall p \in S \quad |G_{p_0}(p)| \leq F_{p_0}(p)$.

Démonstration. Soit $\varphi(Z)$ une carte normalisée en p_0

$G_{p_0}(p_0) = 0 \implies G_{p_0}(\varphi(Z)) = Z^k \tilde{f}(Z)$ où $\tilde{f}(Z)$ est analytique au voisinage de 0 et

$\tilde{f}(0) \neq 0$

$$\log|G_{p_0}(\varphi(Z))| = k \log|Z| + \log|\tilde{f}(Z)|.$$

$$\text{Soit } \tilde{g}_{p_0}(p) = - \frac{\log|G_{p_0}(p)|}{k}$$

$$\text{on a } \textcircled{1} \quad \tilde{g}_{p_0}(\varphi(Z)) + \log|Z| = - \frac{\log|\tilde{f}(Z)|}{k}$$

donc $\tilde{g}_{p_0}$ est harmonique au voisinage de 0

$$\textcircled{2} \quad 0 < \tilde{g}_{p_0}(p) \text{ car } |G_{p_0}(p)| < 1.$$

$$\text{On a donc : } g(p, p_0) \leq \tilde{g}_{p_0}(p)$$

(définition de la fonction de Green en un point)

$$\text{Soit } -\log|F_{p_0}(p)| \leq -\log|G_{p_0}(p)| \implies |G_{p_0}(p)| \leq |F_{p_0}(p)|.$$

C-2-2.- Conséquences du lemme.a) $F_{p_0}(p)$ est injective

$$\text{Pour } p_1 \neq p_0 \text{ soit } G_{p_1}(p) = \frac{F_{p_0}(p) - F_{p_0}(p_1)}{1 + \overline{F_{p_0}(p_1)} F_{p_0}(p)}$$

(On considère la transformation conforme du disque unité $W \rightarrow \frac{W - W_1}{1 + \overline{W} W_1}$). Alors $G_{p_1}(p)$ est analytique sur S , $|G_{p_1}(p)| < 1$ et $G_{p_1}(p_1) = 0$ donc $|G_{p_1}(p)| \leq |F_{p_1}(p)|$ ($F_{p_1}(p)$ est définie par $\text{Log}|F_{p_1}(p)| = -g(p, p_1)$). Mais $G_{p_1}(p_0) = -F_{p_0}(p_1)$ donc $|F_{p_0}(p_1)| = |G_{p_1}(p_0)| \leq |F_{p_1}(p_0)|$ d'où $\forall p_0, \forall p_1 \in S$ $|F_{p_0}(p_1)| \leq |F_{p_1}(p_0)|$ soit $|F_{p_1}(p_0)| = |F_{p_0}(p_1)|$.

$$\left| \frac{G_{p_1}(p)}{F_{p_1}(p)} \right| \leq 1 \text{ avec égalité en } p_0.$$

D'après le principe du maximum : $G_{p_1}(p) = e^{i\alpha} F_{p_1}(p)$. Supposons qu'il existe p_1 et p_2 tels que $F_{p_0}(p_1) = F_{p_0}(p_2)$ alors $G_{p_1}(p_2) = 0$ donc $F_{p_1}(p_2) = 0$ c'est à dire $p_1 = p_2$.

b) $F_{p_0}(p)$ est surjective

Soit W_0 un point frontière de l'image de S par $F_{p_0}(p)$.

$F_{p_0}(p) - W_0 \neq 0$ pour p de S . Il existe en chaque point de S un germe de la fonction $\text{Log}(F_{p_0}(p) - W_0)$. Par un raisonnement analogue à celui effectué dans la première partie de la démonstration on peut appliquer le théorème de monodromie et affirmer l'existence d'une fonction $H(p)$ définie sur S telle que $\zeta = H(p) = \text{Log}(F_{p_0}(p) - W_0)$
 $\text{Re } \zeta = \text{Log}|F_{p_0}(p) - W_0| \implies \text{Re } \zeta < 2$. L'application $p \rightarrow H(p)$ a donc pour image un domaine situé dans $\text{Re } \zeta < \text{Log } 2$.

Soit la transformation homographique $\zeta \rightarrow Z = \frac{\alpha \zeta + \beta}{\gamma \zeta + \delta}$ transformant le demi plan

Re $\xi < \log 2$ en le cercle unité $|Z| < 1$ et telle que $Z(\xi_0) = 0$ ($\xi_0 = H(p_0)$).

La fonction $Z(p) = (Z \circ H)(p)$ est analytique sur S

$$Z(p_0) = 0 \text{ et } |Z(p)| < 1$$

d'après le lemme C-2-1, $|Z(p)| \leq |F_{p_0}(p)|$.

Soit $\{p_n\}$ une suite de points de S tels que $\lim_{n \rightarrow \infty} F_{p_0}(p_n) = W_0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \operatorname{Re} H(p_n) = -\infty \text{ donc } \lim_{n \rightarrow \infty} |Z(p_n)| \Rightarrow 1$$

$$\text{donc } |F_{p_0}(p_n)| \rightarrow 1 \text{ et } W_0 = \lim_{n \rightarrow \infty} |F_{p_0}(p_n)| = 1.$$

Il en résulte que chaque point $|W_1| < 1$ est dans l'image de S (dans le cas contraire il y aurait un point frontière W_0 tel que $|\overline{W_0}| \leq |W_1| < 1$).

C-3.- Lemme.- Soit D un domaine simplement connexe de la sphère de Riemann. Alors D est hyperbolique si et seulement si $S - D$ contient au moins deux points.

Démonstration. ① $S - D = \{p_1\}$ alors D n'est pas hyperbolique. Par l'absurde, supposons D hyperbolique, il existe une fonction F analytique qui transforme D sur le disque unité. F est bornée au voisinage de p_1 , donc F est prolongeable en p_2 et F est analytique sur S . Alors $|F|$ définie sur un compact atteint son maximum donc $F =$ constante. D'où la contradiction.

② $S - D$ contient au moins deux points.

Par homographie on suppose que $(0, (\infty)) \in S - D$. D'après le théorème de monodromie, il existe sur D une fonction $f(z)$ analytique telle que $[f(z)]^2 = z$
si $z_1 \neq z_2$ $(f(z_1))^2 \neq (f(z_2))^2 \Rightarrow f(z_1) \neq \pm f(z_2)$
 f transforme bijectivement D sur un domaine Δ . $W_1 \in \Delta$ entraîne $-W_1 \notin \Delta$: en effet si l'on a $w_1 = f(z_1)$ $-w_1 = f(z_2)$ alors $f(z_1)^2 = f(z_2)^2 \Rightarrow z_1 = z_2$ d'où la contradiction.

Soit $w_0 \in \Delta$, $\exists \varepsilon > 0$ tel que $|w - w_0| < \varepsilon \Rightarrow w \in \Delta$

alors si $|w + w_0| < \varepsilon \implies |-w - w_0| < \varepsilon \implies -w \in \Delta$ et $w \notin \Delta$ alors pour $z \in D$

$\left| \frac{1}{f(z) + w_0} \right| < \frac{1}{\varepsilon}$ et $\operatorname{Re} \left\{ \frac{1}{f(z) + w_0} \right\} - \frac{1}{\varepsilon}$ est harmonique, négative, non constante donc

D est hyperbolique.

C-3-1. Corollaire (théorème de Riemann).— Il existe une transformation conforme de tout domaine propre D au plan simplement connexe sur le disque unité.

§ 2.- Surfaces paraboliques connexes et simplement connexes.

S'il existe une transformation conforme $g(p)$ d'une surface S sur le plan, si

$q = g^{-1}(0)$, alors la fonction $f_q(p) = \frac{1}{g(p)}$ a les deux propriétés :

- pole simple en q
- bornée dans le complément de tout voisinage de q .

Nous voulons démontrer que sur une surface parabolique simplement connexe S il existe toujours une telle fonction $f_q(p)$ et qu'elle transforme S bijectivement en un domaine de la sphère.

2-1.- Définition

Soit $q \in S$. S surface de Riemann

$f_q(p)$ fonction méromorphe sur S est une fonction distinguée au point q si

- $f_q(p)$ a un pole simple en q
- $f_q(p)$ est Bornée dans le complément de tout voisinage de q .

2-2.- Lemme

Soit S surface parabolique ou elliptique connexe si $\forall q \in S$ il existe une fonction distinguée $f_q(p)$ alors $f_q(p)$ est injective.

Démonstration

Soit $q_0 \in S$. $f_{q_0}(p)$ est injective dans un voisinage V de q_0 du fait du pole simple ; en effet : $\frac{1}{f}$ s'annule une fois pour $p = q_0$ est analytique au voisinage de q_0 ; donc injective et son inverse aussi.

Soit M tel que $f_{q_0}(p) \leq M$ pour $p \in S - V$

soit $V_1 \subset V$ tel que $|f_{q_0}(p)| > M$ pour $p \in V_1$

soit $q_1 \in V_1$ posons $F(p) = \frac{1}{f_{q_0}(p) - f_{q_0}(q_1)}$

f injective dans $V \implies$ le dénominateur ne s'annule que pour $p = q_1$ dans V et q_1 est un pôle simple pour $F(p)$, donc dans V $F(p)$ est bornée hors de tout voisinage de q_1 .

$F(p)$ est bornée dans CV car

$$\begin{aligned} |f_{q_0}(p)| &\leq M \text{ dans } CV \\ |f_{q_0}(q_1)| &> M \end{aligned}$$

$\implies F(p)$ est méromorphe sur S , a un pôle simple en q_1 , est bornée hors de tout voisinage de q_1 .

Soit $p = \varphi(z)$ une carte normalisée à q_1

$\exists$ une fonction distinguée en $q_1 = f_{q_1}(p)$

$$f_{q_1}[\varphi(z)] = \frac{A}{z} + \dots, \quad A \neq 0$$

$$F[\varphi(z)] = \frac{B}{z} + \dots, \quad B \neq 0$$

$Bf_{q_1} - AF$ est analytique dans S , bornée sur S donc constante.

$f_{q_1} = T f_{q_0}$ où T est une fonction homographique. Ceci pour tout $q_1 \in V$.

Soit $q_1 \in S$, il existe une courbe $p(t)$ liant q_0 à q_2 (S connexe). La courbe étant compacte, on passera de f_{q_0} à f_{q_2} par le produit d'un nombre fini d'homographie c'est à dire une homographie.

Soit q_1 arbitraire, il existe une homographie T telle que $f_{q_0}(p) = T f_{q_1}(p)$.

Si nous avons $f_{q_0}(q_1) = f_{q_0}(q_2)$

$$\text{alors } T f_{q_1}(q_1) = T f_{q_1}(q_2) \iff$$

$$f_{q_1}(q_1) = f_{q_1}(q_2). \quad \text{donc } q_1 = q_2,$$

car $f_{q_1}(p)$ infinie $\iff p = q$ donc $f_{q_0}(p)$ est injective.

2-3. Lemme.

Soit D un domaine de S à frontière $\partial D \neq \emptyset$

Soit $f(p)$ analytique bornée dans $D = \{f(q)\} < M$ telle que $\lim_{p \rightarrow \partial D} |f(q)| \leq m$.

Alors $|f(p)| \leq m$ dans D .

Démonstration

Soit $v(p) = \max \{ \log |f(p)|, \log m \}$

$v(p)$ est sous-harmonique dans D

$v(p) \leq \log M$ dans D

(la surface étant parabolique, le principe du maximum est valable pour tout domaine

$$\implies \lim_{p \rightarrow \partial D} v(p) \leq \log m \implies v(p) \leq \log m \text{ dans } D$$

d'où $|f(p)| \leq m$ dans D

2-4. Lemme.

S'il existe une fonction distinguée pour $q_0 \in S$, il existe une fonction distinguée en tout point de S .

Démonstration

Soit $E = \{q : q \in S, \exists f_q(p)\}$

$E \neq \emptyset$ car $q_0 \in E$

a) E est ouvert - voir lemme 1 - On sait construire $f_{q_1}(p)$ q_1 voisin de p

$$f_{q_1}(p) = \frac{1}{f_{q_0}(p) - f_{q_0}(q_1)}$$

b) E est fermé

Soit q_n suite de E

$q_n \rightarrow q_0$ sur S .

$p = \varphi(z)$ une carte normalisée à q_0 pour n assez grand $z_n = \varphi^{-1}(q_n)$

Soit $F_n(z) = f_{q_n}[\varphi(z)]$ $|z| \leq R$

pour n suffisamment grand $|z_n| \leq r_0 < R$

et $F_n(z)$ est analytique dans $r_0 \leq |z| \leq R$ et non constante.

Soit A_n et B_n deux constantes telles que

$$G_n(z) = A_n F_n(z) + B_n$$

$$\max_{r_0 \leq |z| \leq R} |G_n(z)| = 2$$

$$\min_{z_0 \leq |z| \leq R} |G_n(z)| = 1.$$

On a une suite de fonctions analytiques uniformément bornées dans l'anneau A : la suite $G_n(z)$ est donc équicontinue.

On peut en extraire une suite qui converge uniformément vers une fonction $G_0(z)$.

Soit $f_{q_n}(p)$ la suite correspondante

$$g_n(p) = A_n f_{q_n}(p) + B_n.$$

Alors $|G_n(z) - G_m(z)| \leq \varepsilon$ pour $|z| = r_0$

$\Rightarrow |g_n(p) - g_m(p)| \leq \varepsilon$ dans $D = S = \varphi[|z| \leq r_0]$ d'après le lemme 2.3.

Donc $g_n(p)$ converge uniformément sur D et la limite $g(p)$ est une fonction analytique.

Considérons maintenant le domaine $|z| < R$

$\forall n$ $G_n(z)$ a un pôle simple $= z_n = \varphi^{-1}(q_n)$

soit $H_n(z) = (z - z_n)G_n(z)$

$H_n(z)$ est analytique dans $|z| \leq R$

$H_n(z) \rightarrow H_0(z)$ uniformément dans $r_0 \leq z \leq R$, c'est à dire que

$m, n > N \Rightarrow |H_n(z) - H_m(z)| < \varepsilon$ sur $r_0 \leq |z| \leq R$

$H_n(z) - H_m(z)$ est analytique dans $|z| \leq R$

donc $|H_n(z) - H_m(z)| < \varepsilon$ dans $|z| \leq R$

donc $H_n(z) \rightarrow H_0(z)$ uniformément dans $|z| \leq R$,

donc $H_0(z)$ analytique dans $|z| \leq R$.

$$G_n(z) = \frac{H_n(z)}{z - z_n} \rightarrow \frac{H_0(z)}{z} \quad \text{dans } 0 < |z| \leq R$$

donc $G_0(z) = \frac{H_0(z)}{z}$ a un pôle en 0 simple au plus.

Si G_0 n'avait pas de pôle en 0, on aurait $g(p)$ analytique et bornée sur tout S donc constante. Or nous avons imposé par la normalisation $\left. \begin{array}{l} \max |G_0(z)| = 2 \\ \min |G_0(z)| = 1 \end{array} \right\} \text{ sur } r_0 \leq |z| \leq R.$

Conclusion. $f(p)$ est fonction distinguée à q_0 limite de $q_n \in E$, E est donc fermé

S connexe $\implies S \equiv E$

2-5. Lemme.

Hypothèses. Soit S connexe, simplement connexe. Soit $q_0 \in S$, $p = \varphi(x)$ est une carte normalisée à q_0 . S'il existe $h(p)$ harmonique sur $S - \{q_0\}$ telle que

a) $h(p)$ soit bornée dans le complément de tout voisinage de q_0

b) il existe une constante $c \neq 0$ telle que $h[\varphi(z)] - \operatorname{Re}\left\{\frac{c}{z}\right\}$ est harmonique dans

$|z| \leq R$.

Conclusion. Il existe une fonction distinguée $f_{q_0}(p)$.

Démonstration.

Tout $p \in S$ a un voisinage dans lequel il existe une fonction méromorphe définie à une constante additive près telle que $h(p) = \operatorname{Re}\{f(p)\}$

S simplement connexe $\implies \exists$ une seule fonction $f(p)$ définie sur S (monodromie)

$f(p)$ a un pôle simple en $p = q_0$

$f[\varphi(z)] - \frac{c}{z}$ est une fonction analytique dans $|z| \leq R$.

Soit V un voisinage de q_0 dans lequel $f(p)$ est injective on a :

$|\operatorname{Re}\{f(p)\}| \leq M$ pour $p \in S - V$

$\exists q_1 \in V$ tel que $|\operatorname{Re}\{f(q_1)\}| > M$

soit $f_{q_1}(p) = \frac{1}{f(q) - f(q_1)}$ est bornée dans le complément de tout voisinage de q_1 , admet un pôle simple en q_1 , c'est une fonction distinguée à q_1 .

D'après le lemme 2-4 il existe une fonction distinguée à q_0 .

2.6. Lemme. Soit $q_0 \in S$ surface de Riemann, K un entier positif,

$\varphi(z)$ une carte normalisée à q_0 .

Alors il existe une fonction harmonique dans $S - \{q_0\}$ telle que

a) $h(p)$ est bornée dans le complément de tout voisinage de q_0

b) il existe $c \neq 0$

$h[\varphi(z)] - \operatorname{Re}\left\{\frac{c}{z^K}\right\}$ est harmonique dans $|z| \leq R$.

N.B. On ne fait pas l'hypothèse de simple connexité sur S .

Démonstration.

Ventier $n > 1$, soit D_n

$$D_n = S - \varphi\left[|z| \leq \frac{1}{n}\right]$$

A, B, C trois constantes données : $A^2 + B^2 \neq 0$, il existe une fonction harmonique bornée $u_n(p)$ dans D_n telle que sur ∂D_n , on ait

$$u_n\left[\varphi\left(\frac{1}{n} e^{i\theta}\right)\right] = A \cos k\theta + B \sin k\theta + C$$

Donc $u_n[\varphi(e^{i\theta})]$ est non constante

car sinon dans le complément de l'image de $|z| \leq 1$ le principe du maximum et du minimum entraînerait que u_n soit constant à l'extérieur.

On prend A, B, C tels que

$$\max U_n(e^{i\theta}) = 1$$

$$\min U_n(e^{i\theta}) = -1$$

où $U_n(z) = u_n[\varphi(z)]$ pour $\frac{1}{n} \leq |z| \leq R$.

$U_n(z)$ est une fonction harmonique dans l'anneau.

On cherche à borner uniformément les $U_n(z)$ dans chaque anneau $r_0 \leq |z| \leq R$.

$U_n(z)$ se développe

$$U_n(z) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} (a_m r^m \cos m\theta + b_m r^m \sin m\theta) + a \log r$$

développement qui converge sur tout cercle

$$|z| = r \quad \frac{1}{n} < r \leq R.$$

Nous allons majorer les coefficients du développement

$$\int_0^{2\pi} U_n(re^{i\theta}) d\theta = 2\pi (a_0 + a \log r)$$

$$\int_0^{2\pi} U_n(re^{i\theta}) \cos p\theta d\theta = \pi (a_p r^p + a_{-p} r^{-p})$$

$$\int_0^{2\pi} U_n(re^{i\theta}) \sin p\theta d\theta = \pi [b_p r^p + b_{-p} r^{-p}]$$

$$\text{si } r = 1 \quad a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} U_n(e^{i\theta}) d\theta$$

$$|U_n(e^{i\theta})| \leq 1 \implies |a_0| \leq 1$$

$$\text{si } r = R \quad a_0 + a \log R = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} U_n(Re^{i\theta}) d\theta$$

$$|U_n(Re^{i\theta})| \leq 1 \implies |a \log R + a_0| \leq 1$$

$$\text{d'où } |a| \leq \frac{2}{\log R}$$

$$\text{si } r = 1 \quad a_p + a_{-p} = c_p \quad |c_p| \leq 2$$

$$\text{si } r = R \quad a_p R^p + a_{-p} R^{-p} = d_p \quad |d_p| \leq 2$$

$$\begin{aligned} a_p &= \frac{d_p - R^{-p} c_p}{R^p - R^{-p}} \\ &= R^{-p} \frac{[d_p - R^{-p} c_p]}{1 - R^{-2p}} \end{aligned}$$

$$|a_p| \leq \frac{M}{R^p} \quad \text{où } M = \frac{4R}{R-1}$$

de la même façon, on trouve

$$a_{-p} = \frac{c_p - d_p R^{-p}}{1 - R^{-2p}}$$

$$|a_{-p}| \leq M.$$

Nous utiliserons ces inégalités pour $p = k$.

Pour les autres valeurs de n :

$$r \rightarrow \frac{1}{n},$$

$$\text{pour } p \neq k \quad \frac{a_p}{n^p} + a_{-p} n^p = 0$$

$$a_{-p} = \frac{-a_p}{n^{2p}} \quad \text{or} \quad |a_p| \leq \frac{M}{R^p}$$

$$|a_{-p}| \leq \frac{M}{n^{2p} R^p}$$

$$\text{de même} \quad |b_p| \leq \frac{M}{R^p}$$

$$|b_{-p}| \leq \frac{M}{n^{2p} R^p}$$

d'où

$$|U_n(re^{i\theta})| \leq \sum_1^\infty 2M \left(\frac{r}{R}\right)^m + \sum_1^\infty \frac{2M}{r^p n^{2p} R^p} + \frac{2M}{r^k} + 1 + 2 \frac{|\log r|}{\log R}.$$

Soit $0 < r_0 < 1$ pour $n > \frac{1}{r_0}$ les fonctions sont toutes définies dans l'anneau $r_0 \leq r \leq 1$

$$|U_n(re^{i\theta})| \leq 4M \left[\sum_0^\infty \left(\frac{r}{R}\right)^m \right] + \frac{2|\log r_0|}{\log R} + 1 + \frac{2M}{r_0^k}$$

$$\sum_1^\infty \left(\frac{r}{R}\right)^m \leq \sum_1^\infty \left(\frac{1}{R}\right)^m = \frac{R}{R-1}$$

On a une famille de fonctions harmoniques uniformément bornées dans l'anneau $r_0 \leq |z| \leq 1$;

donc on peut en extraire une suite partielle qui converge uniformément dans l'anneau ; le

principe du maximum entraîne que ces U_n correspondants convergent uniformément dans

$|z| \geq r_0$ et la limite est une fonction $U(z)$ harmonique dans $D_{r_0} = S - \varphi[|z| \leq r_0]$

les coefficients du développement de $U(z)$ sont les limites des coefficients de $U_n(z)$

si $p \neq k$ quand $n \rightarrow \infty$

$$a_{-p} \rightarrow 0$$

$$b_{-p} \rightarrow 0$$

$$U(z) = \sum_{m=1}^{\infty} \left[\tilde{a}_m r^m \cos m\theta + \tilde{b}_m r^m \sin m\theta \right] + \tilde{a} \log r + \frac{\tilde{a}_{-k}}{r^k} \cos k\theta + \frac{\tilde{b}_{-k}}{r^k} \sin k\theta$$

si $\tilde{U}(z)$ est construit avec $B = 0$ $\tilde{b}_{-k} = 0$

$$\tilde{U}(z) = \tilde{a} \log r + \frac{\tilde{a}_{-k}}{r^k} \cos k\theta + \tilde{V}(z) \quad \text{où } \tilde{V}(z) \text{ est harmonique.}$$

Si $\hat{U}(z)$ est construit avec $A = 0$

$$\hat{U}(z) = \hat{a} \log r - \frac{\hat{b}_{-k}}{r^k} \sin k\theta + \hat{V}(z) \quad \text{où } \hat{V}(z) \text{ est harmonique.}$$

Démontrons que $\tilde{a}_{-k} \neq 0$. Sinon on considère les deux cas :

- si $\tilde{a} = 0$ $\tilde{U}(z)$ harmonique bornée sur S donc constante $\max = +1$ est $\min = -1$

- si $\tilde{a} \neq 0$ soit $\tilde{a} > 0$ alors $r \leq \varepsilon \Rightarrow \tilde{U}(re^{i\theta}) \geq 2$ or $\min U_n(e^{i\theta}) = -1$

donc $\min \tilde{U}(e^{i\theta}) = -1$

le principe du maximum $\Rightarrow |U(re^{i\theta})| \leq \eta < 1$

donc $\tilde{U}$ aurait un minimum dans $\varepsilon < r < R$ donc $\tilde{U}$ serait constante

donc $\tilde{a}_{-k} \neq 0$

de même pour $\tilde{b}_{-k} \neq 0$

si $\hat{a} = \tilde{a} = 0$ le raisonnement est très

si non $h_p = \hat{a} \tilde{u}(p) - \tilde{a} \hat{u}(p)$

$$\cos \frac{k\theta}{r^k} = \operatorname{Re} \left[\frac{1}{z^k} \right] \qquad \sin \frac{k\theta}{r^k} = \operatorname{Re} \left[\frac{i}{z^k} \right]$$

on a déterminé $h(p)$ en vérifiant (a) et (b).

2.7.- Théorème.

Soit S une surface simplement connexe, parabolique, alors il existe une transformation conforme de S sur le plan.

Démonstration. Il existe une fonction distinguée qui est méromorphe sur S et injective. Donc l'image de S est un domaine de S simplement connexe sur la sphère.

S étant parabolique, le complément de ce domaine contient au plus un point.

La sphère étant compacte, l'image de S est différente de la sphère tout entière

et son complément contient exactement un point.

2.8.- Théorème.- Soit S une surface de Riemann simplement connexe, elliptique.

Il existe une transformation conforme de S sur la sphère.

Démonstration. Il existe une fonction distinguée f qui envoie S sur un domaine de la sphère

f continue, S compact $\implies f(S)$ compact donc fermé

f méromorphe $\implies f(S)$ ouvert donc $f(S) = \text{sphère}$.

2.9.- Classification des surfaces connexes et simplement connexes.

C'est le théorème d'uniformisation.

toute surface hyperbolique est conforme au disque unité

_____ parabolique _____ au plan

_____ elliptique _____ à la sphère.

2.10.- Corollaire.- Toute surface de Riemann connexe et simplement connexe, est homéomorphe à un domaine de la sphère.

N.B. On peut remplacer l'hypothèse simplement connexe ^{dans ce corollaire} par : toute courbe de Jordan divise S en 2 parties. Exemple : ^{chaque domaine sur} la sphère. Contre-exemple : le tore.

A.

§ 3.- Théorie des revêtements

A.1.- Position du problème. Soient S_1, S_2 deux surfaces de Riemann, g une application continue de $\hat{S}_1$ dans $\hat{S}_2$, $\{\hat{S}_1, f_1\}, \{\hat{S}_2, f_2\}$ des revêtements de S_1, S_2 , existe-t-il une application $\hat{g}$ de $\hat{S}_1$ dans $\hat{S}_2$ telle que l'on ait :

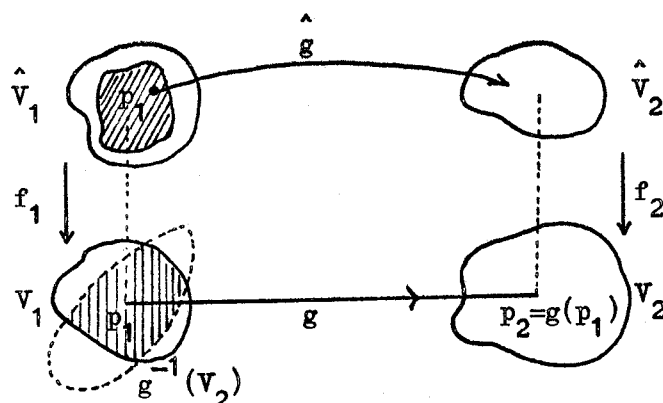
$$(1) \quad g \circ f_1 = f_2 \circ \hat{g}.$$

Localement $\hat{g}$ est bien définie :

- Soit $\hat{p}_1$ un point de $\hat{S}_1$ et $\hat{V}_1$ un voisinage de $\hat{p}_1$ tel que $f_1|_{\hat{V}_1}$ soit un homéomorphisme de $\hat{V}_1$ sur $f_1(\hat{V}_1) = V_1$.

- Soit $p_2 = g(p_1)$, V_2 un voisinage de p_2 et $\hat{V}_2 \subset f^{-1}(V_2)$ tel que $f_2|_{\hat{V}_2}$ soit un homéomorphisme de $\hat{V}_2$ sur V_2 .

Alors $\hat{g} = f_2^{-1} \circ g \circ f_1$ est définie sur un voisinage de $\hat{p}_1$ à savoir $\hat{V}_1' = \hat{V}_1 \cap f_1^{-1}(V_1 \cap g^{-1}V_2)$



A.1.1. Définition

Soit $\hat{V}_1$ un ouvert de $\hat{S}_1$, une application $\hat{g} : \hat{V}_1 \rightarrow \hat{S}_2$ est un relèvement local de g si la relation (1) est vérifiée.

A.1.2. Proposition

Chaque point $\hat{p}_1$ de $\hat{S}_1$ possède un voisinage $\hat{V}_1$ dans lequel on peut définir un relèvement local de g .

A.1.3. Etude des relèvements locaux de g

Soient $\hat{V}_1$ et $\hat{V}_1'$ deux voisinages de $\hat{p}_1$, $\hat{g}_1$ et $\hat{g}_1'$ les relèvements locaux correspondants. S'il existe une suite de points $\{\hat{p}_n\}$ convergeant vers $\hat{p}_1$ tels que $\hat{g}_1(\hat{p}_n) = \hat{g}_1'(\hat{p}_n)$ alors $\hat{g}_1$ et $\hat{g}_1'$ coïncident sur un voisinage $\hat{V}_1''$ de $\hat{p}_1$: ceci résulte de la construction de $\hat{g}_1$ et $\hat{g}_1'$ et de leur continuité en $\hat{p}_1$. Il en résulte donc une relation d'équivalence dans l'ensemble des relèvements locaux de g au voisinage des points de $\hat{S}_1$ $\hat{g}_1 \sim \hat{g}_1' \iff \exists \hat{V}_1''$ voisinage de $\hat{p}_1$ où les fonctions coïncident.

A.1.4. Définition. Une classe d'équivalence est un germe de relèvement de g .

A.1.5. On a vu (chap. II, § 4) que l'ensemble des germes de relèvement peut être muni d'une structure d'espace topologique séparé faisant de cet ensemble une surface S étalée sur $\hat{S}_1$ par la projection $f : S \rightarrow \hat{S}_1$ qui envoie un germe en $\hat{p}_1$ sur $\hat{p}_1$.

A.2. Théorème. Si $\{\hat{S}_k, f_k\}_{k=1,2}$ est un revêtement de S_k , g une application continue de S_1 dans S_2 et si $\hat{S}_1$ est simplement connexe, il existe une application $\hat{g} : \hat{S}_1 \rightarrow \hat{S}_2$ satisfaisant à (1) $(g \circ f_1 = f_2 \circ \hat{g})$.

Démonstration. Si $\gamma(p_1)$ est un germe de S , il peut être prolongé le long de chaque courbe $\hat{p}(t)$ de $\hat{S}_1$ (démonstration déjà vue). On peut donc appliquer le théorème de monodromie à $\hat{S}_1$ simplement connexe.

A.2.1. Corollaire. Si $\{\hat{S}_k, f_k\}_{k=1,2}$ sont deux revêtements de la même surface S et si $\hat{S}_1$ est simplement connexe, il existe une application $\hat{g}$ de $\hat{S}_1$ dans $\hat{S}_2$ telle que $\{\hat{S}_1, \hat{g}\}$ soit un revêtement de $\hat{S}_2$ et $f_2 \circ \hat{g} = f_1$.

Démonstration. Prenons $S_1 = S_2 = S$

$g = 1$ l'identité dans S .

D'après le théorème (A.2) il existe une application $\hat{g} : \hat{S}_1 \rightarrow \hat{S}_2$ vérifiant $g \circ f_1 = f_1 = f_2 \circ \hat{g}$. Il en résulte que $\{\hat{S}_1, \hat{g}\}$ est un revêtement de $\hat{S}_2$.

A.3. Définition. Deux revêtements $\hat{S}_k, f_k$ $k=1,2$ d'une surface S sont isomorphes s'il existe un homéomorphisme $\hat{g}$ de $\hat{S}_1$ sur $\hat{S}_2$ tels que $f_2 \circ \hat{g} = f_1$.

A.3.1. Lemme. Si $\{\hat{S}_k, f_k\}_{k=1,2}$ sont deux revêtements de S et si $\hat{S}_1$ et $\hat{S}_2$ sont simplement connexes et connexes alors $\{\hat{S}_1, f_1\}$ et $\{\hat{S}_2, f_2\}$ sont isomorphes.

Démonstration. $\hat{S}_1$ est simplement connexe, d'après le corollaire (A.2.1), il existe $\hat{g} : \hat{S}_1 \rightarrow \hat{S}_2$ telle que $\{\hat{S}_1, \hat{g}\}$ soit un revêtement de $\hat{S}_2$ or $\hat{S}_2$ est simplement connexe d'après le corollaire (1.1 § 3 chap. II) $\hat{g}$ est un homéomorphisme de $\hat{S}_1$ sur $\hat{S}_2$. Il en résulte que chaque surface possède au plus un revêtement simplement connexe à un isomorphisme près.

A.3.2. Définition. Si $\{\hat{S}, f\}$ est un revêtement de S où S est simplement connexe, on l'appelle le revêtement universel.

B.- Revêtement universel

B.1.- Théorème. Toute surface S connexe possède un revêtement universel.

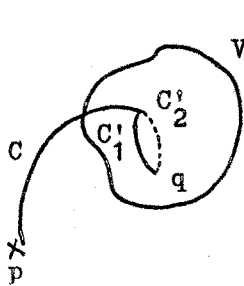
Démonstration. Soit p_0 un point de S , p un point de S , C_1 et C_2 deux courbes de S joignant p_0 à p . On définit dans l'ensemble des couples $(p, C)_p \in S$, C courbe joignant p_0 à p , une relation d'équivalence

$(p, C_1) \simeq (p, C_2)$ si et seulement si C_1 et C_2 sont homotopes ($C_1 \approx C_2$).

Soit $\hat{S} = \{ \hat{p} = [(p, C)] \}$ $\hat{p}$ est la classe d'équivalence d'un couple (p, C) .

a) Construction d'une topologie sur $\hat{S}$

- Soit V un voisinage simplement connexe de p (il en existe) par définition



$$\hat{V} = \{ \hat{q} \} = \{ [(q, C_1)] \} \quad q \in V, \quad C_1 = C + C'_1$$

C'_1 est une courbe joignant p à q dans V . On définit bien ainsi un élément de $\hat{S}$: en effet si $C_2 = C + C'_2$ où C'_2 est une courbe joignant p à q dans V alors $C'_2 \approx C'_1$ donc $C + C'_2 \approx C + C'_1$.

Un ouvert de $\hat{S}$ est réunion quelconque de tels voisinages $\hat{V}$.

b) Soit $f : \hat{S} \rightarrow S$ telle que $f(\hat{p}) = p$. Alors chaque point de S possède un voisinage V tel que $f^{-1}(V) = \bigcup_{\alpha} \hat{V}_{\alpha}$ où f est un homéomorphisme de $\hat{V}_{\alpha}$ sur V .

Démonstration. Soit V un voisinage simplement connexe de p . $f^{-1}(p) = \bigcup_{\alpha} [(p, C_{\alpha})]$ où C_{α} est une courbe joignant p_0 à p . Pour α fixé, posons

$$\hat{V}_{\alpha} = \{ \hat{q}_{\alpha} = [(q, C_{\alpha}^1)] / C_{\alpha}^1 = C_{\alpha} + C'_1 \text{ où } C'_1 \text{ est une courbe joignant } p \text{ à } q \text{ dans } V \}.$$

i) $f^{-1}(V) \supset \bigcup_{\alpha} \hat{V}_{\alpha}$ évident

ii) $f^{-1}(V) \subset \bigcup_{\alpha} \hat{V}_{\alpha}$: soit $\hat{q} \in f^{-1}(V)$ alors $\hat{q} = [(q, C)]$ où q appartient à V

et C est une courbe joignant p_0 à q .

Soit C'_1 une courbe dans V joignant p à q et soit $C_{\alpha} = C - C'_1$. Dans ces conditions

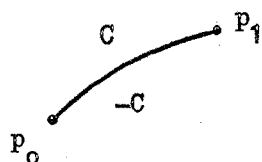
$C_{\alpha} + C'_1 \approx C - C'_1 + C'_1 \approx C$ (voir note) donc $[(q, C)] = [(q, C + C'_1)]$ et $\hat{q} \in \hat{V}_{\alpha}$.

iii) Si $\alpha \neq \beta$ alors $\hat{V}_{\alpha} \cap \hat{V}_{\beta} = \emptyset$.

Supposons qu'il existe $\hat{q} \in \hat{V}_\alpha \cap \hat{V}_\beta$ alors $\hat{q} = [(q, C_\alpha^1)] = [(q, C_\beta^1)]$ donc $C_\alpha^1 \approx C_\beta^1$
 c'est à dire $C_\alpha + C_1' \approx C_\beta + C_2'$ avec $C_1' \approx C_2'$ (p et q sont dans V simplement connexe). Il en résulte que $C_\alpha \approx C_\beta$ (voir note).

NOTE.— Ces propriétés sur les courbes homotopes résultent du fait que pour toute courbe C d'origine p_0 , d'extrémité p_1 , la courbe fermée $C - C$ est homotope à la courbe $\{p_0\}$ réduite au point p_0 .

Démonstration.



$$C : t \in [0, 1] \rightarrow f(t) \in C$$

$$-C : t \in [0, 1] \rightarrow f(1-t) \in -C$$

$$C - C : g(t) \in [0, 1] \begin{cases} g(t) = f(2t) & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ g(t) = f(2 - 2t) & \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

$$\text{pour } 0 \leq u \leq 1 \text{ posons } F(t, u) = \begin{cases} f(2tu) & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ f(2u - 2tu) & \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

or $F(t, u)$ est une application continue de $[0, 1] \times [0, 1]$ dans S .

$$F(t, 0) = \{p_0\}$$

$$F(0, u) = f(0) = p_0$$

$$F(t, 1) \text{ courbe } (C - C)$$

$$F(1, u) = f(0) = p_0$$

$F(t, u)$ traduit la propriété d'homotopie.

c) $\hat{S}$ est connexe

Soit $\hat{p} = [(p, C)]$ où C est définie par l'application :

$$t \in [0, 1] \rightarrow p(t) \quad p(0) = p_0 \quad p(1) = p.$$

Pour $0 \leq \tau \leq 1$ soit $C_\tau = \{p(t) ; 0 \leq t \leq \tau\}$.

$\hat{p}(\tau) = [(p(\tau), C_\tau)]$ $\hat{p}(\tau)$ définit une courbe sur $\hat{S}$ joignant $\hat{p}_0 = [(p_0, C_0 \equiv p(0))]$ à $\hat{p}$. On a d'autre part $f\hat{p}(\tau) = p(\tau)$ donc $\hat{p}(\tau)$ est le relèvement de $p(\tau)$ à partir de p_0 .

On peut continuer $\hat{S}$ le long de toute courbe $p(\tau)$ à partir de $\hat{p}_0$.

d) $\hat{S}$ est un espace topologique séparé.

Soit $\hat{p}_1$ et $\hat{p}_2$ deux points de $\hat{S}$ $\hat{p}_1 = [p_1, c_1]$
 $\hat{p}_2 = [p_2, c_2]$

si $p_1 \neq p_2$: il existe des voisinages disjoints de p_1 et p_2 , donc de $\hat{p}_1$ et $\hat{p}_2$

si $p_1 = p_2 = p$ $\hat{p}_1 \neq \hat{p}_2$ entraîne que c_1 n'est pas homotope à c_2 .

Soit V un voisinage simplement connexe de p , $\hat{V}_1$ et $\hat{V}_2$ les voisinages de $\hat{p}_1$ et $\hat{p}_2$.

Montrons que $\hat{V}_1 \cap \hat{V}_2 = \emptyset$.

Par l'absurde : soit $\hat{q} \in \hat{V}_1 \cap \hat{V}_2$: $\hat{q} = [q_1, c_1 + c'_1] = [q_2, c_2 + c'_2]$

donc : $q_1 = q_2$, $c_1 + c'_1 \approx c_2 + c'_2$ or $c'_1 \approx c'_2$ donc $c_1 \approx c_2$, ce qui est contraire à l'hypothèse.

C.- Groupe fondamental d'une surface S

C.1.- Définition. Un automorphisme d'un revêtement $\{\hat{S}, f\}$ d'une surface S est un isomorphisme g de $\hat{S}$ sur $\hat{S}$ tel que $f \circ g = f$. (Les automorphismes de $\hat{S}$ forment un groupe).

C.2.- Lemme. Si g est un automorphisme d'un revêtement $\{\hat{S}, f\}$ où $\hat{S}$ est connexe, et si $\hat{p}_0$ est un point de $\hat{S}$ alors g est déterminé par son action sur $\hat{p}_0$.

Démonstration. Soit $\hat{p}_1$ un point de $\hat{S}$ et $\hat{C}$ une courbe joignant $\hat{p}_0$ à $\hat{p}_1$. Soit C la projection de $\hat{C}$ sur S et $\hat{C}'$ le relèvement de C à partir de $g(\hat{p}_0)$ alors l'extrémité de $\hat{C}'$ est $g(\hat{p}_1)$.

C.2.1.- Corollaire. Si un automorphisme possède un point fixe, c'est l'identité.

C.3.- Lemme. Le groupe d'automorphisme $\mathcal{G}$ du revêtement universel d'une surface S connexe est en correspondance biunivoque avec les classes d'homotopie des courbes d'origine et d'extrémité p_0 point de S .

Démonstration. Soient p_0 un point de S , g un automorphisme du revêtement universel $\{\hat{S}, f\}$ de S .

Soit $\hat{p}_0 \in f^{-1}(p_0)$.

$\hat{p}_0$ et $g(\hat{p}_0)$ déterminent g car $\hat{S}$ est connexe (lemme C.2). Soit $\hat{C}$ une courbe joignant $\hat{p}_0$ à $g(\hat{p}_0)$: sa projection C sur S est une courbe fermée d'origine et d'extrémité p_0 . Soit $\hat{C}_1$ une autre courbe joignant $\hat{p}_0$ à $g(\hat{p}_0)$; $\hat{C}_1$ et $\hat{C}$ sont homotopes ($\hat{S}$ est simplement connexe) donc C_1 et C sont homotopes :

à un élément g de $\mathcal{G}$ on peut donc faire correspondre la classe d'homotopie d'une courbe C , projection d'une courbe $\hat{C}$ joignant $\hat{p}_0$ à $g(\hat{p}_0)$.

$$g \in \mathcal{G} \longmapsto [(C)].$$

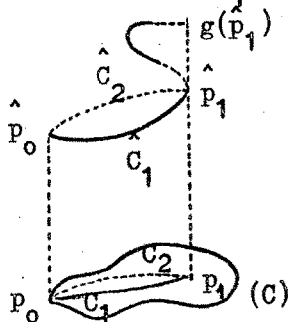
L'application est injective, en effet

si $\tilde{g} \neq g$ alors $\tilde{g}(\hat{p}_0) \neq g(\hat{p}_0)$ donc $\tilde{C}$ n'est pas homotope à C (sinon par monodromie $\hat{C}$ et $\tilde{C}$ seraient homotopes sans avoir même extrémité).

L'application est surjective

Soient C une courbe fermée en p_0 et $\hat{p}_1$ un point de $\hat{S}$.

Définissons $g(\hat{p}_1)$:



Soit $\hat{C}_1$ une courbe joignant $\hat{p}_0$ à $\hat{p}_1$, de projection C_1 sur S . $g(\hat{p}_1)$ est l'extrémité du relèvement de la courbe $C + C_1$ à partir de $\hat{p}_0$.

Justification : $g(\hat{p}_1)$ ainsi défini est indépendant de $\hat{C}_1$. Soit $\hat{C}_2$ une autre courbe joignant $\hat{p}_0$ à $\hat{p}_1$.

$\hat{S}$ est simplement connexe donc $\hat{C}_2 \approx \hat{C}_1$ donc $C + C_1 \approx C + C_2$. Par monodromie il en est de même des relèvements à partir de $\hat{p}_0$.

En particulier le relèvement de C est une courbe $\hat{C}$ joignant $\hat{p}_0$ à $g(\hat{p}_0)$.

A toute courbe C on fait correspondre un automorphisme g .

C.3.1.- Corollaire. Les classes d'homotopie des courbes fermées en deux points d'une surface connexe sont en correspondance biunivoque.

En effet, si p_0 et p_1 sont deux points de S on a :

$$[[c_0]] \longleftrightarrow g \in \mathcal{G} \longleftrightarrow [[c_1]].$$

C.3.2.- Corollaire. S est simplement connexe si et seulement si $\mathcal{G}$ se réduit à l'identité. S simplement connexe $\iff$ il existe une classe d'homotopie $\iff$ il existe un seul automorphisme qui est l'identité

C.4.- Définitions

C.4.1.- Le groupe $\mathcal{G}$ d'automorphismes du revêtement universel de S s'appelle le groupe fondamental de S .

C.4.2.- Soit $\mathcal{G}$ un groupe d'homéomorphismes d'un espace topologique X . Pour tout point p de X on définit E , l'orbite de p sous $\mathcal{G}$

$$E = \{g(p)\}_{g \in \mathcal{G}}.$$

C.4.3.- Le groupe $\mathcal{G}$ est discret si tout élément g de $\mathcal{G}$ distinct de l'identité n'a pas de point fixe et si chaque orbite est un ensemble discret dans X .

C.5.- Lemme. Si $\{\hat{S}, f\}$ est un revêtement de S , le groupe $\mathcal{G}$ des automorphismes de $\{\hat{S}, f\}$ est discret.

1. Tout élément g distinct de l'identité n'a pas de point fixe (sinon g est l'identité)

2. Soit $\hat{p} \in \hat{S}$ et E l'orbite de $\hat{p}$. $p = f(\hat{p})$ donc $E \subset f^{-1}(p)$ $\{\hat{S}, f\}$ est un revêtement de S , il existe un voisinage V de p tel que $f^{-1}(V) = \bigcup_{\alpha} \hat{V}_{\alpha}$ et $f|_{\hat{V}}$ est un homéomorphisme de $\hat{V}_{\alpha}$ sur V donc $\hat{V}_{\alpha}$ ne contient aucun autre point de $f^{-1}(p)$, donc de E . E est discret.

Remarques.

C.5.1.- Si $\hat{S}$ est simplement connexe alors $E = f^{-1}(p)$. Si $\hat{p}_1 \in f^{-1}(p)$, il existe $g \in \mathcal{G}$ tel que $g(\hat{p}) = \hat{p}_1$: en effet, soit $\hat{C}$ une courbe joignant $\hat{p}$ à $\hat{p}_1$ et C la projection de $\hat{C}$, à la classe d'homotopie de C on fait correspondre $g \in \mathcal{G}$ tel que $g(\hat{p}) = \hat{p}_1$.

C.5.2.- Si S^{est} une surface de Riemann, $\{\hat{S}, f\}$ un revêtement de S avec la structure conforme induite sur $\hat{S}$ alors les automorphismes de $\hat{S}$ sont des transformations conformes : en effet, localement f et f^{-1} sont inverses, l'une de l'autre, analytiques donc g est analytique donc conforme. ($f \circ g = f$)

C.6.- Lemme. Soit $\mathcal{G}$ un groupe discret de transformations conformes du plan complexe dans lui-même, alors $\mathcal{G}$ est l'un des trois groupes suivants :

- 1) $\mathcal{G} = \{\text{id}\}$
- 2) $\mathcal{G} = \{g \mid g(Z) = Z + nb \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad b \in \mathbb{C}\}$
- 3) $\mathcal{G} = \{g \mid g(Z) = Z + nb + nc \quad m, n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad b \neq 0 \quad c/b \text{ non réel}\}$

Démonstration. Ces trois groupes sont discrets (évident).

Soit $g(Z)$ une transformation conforme du plan dans lui-même sans point fixe, alors $g(Z)$ est une transformation analytique, bijective, donc $g(Z) = aZ + b$.

$g(Z) = Z \implies Z = aZ + b \implies \begin{cases} a = 1 \\ b \neq 0 \end{cases} \quad (\text{sinon } g(Z) \text{ aurait un point fixe})$
donc $g(Z) = Z + b$.

Soit E l'orbite de l'origine sous $\mathcal{G} \quad E = \{b\}_{g \in \mathcal{G}}$

E est discret, il n'y a donc qu'un nombre fini de points de E dans chaque domaine borné du plan :
si $E = \{0\}$, $\mathcal{G} = \{\text{id}\}$;
sinon il existe $w_1 \neq 0$, w_1 appartenant à E
tel que $g(Z) = Z + b \in \mathcal{G} \implies |b| \geq |w_1|$.

Supposons que $\mathcal{G}$ ne soit ni de la forme (1), ni de la forme (2), alors il existe $g \in \mathcal{G}$ (donc $b \in \mathbb{C}$) et $b \neq mw_1$ (m entier).

Soit $w_2 \in E$, tel que $|w_2| \leq |b|$ $\forall b \neq mw_1$; $z + b \in \mathcal{G}$.

$w_2 \neq \lambda w_1$ avec λ réel : en effet, si $w_2 = \lambda w_1$ il y aurait un élément entre 0 et w_1 soit $(w_2 - m_0 w_1)$ pour m_0 convenable qui appartiendrait à E , d'où la contradiction.

$w_2 \neq \lambda w_1$ donc $\frac{w_2}{w_1}$ n'est pas réel et $mw_1 + nw_2 \in E$ pour m, n entiers.

Montrons que $E = \{mw_1 + nw_2\}_{m,n \in \mathbb{N}}$. En effet, l'ensemble $\{mw_1 + nw_2\} = F$ forme un réseau de parallélogrammes. Soit $b \in E$ et b_0 le sommet du parallélogramme le plus proche de b , alors si $b \neq b_0$ il existe $w_3 \in E$ tel que $|w_3| < |w_2|$ ce qui contredit la définition de w_2 .

§ 4.- Classification générale

1. Théorème. Soit S une surface de Riemann connexe, $\{\hat{S}, f\}$ le revêtement universel de S .

1) Si $\hat{S}$ est elliptique alors S est la sphère

2) Si $\hat{S}$ est parabolique, alors S est ou bien a) le plan

b) le plan moins l'origine

c) le tore plat.

1.1.- Corollaire. Pour toute surface S , distinctes des quatre citées dans le théorème 1, le revêtement universel est hyperbolique ($\hat{S}$ est le disque unité).

Démonstration. Soit $\mathcal{G}$ le groupe fondamental de S .

① $\hat{S}$ elliptique. $\hat{S}$ est simplement connexe et elliptique. $\hat{S}$ est la sphère de Riemann. Les transformations conformes de $\hat{S}$ sont de la forme $Z \rightarrow g(Z) = \frac{aZ + b}{cZ + d}$ $g(Z) = Z$ donne 1 ou 2 points fixes sauf si $g(Z) \equiv Z$, donc $\mathcal{G} = \{id\}$.

Pour tout point p_0 de S , $f^{-1}(p_0)$ ne contient qu'un point et S est l'image conforme de $\hat{S}$.

S est la sphère.

② $\hat{S}$ parabolique et simplement connexe est conforme au plan complexe.

D'après le lemme C.6 § 3, il y a trois possibilités pour le groupe fondamental $\mathcal{G}$ de S .

a) $\mathcal{G} = \{\text{id}\}$ alors S est le plan

b) $\mathcal{G} = \{Z \rightarrow g(Z) = Z + nb\}$ alors S est conforme au domaine $0 < |w| < \infty$

(le plan moins l'origine). En effet, un point p de S s'identifie à l'orbite $E = f^{-1}(p)$ $Z = \{g(f^{-1}(p))\}_{g \in \mathcal{G}} = \{z + nb\}_{n \in \mathbb{N}}$. La transformation $Z \mapsto w = e^{\frac{2i\pi}{b} Z}$ du plan sur le plan moins un point réalise la projection de $\hat{S}$ sur S . S est conforme au plan moins un point.

c) $\mathcal{G} = \{Z \rightarrow g(Z) = Z + mb + nc\}$

$\hat{S}$ est le plan complexe et tout point p de S s'identifiant à l'orbite $E = f^{-1}(p)$ on

a) $S \equiv \hat{S} / \mathcal{G}$ (du point de vue conforme) or l'ensemble quotient $\hat{S} / \mathcal{G}$ est le tore plat (ensemble des points d'un parallélogramme construit sur b et c dans lequel on identifie les côtés parallèles).

S est le tore plat.

1.1.1.- Remarque. Pour tout autre surface de Riemann S on a toujours la représentation $S = \hat{S} / \mathcal{G}$ où $\hat{S}$ est le disque unité $|Z| < 1$ et $\mathcal{G}$ un groupe discret de transformations de $\hat{S}$ de la forme

$$g(Z) = e^{i\alpha} \frac{Z - Z_0}{1 - \bar{Z}_0 Z} \quad |Z_0| < 1.$$

1.2.- Corollaire (théorème de Picard)

Une fonction méromorphe dans tout le plan et non constante prend toute valeur complexe avec au plus deux exceptions.

Démonstration. Soit $g(Z)$ une application analytique du plan dans la sphère. Supposons qu'il existe trois points exceptionnels (trois valeurs complexes qui ne sont pas prises par la fonction).

Soit $D = S - \{3 \text{ points}\}$ g est une transformation analytique du plan sur D .

Soit $\{\hat{S}, f\}$ le revêtement universel de D .

D n'est équivalent (même topologiquement et à fortiori conformément) à aucune des 4 surfaces du théorème 1, donc $\hat{S}$ est hyperbolique, c'est à dire conforme au disque unité.

Soit $\tilde{g}$ un relèvement de g dans $\hat{S}$ (§3.A.2) $w = \tilde{g}(Z)$ est une application du plan sur le disque et $g(Z) = f \circ \tilde{g}(Z)$, $\tilde{g}$ analytique, et bornée dans le plan est constante, donc g est aussi constante.

Deuxième partie

Chapitre 1.-

1.- Définition du plan hyperbolique

(ou modèle de Poincaré de la géométrie non euclidienne) c'est le disque

$|z| < 1$ muni de la métrique riemannienne définie par

$$\underline{1.1} \quad g_{ij} = \left[\frac{2}{1 - |z|^2} \right]^2 \delta_{ij}$$

1.2 soit $z(t)$ une courbe différentiable $t \in [a, b]$. Sa longueur hyperbolique

$$\text{est } \int_a^b \frac{2}{1 - |z|^2} \left| \frac{dz}{dt} \right| dt$$

2.- Lemme

2.1 les transformations de la forme $w = e^{i\alpha} \frac{z - z_0}{1 - \bar{z} \bar{z}_0}$ sont des isométries du plan hyperbolique.

démonstration

- (1) est une bijection sur $|w| < 1$

- montrons que $|w| < 1$

$$|w|^2 = \frac{(z - z_0)(\bar{z} - \bar{z}_0)}{(1 - z \bar{z}_0)(1 - \bar{z} z_0)} = \frac{|z|^2 - z \bar{z}_0 - \bar{z} z_0 + |z_0|^2}{1 - \bar{z}_0 z - z_0 \bar{z} + |z_0|^2 |z|^2}$$

$$1 - |w|^2 = \frac{1 - |z|^2 - |z_0|^2 + |z_0|^2 |z|^2}{1 - \bar{z}_0 z - z_0 \bar{z} + |z_0|^2 |z|^2}$$

$$\underline{2.2} \quad 1 - |w|^2 = \frac{(1 - |z|^2)(1 - |z_0|^2)}{|1 - z \bar{z}_0|^2} > 0$$

donc $|w| < 1$

- $w(Z)$ est une bijection :

$$Z = \frac{w + e^{i\alpha} Z_0}{e^{i\alpha} - w \bar{Z}_0} \quad \forall w \quad |w| < 1$$

$$\text{car } \left| \frac{e^{i\alpha}}{\bar{Z}_0} \right| > 1$$

$$Z = e^{-i\alpha} \frac{w + e^{i\alpha} Z_0}{1 - w e^{i\alpha} \bar{Z}_0} \quad \text{qui est de la forme 2.1}$$

b) la longueur de toute courbe est conservée par l'application $Z \rightarrow w$

$$\left| \frac{dw}{dt} \right| = \left| \frac{dw}{dZ} \right| \left| \frac{dZ}{dt} \right| = \left| \frac{1}{1 - Z \bar{Z}_0} + \frac{(Z - Z_0) \bar{Z}_0}{(1 - Z \bar{Z}_0)^2} \right| \times \left| \frac{dZ}{dt} \right|$$

$$\underline{2.3} \quad = \left| \frac{1 - |Z_0|^2}{(1 - Z_0 \bar{Z})^2} \right| \times \left| \frac{dZ}{dt} \right|$$

en rapprochant de 2.2 il vient

$$\int_a^b \frac{2}{1 - |w|^2} \left| \frac{dw}{dt} \right| dt = \int_a^b \frac{2}{1 - |Z|^2} \left| \frac{dZ}{dt} \right| dt$$

3.- Lemme de Schwarz-Pick

3.1 soit $w = f(Z)$ une application analytique de $|Z| < 1$ dans $|w| < 1$.

La longueur hyperbolique de chaque courbe est réduite sauf dans le cas où

$f(Z)$ est de la forme 2.1

démonstration

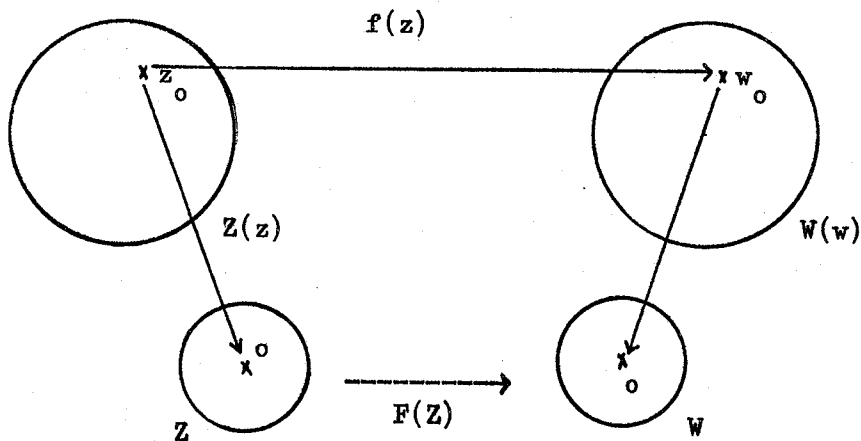
Il suffit de démontrer que si $f(z) \neq 2.1$

$$\forall z_0 \quad |z_0| < 1 \quad w_0 = f(z_0)$$

$$3.2 \quad \frac{1}{1 - |w_0|^2} \left| \frac{dw}{dz} \right|_{z=z_0} < \frac{1}{1 - |z_0|^2}$$

soit $Z(z)$ et $W(w)$ des transformations de la forme 2.1 telle que

$$Z(z_0) = 0 \quad W(w_0) = 0$$



$Z(z)$ et $W(w)$ étant bijectives

$$W = F(Z)F = W_0 f o Z^{-1} \quad F(0) = 0$$

appliquons le lemme de Schwarz

- ou $F(Z) = e^{i\beta} Z$ donc f est de la forme 2.1

- ou $|F'(0)| < 1$

W et Z étant des isométries :

$$\frac{1}{1 - |w_0|^2} \left| \frac{dw}{dt} \right| = \left| \frac{dW}{dt} \right| \quad (W_0 = 0)$$

$$\frac{1}{1 - |z_0|^2} \left| \frac{dz}{dt} \right| = \left| \frac{dZ}{dt} \right| \quad (Z_0 = 0)$$

$$\left| \frac{dW}{dZ} \right|_0 = |F'(0)| = \left| \frac{dW}{dt} / \frac{dZ}{dt} \right| < 1$$

$$\text{donc } \frac{1}{1 - |w_0|^2} \left| \frac{dw}{dz} \right|_{z=z_0} < \frac{1}{1 - |z_0|^2}$$

3.3 Corollaire

toute transformation conforme de $|z| < 1$ sur $|w| < 1$ est de la forme 2.1
sinon la transformation et son inverse n'étant pas de la forme 2.1 rétrécissent
la longueur hyperbolique.

4.- Lemme

les géodésiques du plan hyperbolique sont les cercles orthogonaux à $|z| = 1$

démonstration

soient z_0 et z_1 deux points du plan hyperbolique, cherchons une géodésique
passant par z_0 z_1
soit $w = e^{i\alpha} \frac{z - z_0}{1 - \bar{z} z_0}$ telle que $z_0 \rightarrow w = 0$
 $z_1 \rightarrow w(z_1) \text{ réel } > 0$
 $= c$

NB $w(z)$ conserve les longueurs, donc on peut chercher à minimiser la longueur

de la courbe $w(t)$ joignant 0 à c $w(t) = w(a) = 0$
 $w(b) = c$

$w = u + iv$ $|w|^2 \geq |u|^2$ $u(t)$ est une courbe joignant 0 à c.

$$\frac{1}{1 - |w|^2} \geq \frac{1}{1 - |u|^2}$$

$$\left| \frac{dw}{dt} \right| \geq \left| \frac{du}{dt} \right|$$

$$\int_a^b \frac{2}{1-|w|^2} \left| \frac{dw}{dt} \right| dt \geq \int_a^b \frac{2}{1-|u|^2} \left| \frac{du}{dt} \right| dt \geq \int_a^b \frac{2}{1-u^2} \frac{du}{dt} dt$$

$$\geq \int_0^c \frac{2}{1-u^2} du = \left| \log \frac{1-u}{1+u} \right| \Big|_0^c$$

égalité si $|w| = |u|$ donc $v = 0$

$$\left| \frac{du}{dt} \right| = \frac{du}{dt}$$

$w(t)$ est le segment de l'axe réel $[0, c]$ donc $z(t)$ est l'arc^{de} cercle orthogonal à $|z| = 1$ passant par z_1 et z_0

5.- Lemme

5.1 le plan hyperbolique est une surface complète.

démonstration

Soit $z(t)$ $0 \leq t < 1$ une courbe qui tend vers la frontière

Soit $z = re^{i\theta}$

$$\int_0^{\tau} \frac{2}{1-|z|^2} \left| \frac{dz}{dt} \right| dt \geq \int_0^{\tau} \frac{2}{1-r^2} dr \rightarrow +\infty \text{ quand } \tau \rightarrow 1 \text{ c'est-à-dire quand}$$

$$r \rightarrow 1$$

5.2 rappel : la courbure de Gauss K d'une métrique riemannienne de la forme

$$g_{ij} = \lambda^2 \delta_{ij} \text{ est } K = -\frac{\Delta \log \lambda}{\lambda^2}$$

6.- Lemme

la courbure de Gauss du plan hyperbolique $K = -1$

$$\lambda = \frac{2}{1 - z \bar{z}} \quad \log \lambda = \log 2 - \log (1 - z \bar{z})$$

$$\Delta \log \lambda = 4(\log \lambda)_{z \bar{z}}$$

$$(\log \lambda)_Z = \frac{\bar{Z}}{1 - Z\bar{Z}}$$

$$(\log \lambda)_{Z\bar{Z}} = \frac{1}{1 - Z\bar{Z}} + \frac{Z\bar{Z}}{(1 - Z\bar{Z})^2} = \frac{1}{(1 - Z\bar{Z})^2}$$

$$K = -4 \cdot \frac{1}{(1 - Z\bar{Z})^2} \times \frac{(1 - Z\bar{Z})^2}{4} = -1$$

7.- Théorème

7.1 sur toute surface de Riemann S , il existe une métrique riemannienne telle que la structure conforme induite par la métrique coïncide avec la structure originale ; on peut choisir la métrique telle que la courbure de Gauss soit constante.

démonstration

Soit $\{\hat{S}, f\}$ le revêtement universel de S

1° $\hat{S} = \text{sphère}$ on prend sur S la métrique canonique classique, c'est-à-dire celle induite par son plongement dans R^3 . Par projection stéréographique on trouve la forme de la métrique correspondante dans le plan ; nous avons vu (chap. I)

$$g_{ij} = \left(\frac{2}{1 + |z|^2} \right)^2 \delta_{ij} \quad \text{d'où} \quad \lambda = \frac{2}{1 + |z|^2} = \frac{2}{1 + Z\bar{Z}}$$

$$K = - \frac{\Delta \log \lambda}{\lambda^2} \quad \Delta \log \lambda = \frac{4}{(1 + Z\bar{Z})^2} \quad \text{d'où} \quad \underline{\underline{K = 1}}$$

2° $\hat{S} = \text{plan}$ muni de la métrique euclidienne $K = 0$

Soit $\hat{V}$ un voisinage sur $\hat{S}$ $f = \hat{V} \longrightarrow V$

Soient p et $q \in V$ $\hat{p}$ et $\hat{q} \in \hat{V}$ tels que

$$p = f(\hat{p}) \quad q = f(\hat{q}).$$

On pose $d(p, q) = d(\hat{p}, \hat{q})$ car $\hat{p}_1$ et $\hat{q}_1$ sont tels que $f(\hat{p}_1) = p$

$$f(\hat{q}_1) = q$$

$\hat{p}_1$ et $\hat{q}_1$ appartenant un même voisinage de $\hat{S}$, on passe de $\hat{p}$ à $\hat{p}_1$
 $\hat{q}$ à $\hat{q}_1$ par un

automorphisme du plan, qui conserve la distance euclidienne.

$$\text{donc } d(\hat{p}_1, \hat{q}_1) = d(\hat{p}, \hat{q}).$$

3° $\hat{S}$ = disque unité muni de la métrique hyperbolique $K = -1$

On fait le même raisonnement avec les automorphismes de $\hat{S}$: $Z = e^{ia} \frac{z - z_0}{1 - \bar{z} \bar{z}_0}$ qui conservent la distance hyperbolique.

8.- Théorème de Picard (démonstration de H. Huber)

8.1 soit $f(z)$ méromorphe dans $0 < |z| < \delta$ supposons qu'il existe trois valeurs

qui ne sont pas prises par $f(z)$; alors $f(z)$ peut être définie à l'origine

telle que $f(z)$ soit méromorphe dans $|z| < \delta$

démonstration

f est une transformation analytique à valeurs dans la sphère ; montrons qu'on peut la prolonger à l'origine.

f est un homéomorphisme local du plan (Z) sur S , donc pour chaque point p_0 de S , il existe z_0 de $\hat{S}$ et un voisinage V de p_0 tel que $f^{-1}(V)$ soit un voisinage $\hat{V}$ de z_0 . En prenant $\hat{V}$ pour coordonnées locales dans V on définit la métrique riemannienne $g_{ij} = \mathcal{J}_{ij}$. C'est indépendant du choix de $z_0 \in f^{-1}(p_0)$, en effet, deux voisinages $\hat{V}$ et $\hat{V}_1$ dans $f^{-1}(V)$ sont transformés l'un dans l'autre par un automorphisme de $\hat{S}$ c'est-à-dire par une translation du plan qui conserve la métrique euclidienne. On a défini une métrique sur S , localement euclidienne donc $K = 0$.

Soit $D =$ domaine : la sphère moins les trois points. $\hat{D}$ revêtement universel de D .

$$\hat{D} \longleftrightarrow |w| < 1$$

a) si $f(z) \longrightarrow p_0$ quand $z \longrightarrow 0$.

Soit φ_α une carte normalisée à p_0 . $\varphi_\alpha^{-1} [f(z)]$ a une singularité qu'on peut enlever à l'origine ; $f(z)$ est méromorphe en 0 .

b) $f(z) \not\rightarrow p_0$ quand $z \longrightarrow 0$.

Il existe V_i $i = 1, 2, 3$ voisinages des trois points de $S - D$ tels que les $\bar{V}_i$ soient disjoints, et tels que

$$\forall \varepsilon > 0 \exists z \quad 0 < |z| < \varepsilon \quad \text{tel que} \quad f(z) \in S - \bigcup V_i$$

en effet, si cela n'était pas :

$$\forall \{V_i\} \exists \varepsilon \quad \text{tel que} : f \{0 < |z| < \varepsilon\} \longrightarrow \bigcup V_i$$

or $\{0 < |z| < \varepsilon\}$ étant connexe $\exists_j$ tel que $f \{0 < |z| < \varepsilon\} \subset V_j$

donc $f(z) \longrightarrow p_j \in V_j$ quand $z \longrightarrow 0$ ce qui est contraire à l'hypothèse, donc

$$\exists z_n : z_n \longrightarrow 0$$

$$f(z_n) \notin \bigcup V_i$$

or $S - \bigcup V_i$ est compact : donc $\exists$ une suite partielle z_p telle que $f(z_p)$

converge vers un point $p_0 \notin \bigcup V_i$

Soit $p = \varphi_\alpha [W]$ une carte normalisée à p_0 .

$\varphi_\alpha = \{ |z| < \varepsilon \} \rightarrow V$ voisinage de p_0 .

Il faut démontrer que $\exists \varepsilon > 0$ tel que

$$f : \{ 0 < |z| < \varepsilon \rightarrow V \}$$

On peut alors enlever la singularité de $\varphi_\alpha^{-1} [f(z)]$

Le revêtement universel de $\Delta = 0 < |z| < \delta$ est le disque. On a sur Δ la métrique hyperbolique induite par la projection du revêtement universel $|w| < 1$

sur Δ . Soit $d(p_1; p_2)$ la distance de p_1 et p_2 pour cette métrique. Soit

ρ tel que $\{ p, d(p, p_0) < \rho \} \subset V$

$$\exists N \text{ tel que } n > N \implies d[f(z_n), p_0] < \frac{\rho}{2}$$

Soit C_n le cercle $|z| = |z_n|$. Nous voulons calculer

ℓ_n , son périmètre pour la métrique hyperbolique. La disque unité est conforme

au demi plan supérieur :

$$Z = \frac{\zeta - i}{\zeta + i} ; \eta > 0 \rightarrow |Z| < 1$$

où $\zeta = \xi + i\eta$.

$$\frac{2}{1 - |Z|^2} \frac{dZ}{d\zeta} = \frac{1}{\eta}$$

$z = e^{i\zeta\delta}$ définit le $\frac{1}{2}$ plan $\eta > 0$ comme revêtement universel du domaine

$$0 < |Z| < \delta.$$

$$|z| = e^{-\eta\delta} \text{ d'où } \eta = -\log \frac{|z|}{\delta}.$$

$$\begin{aligned} \text{la longueur } \ell_n &= \int_0^{2\pi} \frac{1}{\sqrt{\left|\frac{dz}{dt}\right|}} dt = - \int_0^{2\pi} \frac{1}{\log \frac{|z_n|}{\delta}} dz \\ &= - \frac{2\pi}{\log \frac{|z_n|}{\delta}} \end{aligned}$$

quand $z_n \rightarrow 0$ $\ell_n \rightarrow 0$

donc $\exists N_0$ tel que $n > N_0 \implies \ell_n \leq \frac{\rho}{2}$

Soit $w = \tilde{f}(Z)$ le relèvement de $f(z)$ aux revêtements universels.

D'après le lemme de Schwarz-Pick, toute longueur hyperbolique est diminuée.

Donc l'image de C_n a une longueur $\leq \frac{\rho}{2}$ pour $n \geq N_0$

et $d[f(z_n), f(z)] < \frac{\rho}{2} \quad \forall z \in \text{cercle } C_n$.

Donc $n > N \implies d[f(z), p_0] < \rho$
 $n > N_0$

En composant avec φ_α^{-1} nous obtenons une courbe contenue dans $|W| < R$.

Le principe du maximum entraîne que l'image de l'anneau $|z_{n+1}| \leq |z| \leq |z_n|$

par $\varphi_\alpha^{-1}[f(z)]$ est contenu dans $|W| < R$ pour tout $n > N, N_0$.

Donc $\varphi_\alpha^{-1} f(z)$ a une singularité qu'on peut enlever.

Chapitre 2.-

Théorie des surfaces dans un espace euclidien E^n

§ 1 Généralités

1.- Définition

1.1 Une surface S est une transformation différentiable $X(u) : D \longrightarrow E^n$ où

$u = (u_1, u_2)$, $X = (X_1, \dots, X_n)$ et D est un domaine de E^2

1.2 S est régulière si l'application dX est injective. Soit $M = (m_{ij})$ la

matrice d'élément $m_{ij} = \frac{\partial X_i}{\partial u_j}$ $i = 1, \dots, n$ $j = 1, 2$.

On a les équivalences suivantes :

1.3 S régulière $\iff M$ de rang 2

1.4 S régulière $\iff$ Les vecteurs $\frac{\partial X}{\partial u_1}, \frac{\partial X}{\partial u_2}$ sont indépendants.

1.5 S régulière $\iff$ il existe deux indices i, j ; $i < j$ tels que

$$\frac{\partial(X_i, X_j)}{\partial(u_1, u_2)} \neq 0$$

1.6 S régulière $\iff \frac{\partial X}{\partial u_1} \wedge \frac{\partial X}{\partial u_2} \neq 0$

1.7 S régulière $\iff \det G > 0$ où $G = M^t M$.

$$\text{En effet } \det G = \sum_{i < j} \left(\frac{\partial(X_i, X_j)}{\partial(u_1, u_2)} \right)^2 = \left| \frac{\partial X}{\partial u_1} \wedge \frac{\partial X}{\partial u_2} \right|^2$$

2.- Changement de coordonnées

Si $u(\tilde{u})$ est un difféomorphisme d'un domaine $\tilde{D}$ de E^2 sur D , la surface

$\tilde{S}$ définie par $X[u(\tilde{u})]$ $\tilde{u}$ appartenant à $\tilde{D}$ est obtenue par changement de

coordonnées.

$$\text{On a : } \frac{\partial X_i}{\partial \tilde{u}_k} = \sum_j \frac{\partial X_i}{\partial u_j} \cdot \frac{\partial u_j}{\partial \tilde{u}_k}$$

$$\text{Posons } U = (u_{ij}) \quad u_{i,j} = \frac{\partial u_i}{\partial \tilde{u}_j}, \quad \tilde{M} = M \cdot U$$

2.1 S régulière $\iff \tilde{S}$ régulière

En effet : $u(\tilde{u})$ est un difféomorphisme donc $\det U \neq 0$

$$\tilde{G} = {}^t \tilde{M} \cdot \tilde{M} = {}^t U {}^t M M U = {}^t U G U$$

$$\det \tilde{G} = \det G \cdot (\det U)^2$$

$$\text{2.2 } \det \tilde{G} = \det G \cdot \left| \frac{\partial(u_1, u_2)}{\partial(\tilde{u}_1, \tilde{u}_2)} \right|^2$$

3.- Aire d'une surface

3.1 on définit l'aire de S par l'expression $\iint_D \sqrt{\det G} \, du_1 \wedge du_2$

3.2 l'aire d'une surface est invariante par changement de coordonnées de jacobien strictement positif.

$$\text{aire de } \tilde{S} = \iint_{\tilde{D}} \sqrt{\det \tilde{G}} \, d\tilde{u}_1 \, d\tilde{u}_2 = \iint_{\tilde{D}} \sqrt{\det G} \frac{\partial(u_1, u_2)}{\partial(\tilde{u}_1, \tilde{u}_2)} \, d\tilde{u}_1 \, d\tilde{u}_2 \quad \text{si on}$$

suppose que $u \longrightarrow \tilde{u}$ est un difféomorphisme conservant l'orientation du plan,

$$\text{on a : } \frac{\partial(u_1, u_2)}{\partial(\tilde{u}_1, \tilde{u}_2)} > 0 \quad \text{et} \quad \iint_{\tilde{D}} \sqrt{\det G} \frac{\partial(u_1, u_2)}{\partial(\tilde{u}_1, \tilde{u}_2)} \, d\tilde{u}_1 \, d\tilde{u}_2 = \iint_D \sqrt{\det G} \, du_1 \, du_2.$$

4.- Courbe sur une surface

4.1 une courbe $X(t)$ $a \leq t \leq b$ est sur une surface S si pour chaque t_0 , il existe u_0 , de D tel que $X(t_0) = X(u_0)$.

Il peut exister plusieurs u tel que $X(t_0) = X(u_0)$, mais l'application $u \longrightarrow X(u)$ est localement injective donc localement l'application $t_0 \longrightarrow u_0$ est injective.

A chaque courbe différentiable $X(t)$ correspond une courbe différentiable $u(t)$ dans D telle que $X(t) = X[u(t)]$.

4.2 on définit la longueur de la courbe : $L = \int_a^b |X'(t)| dt$

$$\text{où } X'(t) = \begin{pmatrix} X'_1(t) \\ \vdots \\ X'_n(t) \end{pmatrix}$$

$$\text{soit } \xi = \begin{pmatrix} \xi^1 \\ \xi^2 \end{pmatrix} \text{ où } \xi_i = u'_i(t). \quad i = 1, 2$$

$$\text{alors } X'(t) = M \xi \quad |X'_t|^2 = {}^t \xi G \xi. \quad G = (g_{ij})$$

$$\text{on a : } L = \int_a^b \sqrt{{}^t \xi G \xi} dt$$

$${}^t \xi G \xi = \sum_{i,j} g_{ij} u'_i u'_j \quad \text{d'où } L = \int_a^b \sqrt{g_{ij} u'_i u'_j} dt$$

4.3 Changement de coordonnées

$$\text{On a : } \tilde{\xi}_i = \frac{d\tilde{u}_i}{dt} \quad i = 1, 2.$$

$$\xi_i = \frac{du_i}{dt} = \sum_{j=1,2} \frac{\partial u_i}{\partial \tilde{u}_j} \frac{d\tilde{u}_j}{dt} \quad \xi = U \cdot \tilde{\xi}$$

$${}^t \xi G \xi = {}^t (U \tilde{\xi}) G U \tilde{\xi} = {}^t \tilde{\xi} {}^t U G U \tilde{\xi} = {}^t \tilde{\xi} \tilde{G} \tilde{\xi}$$

La longueur d'une courbe est invariante par changement de coordonnées à jacobien positif.

${}^t \xi G \xi$ est la première forme fondamentale

5.- Plan tangent en un point d'une surface

5.1 le plan tangent Π en un point de S est le plan engendré par les vecteurs

$$\frac{\partial X}{\partial u_1}, \frac{\partial X}{\partial u_2}$$

5.2 le plan tangent contient le vecteur tangente à toute courbe $X(t)$ sur la surface

5.3 on définit $\Pi^\perp$ l'espace supplémentaire orthogonal au plan tangent Π à

S . Il est de dimension $n-2$

On l'appelle espace normal à S . Un vecteur N de $\Pi^\perp$ est un vecteur normal à S .

5.4 Si $X(u)$ est de classe C^2 on introduit pour N de $\Pi^\perp$ les quantités

$$b_{ij}(N) = \frac{\partial^2 X}{\partial u_i \partial u_j} \cdot N \quad i = 1, 2 \quad j = 1, 2$$

6.- Courbure des courbes tracées sur S

Soit $X(t)$ une courbe différentiable de S $a \leq t \leq b$.

$$s(t) = \int_a^t |X'(\tau)| d\tau.$$

$X'(t) \neq 0$ donc $s'(t) > 0$

$s(t)$ est une fonction monotone croissante $s(a) = 0$ $s(b) = L$. s est le para-

mètre de longueur : $s'(t) = |X'(t)|$

$X'(s) = X'(t) \frac{dt}{ds}$ $X'(s)$ et $X'(t)$ ont même sens

$$|X'(s)| = 1$$

On a : 6.1 $\sum_{i,j=1,2} g_{ij} u'_i(s) u'_j(s) = 1$

6.2 le vecteur de courbure de la courbe $X(t)$ est $\frac{d^2 X}{ds^2}$

Soit p un point fixe de S : on considère toutes les courbes de S passant par p et leurs vecteurs de courbure au point p on a :

$$\frac{dX}{ds} = \sum_{i=1,2} \frac{\partial X}{\partial u_i} \frac{du_i}{ds}$$

$$\frac{d^2 X}{ds^2} = \sum_{i,j} \frac{\partial^2 X}{\partial u_i \partial u_j} \frac{du_i}{ds} \frac{du_j}{ds} + \sum_i \frac{\partial X}{\partial u_i} \frac{d^2 u_i}{ds^2}$$

pour tout $N \in \Pi^\perp$

$$\frac{d^2 X}{ds^2} \cdot N = \sum_{i,j} \left(\frac{\partial^2 X}{\partial u_i \partial u_j} \cdot N \right) \frac{du_i}{ds} \frac{du_j}{ds}$$

$$= \sum_{i,j} b_{ij}(N) \frac{du_i}{ds} \frac{du_j}{ds}$$

$$= \sum_{i,j} b_{ij}(N) \frac{du_i}{dt} \frac{du_j}{dt} \left(\frac{dt}{ds} \right)^2$$

$$\frac{d^2 X}{ds^2} \cdot N = \frac{\sum_{i,j} b_{ij}(N) \xi_i \xi_j}{\sum_{i,j} g_{ij} \xi_i \xi_j}$$

$g_{(i,j)}$ ne dépend que du point p , b_{ij} ne dépend que du point p et de N ,

donc $\frac{d^2 X}{ds^2} \cdot N$ ne dépend que du point p , de N et du vecteur tangent en p .

$\sum_{i,j=1,2} b_{ij}(N) \xi_i \xi_j$ est la deuxième forme fondamentale

Soit $\xi = u'(t)$ un vecteur tangent donné, $X(t)$ la courbe correspondante.

Pour un vecteur N de $\Pi^\perp$ donné on définit :

$$\underline{6.3} \quad k_1(N) = \max_{\xi} \frac{d^2 X}{ds^2} \cdot N$$

$$\underline{6.4} \quad k_2(N) = \min_{\xi} \frac{d^2 X}{ds^2} \cdot N$$

$k_1(N)$ et $k_2(N)$ sont les racines de l'équation :

$$\underline{6.5} \quad \det (b_{ij}(N) - \lambda g_{ij}) = 0$$

$$0 = (\det g_{ij}) \lambda^2 - \left((g_{11} b_{22}(N) + g_{22} b_{11}(N) - 2 g_{12} b_{12}(N)) \lambda + \det b_{ij}(N) \right)$$

si l'on pose $H(N) = k_1(N) + k_2(N)$

$$K(N) = k_1(N) \cdot k_2(N)$$

on a les formules suivantes

$$\underline{6.6} \quad H(N) = \frac{g_{11} b_{22}(N) + g_{22} b_{11}(N) - 2 g_{12} b_{12}(N)}{\det g_{ij}}$$

$$\underline{6.7} \quad K(N) = \frac{\det b_{ij}(N)}{\det g_{ij}}$$

$b_{ij}(N)$ est linéaire par rapport à N , $H(N)$ est une fonction linéaire de N

donc il existe un vecteur H de $\mathbb{T}^{\perp}$ tel que $H(N) = H \cdot N$.

6.8 H est le vecteur de courbure moyenne

Si $(e_1, e_2, \dots, e_{n-2})$ constitue une base de $\mathbb{T}^{\perp}$

$$N = \sum_{i=1}^{n-2} \eta_i e_i \quad H(N) = \sum_{i=1}^{n-2} \eta_i H(e_i) = N \cdot \left(\sum_{i=1}^{n-2} H(e_i) \cdot e_i \right)$$

$$\text{donc } H = \sum_{i=1}^{n-2} H(e_i) e_i$$

$$\underline{6.9} \quad \text{on définit la courbure de Gauss } K = \sum_{i=1}^{n-2} K(e_i)$$

Remarque : 6.10 dans le cas où $n = 3$ on définit la courbure moyenne $\frac{H(e_1)}{2} = \frac{k_1(e_1) + k_2(e_1)}{2}$

où e_1 est choisi de telle sorte que $\frac{\partial X}{\partial u_1}, \frac{\partial X}{\partial u_2}, e_1$ aient la même orientation que E^3 .

$$\text{par exemple } e_1 = \frac{\frac{\partial X}{\partial u_1} \wedge \frac{\partial X}{\partial u_2}}{\left| \frac{\partial X}{\partial u_1} \wedge \frac{\partial X}{\partial u_2} \right|}$$

6.11 on a : $K = \frac{\det b_{ij}(e_1)}{\det g_{ij}} = k_1(e_1) \cdot k_2(e_1).$

§ 2 Equations fondamentales de la théorie des surfaces

1.1 lemme

Si $X(u)$, de classe C^m est une surface régulière dans E^n , il existe au voisinage de chaque point u_0 , un système de vecteurs $e_k(u)$ $k = 3, 4 \dots n$, de classe C^{m-1} qui forment une base orthonormée de $\mathbb{T}_1(u)$.

Ce sera une conséquence des théorèmes démontrés ultérieurement.

1.2 notations

$\frac{\partial X}{\partial u_1}, \frac{\partial X}{\partial u_2}, e_3, \dots, e_n$ de classe C^{m-1} forment une base de E^n .

On pose :

$$(1-1) \quad \frac{\partial^2 X}{\partial u_i \partial u_j} = \sum_{k=1}^2 \Gamma_{ij}^k \frac{\partial X}{\partial u_k} + \sum_{k=3}^n a_{ij}^k e_k$$

$$(1-2) \quad \frac{\partial e_i}{\partial u_j} = \sum_{k=1}^2 c_{ij}^k \frac{\partial X}{\partial u_k} + \sum_{k=3}^n d_{ij}^k e_k.$$

Ce sont les équations de Gauss - Weingarten

2.- Détermination des coefficients de la première équation (1-1)

On a de façon évidente :

$$2.1 \quad a_{ij}^k = \frac{\partial^2 X}{\partial u_i \partial u_j} \cdot e_k = b_{ij}(e_k)$$

$$2.2 \quad \frac{\partial^2 X}{\partial u_i \partial u_j} \cdot \frac{\partial X}{\partial u_m} = \sum_{m=1}^2 \Gamma_{ij}^k g_{km}$$

si on utilise les symboles de Christoffel $\Gamma_{ij,k} = \frac{\partial^2 X}{\partial u_i \partial u_j} \cdot \frac{\partial X}{\partial u_k}$ il vient :

$$2.3 \quad \Gamma_{ij,k} = \sum_{m=1}^2 \Gamma_{ij}^m g_{mk}$$

En posant $G = (g_{ij})$ et $G^{-1} = (g^{ij})$ on a les relations suivantes :

$$\sum_{k=1}^2 \Gamma_{ij,k} g^{k\ell} = \sum_{m=1}^2 \Gamma_{ij}^m g_{mk} g^{k\ell}$$

avec $g_{mk} g^{k\ell} = \delta_{m,\ell}$

$$\underline{2.4} \quad \sum_{k=1}^2 \Gamma_{ij,k} g^{k\ell} = \Gamma_{ij}^{\ell}$$

$$g_{ij} = \frac{\partial X}{\partial u_i} \cdot \frac{\partial X}{\partial u_j}$$

$$\frac{\partial}{\partial u_k} (g_{ij}) = \frac{\partial^2 X}{\partial u_i \partial u_k} \cdot \frac{\partial X}{\partial u_j} + \frac{\partial X}{\partial u_i} \cdot \frac{\partial^2 X}{\partial u_j \partial u_k}$$

$$\underline{2.5} = \Gamma_{ik,j} + \Gamma_{jk,i}$$

Par permutation circulaire on obtient les trois équations suivantes :

$$(1) \quad \frac{\partial}{\partial u_k} (g_{ij}) = \Gamma_{ik,j} + \Gamma_{jk,i}$$

$$(2) \quad \frac{\partial}{\partial u_i} (g_{jk}) = \Gamma_{ji,k} + \Gamma_{ki,j} \quad i,j,k, = 1,2$$

$$(3) \quad \frac{\partial}{\partial u_j} (g_{ki}) = \Gamma_{kj,i} + \Gamma_{ij,k}$$

or $\Gamma_{ij,k} = \Gamma_{ji,k}$ d'où

$$\underline{2.6} = \Gamma_{ij,k} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{ki}}{\partial u_j} + \frac{\partial g_{jk}}{\partial u_i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial u_k} \right)$$

La connaissance de la première forme fondamentale permet de déterminer

$$\Gamma_{ij,k} \text{ puis } \Gamma_{ij}^k = \sum_{m=1}^2 \Gamma_{ij,m} g^{mk}, \text{ et } \frac{\partial^2 X}{\partial u_i \partial u_j} = \sum_{k=1}^2 \Gamma_{ij}^k \frac{\partial X}{\partial u_k} + \sum_{k=3}^n b_{ij}(e_k) e_k.$$

3.- Détermination des coefficients de la seconde équation

$$\underline{3.1} \quad \frac{\partial e_i}{\partial u_j} \cdot \frac{\partial X}{\partial u_m} = \sum_{k=1}^2 e_{ij}^k g_{km}$$

$\frac{\partial X}{\partial u_m} \cdot e_i = 0$ Par dérivation on obtient :

$$\frac{\partial X}{\partial u_m} \cdot \frac{\partial e_i}{\partial u_j} + \frac{\partial^2 X}{\partial u_m \partial u_j} \cdot e_i = 0 \quad \text{soit}$$

$$\underline{3.2} \quad \frac{\partial X}{\partial u_m} \cdot \frac{\partial e_i}{\partial u_j} = -b_{mj}(e_i)$$

d'où $\sum_{k=1}^2 c_{ij}^k \gamma_{km} = -b_{mj}(e_i)$

$$\underline{3.3} \quad c_{ij}^{\ell} = -\sum_{m=1}^2 g^{\ell m} b_{mj}(e_i)$$

4.- Relations entre g_{ij} et b_{ij}

On a :

$$\begin{aligned} \underline{4.1} \quad \frac{\partial}{\partial u_k} \left(\frac{\partial^2 X}{\partial u_i \partial u_j} \right) &= \sum_{m=1}^2 \Gamma_{ij}^m \frac{\partial^2 X}{\partial u_k \partial u_m} + \sum_{m=1}^2 \frac{\partial \Gamma_{ij}^m}{\partial u_k} \frac{\partial X}{\partial u_m} + \sum_{m=3}^n \left(\frac{\partial b_{ij}(e_m)}{\partial u_k} \gamma_{em}^m + b_{ij}(e_m) \frac{\partial e_m}{\partial u_k} \right) \\ &= \sum_{r=1}^2 \left[\frac{\partial \Gamma_{ij}^r}{\partial u_k} + \left(\sum_{m=1}^2 \Gamma_{ij}^m \Gamma_{km}^r \right) + \left(\sum_{m=3}^n b_{ij}(e_m) c_{mk}^r \right) \right] \frac{\partial X}{\partial u_r} + \sum_{r=3}^n A_r^{ijk} e_r \end{aligned}$$

$$\underline{4.2} \quad \text{posons } R_{ikj}^r = \frac{\partial \Gamma_{ik}^r}{\partial u_j} - \frac{\partial \Gamma_{ij}^r}{\partial u_k} + \sum_{m=1}^2 \left(\Gamma_{ik}^m \Gamma_{jm}^r - \Gamma_{ij}^m \Gamma_{km}^r \right)$$

or la permutation de j et k ne change pas $\frac{\partial^3 X}{\partial u_k \partial u_i \partial u_j}$ donc

$$\left(\frac{\partial^2 X}{\partial u_k \partial u_i \partial u_j} \right) - \left(\frac{\partial^2 X}{\partial u_j \partial u_i \partial u_k} \right) \quad \text{a ses composantes nulles sur } \frac{\partial X}{\partial u_r} \quad r = 1, 2 \quad \text{d'où}$$

$$\underline{4.3} \quad R_{ikj}^r = \sum_{m=3}^n [b_{ij}(e_m) c_{mk}^r - b_{ik}(e_m) c_{mj}^r] \quad \text{et en tenant compte de } \underline{3.3}$$

$$\underline{4.4} \quad R_{ikj}^r = \sum_{m=3}^n \left(\sum_{s=1}^2 g^{rs} \left[b_{ik}(e_m) b_{sj}(e_m) - b_{ij}(e_m) b_{sk}(e_m) \right] \right)$$

$$\text{posons } R_{ikj\ell} = \sum_{r=1}^2 R_{ikj}^r g_{r\ell}$$

on obtient l'expression du tenseur de courbure de Riemann

$$\underline{4.5} \quad R_{ikj\ell} = \sum_{m=3}^n \left[b_{ik}(e_m) b_{\ell j}(e_m) - b_{ij}(e_m) b_{\ell k}(e_m) \right]$$

g_{ij} et b_{ij} ne sont pas indépendants mais sont liés par un système différentiel du deuxième ordre.

Exemple : calcul de R_{1212}

$$\begin{aligned} R_{1212} &= \sum_{m=3}^n \left(b_{12}(e_m) b_{21}(e_m) - b_{11}(e_m) b_{22}(e_m) \right) \\ &= \sum_{m=3}^n \left(b_{12}^2(e_m) - b_{11}(e_m) b_{22}(e_m) \right) = -K \det(g_{ij}) \end{aligned}$$

d'où

$$K = - \frac{R_{1212}}{\det(g_{ij})}$$

l'équation de Gauss

Chapitre 3.- Surfaces Minima

§ 1.- Généralités

1.-1 Position du problème

Soit $X(u)$ une fonction vectorielle définissant une surface de classe C^m lorsque u décrit un domaine D . Soit Δ un domaine dont la fermeture $\bar{\Delta}$ est contenue dans D . Supposons que l'aire de la surface $X(u)$, pour u appartenant à Δ , soit minimum parmi toutes les surfaces qui ont la même frontière que $X(u)$; comment peut-on caractériser $X(u)$?

Soit $N(u)$, de classe C^{m-1} , un vecteur normal en chaque point de S et soit $\varphi(u)$ une fonction numérique de classe C^m dans D .

Posons $\tilde{X}(u) = X(u) + \lambda \varphi(u) N(u)$ $\lambda = \text{constante}$

$\tilde{X}(u)$ définit une surface et l'on a :

$$\frac{\partial \tilde{X}}{\partial u_i} = \frac{\partial X}{\partial u_i} + \lambda \frac{\partial \varphi(u)}{\partial u_i} N(u) + \lambda \varphi(u) \frac{\partial N(u)}{\partial u_i}$$

$$\tilde{g}_{ij} = g_{ij} + \left(\lambda \varphi(u) \frac{\partial N}{\partial u_i} \cdot \frac{\partial X}{\partial u_j} + \lambda \varphi \frac{\partial X}{\partial u_j} \cdot \frac{\partial N}{\partial u_i} \right) + \lambda^2 c_{ij}$$

$$\tilde{g}_{ij} = g_{ij} - 2\lambda \varphi b_{ij}(N) + \lambda^2 c_{ij}$$

$$\begin{aligned} 1.-2 \quad \det \tilde{g}_{ij} = \det g_{ij} - 2\lambda \varphi [g_{11} b_{22}(N) + g_{22} b_{11}(N) - 2 g_{12} b_{12}(N)] \\ + a\lambda^2 + b\lambda^3 + c\lambda^4. \end{aligned}$$

$$\det \tilde{g}_{ij} = \det g_{ij} - 2\lambda \varphi H(N) \det g_{ij} + a\lambda^2 + b\lambda^3 + c\lambda^4$$

donc si λ est assez petit : $\det g_{ij} > 0 \implies \det \tilde{g}_{ij} > 0$

Soit $X(u)$ régulière $\implies \tilde{X}(u)$ régulière

$$\sqrt{\det \tilde{g}_{ij}} = \sum_{k=0}^{\infty} B_k \lambda^k \quad \text{avec} \quad B_0 = \sqrt{\det g_{ij}}$$

$$B_1 = -\varphi H(N) \sqrt{\det g_{ij}}$$

On a :

$$1.-3 \quad \text{aire } \tilde{A} = \iint_{\Delta} \sqrt{\det \tilde{g}_{ij}} \, du_1 \wedge du_2$$

$$\text{aire } \tilde{A} = \text{aire } A + \lambda \iint_{\Delta} -\varphi H(N) \sqrt{\det g_{ij}} \, du_1 \wedge du_2 + \dots$$

$X(u)$ réalise un extremum pour l'aire si $(\frac{\partial \tilde{A}}{\partial \lambda})_{\lambda=0} = 0$.

Soit

$$1.-4 \quad \iint_{\Delta} -\varphi H(N) \sqrt{\det g_{ij}} \, du_1 \wedge du_2 = 0 \quad \text{pour toute fonction } \varphi(u) \text{ s'annu-}$$

lant sur la frontière de Δ .

a) Dans R^3 $\varphi = 1$ on obtient des surfaces parallèles.

$$(\frac{\partial \tilde{A}}{\partial \lambda})_{\lambda=0} = \iint_{\Delta} H(N) \cdot d\sigma$$

b) Si $\varphi \neq 1$ et $\varphi = 0$ sur la frontière, la condition 1.-4 est équivalente

à $H(N) \equiv 0$. En effet si $H(N)$ est différent de zéro en un point u_0 de D

et pour un vecteur N_0 de $\Pi^1(u_0)$, soit $e_3, \dots, e_m$ en une base de Π^1

sont de classe C^{m-1}

$$\text{On a : } N_0 = \sum_{k=3}^m \eta_k e_k(u_0)$$

et il existe $N(u) = \sum_{k=3}^n \eta_k(u) e_k(u)$ dans un voisinage V du point u_0 tel que $H(N)$ soit différent de zéro. Soit $\varphi(u)$ de classe C^m telle que

$$\begin{cases} \varphi(u) \geq 0 & \text{pour } u \in V \\ \varphi(u_0) > 0 \\ \varphi(u) = 0 & \text{pour } u \notin V \end{cases}$$

alors $\tilde{A}'(0) \neq 0$.

2.- Définition

Une surface S est minima si $H \equiv 0$, c'est-à-dire que $H(N) = 0$ pour tout vecteur N de l'espace normal.

§ 2.- Etude des surfaces minima sous forme non paramétrique

Localement toute surface régulière $(X_1 \dots X_n)$ peut se mettre sous une forme non paramétrique (c'est-à-dire que les n coordonnées sont fonctions de deux d'entre elles).

En effet : S régulière $\iff \exists i, j$ tel que $\frac{\partial(X_i, X_j)}{\partial(u_1, u_2)} \neq 0$

Il existe donc un difféomorphisme local $(u_1, u_2) \iff (X_i, X_j)$ qui permet d'exprimer X_k en fonction de (X_i, X_j) .

On suppose que $X_3, \dots, X_n$ sont fonction de X_1, X_2 on a :

$$\begin{cases} X_1 = u_1 \\ X_2 = u_2 \\ \vdots \\ X_k = f_k(u_1, u_2) \end{cases}$$

$$\frac{\partial X}{\partial u_1} = \left(1, 0, \frac{\partial f_3}{\partial u_1}, \dots, \frac{\partial f_n}{\partial u_1}\right)$$

$$\frac{\partial X}{\partial u_2} = \left(0, 1, \frac{\partial f_3}{\partial u_2}, \dots, \frac{\partial f_n}{\partial u_2}\right)$$

$$\frac{\partial^2 X}{\partial u_i \partial u_j} = \left(0, 0, \dots, \frac{\partial^2 f_k}{\partial u_i \partial u_j}, \dots\right)$$

$$g_{11} = 1 + \sum_{k=3}^n \left(\frac{\partial f_k}{\partial u_1}\right)^2 \quad g_{12} = \sum_{k=3}^n \frac{\partial f_k}{\partial u_1} \frac{\partial f_k}{\partial u_2} \quad g_{22} = 1 + \sum_{k=3}^n \left(\frac{\partial f_k}{\partial u_2}\right)^2$$

Si $(N_3, N_4, \dots, N_n)$ sont $n-2$ nombres choisis arbitrairement, on peut déterminer N_1 , et N_2 de telle sorte que le vecteur $N = (N_1, N_2, \dots, N_n)$ soit dans $\Pi^\perp$. En effet, il suffit de prendre

$$1.-1 N_1 = -\sum_{k=3}^n N_k \frac{\partial f_k}{\partial u_1}$$

$$N_2 = -\sum_{k=3}^n N_k \frac{\partial f_k}{\partial u_2}$$

$$\text{On a : } N \perp \frac{\partial X}{\partial u_1} \text{ et } N \perp \frac{\partial X}{\partial u_2}$$

$$\text{de plus : } b_{ij}(N) = \sum_{k=3}^n \frac{\partial^2 f_k}{\partial u_i \partial u_j} N_k$$

N peut être choisi de $n-2$ façons arbitraires : Si $(N_3^j, \dots, N_n^j) = N^j$
 $j = 1, 2, \dots, n-2$ sont $n-2$ vecteurs linéairement indépendants, $N_1^j(u)$ et $N_2^j(u)$
 étant déterminés par 1.-1 ; les N^j forment une base de $\Pi^\perp$ et $N^j(u)$ est de
 classe C^{m-1} si $X(u)$ est de classe C^m

On a :

$$1.-2 \quad H(N^j) = \frac{\sum_{k=3}^n (1+|p|^2) \frac{\partial^2 f_k}{\partial u_2^2} - 2pq \frac{\partial^2 f_k}{\partial u_1 \partial u_2} + (1+|q|^2) \frac{\partial^2 f_k}{\partial u_1^2}}{\det g_{ij}}$$

$$\text{où } p = \left(\frac{\partial f_3}{\partial u_1}, \dots, \frac{\partial f_n}{\partial u_1} \right)$$

$$q = \left(\frac{\partial f_3}{\partial u_2}, \dots, \frac{\partial f_n}{\partial u_2} \right)$$

S est minima $\iff \forall N \in \prod_{j=1}^n H(N) = 0$. Cette condition se traduit par un système d'équations linéaires homogènes par rapport aux coefficients des N^j :

$$1.-3 \quad \text{pour } k = 3, \dots, n \text{ on a : } 0 = (1 + |p|^2) \frac{\partial^2 f_k}{\partial u_2^2} - 2pq \frac{\partial^2 f_k}{\partial u_1 \partial u_2} + (1 + |q|^2) \frac{\partial^2 f_k}{\partial u_1^2}$$

On peut remplacer ce système de $N-2$ équations scalaires par une équation vectorielle. En posant $f = (f_3, f_4, \dots, f_n)$

On a :

$$1.-4 \quad 0 = \left(1 + \left| \frac{\partial f}{\partial u_2} \right|^2 \right) \frac{\partial^2 f}{\partial u_1^2} - 2 \left(\frac{\partial f}{\partial u_1}, \frac{\partial f}{\partial u_2} \right) \frac{\partial^2 f}{\partial u_1 \partial u_2} + \left(1 + \left| \frac{\partial f}{\partial u_1} \right|^2 \right) \frac{\partial^2 f}{\partial u_2^2}$$

remarque dans le cas où $n = 3$ on a une équation scalaire.

§ 3.- Paramètres isothermes

1.-1 Définition

Soit S une surface $X(u)$, les paramètres u_1, u_2 sont isothermes si $g_{ij} = \lambda^2 \delta_{ij}$ où $\lambda = \lambda(u)$. Dans ce cas $G = \lambda^2 I$ et la transformation du domaine plan (u_1, u_2) dans S conserve les angles.

1.-2 Lemme

Si S est une surface $X(u)$ de classe C^r , il existe un voisinage de

chaque point u_0 possédant la propriété suivante :

Il existe une surface $\tilde{S}$ définie par $X(u(\tilde{u}))$, et obtenue par un changement de paramètre tels que $\tilde{u}_1, \tilde{u}_2$ soient des coordonnées isothermes sur $\tilde{S}$.

[Donc pour toute propriété locale des surfaces on peut se ramener à des coordonnées locales isothermes.

Démonstration : c'est l'application du corollaire (3.1. § 3 chapitre I première partie) du théorème relatif aux équations de Beltrami.

Soit $\tilde{\omega} = \tilde{u}_1 + i\tilde{u}_2$ $\left| \frac{d\tilde{\omega}}{dt} \right| = \rho^2 \sum_{i,j=1}^2 g_{ij} \frac{du_i}{dt} \frac{du_j}{dt}$
 si g_{ij} sont de classe C^1 alors $\sum g_{ij} \zeta_i \zeta_j = \frac{1}{\rho^2} (\tilde{\zeta}_1^2 + \tilde{\zeta}_2^2) = \sum \tilde{g}_{ij} \tilde{\zeta}_i \tilde{\zeta}_j$
 avec $\tilde{g}_{ij} = \frac{1}{\rho^2} g_{ij}$

En coordonnées isothermes on a les expressions suivantes :

$$1.-3 \quad g_{ij} = \lambda^2 \delta_{ij} \implies g^{ij} = \frac{1}{\lambda^2} \delta_{ij}$$

$$1.-4 \text{ la courbure de Gauss } K = - \frac{\Delta \log \lambda}{\lambda^2}$$

$$1.-5 \text{ longueur euclidienne d'une courbe : } \int_a^b \lambda \left| \frac{d\zeta}{dt} \right| dt$$

avec $\zeta = u_1 + iu_2$

expression de la courbure moyenne :

$$H(N) = \frac{\lambda^2 (b_{11}^{(N)} + b_{22}^{(N)})}{\lambda^4} = \frac{\text{tr. } b_{ij}^{(N)}}{\lambda^2} \quad \left(b_{ij}^{(N)} = \frac{\partial^2 X}{\partial u_i \partial u_j} \cdot N \right)$$

$$1.-6 \text{ d'où : } \Delta X = \frac{\partial^2 X}{\partial u_1^2} + \frac{\partial^2 X}{\partial u_2^2} = \lambda^2 H$$

Conséquences :

$$1.-7 \Delta(X) \in \mathbb{T}^1 \text{ si } (u_1, u_2) \text{ sont isothermes}$$

1.-8 les fonctions coordonnées X_k sont des fonctions harmoniques des coordonnées isothermes si et seulement si $X(u)$ est une surface minima.

1.-9 $X(u)$ surface minima $\iff \Delta X = 0 \iff$ les coordonnées X_k sont des fonctions de (u_1, u_2) à laplacien nul donc harmoniques.

2.-1 Pour $X(u)$ surface paramétrique, introduisons les fonctions complexes

$$\begin{aligned} \varphi_k(\zeta) &= \frac{\partial X_k}{\partial u_1} - i \frac{\partial X_k}{\partial u_2} \quad \text{où } \zeta = u_1 + iu_2 \\ \text{on a : } \sum_{k=1}^n \varphi_k^2(\zeta) &= \sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial X_k}{\partial u_1} \right)^2 - \sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial X_k}{\partial u_2} \right)^2 - 2i \sum_{k=1}^n \frac{\partial X_k}{\partial u_1} \frac{\partial X_k}{\partial u_2} \\ &= g_{11} - g_{22} - 2ig_{12} \end{aligned}$$

Conséquences :

2.-2 (u_1, u_2) sont des paramètres isothermes si et seulement si

$$\sum_{k=1}^n \varphi_k^2(\zeta) = 0 \quad \textcircled{1}$$

En effet :

Si (u_1, u_2) sont des paramètres isothermes ; alors $g_{11} = g_{22}$ $g_{12} = 0$

$$\text{donc } \sum_{k=1}^n \varphi_k^2(\zeta) = 0$$

$$\text{et réciproquement } \sum_{k=1}^n \varphi_k^2(\zeta) = 0 \implies \begin{cases} g_{11} = g_{22} \\ g_{12} = 0 \end{cases} \implies g_{ij} = \lambda^2 \delta_{ij}$$

$$\text{calculons } \sum_1^n |\varphi_k(\zeta)|^2 = \sum_1^n \left(\frac{\partial X_k}{\partial u_1} \right)^2 + \sum_1^n \left(\frac{\partial X_k}{\partial u_2} \right)^2$$

2.-3 (u_1, u_2) sont isothermes alors $\sum_1^n |\varphi_k(\zeta)|^2 = 2\lambda^2$ ②

une surface est donc régulière si et seulement si $\sum_{k=1}^n |\varphi_k(\zeta)|^2 \neq 0$

2.-4 on a les équivalences suivantes :

S est une surface minima $\iff$ les coordonnées sont des fonctions harmoniques
des paramètres isothermes $\iff \varphi_k(\zeta)$ sont analytiques.

2.-5 Théorème (problème inverse)

Soient $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ n fonctions $\sqrt[n]{\text{analytiques}}$ d'une variable complexe ζ satisfaisant aux propriétés (1) (2).

Il existe localement une surface minima $\tilde{X}(u)$ ($\zeta = u_1 + iu_2$) telle que
 $\tilde{\varphi}_k(\zeta) = \varphi_k(\zeta)$

Démonstration $\varphi_k(\zeta)$ est analytique. Dans tout domaine simplement connexe, il existe une fonction $\tilde{\Phi}_k(\zeta)$ telle que

$$\tilde{\Phi}'_k(\zeta) = \varphi_k(\zeta)$$

Soit $\tilde{X}_k(\zeta) = \operatorname{Re} \tilde{\Phi}_k(\zeta)$ on a :

$$\tilde{\varphi}_k(\zeta) = 2 \frac{\partial \tilde{X}_k(\zeta)}{\partial \zeta} = \frac{\partial \tilde{X}_k(\zeta)}{\partial u_1} - i \frac{\partial \tilde{X}_k(\zeta)}{\partial u_2} = \tilde{\Phi}'_k(\zeta) = \varphi_k(\zeta)$$

D'après 2.-2 (u_1, u_2) sont des coordonnées isothermes de $\tilde{S}$

D'après 2.-3 $\tilde{S}$ est régulière

D'après 2.-4 $\tilde{S}$ est minima.

Remarque : $\tilde{X}_k = \operatorname{Re} \int \varphi_k(\zeta) d\zeta$ donc φ_k définissent une surface à une

translation près.

Le problème des surfaces minima se ramène à la recherche de fonctions

$\varphi_k(\zeta)$ analytiques, telles que $\sum_1^n \varphi_k^2(\zeta) = 0$ avec les $\varphi_k(\zeta)$ non tous nuls.

3.- Expression de la courbure de Gauss

$$\text{On a : } K = -\frac{\Delta \log \lambda}{\lambda^2} \quad \text{or} \quad 2 \lambda^2 = \sum |\varphi_k|^2 = h$$

$$\log h = 2 \log \lambda + \log 2$$

$$\Delta(\log h) = 4 \frac{\partial^2}{\partial \zeta \partial \bar{\zeta}} (\log h) = 4 \frac{h_{\zeta \bar{\zeta}} h - h_{\zeta} h_{\bar{\zeta}}}{h^2}$$

$$h_{\zeta} = \sum \varphi'_k(\zeta) \overline{\varphi_k(\zeta)}$$

$$h_{\bar{\zeta}} = \sum \overline{\varphi'_k(\zeta)} \varphi_k(\zeta)$$

$$h_{\zeta \bar{\zeta}} = \sum \varphi'_k(\zeta) \overline{\varphi'_k(\zeta)} = \sum |\varphi'_k(\zeta)|^2$$

$$\frac{1}{4} \Delta \log h = \frac{2}{4} \Delta \log \lambda = \frac{\sum |\varphi_k|^2 \sum |\varphi'_k|^2 - |(\sum \varphi'_k \bar{\varphi}_k)|^2}{(\sum |\varphi_k|^2)^2}$$

$$3.-1 \quad K = -\frac{\Delta \log \lambda}{\lambda^2} = -4 \frac{(\sum |\varphi_k|^2) (\sum |\varphi'_k|^2) - |\sum \varphi'_k \bar{\varphi}_k|^2}{(\sum |\varphi_k|^2)^3}$$

d'après l'identité $(\sum |z_k|^2) (\sum |w_k|^2) - |\sum \bar{z}_k w_k|^2 = \sum_{i < j} |z_i w_j - z_j w_i|^2$

On a :

$$3.-2 \quad K = -4 \frac{|\varphi(\zeta) \wedge \varphi'(\zeta)|^2}{|\varphi(\zeta)|^6}$$

3.-3 Corollaire

Sur une surface minima on a : $K \leq 0$

$K = 0$ aux points isolés ou bien $K \equiv 0$.

$$H(N) = 0 \implies b_{11}(N) = b_{22}(N)$$

$$b_{11}b_{22} - b_{12}^2 = -(b_{11}^2 + b_{22}^2) \leq 0$$

$$\text{Donc } K = \frac{\sum \det b_{ij}}{\det g_{ij}} \quad K \leq 0 \quad (\text{une démonstration alternative, sans recours à la formule 3.-2})$$

$$K = 0 \iff \varphi(\zeta) \wedge \varphi'(\zeta) = 0 \iff \varphi_i \varphi'_j - \varphi'_i \varphi_j = 0 \quad i < j \quad 1, \dots, n$$

or les fonctions sont analytiques ; les zéro sont isolés ou bien $K \equiv 0$

§ 4.- Application de Gauss (application sphérique ou normale)

Remarque dans E^3 : en chaque point il n'y a qu'un seul vecteur normal

$$e_3 \in \mathbb{T}^1$$

On choisit une base de E^3 ; $\frac{\partial X}{\partial u_1}, \frac{\partial X}{\partial u_2}, e_3$ ayant l'orientation de l'espace

$$\text{par exemple : } e_3 = \frac{\frac{\partial X}{\partial u_1} \wedge \frac{\partial X}{\partial u_2}}{\left| \frac{\partial X}{\partial u_1} \wedge \frac{\partial X}{\partial u_2} \right|}. \quad \text{Dans } E^3: \left\{ \text{les plans tangents} \right\} \simeq \left\{ \text{normales } e_3 \right\}$$

$$u \longrightarrow X(u) \longrightarrow e_3(u)$$

1.-1 Définition dans E^n

On appelle grassmannien $G(2,n)$ l'ensemble de plans orientés dans E^n .

1.-2 Structure de variété sur cet ensemble

Remarque dans E^3 ; le grassmannien est isomorphe à la sphère

Dans E^n soit V_2 un plan orienté.

Soit $v = (v_1, \dots, v_n)$ et $w = (w_1)$ deux vecteurs engendrant V_2 tels que

$$|v| = |w| \neq 0.$$

et tels que v et w soient orthogonaux : $v.w = 0$

A V_2 défini par (v, w) on fait correspondre le point $Z \in \mathbb{C}^n$

$$Z = (Z_1, Z_2, \dots, Z_n) \text{ avec } Z_k = v_k + iw_k.$$

Remarque : Cette application se fait en réalité sur l'espace projectif

$P_{n-1}(\mathbb{C})$.

En effet : Soit $\tilde{v}, \tilde{w}$ un autre système définissant V_2 on a :

$$\tilde{v} = av + bw, \quad \tilde{w} = cv + dw$$

$$|\tilde{v}| = |\tilde{w}| = (a^2 + b^2) |v|^2 = (c^2 + d^2) |w|^2$$

$$\tilde{v}.\tilde{w} = (ac + bd) |w|^2$$

$$\text{Donc } a^2 + b^2 = c^2 + d^2 \iff |\tilde{v}| = |\tilde{w}|$$

$$ac + bd = 0 \iff \tilde{v}.\tilde{w} = 0$$

$$ad - bc > 0 \iff (\tilde{v}, \tilde{w}) \text{ conserve l'orientation.}$$

$$\text{On a : } \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \tilde{Z}_k &= \tilde{v}_k + i\tilde{w}_k = (a + ic) v_k + (b + id) w_k \\ &= \alpha Z_k \text{ avec } \alpha = \lambda e^{i\theta} \end{aligned}$$

$$\text{d'où } \tilde{Z}_1 = \alpha Z_1$$

Il en résulte qu'au plan V_2 on fait correspondre le point $(Z_1, \dots, Z_n)$

de l'espace projectif $P_{n-1}(\mathbb{C})$.

Toutes les coordonnées Z_k ne sont pas nulles car

$$\sum |z_k|^2 = \sum v_k^2 + \sum w_k^2 = |v|^2 + |w|^2 > 0$$

donc $z \in \mathbb{C}^n - \{0\}$

$$\begin{aligned} \text{on a : } \sum_1^n z_k^2 &= \sum v_k^2 - \sum w_k^2 + 2i \sum v_k w_k \\ &= |v|^2 - |w|^2 + 2i v \cdot w = 0. \end{aligned}$$

Posons 1.-3

$$Q_{n-2} = \left\{ z \in P_{n-1}(\mathbb{C}) \text{ tels que } \sum_1^n z_k^2 = 0 \right\}$$

Q_{n-2} est un sous ensemble de $P_{n-1}(\mathbb{C})$ en correspondance biunivoque avec $\{v_2\}$

or Q_{n-2} est une variété analytique complexe à $n - 2$ dimensions complexes

ou $2(n - 2)$ dimensions réelles.

Q_{n-2} est le grassmannien $G(2, n)$

2.- Cas particulier $n = 3$

Q_1 est une variété analytique à une dimension donc une surface de Riemann.

$$Q_1 = \{z ; z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = 0\}$$

$$(z_1 + iz_2)(z_1 - iz_2) = -z_3^2$$

Si $z_1 - iz_2 \neq 0$ on pose $w = \frac{z_3}{z_1 - iz_2}$

$$(1) \begin{cases} z_1 + iz_2 = \frac{-z_3^2}{z_1 - iz_2} = -z_3 w \\ z_1 + iz_2 = \frac{z_3}{w} \end{cases} \quad \text{Si } w \neq 0$$

$$z_1 = \frac{z_3}{2} \left(\frac{1}{w} - w \right)$$

$$z_2 = \frac{iz_3}{2} \left(\frac{1}{w} + w \right)$$

2.-1

$$\text{On a : } \forall w : \begin{bmatrix} Z_1 = \frac{Z_1 - iZ_2}{2}(1 - w^2) \\ Z_2 = \frac{Z_1 - iZ_2}{2}(1 + w^2)i \\ Z_3 = (Z_1 - iZ_2)w \end{bmatrix} \implies Z = \left(\frac{1-w^2}{2}, i\frac{1+w^2}{2}, w\right) \quad Z_1 - iZ_2 \neq 0$$

On établit une bijection $Z \longleftrightarrow w$ si $Z_1 - iZ_2 \neq 0$

Il y a donc une correspondance bijective entre $\{w\} \longleftrightarrow Q_1 - \{Z/Z_1 - iZ_2 = 0\}$

$\{Z/Z_1 - iZ_2 = 0\} \subset \{Z_3 = 0\}$ cet ensemble se réduit à un point $Z_0 = (i, 1, 0)$.

2.-2 Q_1 est en correspondance biunivoque avec la sphère de Riemann

2.-3 Remarque : Soit N un vecteur normal à V_2 $W = (N_1, N_2, N_3)$

$$N \text{ orthogonal à } V_2 \iff \begin{cases} \sum N_k V_k = 0 \\ \sum N_k W_k = 0 \end{cases} \iff \sum N_k Z_k = 0$$

$$\text{le système } \begin{cases} Z_1 + iZ_2 + Z_3 w = 0 \\ wZ_1 - iwZ_2 - Z_3 = 0 \end{cases} \quad \text{nous donne :}$$

$$(2 \operatorname{Re} w) Z_1 + 2 \operatorname{Im} w Z_2 + Z_3 (|w|^2 - 1) = 0$$

$$\text{donc } N = (2 \operatorname{Re} w, 2 \operatorname{Im} w, |w|^2 - 1)$$

$$|N|^2 = 4|w|^2 + (|w|^2 - 1)^2 = (1 + |w|^2)^2$$

$$e_3 = \left(\frac{2 \operatorname{Re} w}{1 + |w|^2}, \frac{2 \operatorname{Im} w}{1 + |w|^2}, \frac{|w|^2 - 1}{|w|^2 + 1} \right)$$

on a les correspondances bijectives suivantes

$$2.-4 \quad \{v_2\} \subset E^3 \longleftrightarrow G_{(2,3)} \longleftrightarrow Q_1 \longleftrightarrow \text{sphère } w \longleftrightarrow \{e_3\}$$

3.- Définition de l'application de Gauss

Soit S une surface $X(u)$ de E^n

$$X(u) \in S \longrightarrow \text{plan tangent en } X(u) \longrightarrow Z \in Q_{n-2}$$

Soient (u_1, u_2) les paramètres isothermes ($\zeta = u_1 + iu_2$)

$$\varphi_k(\zeta) = 2 \frac{\partial X_k}{\partial \zeta} = \frac{\partial X_k}{\partial u_1} - i \frac{\partial X_k}{\partial u_2}$$

on a les équivalences suivantes :

$$3.-1 \quad (u_1, u_2) \text{ isothermes} \iff \left| \frac{\partial X}{\partial u_1} \right| = \left| \frac{\partial X}{\partial u_2} \right| \text{ et } \frac{\partial X}{\partial u_1} \frac{\partial X}{\partial u_2} = 0$$

$$3.-2 \quad X(u) \text{ régulière} \iff \left| \frac{\partial X}{\partial u_1} \right| \neq 0$$

$$\text{donc } v = \frac{\partial X}{\partial u_1} \quad w = \frac{\partial X}{\partial u_2} \quad z_k = \overline{\varphi_k(\zeta)}$$

3.-3 Corollaire (Chern)

Une surface est une surface minima si et seulement si l'application de Gauss est antiholomorphe.

($\bar{z}_k$ est une fonction analytique de $\zeta = u_1 + iu_2$)

(en chaque point où $K \neq 0$ c'est une transformation conforme qui change l'orientation).

3.-4 Soit $X(u)$ une surface minima de E^3 . Posons $f(\zeta) = \varphi_1(\zeta) - i\varphi_2(\zeta)$

$$g(\zeta) = \frac{\varphi_3(\zeta)}{\varphi_1(\zeta) - i\varphi_2(\zeta)}$$

$f(\zeta)$ est analytique

$g(\zeta)$ est méromorphe

(Si $f(\zeta) = 0$, alors $\varphi_3(\zeta) = 0$, puisque $\varphi_3(\zeta)^2 = (\varphi_1 - i\varphi_2)(\varphi_1 + i\varphi_2)$.

Alors $\varphi_1 + i\varphi_2 \neq 0$, puisque $(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3) \neq (0, 0, 0)$, donc si $f(\zeta)$ a un zéro d'ordre m et $\varphi_3(\zeta)$ un zéro d'ordre ν on a $m = 2\nu$. Donc $g(\zeta)$ a un pôle d'ordre ν

3.-5 Théorème

Soit $f(\zeta)$, $g(\zeta)$ deux fonctions respectivement analytique et méromorphe.

f possède un zéro d'ordre 2ν là où g a un pôle d'ordre ν .

Soit $\varphi_1 = \frac{f}{2}(1 - g^2)$; $\varphi_2 = \frac{if}{2}(1 + g^2)$; $\varphi_3 = f_g$ alors $\{\varphi_k\}$ déterminent

une surface minima avec $X_k = \int \varphi_k(\zeta) d\zeta$.

On a : $\sum \varphi_k(\zeta)^2 = 0$ et $\sum |\varphi_k|^2 \neq 0$

on obtient ainsi la représentation de Weirstrass.

S minima de $E^3 \iff \{(f, g) \mid f \text{ analytique, } g \text{ méromorphe } m = 2\nu\}$

Chapitre 4.- Géométrie différentielle globale

1.-1 Une surface S dans E^n est constituée par une surface S_0 et une immersion de S_0 dans E^n .

L'application $p \in S_0 \longrightarrow x(p) \in E^n$ est une immersion si elle est différentiable et régulière.

1.-2 Les propriétés topologiques de S dans E^n sont celles de S_0 :

S simplement connexe $\iff S_0$ est simplement connexe

S orientée $\iff S_0$ orientée.

L'immersion induit une métrique riemannienne sur S_0 : à partir de la structure riemannienne sur S

Soit φ_α une carte en p_0 de S_0 : $\varphi_\alpha : R_\alpha \longrightarrow O_\alpha$ φ_α est un homéomorphisme d'un domaine plan R_α sur un ouvert O_α de S_0 . On définit l'application de R_α dans E^n :

$$u \in R_\alpha \longrightarrow X(u) = X \circ \varphi_\alpha(u)$$

en chaque point de R_α on peut définir la matrice $M_\alpha = (g_{ij})$ $g_{ij} = \frac{\partial X}{\partial u_i} \cdot \frac{\partial X}{\partial u_j}$

S est ainsi muni d'une structure de variété riemannienne à deux dimensions.

S complète dans cette métrique $\iff S_0$ complète dans la métrique induite.

Si S_0 est orientée la structure riemannienne induit une structure conforme, les paramètres sont alors les paramètres isothermes sur S et $g_{ij} = \lambda^2 \delta_{ij}$.

Si S_0 n'est pas orientée, il existe un revêtement $\hat{S}_0$ à deux feuillets qui est orienté ce qui permet de n'envisager que les surfaces orientées.

2.- Lemme

Soit S une surface de E^n , les propositions sont équivalentes :

S est dans un plan $\iff$ L'image par l'application de Gauss se réduit à un point.

Démonstration

S est dans un plan $\iff$ il existe deux vecteurs fixes v, w tels que $X'(t)$ soit une combinaison linéaire de v et w pour toute courbe $X(t)$ dans $S \iff$ l'image de S par l'application de Gauss est constante.

3.- Théorème

Il n'existe pas de surface minima compacte dans E^n .

Démonstration

Si S est une immersion de S_0 dans E^n et si S est minima alors les coordonnées X_k sont des fonctions harmoniques sur S_0 . Si S_0 est compacte, ces coordonnées atteignent leur maximum sur S_0 et se réduisent à des constantes.

4.- Lemme

Soit S une surface minima simplement connexe et parabolique dans E^n .

S'il existe un hyperplan $\sum \alpha_k Z_k = 0$ dans $P_{n-1}(\mathbb{C})$ tel que

$$(1) \quad \frac{|\sum \alpha_k Z_k|^2}{\sum |Z_k|^2} \geq \varepsilon > 0 \quad \text{soit vérifiée pour tout point de l'image } S \text{ par}$$

l'application de Gauss alors S est dans un plan.

Démonstration

Il existe une transformation conforme de S sur le plan complexe (w)

(S est parabolique). Les fonctions $\varphi_k = \frac{\partial X_k}{\partial u_1} - i \frac{\partial X_k}{\partial u_2}$ sont des fonctions entières de w car analytiques dans le plan $w = u_1 + iu_2$

d'après (1) : $\forall w \quad \psi(w) = \sum \bar{\alpha}_k \varphi_k(w) \neq 0$

$\sum |\varphi_k(w)|^2 \leq \frac{1}{\varepsilon} \left| \sum \bar{\alpha}_k \varphi_k \right|^2 = \frac{1}{\varepsilon} |\psi(w)|^2$

donc $\frac{|\varphi_k(w)|^2}{|\psi(w)|^2} \leq \frac{1}{\varepsilon}$ d'après le théorème de Liouville $\frac{\varphi_k(w)}{\psi(w)} = C_k$ d'où

$\varphi = (\varphi_k) = \psi(w) (C_k)$

L'image par l'application de Gauss est un point et d'après le lemme 2 S est dans un plan.

5.- Lemme

Soit $f(Z)$ analytique dans le disque $|Z| < 1$ et $f(Z) \neq 0$. Alors il existe un chemin C qui tend vers la frontière et tel que $\int_C |f(Z)| \left| \frac{dZ}{dt} \right| dt < \infty$

$\lambda = |f(Z)|$ définit une métrique riemannienne non complète.

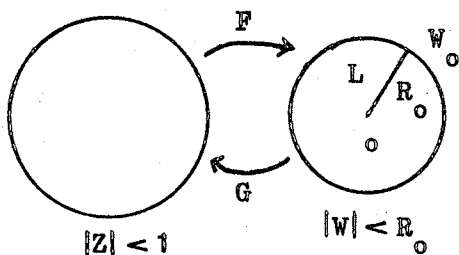
Démonstration

Soit $F(Z) = \int_0^Z f(\zeta) d\zeta$ l'application $Z \longrightarrow w = F(Z)$ définit une application du disque dans le plan w .

En chaque point $F'(Z) = f(Z) \neq 0$ donc F est un difféomorphisme local. Il existe une fonction inverse $Z = G(w)$ définie dans un disque $|w| < R$ (au

voisinage du point $w = 0 = F(0)$.

Soit $R_0 = \left\{ \sup R / G \text{ définie dans } |w| < R \right\}$



Soit (L) la courbe $w(t) = t e^{i\alpha}$ avec $w_0 = R_0 e^{i\alpha}$

Soit (C) la courbe $Z = G(w(t))$ $0 \leq t < R_0$.

$$\text{On a : } \mathcal{L}(C) = \int_C |f(Z)| \left| \frac{dZ}{dt} \right| dt = \int_L \left| \frac{dw}{dt} \right| dt = R_0.$$

Or C est un chemin qui tend vers la frontière : raisonnons par l'absurde : si

C ne tend pas vers la frontière, il existe un nombre $\rho < 1$ et une suite $\{t_k\}$

tels que t_k tendent vers R_0 et $|Gw(t_k)| \leq \rho$. Soit une sous suite partielle

$G(wt_k)$ convergeant vers Z_1 avec $|Z_1| \leq \rho < 1$. Alors $F(Z_1) = w_0$ et

$F'(Z_1) \neq 0$ donc $G(w)$ est définie au voisinage de w_0 ce qui est contraire à

la définition de w_0 .

6.- Lemme

Soit S une surface minima simplement connexe, hyperbolique. Si la relation

(1) du lemme 4 est vérifiée alors S n'est pas complète.

Démonstration

S_0 , hyperbolique simplement connexe est conforme au disque unité $|w| < 1$.

La métrique riemannienne est définie par $g_{ij} = \lambda^2 \delta_{ij}$ et $\lambda^2 = \frac{1}{2} \sum |\varphi_k|^2$

Soit $\Psi(w) = \sum \bar{a}_k \varphi_k(w)$.

$\Psi(w)$ est analytique et différente de zéro. D'après le lemme 5 il existe un chemin C tendant vers la frontière du disque $|w| < 1$ tel que $\int_C |\Psi(w)| \left| \frac{dw}{dt} \right| dt < +\infty$ mais la longueur de C sur S est $\int_C \lambda \left| \frac{dw}{dt} \right| dt$ et l'on a :

$$\int_C \lambda \left| \frac{dw}{dt} \right| dt \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \int_C \sqrt{\sum |\varphi_k|^2} \left| \frac{dw}{dt} \right| dt \leq \frac{1}{\sqrt{2}\epsilon} \int_C \Psi(w) \left| \frac{dw}{dt} \right| dt$$

La longueur de C est finie.

6.-1 Définition

Soit Z^0 un point de l'espace projectif $P_{n-1}(C)$. La distance de Z^0 à l'hyperplan $\sum \alpha_k Z_k = 0$ est $\frac{|\sum \alpha_k Z_k^0|}{\sqrt{\sum |\alpha_k|^2} \sqrt{\sum |Z_k^0|^2}}$

7.- Théorème de Chern

Soit S une surface minima complète de E^n . Si S n'est pas un plan alors l'image de S par l'application de Gauss s'approche arbitrairement de chaque hyperplan de $P_{n-1}(C)$.

Démonstration

Supposons qu'il existe un hyperplan $\sum \alpha_k Z_k = 0$ et $\epsilon > 0$ tels que la relation (1) soit vérifiée en tout point de l'image de S .

S étant donnée par l'immersion de S_0 ; soit $\{\hat{S}_0, f\}$ le revêtement universel de S_0 . Alors $X(f(\hat{p}))$ définit une surface minima simplement connexe dans E^n et l'image de l'application de Gauss est identique à celle de S .

S_0 surface minima complète $\implies \hat{S}_0$ surface minima complète .

Quelles sont les possibilités pour $\hat{S}_0$?

a) $\hat{S}_0$ n'est pas compacte

b) $\hat{S}_0$ n'est pas hyperbolique car l'image de $\hat{S}_0$ par l'application de Gauss vérifie la relation (1) et d'après le lemme 6 $\hat{S}_0$ ne peut être complète.

c) $\hat{S}_0$ est donc parabolique mais alors d'après le lemme 4 $\hat{S}_0$ est dans un plan. $\hat{S}_0$ étant complète, c'est le plan tout entier.

7.-1 Corollaire

Soit S une surface minima complète dans E^3 . Si S n'est pas le plan, les vecteurs normaux sont partout denses.

Démonstration

Supposons qu'il existe un vecteur v de E^3 et un nombre α positif tel que l'angle de tout vecteur normal avec v soit supérieur ou égal à α . On peut supposer que v est la direction $ox_3 = e_3$

$$(Z_1, Z_2, Z_3) = (Z_1 - iZ_2) \left(\frac{1 - |w|^2}{2} \right), i \frac{1 + |w|^2}{2}, w)$$

avec $Z_1 - iZ_2 \neq 0$

$$\sum_{k=1}^3 |Z_k|^2 = |Z_1 - iZ_2|^2 \left(\frac{1 + |w|^2}{2} \right)^2$$

Par projection stéréographique, le domaine $\{e_3, v\} > \alpha$ se transforme en un domaine borné du plan $|w| \leq R < \infty$

$$\frac{|z_1 - iz_2|^2}{\sum |z_k|^2} = \frac{2}{(1 + |w|^2)^2} \geq \frac{2}{(1 + R^2)^2} \geq \epsilon > 0$$

un hyperplan $(z_1 - iz_2 = 0)$ n'est donc pas approché par l'image de S , donc S est un plan.

8.- Ceci est une généralisation du théorème de Bernstein (1915)

Soit $f(x, y)$ une solution de l'équation (2) dans tout le plan

$$(2) \left[1 + \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)^2 \right] \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + \left[1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 \right] \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$$

alors $f(x, y) = ax + by + c$

Démonstration

Si f satisfait à l'équation (2), alors $S = \{x, y, z = f(x, y)\}$ est une surface minima. f étant définie pour tout couple (x, y) , S est complète. Or les vecteurs normaux de S sont dans une hémisphère donc S est un plan.

Références :

Notes d'Ahlfors.- Conformal Mappings, 1951, OKLAHOMA.

Notes de Bers.- (N.Y.U.) Riemann Surfaces.

Chern.- Minimal surfaces in an euclidian space of N dimensions, p. 187-198 ; of differential and combinatorial topology. A Symposium in honor of Marston Morse, Princeton University Press. Princeton N.J. 1965.

J.C.C. Nitsche.- On new results in the theory of Minimal surfaces, Bull. Amer. Math. Soc. 71-1965, p. 195-270.