

UNIVERSITÉ PARIS XI

U.E.R. MATHÉMATIQUE

91-ORSAY (FRANCE)

N° 17

Laudenbach François

Pseudo-isotopie et torsion

Cours de 3e cycle (1971-1972, 2e semestre)

Publication mathématique d'Orsay

Première partie : "Le Wh_2 et le théorème de la pseudo-isotopie dans le cas simplement connexe" par A. Chenciner et F. Laudenbach.

Deuxième partie : "La torsion d'un h -cobordisme par la méthode fonctionnelle. Application au problème de la pseudo-isotopie sur l'espace total d'un fibré de base S^1 (d'après L. Siebenmann)".

Avant propos

Au premier semestre de l'année scolaire 1971-72, Alain Chenciner a fait un cours de 3ème cycle sur la stratification de l'espace des fonctions différentiables réelles. Il a présenté plusieurs voies pour stratifier l'espace des fonctions numériques sur une variété V : codimension d'une fonction, orbites du groupe $\text{Diff } V \times \text{Diff } R$ (théorème de trivialité locale de Sergeraert); il a montré les pathologies que l'on rencontre sur chacune de ces voies. Il a exposé ensuite des lemmes à caractère semi-local : cancellation lemma, lemme de la queue d'aronde etc. Il a terminé son cours en prouvant la connexité de l'espace $\mathcal{F}_1(W)$, espace des fonctions ordonnées à deux indices critiques sur un h -cobordisme W .

Prenant sa suite et utilisant les résultats qu'il avait mis en place, j'ai prouvé le théorème de Cerf sur la pseudo-isotopie dans le cas simplement connexe. J'ai choisi une démonstration utilisant la K -théorie algébrique, comme Wagoner et Hatcher avait montré qu'il fallait le faire, mais respectant aussi l'idée de chemins élémentaires de Cerf. C'est avec A. Chenciner que j'ai mis cette démonstration au point. Elle a l'intérêt, dans sa partie algébrique, de faire jouer un rôle central aux matrices triangulaires, comme c'était déjà le cas dans la démonstration originale de J. Cerf, alors que J. Wagoner, par exemple, privilégie les matrices de permutation. Au bout du compte, nous avons été amené à proposer une

nouvelle définition de $Wh_2(\pi)$: A. Chenciner a prouvé qu'elle coïncidait avec celle de Hatcher-Wagoner ; peut-être ce résultat purement algébrique aura-t-il quelque intérêt ! L'ensemble de ce travail constitue la première partie de la publication, sous le titre "Le Wh_2 et le théorème de la pseudo-isotopie dans le cas simplement connexe".

Je dois signaler qu'à la suite d'une erreur de fabrication, les références n'ont pas été placées à la fin de l'article mais entre les appendices I et II.

Pour finir le cours, je désirais atteindre les premiers exemples de pseudo-isotopies non triviales donnés par L. Siebenmann, n'ayant par ailleurs pas le temps d'aborder la théorie d'obstruction de Hatcher-Wagoner. Mais il fallait pour cela introduire la torsion de Whitehead. Quand on a à sa disposition un théorème comme la connexité de $\mathcal{F}_i$, on peut le faire, sans aucun effort algébrique, par la méthode fonctionnelle. C'est un exercice dont l'inconvénient est de masquer l'idée de type simple d'homotopie. Cependant, en certains points (formule du produit par exemple), elle éclaire la théorie simpliciale, un peu comme le fait la cohomologie des formes différentielles pour la cohomologie singulière.

La seconde partie de la publication s'intitule donc "La torsion d'un h -cobordisme par la méthode fonctionnelle. Application au problème de la pseudo-isotopie sur l'espace total d'un fibré de base S^1 (d'après L. Siebenmann)".

Pour la rédaction j'ai reçu le concours de Harrie Hendriks qui m'a apporté ses notes "rédigées" : je l'en remercie.

F. LAUDENBACH

LE Wh_2 ET LE THEOREME DE LA PSEUDO-ISOTOPIE
DANS LE CAS SIMPLEMENT CONNEXE

A. CHENCINER

et

F. LAUDENBACH

Centre de Mathématiques de l'Ecole Polytechnique*
17, rue Descartes - 75 Paris V

et

Département de Mathématiques
Université Paris XI - 91. Orsay

Ce travail a constitué l'une des parties d'un cours de 3ème cycle que les auteurs ont enseigné à l'Université Paris-Sud (Orsay), en 1971-1972.

§ 0 - INTRODUCTION

Soit (W, V_0, V_1) un h-cobordisme compact, de dimension $n+1$. On considère l'espace $\mathcal{F}$ des fonctions C^∞ définies sur W , à valeurs dans $[0,1]$, telles que $f^{-1}(i) = V_i$ pour $i = 0,1$. On le munit de la topologie C^∞ ; c'est un convexe dans l'espace de toutes les fonctions réelles sur W . On note $\mathcal{E}$ le sous-espace de $\mathcal{F}$ des fonctions sans point critique.

Le théorème de la pseudo-isotopie, traduit en termes de fonctions numériques, peut s'énoncer ainsi :

Théorème : Si W est 1-connexe et si $n \geq 5$, alors $\mathcal{E}$ est un espace non vide et connexe.

Le fait que $\mathcal{E}$ soit non vide constitue la forme fonctionnelle du théorème de S. Smale, dit théorème du h-cobordisme ([2], [7]). La connexité de $\mathcal{E}$ a été prouvée par J. Cerf dans [1]. La démonstration s'articule autour des idées suivantes :

- 1) Définir une stratification de $\mathcal{F}$ par des strates de codimension inférieure ou égale à 2, de sorte que le complémentaire dans $\mathcal{F}$ de leur réunion soit de codimension strictement plus grande que 2. Les strates sont en fait des orbites de la composante neutre du groupe $\text{Diff}(W) \times \text{Diff}_+([0,1])$ pour son action naturelle à gauche sur $\mathcal{F}$. Rappelons enfin que la réunion des strates de codimension 0 coïncide avec l'espace des fonctions de Morse excellentes (i.e. : à valeurs critiques distinctes).
- 2) Remplacer tout chemin de traversée d'une strate de codimension 1 par un chemin dit élémentaire, c'est-à-dire donné par un plongement d'un modèle explicite. Ces chemins sont porteurs d'une information géométrique et leur classification se ramène à celle de certains systèmes de nappes adaptées à une fonction de Morse excellente.

Alors le problème de déformer un chemin de fonctions, dans le but par exemple de simplifier son graphique, se réduit dans certains cas à un problème soluble par les procédés classiques de la topologie différentielle (théorèmes de fibration d'espaces de plongements, procédé de Whitney de modification d'intersections, etc...). Cette méthode fournit des lemmes à caractère semi-local : lemme de la queue d'aronde [3], lemme du triangle, lemme du bec, de l'unicité des naissances, de l'unicité des morts * [1].

3) Introduire un objet, défini purement algébriquement, sur lequel on a des renseignements assez fins pour montrer qu'il décrit la structure du nerf de la stratification d'un certain sous-espace de $\mathcal{F}$, noté $\mathcal{F}_{i,q}$: par définition, $f \in \mathcal{F}_{i,q}$ si f est une fonction de Morse ordonnée ayant q points critiques d'indice i et q points critiques d'indice $i+1$ ($2 \leq i \leq n-2$). En particulier on montre que le nerf de $\mathcal{E} = \mathcal{F}_{i,0}$ est réduit à un point.

Cet outil algébrique permet donc d'obtenir un résultat plus fin que celui auquel on en a dans le théorème de la pseudo-isotopie. Certains mathématiciens ont donc cherché à remplacer cette algèbre par la K -théorie algébrique, qui, au niveau du K_1 avait déjà permis de faire la théorie d'obstruction au théorème de Smale (cf. théorème du s -cobordisme de Barden- Mazur- Stallings [6]). Dans cet ordre d'idées, J. Wagoner [9] a été le premier à donner une démonstration du théorème de Cerf à partir du théorème de Milnor sur $K_2(\mathbb{Z})$ [8]. Puis A. Hatcher [5] et J. Wagoner ont défini algébriquement le groupe $Wh_2(\pi_1(W))$ et ont montré

* Le lemme d'unicité des morts, à la différence des précédents, n'est valable que dans le cas 1-connexe; dans le cas général, dans [4] on donne une borne supérieure de l'obstruction; récemment A. Hatcher a annoncé qu'il savait effectivement calculer cette obstruction.

que ce groupe représentait une partie de l'obstruction au problème de la pseudo-isotopie dans le cas non 1-connexe, l'autre partie venant de l'obstruction à l'unicité des morts. Dans leurs travaux, Hatcher et Wagoner ont abandonné le langage des chemins élémentaires pour le remplacer par celui des "gradient-like vector fields".

Nous allons donner ici une démonstration du théorème de la pseudo-isotopie, utilisant à la fois l'outil des chemins élémentaires et les résultats de la K-théorie algébrique. Cette démonstration sera mise en parallèle avec une démonstration du théorème de Smale; la première en paraîtra d'autant plus naturelle.

Signalons que, dans le cas 1-connexe, nous utilisons la K-théorie d'une façon un peu différente de celle de Hatcher-Wagoner et que, parallèlement, dans le cas général, nous proposons une autre définition de Wh_2 qui nous permet de formuler une conjecture relative à $\pi_1(\mathcal{F}_i)$ (cf. Appendice II). Pour finir, nous donnerons une démonstration du théorème de classification des fonctions de Morse excellentes de "type (i,q) ", sans faire appel au nerf de $\mathcal{F}_{i,q}$ et dans les conditions $2 \leq i \leq n-3$, ce qui améliore l'énoncé donné par Cerf [1; p.162 corollaire].

§ 1 - POINT DE DEPART GEOMETRIQUE : LA CONNEXITE DE $\mathcal{F}_i$.

1.1 Définitions : On note $\mathcal{F}_{i,q}^0$ le sous-espace de $\mathcal{F}$ constitué par les fonctions de Morse excellentes, ordonnées, avec q points critiques d'indice i et q points critiques d'indice $i + 1$. On note $\mathcal{F}_i^0$ la réunion des $\mathcal{F}_{i,q}^0$ et $\mathcal{F}_i$ l'intérieur de l'adhérence de $\mathcal{F}_i^0$ dans $\mathcal{F}$.

On appelle variété intermédiaire une sous-variété de W qui est une variété de niveau d'une fonction $f \in \mathcal{F}_{i,q}^0$, séparant les points critiques d'indice i de ceux d'indice $i + 1$.

1.2 Proposition : Si W est un h -cobordisme compact orientable (non nécessairement 1-connexe), de dimension $n + 1$, $n \geq 5$, et si $2 \leq i \leq n - 2$, alors $\mathcal{F}_i^0$ est non vide et $\mathcal{F}_i$ est connexe.

Le fait que $\mathcal{F}_i^0$ soit non vide est au point de départ de la démonstration du théorème du g -cobordisme [6]. La connexité de $\mathcal{F}_i$ est prouvée dans [3] ♦ et est un ingrédient dans la théorie d'obstruction au théorème de la pseudo-isotopie.

A partir de maintenant on suppose que $\mathcal{E}$ est non vide, c'est-à-dire que W est un produit. D'après la proposition 1.2, deux fonctions sans point critique sont joignables par un chemin sur lequel les seuls accidents sont des trois types suivants : la naissance d'une paire de points critiques d'indice i et $i + 1$ (à un niveau convenable pour que la fonction reste ordonnée), l'élimination d'une telle paire, enfin le croisement de deux valeurs critiques de même indice. En fait on peut prouver mieux :

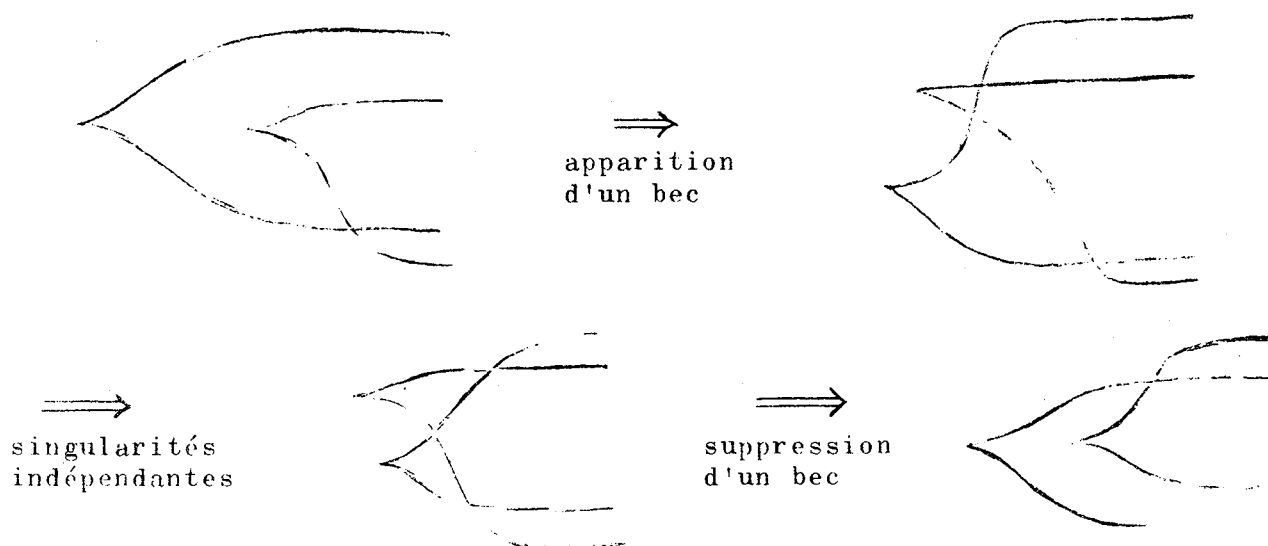
♦ La première démonstration a été donnée dans [4] avec des hypothèses dimensionnelles plus restrictives.

1.3 Proposition : Si $n \geq 5$ et $2 \leq i \leq n-2$, deux fonctions sans point critique sont joignables par une suite de chemins élémentaires qui, dans l'ordre, sont des types suivants : naissance, croisement de deux valeurs critiques d'indice $i+1$, élimination, de telle sorte que les points critiques nés ensemble meurent ensemble.

Remarque : Soit γ la partie de ce chemin où ont lieu les croisements de valeurs critiques. Puisque γ est composé de chemins élémentaires, toutes les fonctions de γ ont les mêmes points critiques et l'on peut supposer qu'il existe une même variété intermédiaire pour toutes les fonctions de γ .

Démonstration : 1) D'après la proposition 1.2 et les lemmes d'unicité des naissances et de singularités indépendantes (cf. [1]), on peut se réduire au cas où le chemin est une suite de chemins élémentaires qui, dans l'ordre, sont des types suivants : naissance, croisement de deux valeurs critiques d'indice i , croisement de deux valeurs critiques d'indice $i+1$, enfin mort.

2) On remplace les croisements (i, i) par des croisements $(i+1, i+1)$ par le truc suivant, expliqué par une suite de graphiques :



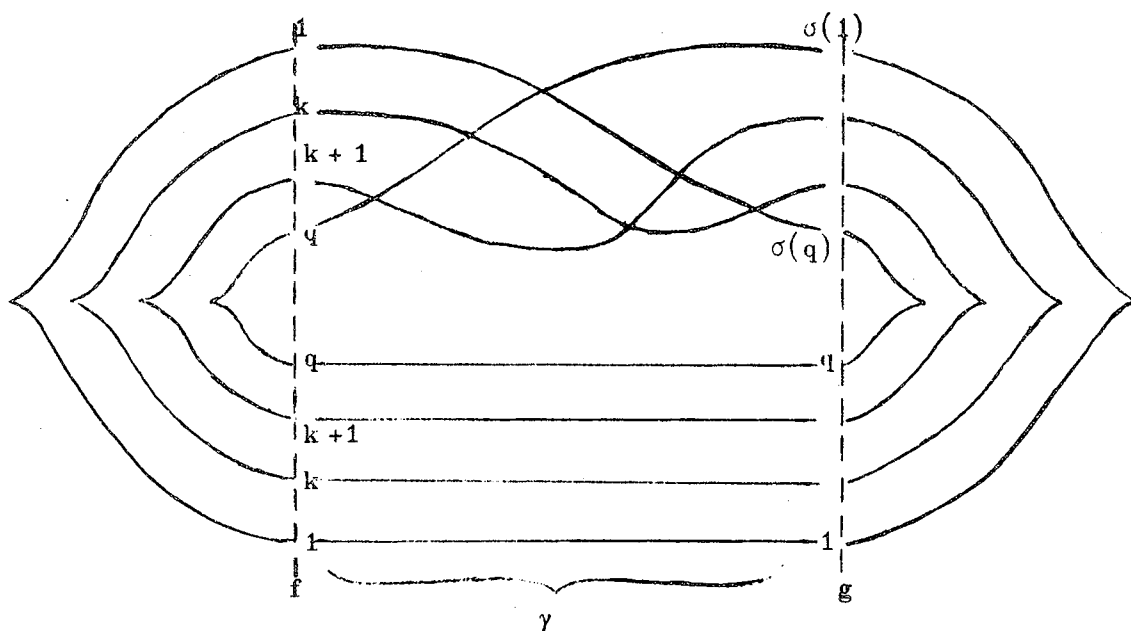
3) Numérotons les points critiques d'indice i et ceux d'indice $i+1$ dans l'ordre de leur apparition : $(c_1, c'_1), (c_2, c'_2), \dots, (c_q, c'_q)$ si f est l'origine de γ et g son extrémité, on a

$$f(c_1) > f(c_2) > \dots > f(c_q) > f(c'_q) > \dots > f(c'_1).$$

En conservant cette numérotation le long de γ , on arrive à

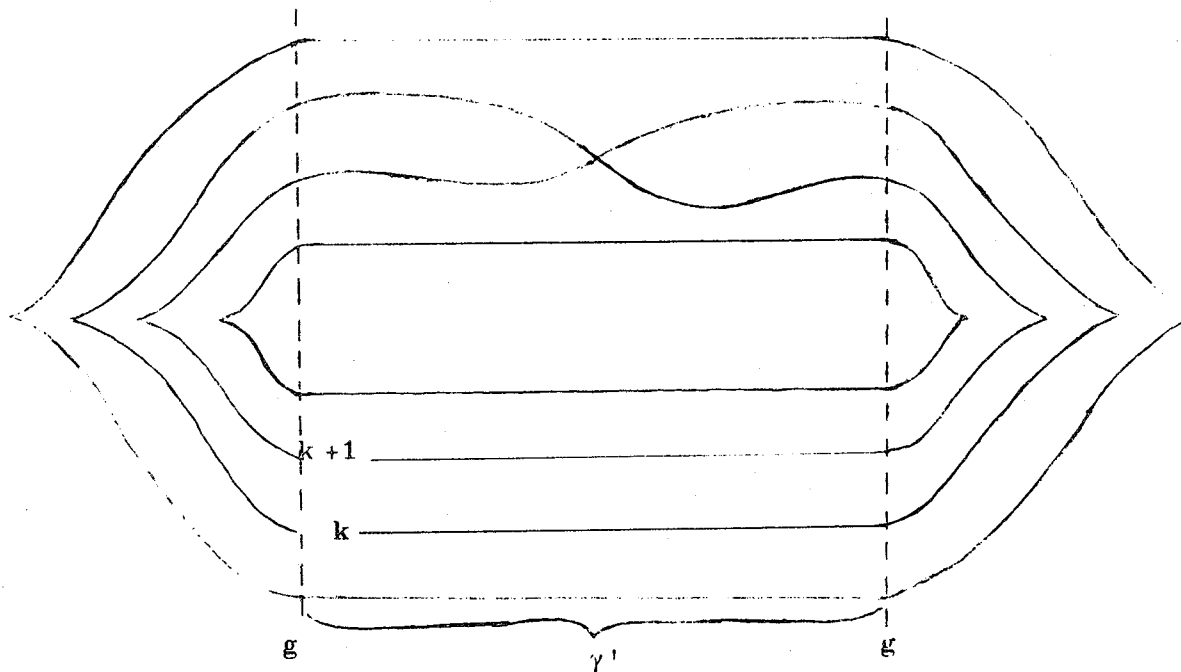
$$g(c_{\sigma(1)}) > g(c_{\sigma(2)}) > \dots > g(c_{\sigma(q)}) > g(c'_q) > \dots > g(c'_1)$$

où σ est une certaine permutation de $\{1, 2, \dots, q\}$;



$c_{\sigma(q)}$ se tue avec $c'_q, \dots, c_{\sigma(1)}$ se tue avec c'_1 .

Ajoutons à la fin du chemin un lacet γ' d'origine g ayant le graphique indiqué sur la figure ; son existence est assurée par les lemmes d'apparition de queue d'aronde et d'unicité des naissances.



Soit σ' la permutation : $\sigma'(k) = \sigma(k+1)$
 $\sigma'(k+1) = \sigma(k)$
 $\sigma'(j) = \sigma(j)$ si $j \neq k, k+1$.

Alors à la fin du chemin $\gamma * \gamma'$, $c_{\sigma'}(q)$ se tue avec $c'_q, \dots, c_{\sigma'}(1)$ se tue avec c'_1 . Par itération de ce processus, on peut construire entre f et g un chemin γ ne comportant que des croisements de valeurs critiques d'indice $i+1$ et tel que les points critiques nés ensemble se tuent ensemble.

cqfd.

§ 2 - LA K-THEORIE ALGEBRIQUE

(Référence générale de ce paragraphe : [8]).

Λ désigne un anneau unitaire.

2.1 Notations : Si k et l sont deux entiers naturels distincts et si $\lambda \in \Lambda$, on note t_{kl}^λ la matrice élémentaire de $GL(\Lambda) = \varinjlim GL_n(\Lambda)$ qui n'a que des 1 sur la diagonale, des zéros partout ailleurs sauf à l'intersection de la k -ième ligne et de la l -ième colonne où le coefficient est λ .

On note $E(\Lambda)$ le sous-groupe de $GL(\Lambda)$ engendré par les matrices élémentaires. On rappelle que

$$E(\Lambda) = [GL(\Lambda), GL(\Lambda)] = [E(\Lambda), E(\Lambda)].$$

2.2 En K-théorie algébrique, on étudie le groupe quotient $GL(\Lambda)/E(\Lambda) = K_1(\Lambda)$ et les relations entre matrices élémentaires. Dans l'ensemble de ces relations, les plus simples sont celles de Steinberg :

$$t_{kl}^\lambda t_{kl}^\mu = t_{kl}^{\lambda + \mu},$$

$$[t_{ij}^\lambda, t_{kl}^\mu] = 1, \quad \text{si } j \neq k \text{ et } i \neq l,$$

$$[t_{ij}^\lambda, t_{jk}^\mu] = t_{ik}^{\lambda\mu}, \quad \text{si } i \neq k.$$

Elles sont universelles, c'est-à-dire valables quel que soit l'anneau Λ . Nous verrons au paragraphe 4 (Remarque 2 et lemme 4.3) une propriété caractéristique des relations de Steinberg.

Remarque : D'après le théorème de Milnor [8; th.10.1] toutes les relations universelles sont engendrées par les relations de Steinberg et par la relation

$$(t_{12}^1 \ t_{21}^{-1} \ t_{12}^1)^4 = 1$$

Cependant cette dernière relation peut devenir conséquence des relations de Steinberg pour certains anneaux, par exemple $\Lambda = \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$, $m \not\equiv 0 \pmod{4}$, [8; cor.10.8].

On définit alors le groupe de Steinberg $St(\Lambda)^*$ par générateurs et relations : les générateurs sont notés x_{ij}^λ , $i, j \in \mathbb{N}^+$, $i \neq j$, $\lambda \in \Lambda$ et les relations sont les suivantes :

$$x_{ij}^\lambda x_{ij}^\mu = x_{ij}^{\lambda+\mu},$$

$$[x_{ij}^\lambda, x_{kl}^\mu] = 1 \quad \text{si } j \neq k, i \neq l,$$

$$[x_{ij}^\lambda, x_{jk}^\mu] = x_{ik}^{\lambda\mu} \quad \text{si } i \neq k.$$

On les appellera relations de Steinberg. L'application $x_{ij}^\lambda \mapsto t_{ij}^\lambda$ définit donc un épimorphisme de groupes $\rho : St(\Lambda) \rightarrow E(\Lambda)$.

On prouve que le noyau de ρ est le centre de Λ et on pose $K_2(\Lambda) = \text{Ker } \rho$. Les éléments de $K_2(\Lambda)$ représentent les relations non triviales entre les matrices élémentaires sur l'anneau Λ .

2.3 Résultats pour $\Lambda = \mathbb{Z}$

1) $K_1(\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Ces deux éléments sont représentés par les deux unités de $\mathbb{Z}$. On peut encore dire que $E(\mathbb{Z}) = SL(\mathbb{Z})$. En fait l'anneau

* On définit de même $St_q(\mathbb{Z})$ en imposant $i, j \leq q$.

$\mathbb{Z}$ étant euclidien, cette égalité peut même être déstabilisée : pour tout n , $E_n(\mathbb{Z}) = \mathrm{SL}_n(\mathbb{Z})$, ou encore toute matrice unimodulaire est produit de matrices élémentaires.

2) Théorème de Milnor [8] : $K_2(\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$; le générateur de $K_2(\mathbb{Z})$ est $(x_{ij}^\varepsilon x_{ji}^{-\varepsilon} x_{ij}^\varepsilon)^4$ où $\varepsilon = +1, -1$ (en appliquant [8; lemme 9.2], on vérifie qu'en faisant varier i, j et ε on obtient des écritures différentes du même élément de $\mathrm{St}(\mathbb{Z})$).

Nous allons interpréter ce résultat d'une façon plus adaptée à la géométrie. Considérons le sous-groupe $\check{T}$ de $\mathrm{GL}(\mathbb{Z})$ formé des matrices triangulaires supérieures.

Considérons d'autre part le sous-groupe G de $\mathrm{St}(\mathbb{Z})$ engendré par des éléments

$$\gamma_{ji}(\varepsilon, \varepsilon') = x_{ji}^{(\varepsilon-1)\varepsilon'} x_{ij}^{\varepsilon'} x_{ji}^{(\varepsilon-1)\varepsilon'}, \quad j > i, \text{ et } \varepsilon, \varepsilon' = \pm 1$$

(comparer à la définition donnée dans l'appendice du sous-groupe $G(\pi)$ de $\mathrm{St}(\mathbb{Z}[\pi])$).

2.4 Proposition :

- 1) $\rho(G) = \check{T} \cap \mathrm{SL}(\mathbb{Z})$,
- 2) G est invariant dans $\rho^{-1}(\check{T})$,
- 3) $K_2(\mathbb{Z}) \subset G$.

Remarquons que 1) et 2) impliquent que l'inclusion

$$K_2(\mathbb{Z})/K_2(\mathbb{Z}) \cap G \rightarrow \rho^{-1}(\check{T})/G$$

est un isomorphisme; ce groupe quotient est trivial d'après le 3).
(Avec les notations de l'appendice II, cela revient à dire que $\mathrm{Wh}_2^1(\{1\}) = 0$).

Démonstration :

1) Désignons par d_{ij} la matrice diagonale n'ayant que des 1, sauf à la $i^{\text{ème}}$ et à la $j^{\text{ème}}$ place où le coefficient est -1; on vérifie immédiatement que

$$\gamma_{ji}(1, \varepsilon') = x_{ij}^{\varepsilon'},$$

$$\text{donc } \rho(\gamma_{ji}(1, \varepsilon')) = t_{ij}^{\varepsilon'},$$

$$\text{et } \rho(\gamma_{ji}(1, \varepsilon')\gamma_{ji}(-1, \varepsilon')) = d_{ij} \quad (\text{indépendamment de } \varepsilon').$$

La conclusion résulte alors du fait que, pour $j > i$, les matrices $t_{ij}^{\varepsilon'}$ et d_{ij} engendrent $\tilde{T} \cap SL(\mathbb{Z})$.

2) Soit $x \in G$, et $\alpha \in \rho^{-1}(\tilde{T})$; puisque $\rho(G) = \tilde{T} \cap SL(\mathbb{Z})$, il existe $y \in G$ avec $\rho(y) = \rho(\alpha)$. Puisque $K_2(\mathbb{Z})$ est contenu dans le centre de $St(\mathbb{Z})$, on a $y^{-1}\alpha x \alpha^{-1}y = x \alpha^{-1}y y^{-1}\alpha = x$, et donc :

$$\alpha x \alpha^{-1} = y x y^{-1} \in G.$$

3) Introduisons la notation $w_{ji}(\varepsilon) = x_{ji}^{\varepsilon} x_{ij}^{-\varepsilon} x_{ji}^{\varepsilon}$;

On vérifie immédiatement sur l'écriture $\gamma_{ji}(\varepsilon, \varepsilon') = x_{ji}^{\varepsilon\varepsilon'} w_{ji}(-\varepsilon') x_{ji}^{\varepsilon\varepsilon'}$ l'identité

$$\begin{aligned} & \gamma_{ji}(1, -\varepsilon\varepsilon') \gamma_{ji}(\varepsilon', \varepsilon) \gamma_{ji}(\varepsilon\varepsilon', -1) \gamma_{ji}(\varepsilon, \varepsilon') \\ &= x_{ji}^{-\varepsilon\varepsilon'} w_{ji}(\varepsilon\varepsilon') w_{ji}(-\varepsilon) w_{ji}(1) w_{ji}(-\varepsilon') x_{ji}^{+\varepsilon\varepsilon'} \\ &= w_{ji}(\varepsilon\varepsilon') w_{ji}(-\varepsilon) w_{ji}(1) w_{ji}(-\varepsilon') \in K_2(\mathbb{Z}) \end{aligned}$$

En particulier,

$$(\gamma_{ji}(1, -1) \gamma_{ji}(-1, -1))^2 = (w_{ji}(1))^4$$

qui est le générateur de $K_2(\mathbb{Z})$.

§ 3 - BASES ADAPTEES ET MATRICES D'INTERSECTION

3.1 Il s'agit là de notions qui permettent de relier l'algèbre et la géométrie. Dans toute la suite on suppose W 1-connexe et $2 \leq i \leq n-2$.

Soient f une fonction de $\mathcal{F}_{i,q}^0$ et M une variété intermédiaire (1.1) de f ; M est unique à isotopie près. Notons W_+ et W_- les cobordismes supérieurs et inférieurs : $W = W_+ \cup W_-$. On sait que $H_{i+1}(W_+, M)$ et $H_{n+1-i}(W_-, M)$ sont isomorphes M à $\mathbb{Z}^q$ et qu'il existe une forme d'intersection qui les met en dualité. Choisir des bases pour ces groupes d'homologie, c'est choisir des isomorphismes

$$\varphi : \mathbb{Z}^q \longrightarrow H_{i+1}(W_+, M)$$

$$\varphi' : \mathbb{Z}^q \longrightarrow H_{n+1-i}(W_-, M)$$

On peut écrire dans ces bases la matrice de la forme d'intersection $A = (a_{kl})$

$$a_{kl} = \varphi'(\varepsilon_k) \cdot \varphi(\varepsilon_l)$$

où $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_q)$ est la base canonique de $\mathbb{Z}^q$.

Définitions :

- 1) Un système de nappes descendantes pour $f|_{W_+}$ est la donnée de nappes de f , deux à deux disjointes, issues de chaque point critique de $f|_{W_+}$, à bord dans M .
- 2) On dit que φ est une base adaptée à $f|_{W_+}$ s'il existe un système de nappes orientées $D_1, \dots, D_q$, tel que, pour tout $k \in \{1, \dots, q\}$,

$$\varphi(\varepsilon_k) = [D_k].$$

On donne des définitions analogues concernant W_- .

Remarque : La donnée d'une base adaptée sur W_+ (resp. W_-) détermine :

- a) une numérotation des points critiques d'indice $i+1$ (resp. d'indice i),
- b) une orientation des germes de nappes.

Un couple (φ, φ') de bases adaptées étant choisi, on note $c_1, \dots, c_q$ les points critiques d'indice $i+1$ et $c'_1, \dots, c'_q$ ceux d'indice i . Avec notre définition, l'ordre des valeurs critiques n'est pas comparable à l'ordre des points critiques de même indice; en cela notre définition diffère de celle donnée par J. Cerf [1; p. 145].

3) Si, en plus, $f(c_1) > f(c_2) > \dots > f(c_q)$

$$f(c'_1) < f(c'_2) < \dots < f(c'_q)$$

on dira alors que (φ, φ') est adapté à f et à l'ordre des valeurs critiques.

3.2 Lemme : 1) Il existe un couple (φ, φ') adapté à f et à l'ordre des valeurs critiques.

2) Si φ (resp. φ') est adaptée à f sur W_+ (resp. W_-) et si t_{kl}^λ est une matrice élémentaire, $\lambda \in \mathbb{Z}$, $\lambda \neq 0$, alors $\varphi \circ t_{kl}^\lambda$ (resp. $\varphi' \circ t_{kl}^\lambda$) est adaptée à f si et seulement si $f(c_1) > f(c_k)$ (resp. $f(c'_1) < f(c'_k)$).

3) On passe de φ (resp. φ') à n'importe quelle autre base adaptée à f sur W_+ (resp. W_-), qui numérote les points critiques et oriente les germes de nappes comme le fait φ (resp. φ'), en répétant le processus de composition avec une matrice élémentaire permise par le 2).

Remarque : Le 1) est vrai sans hypothèse dimensionnelle. Sur W_+ , le 2) et le 3) sont vrais si $2 \leq i+1 \leq n-1$; leur démonstration utilise seulement la classification homologique des systèmes de nappes et non leur classification isotopique.

Démonstration (pour W_+) : 1) On sait bien que, pour un choix générique d'une métrique riemannienne sur W_+ , les nappes de gradient descendant des points critiques ont leurs bords dans M et qu'elles engendrent l'homologie. On les oriente arbitrairement et on les numérote par valeur critique décroissante. On rappelle en passant que tout système de nappes est de gradient pour une certaine métrique.

2) Soient φ une base adaptée à f et $(D_1, \dots, D_q)$ un système de nappes orientées réalisant la base φ . Soit m une métrique riemannienne pour laquelle $D_1, \dots, D_q$ sont de gradient; notons $A_1, \dots, A_q$ les nappes de gradient montantes; elles montent jusqu'au bord supérieur de W_+ .

Si $f(c_1) > f(c_k)$, on sait construire une nappe D'_1 issue de c_1 dont l'intersection homologique avec A_k soit égale à λ et qui ne rencontre pas D_j pour $j \neq 1$ (cf [1; ch.II, § 4, en particulier le lemme 2 (s_1)]); on oriente D'_1 de façon cohérente avec D_1 (on peut supposer qu'elles ont même germe en c_1). Alors le système de nappes orientées $D_1, \dots, D'_1, \dots, D_q$ réalise la base $\varphi \circ t_{k1}^\lambda$.

En revanche, si $f(c_1) < f(c_k)$, un disque orienté représentant $\varphi(\varepsilon_1) + \lambda \varphi(\varepsilon_k)$ doit couper A_k ; sur un tel disque, f prend des valeurs strictement plus grandes que $f(c_1)$; ce disque ne peut donc être une nappe de f issue de c_1 .

3) Soit ϕ une autre base adaptée à f , possédant par rapport à φ la propriété énoncée au 3). On a alors les intersections homologiques suivantes :

$$\forall l \in \{1, \dots, q\}, \phi(\varepsilon_l) \cdot [A_l] = 1$$

$$\phi(\varepsilon_l) \cdot [A_k] = 0 \quad \text{si } f(c_k) > f(c_l).$$

En appliquant la construction du 2), on peut modifier arbitrairement la valeur de $\phi(\varepsilon_l) \cdot [A_k]$ si $f(c_l) > f(c_k)$ et en particulier l'annuler.

En le faisant, on ne change pas la valeur de $\phi(\varepsilon_1) \cdot [A_k]$, sauf éventuellement celle de $\phi(\varepsilon_1) \cdot [A_k]$, pour $f(c_{k'}) < f(c_k)$, au cas où $\phi(\varepsilon_k) \cdot [A_k] \neq 0$. Ainsi, en effectuant la construction par récurrence à partir de la valeur critique la plus basse, on peut se ramener à $\phi(\varepsilon_1) \cdot [A_k] = \delta_{1k}$ (symbole de Kronecker), qui signifie $\phi = \varphi$.

3.3 Ce lemme permet de définir un invariant de la manière suivante : soient donnés une fonction $f \in \mathcal{F}_{i,q}^0$ et un couple (φ, φ') de bases adaptées à f et à l'ordre des valeurs critiques; soit A la matrice de la forme d'intersection dans ces bases. On considère sa classe dans l'ensemble des classes doubles $\check{T}_q \backslash GL_q(\mathbb{Z})/T_q$, où T_q (resp. $\check{T}_q$) est le sous-groupe de $GL_q(\mathbb{Z})$ des matrices triangulaires inférieures (resp. supérieures)

Corollaire : La double classe de A dans $\check{T}_q \backslash GL_q(\mathbb{Z})/T_q$ ne dépend que de la fonction f .

On définit ainsi une application naturelle

$$\bar{\omega} : \mathcal{F}_{i,q}^0 \longrightarrow \check{T}_q \backslash GL_q(\mathbb{Z})/T_q.$$

Si H est un difféomorphisme de W laissant invariante chaque composante du bord de W , alors

$$\bar{\omega}(f) = \bar{\omega}(f \circ H).$$

Nous verrons (§ 6) que $\bar{\omega}(f)$ classifie f à isotopie près, ce qui prouvera en outre que la classification des fonctions de type (i,q) à conjugaison différentiable près coïncide avec leur classification à isotopie près. [1; p.162, Remarques 1].

3.4 L'invariant $\bar{\omega}$ permet de reconnaître si f est une fonction primitive, c'est-à-dire extrémité d'un chemin, issu d'une fonction sans point critique, consistant en les naissances de q paires de points critiques d'indices $(i, i+1)$, à l'exclusion de tout autre accident.

Proposition : Si $n \geq 5$, $2 \leq i \leq n-2$, alors $f \in \mathcal{F}_{i,q}$ est primitive si et seulement si $\overline{\omega}(f)$ est la double classe triviale dans $\prod_q \backslash GL_q(\mathbb{Z})/T_q$.

Démonstration : D'après le lemme de cancellation [2], f est primitive si et seulement si il existe un couple (φ, φ') de bases adaptées à f et à l'ordre des valeurs critiques dans lequel la matrice de la forme d'intersection est diagonale. D'après le lemme 3.2, ceci est équivalent à la trivialité de $\overline{\omega}(f)$.

Remarque : Soit f primitive; si l'on impose d'une part une base φ' adaptée à f et à l'ordre des valeurs critiques sur W_- , d'autre part une orientation des germes de nappes au voisinage de tous les points critiques, alors on peut trouver une base φ , adaptée à f et à l'ordre des valeurs critiques sur W_+ , telle que, dans les bases (φ, φ') , la matrice d'intersection soit une triangulaire supérieure. La base φ est d'ailleurs unique.

3.5 Lemme : On suppose $3 \leq i+1 \leq n-2$.

Soient $f \in \mathcal{F}_{i,q}^0$ et φ une base adaptée à f sur W_+ . On considère deux valeurs critiques consécutives $f(c_k) < f(c_1)$. Soit $\mathcal{C}$ le complexe de Kan des chemins élémentaires descendants γ , d'origine f , relatifs au croisement de ces deux valeurs critiques.

- 1) Il existe $\gamma \in \mathcal{C}$, tel que φ soit adaptée à toutes les fonctions de γ (sans hypothèse de dimension).
- 2) La classe de γ dans $\pi_0(\mathcal{C})$ est déterminée univoquement par φ .
- 3) Si $(j,m) \neq (k,l)$, $\varphi \circ t_{j,m}^\lambda$ détermine la même classe dans $\pi_0(\mathcal{C})$.

Démonstration : 1) Soit $(D_1, \dots, D_1, \dots, D_q)$ un système de nappes orientées représentant φ . Alors, on peut abaisser la valeur de c_1 par un chemin élémentaire γ dont la nappe descendante associée est contenue

* cf. [1; p.44, Lemme 2].

dans D_1^* . Le système $(D_1, \dots, D_q)$ est adapté à toutes les fonctions de γ .

2) Soit $\mathcal{M}$ une métrique riemannienne faisant de $(D_1, \dots, D_q)$ un système de gradient. Considérons les nappes de gradient montantes $A_1, \dots, A_q$. Soit γ' un autre chemin élémentaire de croisement possédant la propriété du 1), d'extrémité notée f' . Par hypothèse il existe une nappe orientée D_1' , adaptée à f' , issue de c_1 et à bord dans M telle que

$$\varphi(\varepsilon_1) = [D_1'].$$

Donc $[D_1'] \cdot [A_k] = [D_1] \cdot [A_k] = 0$. Or γ' étant un chemin élémentaire, on peut choisir D_1' également adaptée à f , la partie Δ de D_1' comprise entre les niveaux $f(c_1)$ et $f(c_k)$ étant la nappe associée à γ' . Puisque D_1' ne saurait recouper A_k en-dessous du niveau $f(c_k)$, on a $[\Delta] \cdot [A_k] = 0$.

Or d'après [1; p.54, prop.4], cette classe d'intersection classe les chemins de croisement. En conclusion γ' est homotope à γ .

3) La base $\varphi \circ t_j^\lambda$ n'est adaptée à f que si $f(c_m) > f(c_j)$. Cette nouvelle base est réalisable par un système de nappes $(D_1', \dots, D_q')$ où $D_r' = D_r$ sauf pour $r = m$. Si $m = 1$ et $j \neq k$, alors $f(c_j) < f(c_k)$ et on peut imposer à D_1' de coïncider avec D_1 jusqu'en-dessous de $f(c_k)$. La conclusion est alors claire.

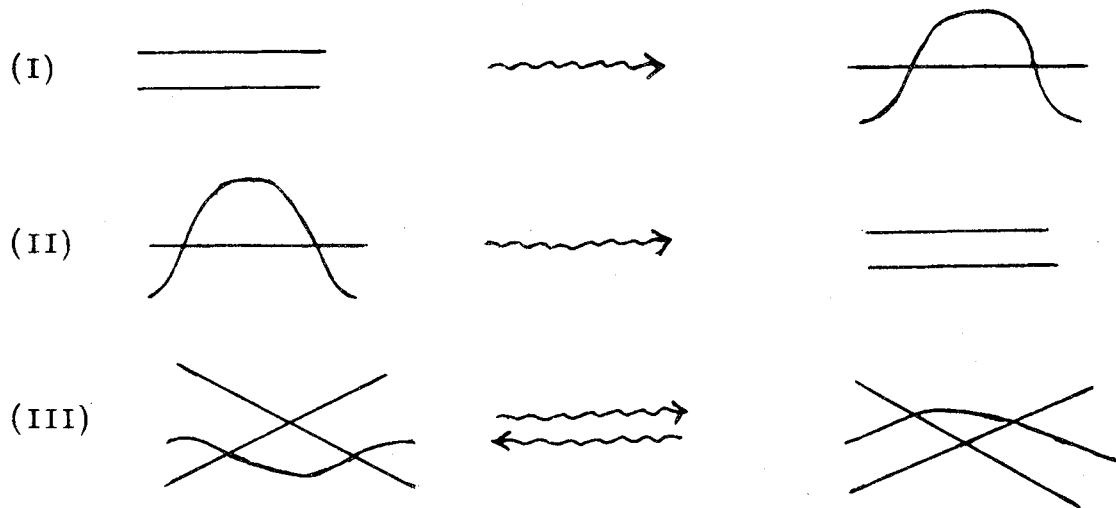
3.6 Corollaire : Dans les conditions du lemme, on considère un chemin α , d'origine f , à support dans W_+ , composé de chemins élémentaires de croisement. On suppose qu'il existe une base φ adaptée à toutes les fonctions de α . Alors toute déformation du graphique de α se relève

* Un chemin élémentaire détermine une nappe issue du point critique dont on abaisse la valeur; le bord inférieur de cette nappe est à un niveau strictement inférieur à celui de c_k . a

** Il est sous-entendu que l'on déforme le graphique à extrémités fixes, parmi les graphiques de chemins dans les fonctions de Morse.

en une déformation de α de sorte que φ reste adaptée à toutes les fonctions de la déformation.

Démonstration : Génériquement les déformations d'un graphique se décompose dans les opérations suivantes :



Le relèvement de (I) est trivial; celui de (II) résulte du lemme 3.5; celui de (III) se fait par application du lemme du triangle [1;p.76].

cqfd.

3.7 Corollaire : On suppose $2 \leq i \leq n-2$. Si A est la matrice de la forme d'intersection dans les bases (φ, φ') adaptées à f , alors, pour toute matrice élémentaire t_{kl}^λ , $\lambda \neq 0$, il existe une fonction $\tilde{f}$, coïncidant avec f sur W_- , et des bases adaptées à $\tilde{f}$ ($\tilde{\varphi} = \varphi \circ t_{kl}^\lambda$, φ') dans lesquelles la matrice de la forme d'intersection est $A t_{kl}^\lambda$. Plus précisément,

- 1) si $f(c_1) > f(c_k)$, on peut prendre $\tilde{f} = f$,
- 2) si $f(c_1) < f(c_k)$, on peut prendre pour $\tilde{f}$ l'extrémité d'un chemin de croisement (éventuellement de multicroisement), à support dans le voisinage d'une nappe D_k , issue de c_k , telle que $[D_k] = \varphi(\varepsilon_k)$.

Preuve : Dans le cas 1), on applique le lemme 3.2; par le lemme 3.5 1) on ramène le cas 2) au cas 1). ■

§ 4 - FAMILLE DE BASES ADAPTEE A UN CHEMIN DE CROISEMENTS

Dans ce paragraphe, on ne s'intéresse qu'à des croisements de valeurs critiques de même indice $i+1$. Les fonctions seront donc restreintes à W_+ et nous noterons, comme Cerf, $\mathcal{F}_{i,q;M}^+$ l'espace des fonctions de Morse sur W_+ , ayant q points critiques tous d'indice $i+1$, qui sont restriction de fonctions appartenant à $\mathcal{F}_{i,q}$ et admettant M comme variété intermédiaire. Pour avoir la classification des croisements $(i+1, i+1)$, on supposera $3 \leq i+1 \leq n-2$ [1; p.54, prop.4].

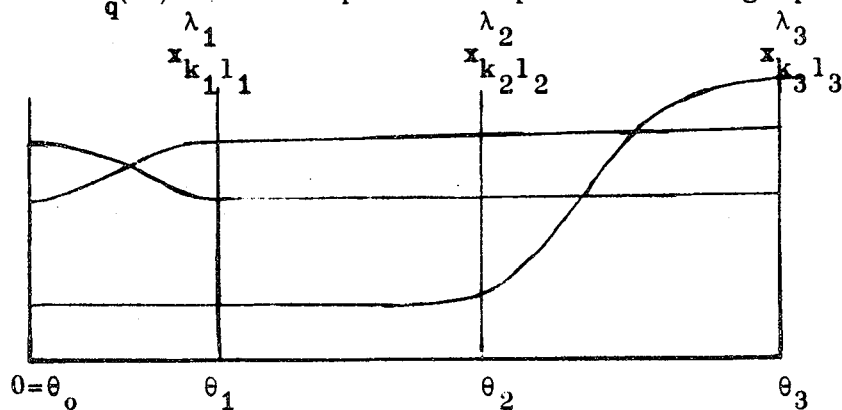
4.1 Définition : Soit $\gamma = \{f_\theta / \theta \in [0,1]\}$ un chemin dans $\mathcal{F}_{i,q;M}^+$. Une famille de bases B adaptée à γ est la donnée d'une subdivision $0 = \theta_0 < \theta_1 < \dots < \theta_p = 1$ de l'intervalle $[0,1]$ et, pour $j \in \{1, \dots, p\}$, d'une base $\varphi_j : \mathbb{Z}^q \longrightarrow H_{i+1}(W_+, M)$ de sorte que :

- 1) φ_j soit adaptée à toutes les fonctions f_θ , $\theta \in [\theta_{j-1}, \theta_j]$,
- 2) $\varphi_j^{-1} \circ \varphi_{j+1}$ soit une matrice élémentaire $t_{k_j l_j}^{\lambda_j}$.

A cette donnée, on peut associer le mot

$$x_{k_1 l_1}^{\lambda_1} x_{k_2 l_2}^{\lambda_2} \dots x_{k_p l_p}^{\lambda_p},$$

dont les lettres sont des générateurs de $St_q(\mathbb{Z})$, et l'élément $\mu(B)$ qu'il définit dans $St_q(\mathbb{Z})$. Ce mot peut être porté sur le graphique de γ :



Conséquences : Supposons qu'une telle famille B existe.

- Alors 1) toutes les bases $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_p$ numérotent les points critiques et orientent les germes de nappes de la même façon.
- 2) d'après le lemme 3.2, on a pour tout $j \in \{1, \dots, p\}$
- $$(*) \quad f_{\theta_j}(c_{k_j}) < f_{\theta_j}(c_{l_j}).$$

4.2 Existence : Dans la suite, on se limitera au cas où γ est un chemin générique ; alors on ne perd pas de généralité en le supposant composé de chemins élémentaires. Choisissons une subdivision de $[0, 1]$ telle que chaque intervalle $[\theta_j, \theta_{j+1}]$ ne contienne qu'un croisement, disons des valeurs $f_{\theta_j}(c_k) < f_{\theta_j}(c_l)$. Supposons par récurrence que φ_j soit construite; d'après le lemme 3.5, cette base détermine un chemin γ' de croisement de ces deux valeurs; γ' est unique à homotopie près. D'après la classification des croisements, la classe de $\gamma'^{-1} * \gamma|_{[\theta_j, \theta_{j+1}]}$ est un entier λ ; posons alors $\varphi_{j+1} = \varphi_j \circ t_{kl}^\lambda$; cette base est adaptée à toutes les fonctions f_θ , $\theta \in [\theta_j, \theta_{j+1}]$. ♦

Remarque 1 : Si on a un chemin γ et une famille B de bases adaptée à γ , alors toute déformation du graphique de γ , fixe au-dessus des points $\theta_0, \theta_1, \dots, \theta_p$, se relève en une déformation de γ , de sorte que B soit adaptée à chaque étape de la déformation. (cf. cor.3.6).

Remarque 2 : Si sur l'intervalle $[\theta_{j_0}, \theta_{j_1}]$ il n'y a aucun croisement et si

$$(\dagger) \quad t_{k_{j_0} l_{j_0}}^{\lambda_{j_0}} \dots t_{k_{j_1} l_{j_1}}^{\lambda_{j_1}} = 1$$

♦ Quitte à prendre une subdivision plus fine, on peut se dispenser de la classification des croisements et n'utiliser que le 3) du lemme 3.2.

dans $GL_q(\mathbb{Z})$, on peut modifier la famille adaptée en supprimant de la subdivision de $[0,1]$ les points $\theta_{j_0}, \dots, \theta_{j_1}$ et simultanément les lettres correspondantes du mot associé.

Observons que la relation $(\dagger)$ de $GL_q(\mathbb{Z})$ est bien particulière. En effet si $\theta \in [\theta_{j_0}, \theta_{j_1}]$, d'après $(*)$, on a

$$f_{\theta}(c_{l_{j_0}}) > f_{\theta}(c_{k_{j_0}}),$$

.....

$$f_{\theta}(c_{l_{j_1}}) > f_{\theta}(c_{k_{j_1}}),$$

ce qui revient à dire qu'il existe un ordre $\ll$ sur $\{1, 2, \dots, q\}$ tel que

$$l_{j_0} \gg k_{j_0}, \quad l_{j_0+1} \gg k_{j_0+1}, \dots, l_{j_1} \gg k_{j_1}.$$

On dira que la relation $(\dagger)$ est compatible avec un ordre.

Par exemple les relations de Steinberg ont cette propriété alors que la relation $(t_{12} t_{21}^{-1} t_{12})^4$ ne l'a pas.

4.3 Lemme : Si $t_{k_1 l_1}^{\lambda_1} \dots t_{k_r l_r}^{\lambda_r} = 1$ est une relation de $GL_q(\mathbb{Z})$ compatible avec un ordre $\ll$ sur $\{1, 2, \dots, q\}$, alors elle est engendrée par les relations de Steinberg compatibles avec le même ordre. En particulier $x_{k_1 l_1}^{\lambda_1} \dots x_{k_r l_r}^{\lambda_r} = 1$ dans $St_q(\mathbb{Z})^{\diamond}$.

$\diamond$ Le même lemme est vrai pour n'importe quel anneau de base.

Démonstration : On remarque d'abord que si σ est une permutation de $\{1, 2, \dots, q\}$,

$$\sigma t_{kl}^{\lambda} \sigma^{-1} = t_{\sigma(k)\sigma(l)}^{\lambda}$$

donc en conjuguant la relation par σ , on obtient une relation compatible avec l'ordre $<_{\sigma}$: par définition

$$l >_{\sigma} k \Leftrightarrow \sigma^{-1}(l) > \sigma^{-1}(k).$$

On se ramène ainsi à prouver le lemme pour l'ordre naturel, $k_1 < l_1, k_2 < l_2, \dots, k_r < l_r$.

En utilisant les deux relations de commutation de Steinberg, on se ramène au cas où la suite $k_1, k_2, \dots, k_r$ est croissante, ainsi que la suite $l_1, l_2, \dots, l_r$: par exemple on utilise

$$t_{23}^{\lambda} t_{12}^{\mu} = t_{12}^{\mu} t_{13}^{-\lambda\mu} t_{23}^{\lambda}$$

$$\text{ou } t_{13}^{\lambda} t_{12}^{\mu} = t_{12}^{\mu} t_{13}^{\lambda}.$$

Ensuite on réduit le mot par la première relation de Steinberg. Ceci étant fait, on peut écrire la relation sous la forme

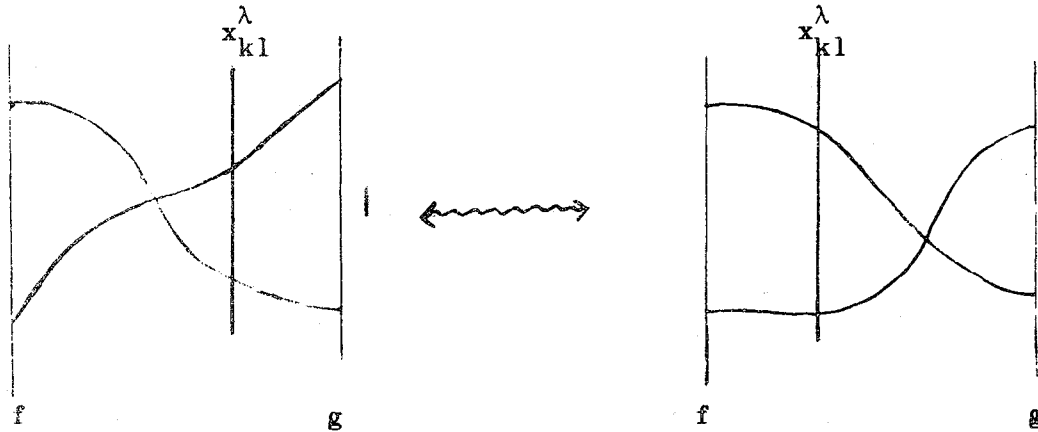
$$t_{12}^{\lambda_{12}} t_{13}^{\lambda_{13}} \dots t_{1q}^{\lambda_{1q}} t_{23}^{\lambda_{23}} \dots t_{q-1,q}^{\lambda_{q-1,q}} = 1$$

Si on effectue le produit de cette matrice, la première ligne est $(1, \lambda_{12}, \lambda_{13} + \lambda_{23} \lambda_{12}, \dots)$; on voit donc comment prouver de proche en proche que tous les exposants sont nuls.

cqfd.

Ce lemme revient à dire que le sous-groupe de $GL_q(\mathbb{Z})$ engendré par les matrices élémentaires supérieures possède une présentation dont les générateurs sont les x_{ij}^λ , $i < j$ et dont les relations sont celles de Steinberg.

Remarque 3 : On peut permuter un changement de base et un croisement



dès que le couple de points dont on croise les valeurs est autre que le couple $\{c_k, c_l\}$. En effet, si f et g désignent les extrémités du chemin de croisement, d'après le lemme 3.2, $g(c_l) > g(c_k)$, donc $f(c_l) > f(c_k)$; d'après le lemme 3.5, on peut faire le changement de base avant le croisement.

4.4 Proposition : Soient γ un chemin de croisements et B une famille de bases adaptée à γ , dont le mot associé est m . Soit R une relation de Steinberg. Alors on peut déformer γ en γ' et trouver une famille B' adaptée à γ' dont le mot associé m' s'obtienne à partir de m en insérant R ou en la supprimant, au cas où R est dans m .

Remarque : D'après le lemme 4.3, la même proposition est vraie pour toute relation compatible avec un ordre sur $\{1, 2, \dots, q\}$. Ce sont évidemment les seules relations qui ont une chance d'être localisées entre deux croisements du chemin en appliquant les modifications des remarques 1 et 3

ci-dessus; si l'on est parvenu à localiser la relation entre deux croisements, il suffit pour démontrer la proposition d'appliquer la remarque 2. Observons enfin que dans cette situation, la relation est compatible avec l'ordre sur $\{1, \dots, q\}$ défini par l'ordre naturel des valeurs critiques :

$$l \gg k \Leftrightarrow f(c_l) > f(c_k).$$

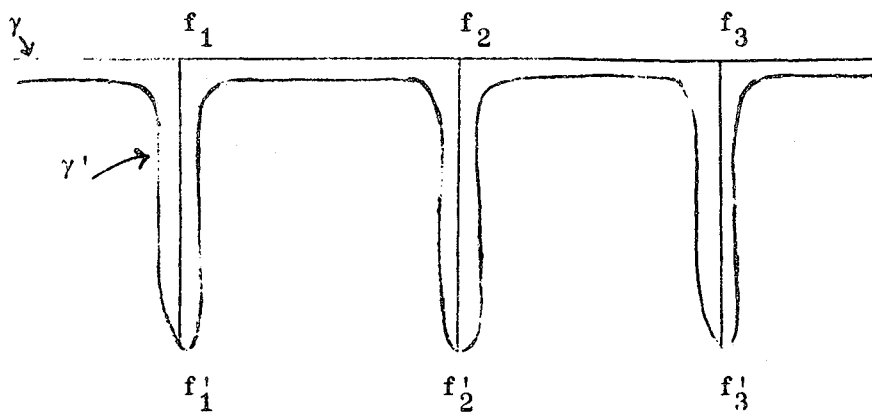
Démonstration : 1) Suppression de R.

Soient $R = x_{k_1 l_1}^{\lambda_1} \dots x_{k_r l_r}^{\lambda_r}$ compatible avec un ordre $\ll$ et $f_1, \dots, f_r$ les

fonctions de γ auxquelles on applique les changements de base. On note φ_j la base de B adaptée aux fonctions précédant juste f_j . De f_j , on peut faire partir un chemin de multicroisement qui ne croise pas les valeurs de c_{k_j} et de c_{l_j} et dont l'extrémité f'_j ait la propriété

$$k \ll l \Leftrightarrow f'_j(c_k) < f'_j(c_l).$$

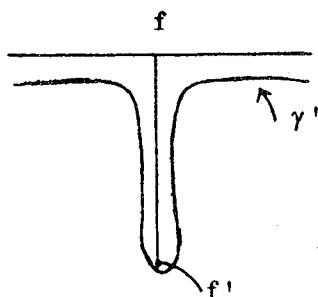
On peut le faire de telle sorte que la base adaptée φ_j soit adaptée à toutes les fonctions de ce chemin (cf. lemme 3.5).



Le nouveau chemin γ' indiqué sur la figure passe deux fois par chaque fonction f_j et le changement de base se fait au second passage. Sur le chemin $[f'_j, f'_{j+1}]$, on a un seul changement de bases, précédé par des croisements avec lesquels il commute (remarque 3). On peut donc se ramener au cas où le changement de base a lieu en f'_j . On peut alors appliquer la remarque 1 en observant que les valeurs critiques sont dans le même ordre aux deux extrémités de $[f'_j, f'_{j+1}]$. Il peut donc être déformé en un chemin sur lequel il n'y a aucun accident. En appliquant ce procédé pour tout j , on arrive au cas où la relation est "écrite" entre deux croisements, ce qui permet de la supprimer d'après la remarque 2.

2) Insertion de R

Soit f une fonction de γ , située entre les deux lettres de m , entre lesquelles on veut insérer R . Si R est compatible avec l'ordre des valeurs critiques de f , on peut insérer R sans modifier γ . Sinon on insère dans γ un aller et retour de f à f' de sorte que R soit compatible avec l'ordre des valeurs critiques de f' ; comme en 1), on choisit le chemin de multicroisement $[f, f']$ de sorte qu'il soit permis par la base de B qui est adaptée aux fonctions précédant juste f . Sur γ' , on insère R au niveau de f' .



4.5 Corollaire : Soient f_0 et f_1 les extrémités d'un chemin de croisements γ et B une famille de bases adaptée à γ . Si les valeurs critiques de f_0 et de f_1 sont dans le même ordre et si le mot associé $\mu(B)$ est trivial dans $\text{St}_q(\mathbb{Z})$, alors les fonctions f_0 et f_1 sont isotopes dans $\mathcal{F}_{i,q;M}^+$.

4.6 Complément : L'énoncé de ce corollaire est un peu décevant, bien qu'au paragraphe suivant nous n'ayons à l'utiliser que sous cette forme. En effet il donne un critère d'isotopie entre deux fonctions dépendant non seulement du chemin γ , mais du choix (très arbitraire) de la famille B. En fait, si l'on fixe une base φ_0 adaptée à f_0 sur W_+ , alors, pour deux familles B et B' adaptées à γ , d'origine φ_0 ,

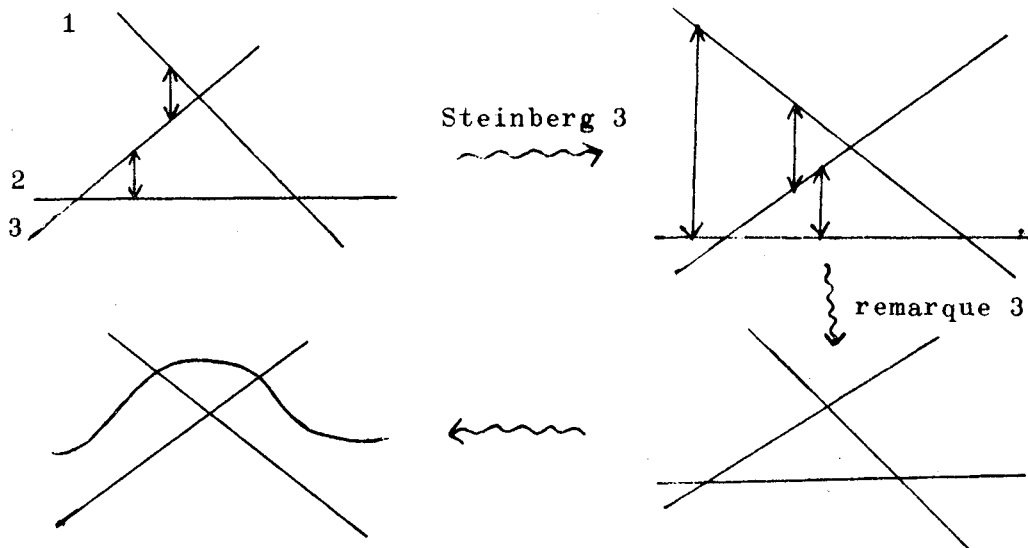
$$\mu(B)^{-1} \mu(B')$$

est un élément du groupe engendré par $\{x_{ij}^\lambda \mid f_1(c_j) > f_1(c_i)\}$.

Bien entendu on a cette latitude de rajouter à la fin du chemin des changements de bases adaptées à f_1 . Cette assertion se prouve par récurrence sur le nombre de croisements du chemin γ ; c'est évidemment trivial s'il n'y a pas de croisement; l'argument de la récurrence est assuré par la classification des croisements et par le fait algébrique suivant, déjà démontré pour le lemme 4.3 :

si $\ll$ est un ordre sur $\{1, 2, \dots, q\}$, tout élément du groupe engendré par $\{x_{ij}^\lambda \mid j \gg i\}$ peut s'écrire $x_{i_1 j_1}^{\lambda_1} x_{i_2 j_2}^{\lambda_2} \dots$, où les suites $i_1, i_2, \dots$ et $j_1, j_2, \dots$ sont croissantes pour la relation $\ll$.

D'autre part, il est immédiat de voir que la classe $\mu(B)$ est un invariant de la classe d'homotopie du chemin joignant f_0 à f_1 dans $\mathcal{S}_{i,q}^+ M$. Par exemple la traversée d'une singularité de codimension 2 (triangle) est possible grâce aux relations de Steinberg.

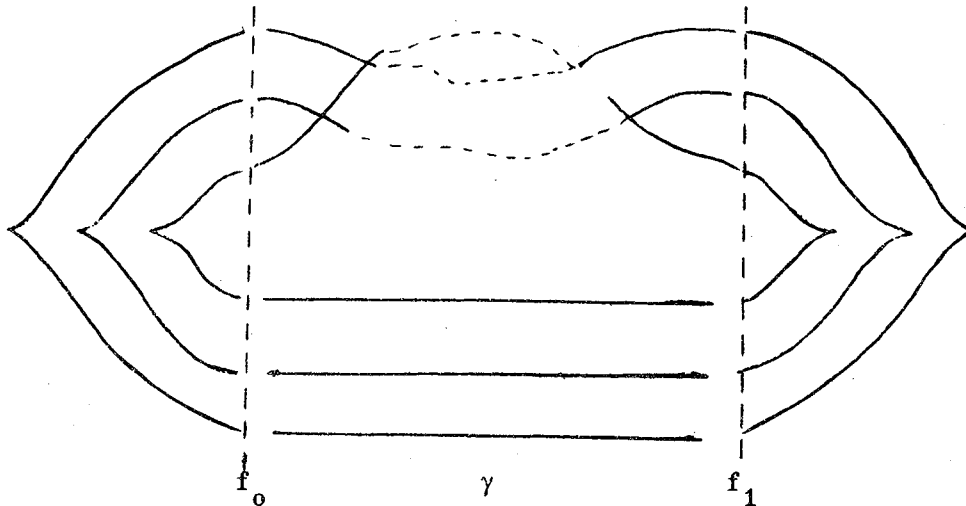


§ 5 - DEMONSTRATION DES THEOREMES DU h-COBORDISME (I)
ET DE LA PSEUDO-ISOTOPIE (II).

5.1 Démonstrations parallèles :

(I)₁ Pour prouver le théorème du h-cobordisme, on commence avec une fonction $f \in \mathcal{F}_{i,q}^0$ et un couple (φ, φ') de bases adaptées à f (prop. 1.2 et lemme 3.2). On note A la matrice d'intersection dans ces bases.

(II)₁ Pour prouver le théorème de la pseudo-isotopie, on commence avec un chemin du type décrit à la proposition 1.3, joignant deux fonctions sans point critique; on note f_0 et f_1 les extrémités de la partie γ de ce chemin où ont lieu les croisements



Rappelons que f_0 et f_1 ont leurs valeurs critiques dans le même ordre. Choisissons d'abord un couple (φ_0, φ'_0) de bases adaptées à f_0 et à l'ordre de ses valeurs critiques de sorte que, dans ces bases, la matrice d'intersection soit l'identité. Ensuite, on choisit une famille de bases B adaptée à γ sur W_+ ; sur W_- on garde toujours la base φ'_0 . Soit φ_1 la dernière base de B ; en notant $\mu(B)$ l'élément de $St_q(\mathbb{Z})$ associé à B et $\rho : St_q(\mathbb{Z}) \rightarrow GL_q(\mathbb{Z})$ le morphisme naturel, la matrice d'intersection dans les bases (φ_1, φ'_0) est $\rho(\mu(B))$. Puisque f_1 est une fonction primitive, on peut

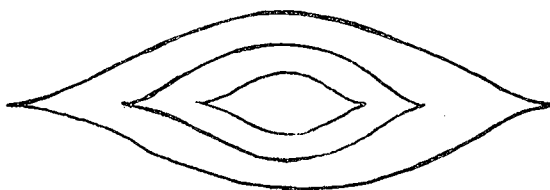
choisir B pour que $\rho(\mu(B))$ soit une matrice triangulaire supérieure (cf. 3.4 remarque; appliquer éventuellement le lemme 3.2 3)), c'est-à-dire que $\mu(B) \in \rho^{-1}(\check{T}_q)$.

(I)₂ L'opération de multiplier A par une matrice élémentaire se "relève" en une modification de la base φ et de la fonction f (corollaire 3.7).

(II)₂ Sur le mot associé à B (4.1), l'opération d'insérer ou de retirer une relation de Steinberg "se relève" en une homotopie de γ et en une modification de la famille de bases (proposition 4.4).

(I)₃ Si la classe $[A]$ est nulle dans $GL_q(\mathbb{Z})/E_q(\mathbb{Z})$, on peut, par (I)₂, se ramener au cas où il existe $f \in \mathcal{F}_{i,q}^0$ et un couple (φ, φ') de bases adaptées à f (peut-être pas à l'ordre des valeurs critiques) dans lesquelles la matrice d'intersection est $\mathbf{1}$. La fonction f n'est peut-être pas encore primitive; elle le deviendra si on réordonne les valeurs critiques en parcourant des chemins de croisements compatibles avec les bases (φ, φ') (cf lemme 3.5).

(II)₃ Si $\mu(B) = 1$ dans $St_q(\mathbb{Z})$, on peut se ramener au cas où γ est un chemin sans accident joignant f_0 et f_1 ; en effet f_0 et f_1 ont leurs valeurs critiques dans le même ordre, on peut donc appliquer le corollaire 4.5. On conclut grâce au lemme d'unicité des morts [1] qui affirme que les extrémités d'un chemin dont le graphique est



sont isotopes.

(I)₄ D'après la K-théorie algébrique, il est immédiat dans le cas (I) de se ramener à $[A] = 0$; il suffit de changer les orientations des nappes. Donc le théorème du h-cobordisme est démontré.

(II)₄ En revanche, il est moins immédiat de se ramener à $\mu(B)=1$ dans $St_q(\mathbb{Z})$; d'ailleurs ce n'est peut-être pas possible et tout ce que l'on pourra faire c'est de se ramener à $\mu(B) = 1$ dans $St(\mathbb{Z})$.

5.2 Lemme : Soient f_0 une fonction primitive de type (i,q) , M une variété intermédiaire pour f_0 , (φ_0, φ'_0) un couple de bases adaptées à f_0 et à l'ordre des valeurs critiques, dans lesquelles la matrice d'intersection est triangulaire supérieure. Pour $k > 1$, considérons $\gamma_{kl}(\varepsilon, \varepsilon') \in St_q(\mathbb{Z})$ (cf. 2.3). alors il existe un chemin α d'origine f_0 dans $\mathcal{F}_{i,q;M}^\bullet$, dont la restriction à W_- est triviale, et une famille de bases B adaptée à γ , d'origine φ_0 , tels que

- 1) l'extrémité f_1 de α soit une fonction primitive,
- 2) f_0 et f_1 soient isotopes dans $\mathcal{F}_{i,q}^0$,
- 3) $\mu(B) = \gamma_{kl}(\varepsilon, \varepsilon')$.

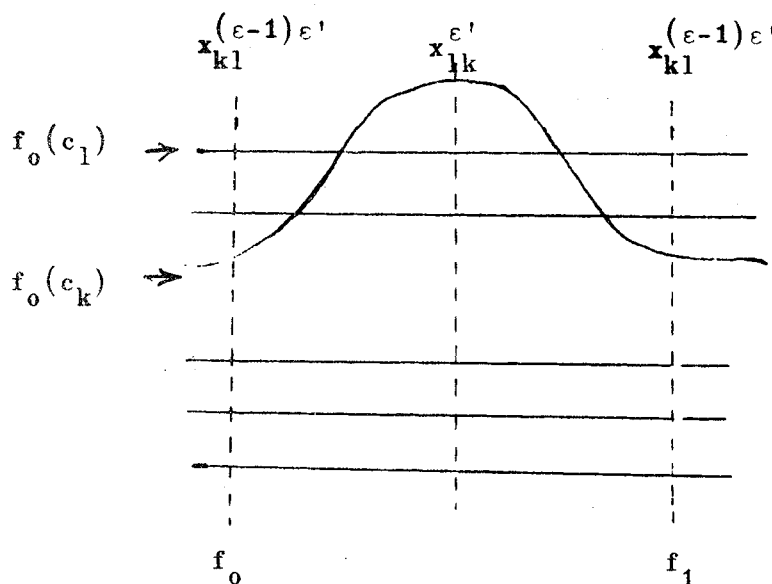
Remarque : En général f_0 et f_1 ne seront pas isotopes dans $\mathcal{F}_{i,q;M}^0$.

Démonstration : Rappelons que $\gamma_{kl}(\varepsilon, \varepsilon') = x_{kl}^{(\varepsilon-1)\varepsilon'} x_{lk}^{\varepsilon'} x_{kl}^{(\varepsilon-1)\varepsilon'}$ où $\varepsilon', \varepsilon \in \{+1, -1\}$ et que $f_0(c_1) > f_0(c_k)$.

1 et 3). Sans changer la fonction, on commence par faire le changement de base adaptée défini par $x_{kl}^{(\varepsilon-1)\varepsilon'}$; la nouvelle base définit un chemin de croisement des valeurs de c_1 et de c_k ; ceci étant, on peut faire le changement de base défini par $x_{lk}^{\varepsilon'}$, puis on remet les valeurs critiques

• $\mathcal{F}_{i,q;M}$ est l'espace des fonctions de Morse de type (i,q) sur W , admettant M comme variété intermédiaire.

dans l'ordre initial et on fait le dernier changement de base. Ainsi, on construit le chemin α et la famille de bases B :



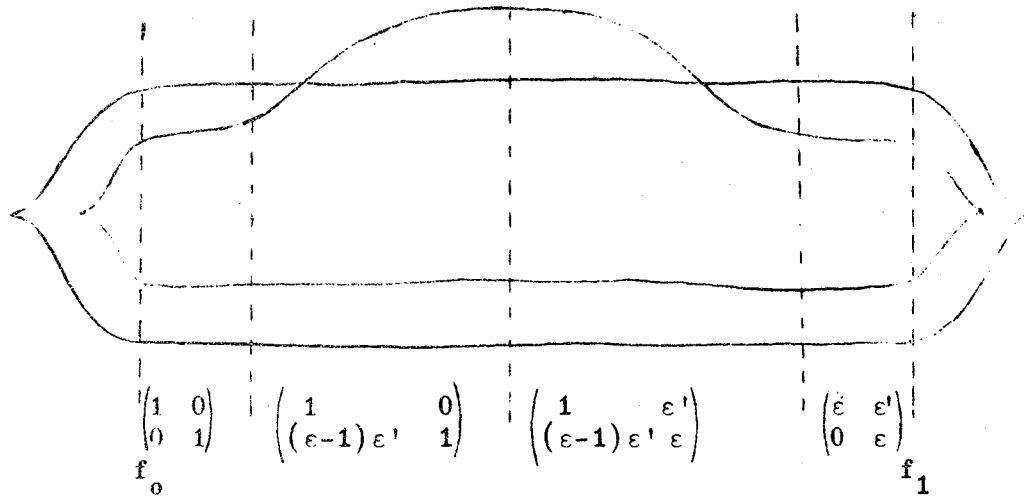
Notons A_0 la matrice d'intersection dans le couple (φ_0, φ'_0) , φ_1 la dernière base de B , A_1 la matrice d'intersection dans le couple $(\varphi_1, \varphi'_1 = \varphi'_0)$. On a

$$A_1 = A_0 \times \rho(\gamma_{kl}(\epsilon, \epsilon'))$$

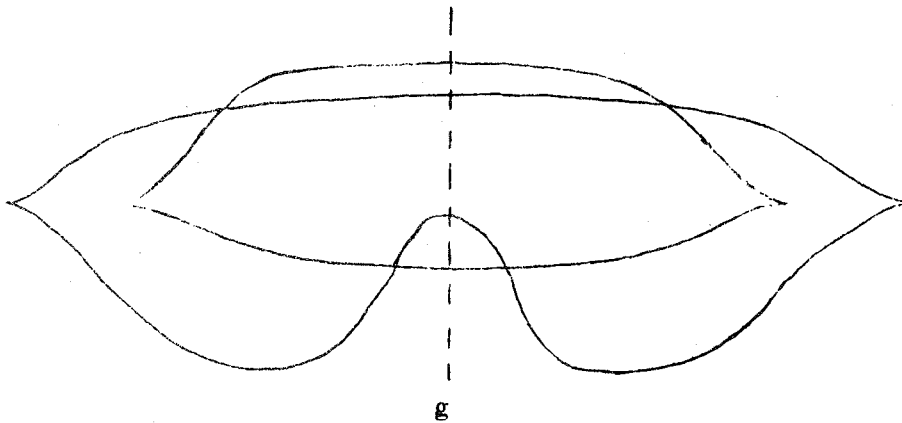
Donc A_1 est une matrice triangulaire supérieure et f_1 est une fonction primitive (3.4). (Signalons que, sur l'anneau $\mathbb{Z}$, pour que $\rho(x_{kl}^\lambda, x_{lk}^\mu, x_{kl}^\nu)$ soit triangulaire supérieure, il faut et il suffit que $\lambda = (\epsilon-1)\epsilon'$, $\mu = \epsilon'$, $\nu = (\epsilon-1)\epsilon'$). Par ailleurs, par construction $\mu(B) = \gamma_{kl}(\epsilon, \epsilon')$.

2) Pour trouver une déformation de α jusqu'à un chemin sans accident, nous allons nous servir des informations sur les matrices d'intersection. Bien entendu pour faire ce calcul, on peut remplacer la base φ'_0 par une autre base ϕ'_0 adaptée à f_0 sur W_- . On choisit $\phi'_0 = \varphi'_0 A_0^t$, pour que dans les bases (φ_0, ϕ'_0) la matrice d'intersection soit l'identité. Pour simplifier, dans la suite nous supposons $k = 2$, $l = 1$. Ecrivons les matrices

d'intersection :



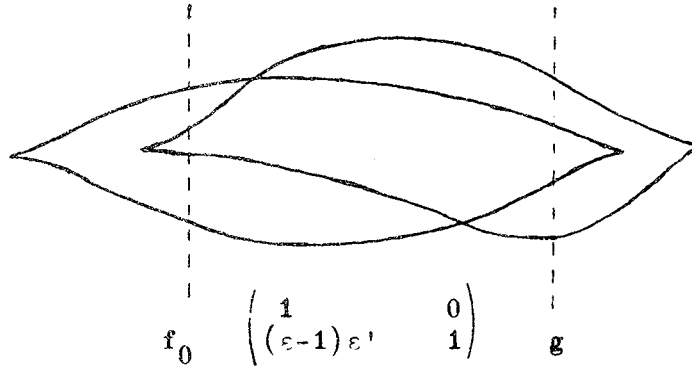
Par croisement des points critiques d'indice i (de façon compatible avec la base ϕ'_0), on peut déformer α en un chemin dont le graphique à l'allure suivante



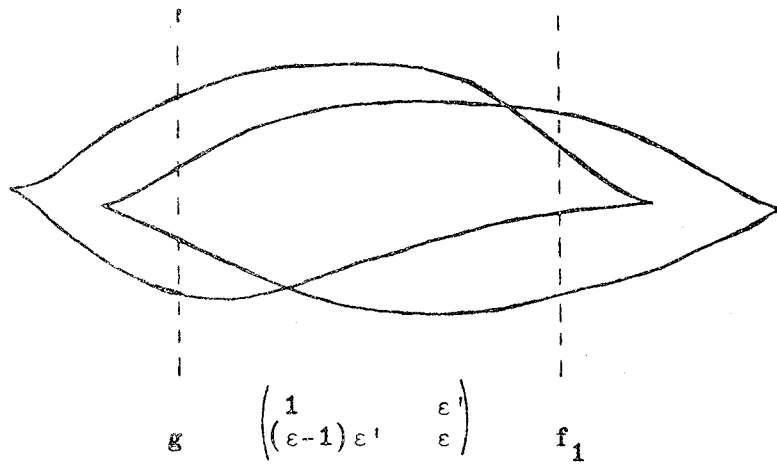
où g est une fonction primitive. A cause de l'unicité des naissances, pour prouver que f_0 et f_1 sont isotopes dans $\mathcal{S}_{i,q}^0$, il suffit de prouver que les chemins dont les graphiques sont donnés ci-dessous ont leurs

extrémités isotopes :

(1)

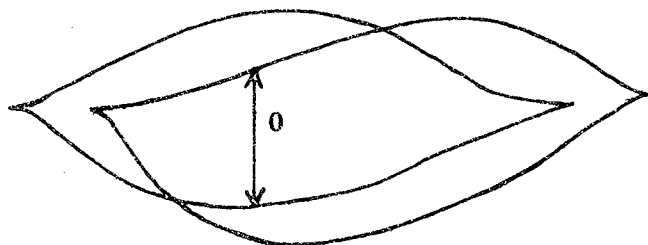


(2)

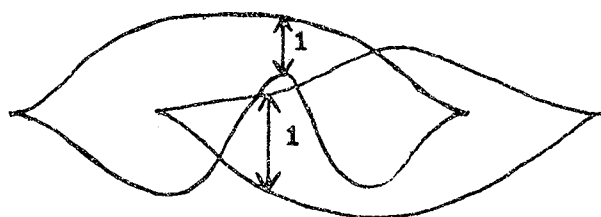


Pour les parties de ces chemins où ont lieu les croisements, on a indiqué les matrices d'intersection dans des couples de bases adaptées.

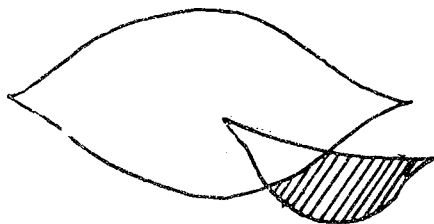
Le chemin (1) a ses extrémités isotopes : les deux croisements étant indépendants, on peut le déformer en



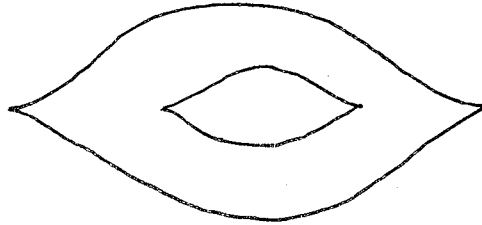
Au niveau de la flèche, on a une intersection nulle entre la nappe descendant du point critique d'indice $i+1$ le plus bas et celle montant du point critique d'indice i le plus haut, ce qui permet la déformation suivante



Cette fois les deux couples de points reliés par la flèche sont en position d'être éliminés

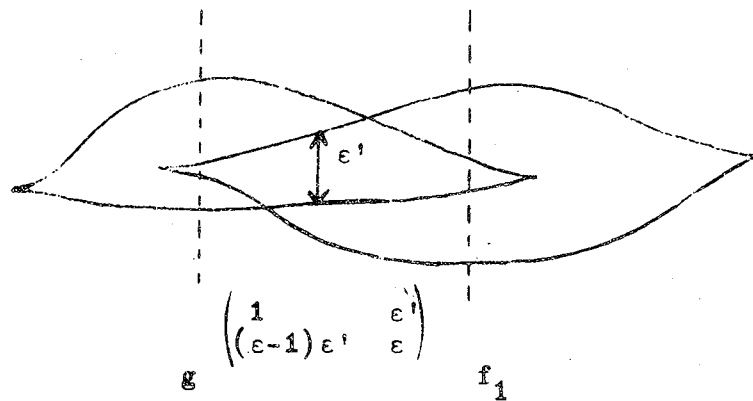


Par les lemmes du bec [1] [4] et d'unicité des naissances on arrive à

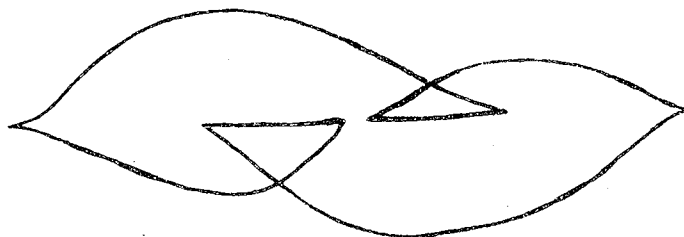


Par unicité des morts, on vide le graphique.

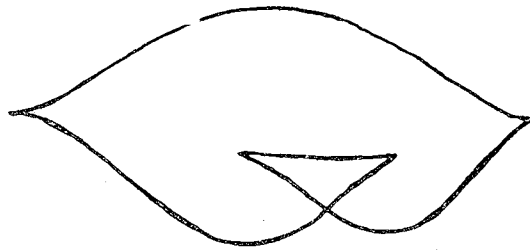
Le chemin (2) a ses extrémités isotopes :



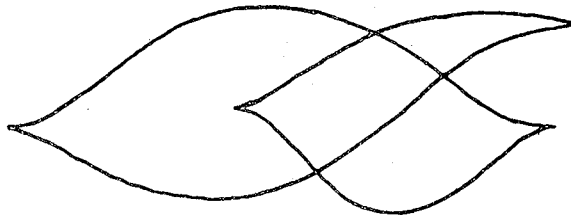
Les deux points reliés par la flèche sont en position d'élimination :



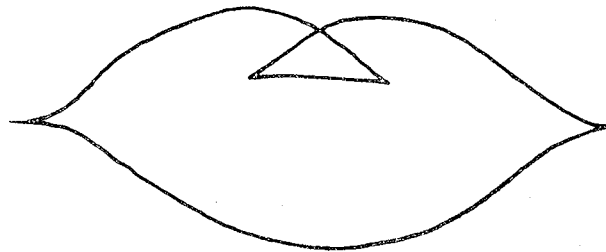
La queue d'aronde de droite peut être éliminée [3] car $i \leq n - 3$:



Par apparition d'un bec :



et élimination d'un autre bec ($i \leq n - 2$ [4]) :



On conclut par le lemme de la queue d'aronde et l'unicité des morts.

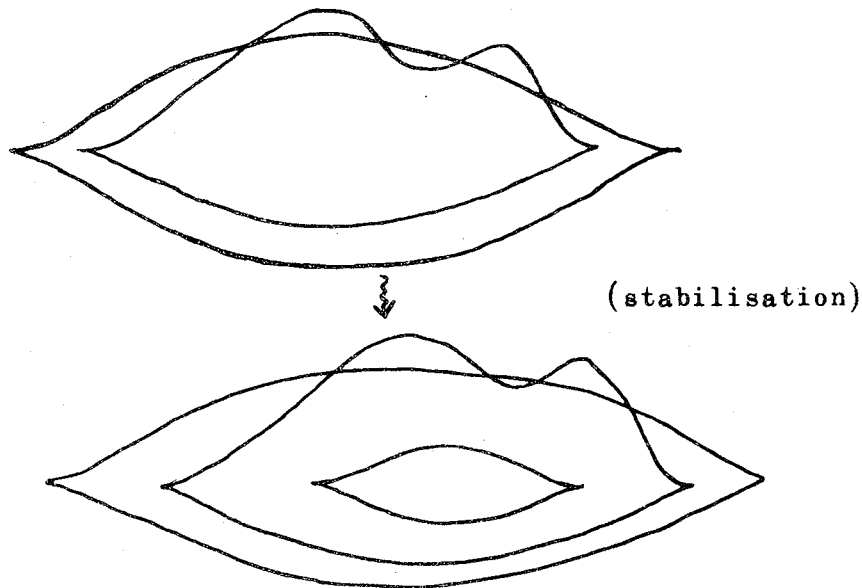
cqfd.

5.3 Fin de la démonstration du théorème de pseudo-isotopie :

Reprenons la donnée $(II)_1$; en ajoutant en f_1 , le chemin α du lemme 5.2, on construit un chemin γ' de f_0 à f'_1 et une famille de bases B' adaptée à γ' tels que :

- f'_1 soit isotope f_1 dans $\mathcal{F}_{i,q}^0$,
- $\mu(B') = \mu(B) \gamma_{kl}(\varepsilon, \varepsilon')$.

La K-théorie algébrique (prop.2.4) affirme que, quitte à stabiliser* en ajoutant des paires de points critiques auxiliaires,



on peut par ce procédé tuer $\mu(B)$ dans $St_{q'}(\mathbb{Z})$, pour q' assez grand. On est ainsi ramené à $(II)_3$.

cqfd.

* En fait, pour l'anneau $\mathbb{Z}$, la stabilisation est inutile dès que $q \geq 3$ [8].

§ 6 - CLASSIFICATION DES FONCTIONS DE TYPE (i,q)

On a défini en 3.3 une application

$$\bar{\omega} : \pi_0(\mathcal{F}_{i,q}^0) \rightarrow \Gamma_q \backslash GL_q(\mathbb{Z}) / T_q$$

Théorème : Si $2 \leq i \leq n-3$ et si W est 1-connexe, alors $\bar{\omega}$ est une bijection.

Démonstration : 1) Surjectivité :

On commence avec une fonction $f \in \mathcal{F}_{i,q}^0$ et on choisit un couple (φ, φ') de bases adaptées à f et à l'ordre des valeurs critiques. Soit A la matrice d'intersection. Pour la multiplier à droite par $t \in T_q$, il suffit de changer de bases (lemme 3.2). Considérons d'autre part une matrice de permutation $\sigma \in S_q$. On fait partir de f un chemin γ de croisements des valeurs critiques d'indice $i+1$, tel que φ soit adaptée à toutes les fonctions de γ et que les valeurs critiques d'indice $i+1$ de l'extrémité $\tilde{f}$ de γ soient les permutées par σ^{-1} de celles de f . La base $\varphi \cdot \sigma$ est adaptée à $\tilde{f}$ et à l'ordre de ses valeurs critiques; dans les bases $(\varphi \cdot \sigma, \varphi')$ la matrice d'intersection est $A\sigma$. La surjectivité de $\bar{\omega}$ résulte alors du fait que T_q et S_q engendrent $GL_q(\mathbb{Z})$.

2) Injectivité :

Le premier fait à rappeler est que l'espace des variétés intermédiaires de type (i,q) est connexe si W est 1-connexe*. On peut donc supposer que deux fonctions $f_1, f_2 \in \mathcal{F}_{i,q}$ ont même variété intermédiaire M . Si $\bar{\omega}(f_1) = \bar{\omega}(f_2)$, il existe des bases (φ_1, φ'_1) [resp. (φ_2, φ'_2)], adaptées à f_1 [resp. f_2] et à l'ordre des valeurs critiques, dans lesquelles la forme d'intersection est représentée par la même matrice.

* Ref [Chap. VII, § 2.1, Prop. 3, p.142]

D'après [1; prop.7 p.158], proposition dont nous donnerons une démonstration élémentaire dans l'appendice I, il existe un difféomorphisme H de W , laissant M invariante, isotope à $\text{Id}|_W$ dans $\text{Diff } W$ et tel que $H_* \varphi_2 = \varphi_1$, ce qui entraîne aussi $H_* \varphi'_2 = \varphi'_1$. On est maintenant dans la situation où f_1 et f_2 ont la même variété intermédiaire M et un même couple (φ, φ') de bases adaptées.

Nous allons prouver que $f_1|_{W_+}$ et $f_2|_{W_+}$ sont isotopes; le même raisonnement conduirait à prouver que $f_1|_{W_-}$ et $f_2|_{W_-}$ sont isotopes.

Considérons $\phi : \mathbb{Z}^q \rightarrow H_{n-i}(W_+, V_1)$ la base duale de φ pour la dualité de Poincaré sur le cobordisme (W_+, M, V_1) ; ϕ est aussi une base adaptée à f_1 et à f_2 . D'après le théorème de presque-isotopie de Cerf [1; p.158], qui est en fait ici un théorème d'isotopie puisqu'on travaille sur un cobordisme 1-connexe, il suffit de prouver l'assertion suivante : quitte à faire une isotopie de $f_2|_{W_+}$, il existe une famille de $(n-i)$ -disques orientés $A_1, \dots, A_q$ à bord dans V_1 qui soit un système de nappes montantes à la fois pour f_1 et f_2 , réalisant la base ϕ . (Sur W_- , on chercherait au contraire un système de nappes descendantes).

La preuve de cette assertion est simple : a priori on réalise ϕ par un système de nappes adaptées à f_1 et un autre système de nappes adaptées à f_2 . Ces deux familles de disques sont homologues dans $H_{n-i}(W_+, V_1)$, donc homotopes dans (W_+, V_1) d'après le théorème d'Hurewicz relatif $\bullet_1$, donc isotopes d'après le théorème de Hudson $\bullet\bullet\bullet$ puisque la

• Les hypothèses de cette proposition sont bien vérifiées, car, d'après la connexité de l'espace des variétés intermédiaires de type (i, q) , on peut supposer que M est la variété intermédiaire d'une fonction primitive

$\bullet\bullet$ V_1 est 1-connexe et W_+ est aussi 1-connexe car $n-i \geq 3$.

$\bullet\bullet\bullet$ Le théorème d'isotopie d'Hudson (Piecewise linear topology, Benjamin 1969; p.199) est énoncé dans la catégorie PL; il est fondé sur l'engulfing; cette méthode ne présente pas d'obstruction au lissage; il est donc valable aussi dans la catégorie Diff.

dimension des $(n-i)$ -disques vérifie $2 \leq n-i \leq n-2$. Ceci achève la démonstration du théorème.

APPENDICE I

Proposition : Soit W_- la variété de dimension $n+1$ obtenue en attachant à $V_0 \times [0,1]$ q anses triviales d'indice i . Notons W le cobordisme obtenu en attachant à W_- les q anses supplémentaires aux précédentes (c'est-à-dire qui les tuent); on note $W_+ = W - \text{int } W_-$ et $M = W_+ \cap W_-$. On suppose $i \leq n-1$. Alors tout automorphisme de $H_i(W_-, V_0)$ (et par dualité tout automorphisme de $H_{n+1-i}(W_-, M)$) est induit par un difféomorphisme de paires

$$H : (W, W_-) \rightarrow (W, W_-)$$

isotope à l'identité dans $\text{Diff } W$.

Preuve : Désignons par $x_1, \dots, x_q$ les générateurs de $H_i(W_-, M) \cong \mathbb{Z}^q$ représentés par les q anses orientées d'indice i . Il suffit de démontrer la proposition pour les automorphismes des types suivants, qui par composition, engendrent tous les automorphismes.

$$a) \quad \begin{cases} x_k \mapsto -x_k \\ x_l \mapsto x_l \quad \text{pour } l \neq k. \end{cases}$$

$$b) \quad \begin{aligned} x_k &\mapsto x_{k'}, \\ x_{k'} &\mapsto x_k \\ x_l &\mapsto x_l, \quad \text{pour } l \neq k, k'. \end{aligned}$$

$$c) \quad \begin{aligned} x_k &\mapsto x_k + x_{k'}, \\ x_l &\mapsto x_l, \quad \text{pour } l \neq k. \end{aligned}$$

Puisque, dans $V_0 \times \{1\}$, les sphères d'attachement des anses d'indice i sont au-moins de codimension 2, on peut affirmer les faits suivants :

cas a) Soient S la sphère orientée d'attachement de l'anse, notée x_k par abus de notations, et D le disque qu'elle borde dans $V_0 \times \{1\}$. On peut faire une isotopie de D dans $V_0 \times \{1\}$, à la fin de laquelle D est envoyé sur sa position initiale avec l'orientation opposée.

cas b) Il existe une isotopie de $V_0 \times \{1\}$ qui permute les sphères d'attachement de x_k et de $x_{k'}$.

cas c) Soient W'_0 la sous-variété de W obtenue en attachant à $V_0 \times [0,1]$ l'anse $x_{k'}$, et $V'_0 = \partial W'_0 - V_0$. Il existe un lacet de plongements de S dans V'_0 , qui coupe une fois et une seule (transversalement) la sphère transverse de l'anse $x_{k'}$; classiquement cette opération s'appelle faire glisser l'anse x_k par-dessus l'anse $x_{k'}$.

Dans les trois cas, les isotopies qui sont identifiées se prolongent en isotopies de W , de l'identité jusqu'à un difféomorphisme de paires (W, W_-) ayant l'effet homologique voulu.

cqfd.

REFERENCES

- [1] J. CERF, La stratification naturelle des espaces de fonctions différentiables réelles et le théorème de la pseudo-isotopie. Publications mathématiques de l'I.H.E.S. n° 39.
 - [2] J. CERF, A. GRAMAIN, Le théorème du h-cobordisme, Secrétariat mathématique de l'Ecole Normale Supérieure, 45, rue d'Ulm, Paris V, 1968.
 - [3] A. CHENCINER, Sur la géométrie des strates de petites codimensions de l'espace des fonctions différentiables réelles sur une variété. Thèse, Orsay, 1971.
 - [4] A. CHENCINER, F. LAUDENBACH, Contribution à une théorie de Smale à un paramètre dans le cas non simplement connexe, Annales Scientifiques de l'Ecole Normale Supérieure, 4ème série, t.3, fasc.4, 1970, p.409-478.
 - [5] A. HATCHER, A K_2 obstruction for pseudo-isotopies, Preprint, 1971.
 - [6] M. KERVAIRE, Le théorème de Barden-Mazur-Stallings, Comment. Math. Helv. 40, 1965, p.31-42.
 - [7] J. MILNOR, Lectures on the h-cobordism theorem, Princeton mathematical notes, 1965.
 - [8] J. MILNOR, Introduction to algebraic K-theory, Annals of Math. Studies n° 72, Princeton University Press 1971.
 - [9] J. B. WAGONER, Algebraic invariants for pseudo-isotopies, Proceeding of Liverpool Singularities symposium II; Lecture Notes in Mathematics n°209, Springer-Verlag, 1971.
-

APPENDICE II

I - UNE NOUVELLE DEFINITION DE $Wh_2(\pi)$

Nous reprenons les définitions du paragraphe 2.

Soient u, u' deux unités de l'anneau Λ . Si i, j sont deux entiers, on définit un élément $\gamma_{ji}(u, u')$ du groupe $St(\Lambda)$ par la formule

$$\gamma_{ji}(u, u') = x_{ji}^{(u-1)u'} x_{ij}^{u'^{-1}} x_{ji}^{(u^{-1}-1)u'}$$

Introduisons les éléments

$$w_{ji}(u) = x_{ji}^u x_{ij}^{-u^{-1}} x_{ji}^u$$

Il vient

$$\gamma_{ji}(u, u') = x_{ji}^{uu'} w_{ji}(-u') x_{ji}^{u^{-1}u'}$$

Rappelons que, si π est un groupe et si $\Lambda = \mathbb{Z}[\pi]$, on appelle "unités triviales" les unités de Λ de la forme $u = \varepsilon g$, où $\varepsilon \in \{+1, -1\}$, et $g \in \pi$.

I.1 Définition : On note $G(\pi)$ le sous-groupe de $St(\mathbb{Z}[\pi])$ engendré par les éléments $\gamma_{ji}(u, u')$, où u, u' sont des unités triviales de $\mathbb{Z}[\pi]$, et $j > i$.

I.2 Définition : (Comparer à [8] § 9) : on note $W(\pi)$ le sous-groupe de $St(\mathbb{Z}[\pi])$ engendré par les éléments $w_{ji}(u)$, où u est une unité triviale de $\mathbb{Z}[\pi]$.

Rappelons que l'image du morphisme naturel $\rho : \text{St}(\Lambda) \rightarrow \text{GL}(\Lambda)$ est le sous groupe $E(\Lambda)$ de $\text{GL}(\Lambda)$ engendré par les matrices élémentaires.

I.3 Définition : On note $T(\pi)$ (resp. $\check{T}(\pi)$) le sous-groupe de $\text{GL}(\mathbb{Z}[\pi])$ formé des matrices triangulaires inférieures (resp. supérieures) dont les termes diagonaux sont des unités triviales de $\mathbb{Z}[\pi]$.

On note $TE(\pi)$ (resp. $\check{TE}(\pi)$) l'intersection $T(\pi) \cap E(\mathbb{Z}[\pi])$ (resp. $\check{T}(\pi) \cap E(\mathbb{Z}[\pi])$).

Tous ces groupes sont obtenus comme limites inductives de sous-groupes de $\text{GL}_q(\mathbb{Z}[\pi])$ notés respectivement $T_q(\pi)$, $\check{T}_q(\pi)$, $TE_q(\pi)$, $\check{TE}_q(\pi)$.

Par exemple, $TE_q(\pi)$ est le sous-groupe de $\text{GL}_q(\mathbb{Z}[\pi])$ formé des matrices triangulaires inférieures dont les termes diagonaux sont des unités triviales de $\mathbb{Z}[\pi]$ et dont le déterminant abélianisé vaut +1.

I.4 Définition : On note $PD(\pi)$ le sous-groupe de $E(\mathbb{Z}[\pi])$ engendré par les matrices de permutation et les matrices diagonales dont les termes sont des unités triviales de $\mathbb{Z}[\pi]$.

I.5 Proposition :

- (i) $\rho(G(\pi)) = \check{TE}(\pi)$
- (ii) $G(\pi)$ est un sous-groupe invariant de $\rho^{-1}(\check{TE}(\pi))$.

I.6 Proposition : (voir [9])

- (i) $\rho(W(\pi)) = PD(\pi)$
- (ii) $W(\pi)$ est un sous-groupe invariant de $\rho^{-1}(PD(\pi))$.

Démonstration des propositions I.5 et I.6 : Dans les deux cas, le (ii) est une conséquence du (i) et de l'inclusion $K_2(\Lambda) \subset \text{Centre}(\text{St}(\Lambda))$ (voir [8] théorème 5.1).

Quant aux (i) ils résultent des calculs suivants : ♦

$$\rho(\gamma_{ji}(\varepsilon g, \varepsilon' g')) = \begin{pmatrix} \varepsilon g'^{-1} & g^{-1} & g' & & \varepsilon' g'^{-1} \\ & & & & \\ & 0 & & & \varepsilon g \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 1 & & \varepsilon \varepsilon' g'^{-1} g^{-1} & \\ & & & \\ & & & \\ 0 & & 1 & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon g'^{-1} g^{-1} g' & & 0 \\ & & \\ & 0 & \varepsilon g \end{pmatrix}$$

et en particulier

$$\rho(\gamma_{ji}(1, \varepsilon' g')) = \begin{pmatrix} 1 & \varepsilon' g'^{-1} \\ & \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

De même

$$\rho(w_{ji}(\varepsilon g)) = \begin{pmatrix} 0 & -\varepsilon g^{-1} \\ \varepsilon g & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon g & 0 \\ 0 & -\varepsilon g^{-1} \end{pmatrix}$$

(Comparer à [9] § 6).

♦ Dans chaque matrice, nous n'avons écrit que les termes aux places (i,i), (i,j), (j,i), (j,j). Cette convention sera conservée pour la suite.

I.7 Définition :

$$\text{Wh}_2'(\pi) = \rho^{-1}(\text{TE}(\pi))/G(\pi)$$

I.8 Définition : (Wagoner; Hatcher)

$$\text{Wh}_2(\pi) = \rho^{-1}(\text{PD}(\pi))/W(\pi).$$

I.9 Théorème :

$$\text{Wh}_2'(\pi) \cong \text{Wh}_2(\pi).$$

Le reste du paragraphe est consacré à la démonstration de ce théorème.

I.10 Définition : Soit $L(\pi)$ le sous-groupe de $G(\pi)$ engendré par les éléments

$$l_{ji}(u, u') = \gamma_{ji}(1, -uu') \gamma_{ji}(u, u'),$$

où u, u' sont des unités triviales de $\mathbb{Z}[\pi]$, et $j > i$.

Remarquons que

$$\rho(l_{ji}(\varepsilon g, \varepsilon' g')) = \begin{pmatrix} \varepsilon g'^{-1} & g^{-1} g' & 0 \\ 0 & \varepsilon g \end{pmatrix}$$

I.11 Définition (comparer à [8] §9) : Soit $H(\pi)$ le sous-groupe de $W(\pi)$ engendré par les éléments

$$h_{ji}(u) = w_{ji}(u)w_{ji}(-1),$$

où u est une unité triviale de $\mathbb{Z}[\pi]$. On a

$$\rho(h_{ji}(\varepsilon g)) = \begin{pmatrix} \varepsilon g^{-1} & 0 \\ 0 & \varepsilon g \end{pmatrix}$$

I.12 Lemme : On a l'égalité

$$H(\pi) = L(\pi)$$

Démonstration : Montrons les identités suivantes

$$a) \quad l_{ji}(u, u') = w_{ji}(u u') w_{ji}(-u')$$

$$b) \quad l_{ji}(u, u') = l_{ji}(u u', +1) l_{ji}(u'^{-1}, -1)$$

Par définition,

$$\begin{aligned} l_{ji}(u, u') &= x_{ij}^{-u', -1} u^{-1} x_{ji}^{uu'} w_{ji}(-u') x_{ji}^{u^{-1} u'} \\ &= x_{ij}^{-u', -1} u^{-1} (x_{ji}^{uu'} x_{ij}^{-u', -1} u^{-1} x_{ij}^{u', -1} u^{-1} x_{ji}^{-uu'}) x_{ji}^{uu'} w_{ji}(-u') x_{ji}^{u^{-1} u'} \\ &= w_{ij}(-u', -1 u^{-1}) x_{ij}^{u', -1} u^{-1} w_{ji}(-u') x_{ji}^{u^{-1} u'} \\ &= w_{ij}(-u', -1 u^{-1}) (w_{ji}(-u') w_{ji}(u')) x_{ij}^{u', -1} u^{-1} w_{ji}(-u') x_{ji}^{u^{-1} u'} \\ &= w_{ji}(uu') w_{ji}(-u') x_{ji}^{u'(u'^{-1} u^{-1})} (-u') x_{ji}^{u^{-1} u'} \quad (\text{d'après [8] cor.9.4}) \\ &= w_{ji}(uu') w_{ji}(-u') . \end{aligned}$$

♦ Jean-Pierre Delale nous a aidé à raccourcir nos premiers calculs.

On en déduit

$$\begin{aligned}
 l_{ji}(uu', +1) l_{ji}(u'^{-1}, -1) &= w_{ji}(uu') w_{ji}(-1) w_{ji}(-u'^{-1}) w_{ji}(1) \\
 &= w_{ji}(uu') w_{ij}(u'^{-1}) \quad (\text{d'après [8] cor.9.4}) \\
 &= w_{ji}(uu') w_{ji}(-u') \quad (\text{d'après [8] lemme 9.5}) \\
 &= l_{ji}(u, u') \quad (\text{d'après (a)}).
 \end{aligned}$$

cqfd.

L'égalité du lemme I.12 découle immédiatement de (b), car

$$\begin{aligned}
 l_{ji}(u, 1) &= h_{ji}(u) \quad , \text{ et} \\
 l_{ji}(u, -1) &= h_{ij}(u^{-1})
 \end{aligned}$$

cqfd.

I.13 Remarque : On peut déduire de (a) l'identité

$$(c) \quad \gamma_{ji}(u, u') = \gamma_{ji}(uu', 1) \gamma_{ji}(u'^{-1}, -1) \gamma_{ji}(1, u')$$

qui montre que $G(\pi)$ est déjà engendré par les éléments

$$\gamma_{ji}(1, u') \text{ et } \gamma_{ji}(u, \varepsilon'),$$

où u, u' sont des unités triviales de $\mathbb{Z}[\pi]$, $j > i$, et $\varepsilon' \in \{+1, -1\}$.

I.14 Définition : Soit $D(\pi)$, le sous-groupe de $E(\pi)$ formé des matrices diagonales dont les termes sont des unités triviales de $\mathbb{Z}[\pi]$. On a comme en I.5 et I.6 le

I.15 Lemme :

$$(i) \quad \rho(H(\pi)) = \rho(L(\pi)) = D(\pi)$$

$$(ii) \quad H(\pi) = L(\pi) \text{ est un sous-groupe invariant de } \rho^{-1}(D(\pi)).$$

I.16 Proposition :

$$(i) \quad H(\pi) = W(\pi) \cap \rho^{-1}(D(\pi)).$$

$$(ii) \quad L(\pi) = G(\pi) \cap \rho^{-1}(D(\pi)).$$

Remarquons que le théorème I.9 est une conséquence immédiate de la proposition I.16, car d'après le lemme I.15 on peut écrire

$$Wh_2'(\pi) = \rho^{-1}(D(\pi)) / G(\pi) \cap \rho^{-1}(D(\pi)) = \rho^{-1}(D(\pi)) / L(\pi)$$

$$Wh_2(\pi) = \rho^{-1}(D(\pi)) / W(\pi) \cap \rho^{-1}(D(\pi)) = \rho^{-1}(D(\pi)) / H(\pi) .$$

Démonstration de la proposition I.16 :

En ce qui concerne (i), on imite la démonstration de ([8] § 9 p. 77) en remplaçant le mot "unité" par "unité triviale":

(a) On commence par remarquer que $H(\pi)$ est un sous-groupe invariant de $W(\pi)$; pour cela on utilise le calcul explicite du corollaire 9.4 de [8] qui donne le conjugué par $w \in W(\pi)$ de $h_{ij}(u)$. Si $\rho(w) = \pi.\delta$,

où π est une matrice de permutation et $\delta = \begin{pmatrix} v_1 & & & 0 \\ & v_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & v_{n-1} \\ 0 & & & & 1 \end{pmatrix}$ est

une matrice diagonale,

$$w_{ij}(u)w^{-1} = h_{\pi(i),\pi(j)}(v_i u v_j^{-1}) h_{\pi(i),\pi(j)}(v_i v_j^{-1})^{-1}.$$

(b) Par définition de $H(\pi)$, on a les relations

$$w_{ij}(u) = w_{ij}(1) \pmod{H(\pi)},$$

pour toute unité triviale u de $\mathbb{Z}[\pi]$. On note w_{ij} cette classe.

Modulo $H(\pi)$, on a les relations (voir [8] § 9)

$$(1) \quad w_{ij} \equiv w_{ji}$$

$$(2) \quad w_{ij} w_{11} \equiv w_{\pi(1),\pi(1)} w_{ij} \text{ si } i, j > 1 \text{ (où } \pi \text{ est la permutation qui échange } i \text{ et } j \text{)}.$$

$$(3) \quad w_{11} w_{11} \equiv 1$$

$$(4) \quad w_{1j} w_{11} = w_{11} w_{1j} \quad \text{si } j \neq 1.$$

On déduit de (2) que tout élément de $W(\pi)$ s'écrit modulo $H(\pi)$ sous la forme d'un produit de w_{ij} dans lequel tous les w_{11} sont au début. D'après les relations (3) et (4) on peut supposer qu'il y a au plus un unique w_{11} ; mais c'est impossible si l'élément dont on est parti est dans $W(\pi) \cap \rho^{-1}(D(\pi))$, et de même par récurrence sur w_{21} , etc... On en déduit que $W(\pi) \cap \rho^{-1}(D(\pi)) \subset H(\pi)$, ce qui démontre (i).

Pour démontrer le (ii) il faut faire un peu plus attention car

$L(\pi)$ n'est pas un sous-groupe invariant de $G(\pi)$.

(a) En utilisant les identités

$$\gamma_{ji}(\varepsilon g, \varepsilon' g') = \gamma_{ji}(1, -\varepsilon \varepsilon' g g')^{-1} l_{ji}(\varepsilon g, \varepsilon' g'),$$

$$l_{ji}(\varepsilon g, \varepsilon' g') = w_{ji}(\varepsilon \varepsilon' g g') w_{ji}(-\varepsilon' g')$$

et le corollaire 9.4 de [8], on montre immédiatement que tout élément de $G(\pi)$ peut être écrit $\lambda \cdot \tau$, où $\lambda \in L(\pi)$, et où τ est un élément du sous-groupe de $G(\pi)$ engendré par les éléments

$$\gamma_{ji}(1, \varepsilon g^{-1}) = x_{ij}^{\varepsilon g} \quad (j > i)$$

(b) Nous sommes maintenant en mesure de montrer l'inclusion

$$G(\pi) \cap \rho^{-1}(D(\pi)) \subset L(\pi).$$

Soit $c \in G(\pi) \cap \rho^{-1}(D(\pi))$. D'après (a), on a $c = \lambda \tau$, et donc $\tau \in \rho^{-1}(D(\pi))$. On en déduit, comme en 4.3, que $\tau = 1$.

II - ORIGINE GEOMETRIQUE DU GROUPE $G(\pi)$

II.1 On remarque que le contenu des paragraphes 3 et 4 est valable dans le cas non simplement connexe à condition de définir la notion de base adaptée dans le revêtement universel de W , et de remplacer partout $\mathbb{Z}$ par $\mathbb{Z}[\pi]$, où π désigne le groupe fondamental de la variété W .

En particulier, on définit comme au paragraphe 3 une application naturelle

$$\mathcal{F}_{i,q}^0 \rightarrow \mathcal{Y}_q(\pi) \backslash GL_q(\mathbb{Z}[\pi]) / T_q(\pi).$$

Cet invariant ne suffit plus à classifier les fonctions de type (i,q) à isotopie près mais sa nullité est, comme dans le cas simplement connexe, une condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction de $\mathcal{F}_{i,q}^0$ soit primitive.

Nous noterons $\mathcal{P}_{i,q}^0$ (resp. $\mathcal{P}_{i,q,M}^{0,+}$) le sous-espace de $\mathcal{F}_{i,q}^0$ (resp. $\mathcal{F}_{i,q,M}^{0,+}$) formé des fonctions primitives; $\mathcal{F}_{i,q,M}^{0,+}$ désigne ici le sous-espace de $\mathcal{F}_{i,q,M}^0$ formé des fonctions coïncidant avec une fonction primitive donnée f_0 sur le cobordisme inférieur W_- limité par M .

Des résultats du paragraphe 4, en particulier le complément 4.6, on déduit facilement la

II.2 Proposition : Il existe une bijection naturelle

$$\chi : \pi_0[SA(\mathcal{F}_{i,q,M}^+, \mathcal{P}_{i,q,M}^{0,+}; f_0)] \rightarrow \rho^{-1}(\mathcal{Y}_{E_q}(\pi))$$

où $SA(\mathcal{F}_{i,q,M}^+, \mathcal{P}_{i,q,M}^{0,+}; f_0)$ désigne l'espace des chemins de $\mathcal{F}_{i,q,M}^+$ d'origine f_0 , d'extrémité primitive, admettant une numérotation des points critiques qui en f_0 et f_1 est compatible avec l'ordre des valeurs critiques.

Définition de χ : On se fixe une base adaptée à f_0 et à l'ordre des valeurs critiques (voir § 3.1) dans laquelle la matrice d'intersection est l'identité.

Si $\gamma = \{f_t\}_{t \in [0,1]}$ est un élément de $SA(\mathcal{F}_{i,q,M}^+, \mathcal{P}_{i,q,M}^{0,+}; f_0)$ et si B est une famille de bases adaptée à γ d'origine la base donnée de f_0 , l'élément $\mu(B) \in St_q(\mathbb{Z}[\pi])$ (voir § 4.1) a une image $\rho(\mu(B)) \in GL_q(\mathbb{Z}[\pi])$ qui représente l'élément trivial de $\check{T}_q(\pi) \backslash GL_q(\mathbb{Z}[\pi]) / T_q(\pi)$, c'est-à-dire $\rho(\mu(B)) \in \check{T}_q(\pi) \cdot T_q(\pi)$; puisque $\rho(\mu(B)) \in E_q(\mathbb{Z}[\pi])$, on a en fait $\rho(\mu(B)) \in \check{T}E_q(\pi) \cdot TE_q(\pi)$.

Enfin, d'après 4.6, le choix d'une autre base B' de même origine que B ne modifie $\mu(B)$ que par multiplication à droite par un élément du sous-groupe $\theta_q(\pi)$ de $St_q(\mathbb{Z}[\pi])$ engendré par les x_{ij}^λ , ($i > j$).

Il existe alors un unique élément $\chi(\gamma) \in St_q(\mathbb{Z}[\pi])$ qui vérifie :

- 1) $\chi(\gamma) = \mu(B)$ où B est comme ci-dessus
- 2) $\rho(\chi(\gamma)) \in \check{T}E_q(\pi)$.

En effet, l'existence résulte de $\check{T}E_q(\pi) \cdot TE_q(\pi) = \check{T}E_q(\pi) \cdot \rho(\theta_q(\pi))$; l'unicité vient de $\rho(\theta_q(\pi)) \cap \check{T}E_q(\pi) = 1$ et de ce que la restriction de ρ à $\theta_q(\pi)$ est injective d'après 4.3.

L'invariance par homotopie est esquissée dans le complément 4.6.

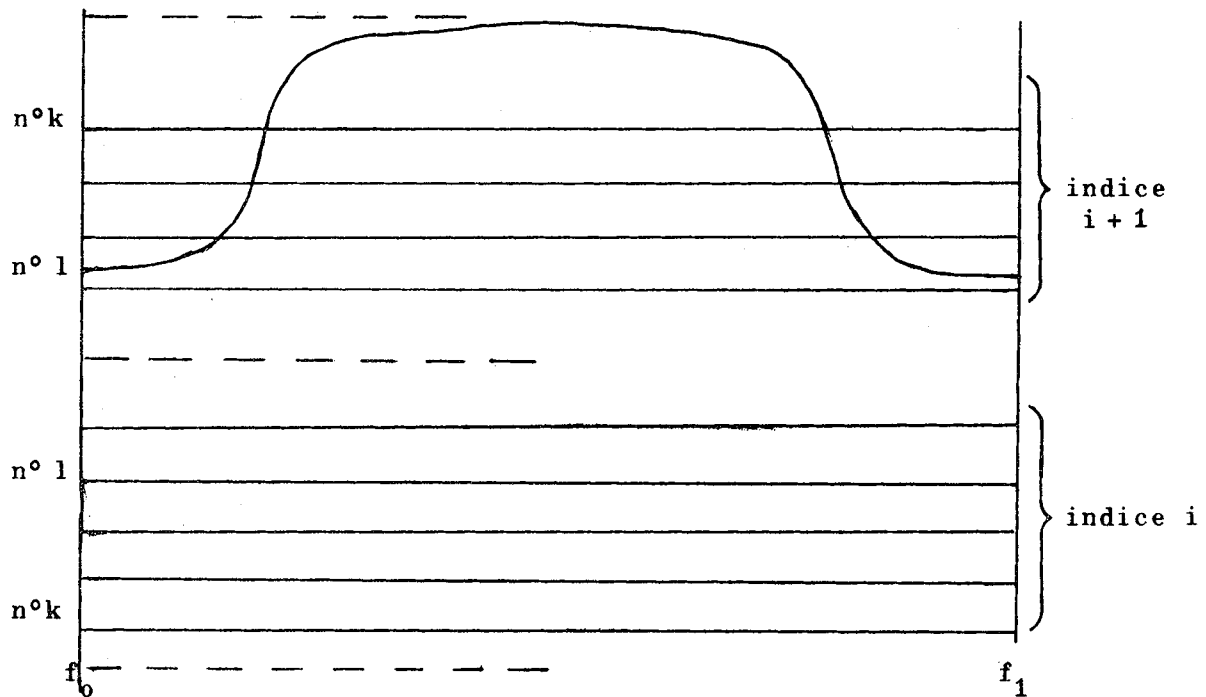
II.3 Définition de $G(\pi)$: On commence par définir pour chaque entier q un sous-groupe $G_q(\pi)$ de $\rho^{-1}(\check{T}E_q(\pi))$; $G(\pi)$ est défini comme la limite inductive des $G_q(\pi)$.

L'idée est de prendre pour générateurs de $G_q(\pi)$ l'image par χ de certains éléments de $\pi_0[(SA \mathcal{F}_{i,q,M}^+, \mathcal{P}_{i,q,M}^{0,+}; f_0)]$ représentés par des chemins γ ayant les deux propriétés suivantes :

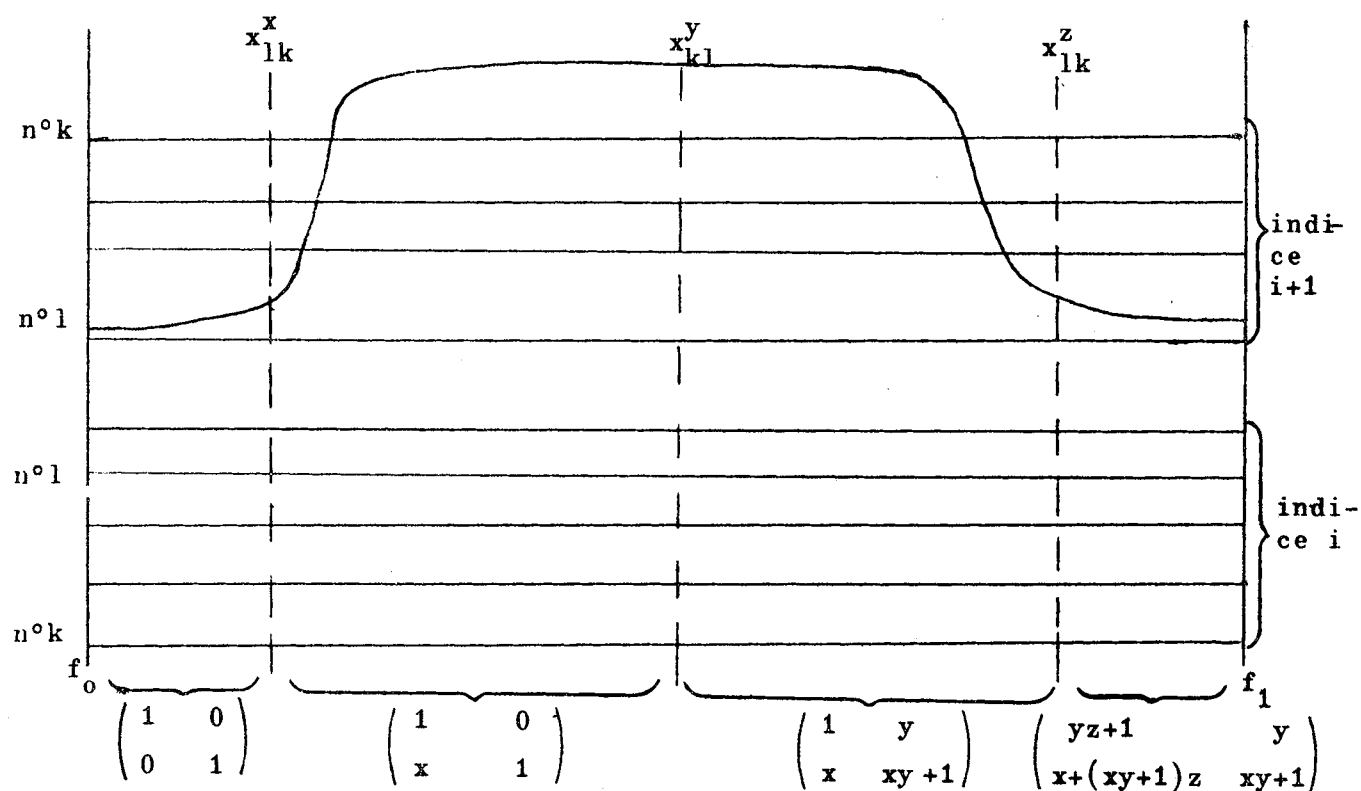
- 1) Le graphique de γ est aussi simple que possible.
- 2) Les extrémités f_0 et f_1 de γ sont dans la même composante connexe par arcs de $\mathcal{F}_{i,q}^0$.

Il est en effet clair que, cherchant à attacher un invariant à l'extrémité f_1 du chemin, nous devons passer au quotient par les invariants attachés aux chemins de $\mathcal{F}_{i,q,M}^+$ qui sont des lacets dans $\mathcal{F}_{i,q}$.

Considérons les éléments γ de $SA(\mathcal{F}_{i,q,M}^+, \mathcal{P}_{i,q,M}^{0,+}; f_0)$ de graphique de la forme



Nous supposerons de plus qu'il existe une famille de bases adaptée à γ dans laquelle les changements de base ne concernent que les deux points critiques numérotés k et l sur la figure précédente. La famille B la plus générale de cette forme est représentée sur la figure qui suit :



(matrice d'intersection des points k et l)

La condition $\mu(B) \in \rho^{-1}(\pi_q(\pi))$ s'écrit

$$(*) \begin{cases} yz + 1 \text{ et } xy + 1 \text{ sont des unités triviales.} \\ x + (xy + 1)z = 0 \end{cases}$$

Nous allons voir que le système $(*)$ a deux types de solutions "triviales", obtenus en supposant que x (resp. y) est une unité triviale.

Premier type de solutions triviales (cas où x est une unité triviale) :

$$\text{On pose } \begin{cases} xy + 1 = u \\ x = u' \end{cases}$$

avec u et u' unités triviales; il vient immédiatement

$$\begin{cases} x = u' \\ y = u'^{-1}(u-1) \\ z = -u'^{-1}u' \end{cases}$$

z est donc aussi une unité triviale.

Deuxième type de solutions triviales (cas où y est une unité triviale) :

On pose
$$\begin{cases} xy + 1 = u \\ y = u'^{-1} \end{cases} ;$$

il vient

$$\begin{cases} x = (u-1)u' \\ y = u'^{-1} \\ z = (u'^{-1}-1)u' \end{cases}$$

L'élément $\chi(\gamma)$ associé dans $\rho^{-1}(\mathcal{E}_q(\pi))$ n'est autre que $\gamma_{lk}(u, u')$ défini au début de cet appendice, où $l > k$.

Le premier type de solution fournit des éléments $\beta_{lk}(u, u')$ ($l > k$), où $\beta_{lk}(u, u') = x_{lk}^{u'} x_{kl}^{u'^{-1}(u-1)} x_{lk}^{-u'^{-1}u'}$.

La proposition qui suit montre que ces éléments sont en fait dans le sous-groupe $G_q(\pi)$ de $\rho^{-1}(\mathcal{E}_q(\pi))$ engendré par les $\gamma_{lk}(u, u')$, $l > k$.

II.4 Proposition :

$$\begin{aligned} \beta_{lk}(u, u') &= \gamma_{lk}(1, u') \gamma_{lk}(u, -u') \\ &= x_{kl}^{u'^{-1}} \gamma_{lk}(u, -u') \end{aligned}$$

II.5 Corollaire : $G(\pi)$ est engendré par les $\beta_{lk}(u, u')$ ($l > k$, u et u' unités triviales) et les x_{kl}^λ ($l > k$).

Démonstration de la proposition II.4 :

$$\begin{aligned}
 & x_{kl}^{-u', -1} \beta_{lk}(u, u') \\
 &= w_{kl}(-u', -1) x_{kl}^{u', -1} x_{lk}^{-u^{-1} u'} \\
 &= w_{lk}(u') x_{kl}^{u', -1} x_{lk}^{-u^{-1} u'} \quad (\text{voir [8] lemme 9.5}) \\
 &= x_{lk}^{-uu'} w_{lk}(u') x_{lk}^{-u^{-1} u'} \quad (\text{ voir [8] lemme 9.4}) \\
 &= \gamma_{lk}(u, -u') \text{ par définition.}
 \end{aligned}$$

cqfd.

Enfin, la proposition suivante justifie le choix de $G(\pi)$:

II.4 Proposition : les chemins correspondant aux deux types de solutions triviales possèdent tous la propriété suivante : f_0 et f_1 sont dans la même composante connexe par arcs de $\mathcal{S}_{i,q}^0$.

La démonstration pour le deuxième type est identique à celle faite dans le paragraphe 5.

En ce qui concerne le premier type, la démonstration est encore plus simple, et se fait essentiellement en utilisant le lemme de la queue d'aronde.

II.5 Le principal intérêt de la nouvelle définition du groupe $Wh_2(\pi)$ semble être la bijection donnée dans la proposition II.2.

On peut espérer à partir de là définir par passage au quotient une bijection de $\pi_1(\mathcal{F}_i, \mathcal{P}_i; f_o)$ sur le quotient de $\rho^{-1}(\mathcal{TE}_q(\pi))$ par un certain sous-groupe invariant $I_q(\pi)$ contenu dans $G_q(\pi)$ et contenant les $\beta_{ji}(u, u')$, et un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(\mathcal{F}_i, \mathcal{P}_i; f_o) & \cong & \rho^{-1}(\mathcal{TE}_q(\pi)/I_q(\pi)) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \pi_1(\mathcal{G}_i, \mathcal{P}_i, f_o) & \cong & \rho^{-1}(\mathcal{TE}_q(\pi))/G_q(\pi) \cong Wh_2(\pi). \end{array}$$

Dans ce diagramme, $\mathcal{P}_i$ est la réunion des $\mathcal{P}_{i,q}^0$ et des strates de naissance qui les séparent; $\mathcal{G}_i$ désigne l'intérieur de l'adhérence de l'espace $\mathcal{G}_i^0$ des fonctions de Morse n'ayant que des points critiques d'indice i et $i+1$.

On sait que $\pi_0(\mathcal{G}_i) = \{1\}$ et A. Hatcher a récemment annoncé que $\pi_1(\mathcal{G}_i) = \{1\}$. On en déduit alors, en plus de l'isomorphisme $\pi_0(\mathcal{P}_i) \cong Wh_2(\pi)$, des renseignements sur $\pi_1(\mathcal{F}_i)$.

LA TORSION D'UN h -COBORDISME

PAR LA METHODE FONCTIONNELLE

APPLICATION AU PROBLEME DE LA PSEUDO-ISOTOPIE

SUR L'ESPACE TOTAL D'UN FIBRE DE BASE S^1

(d'après L. Siebenmann)

§1 - LA TORSION DE WHITEHEAD D'UN h-COBORDISME

1.1 Définition : Soit (W^{n+1}, V_0, V_1) un h-cobordisme C^∞ compact orientable de dimension $n+1$, $n \geq 5$. Etant donné un entier i tel que $2 \leq i \leq n-2$, il existe une fonction de Morse

$$f : (W, V_0, V_1) \rightarrow ([0, 1], 0, 1) \quad (*)$$

ordonnée et ayant q points critiques de chaque indice i et $i+1$, c.à.d. $f \in \mathcal{F}_{i,q}^0$ (voir [2] prop. 1.2).

Soient M une variété intermédiaire pour f (voir [2] 1.1), W_+ la partie entre M et V_1 , W_- la partie entre V_0 et M . Soient $D_1^{(i+1)}, \dots, D_q^{(i+1)}$ (resp. $D_1^{(i)}, \dots, D_q^{(i)}$) un système de nappes orientées adaptées à f et descendant des points critiques d'indice $i+1$ (resp. d'indice i) jusqu'à M (resp. jusqu'à V_0) (voir [2] §3). Dans le revêtement universel $\tilde{W}$ de W , on choisit des relèvements $\tilde{D}_j^{(i+1)}$ (resp. $\tilde{D}_j^{(i)}$) de $D_j^{(i+1)}$ (resp. $D_j^{(i)}$) pour $j = 1, \dots, q$. Observons que l'inégalité $2 \leq i \leq n-2$ implique que les préimages $\tilde{W}_+$, $\tilde{W}_-$ et $\tilde{M}$ de W_+ , W_- et M dans $\tilde{W}$ sont des revêtements universels de leurs bases respectives. L'action de

$$\pi \equiv \pi_1(V_0) \cong \pi_1(W)$$

sur $\tilde{W}$ fait de $H_*(\tilde{W}_+, \tilde{M}; \mathbb{Z})$ et de $H_*(\tilde{W}_-, \tilde{V}_0; \mathbb{Z})$ des $\mathbb{Z}[\pi]$ -modules libres ayant pour bases les familles des classes d'homologie de $\tilde{D}_1^{(i+1)}, \dots, \tilde{D}_q^{(i+1)}$ et de $\tilde{D}_1^{(i)}, \dots, \tilde{D}_q^{(i)}$.

(*) Cette notation signifie $f^{-1}(i) = V_i$ et $f(V_i) = i$ pour $i = 0, 1$.

L'opérateur $\partial : H_{i+1}(\tilde{W}_+, \tilde{M}) \rightarrow H_i(\tilde{W}_-, \tilde{V}_0)$ est un isomorphisme parce que $H_*(\tilde{W}, \tilde{V}) = 0$. On définit alors la torsion $\tau_i(W, V_0)$ comme étant la classe de Whitehead de la matrice représentant ∂ dans les bases de $\mathbb{Z}[\pi]$ -modules libres choisies précédemment :

$$\tau_i(W, V_0) \in Wh_1(\pi) = K_1(\mathbb{Z}[\pi]) / \pm\pi$$

(où $\pm\pi$ désigne le sous-groupe de $K_1(\mathbb{Z}[\pi])$ engendré par les matrices $(-g) \in GL(1, \mathbb{Z}[\pi])$, $g \in \pi$). Le groupe $K_1(\mathbb{Z}[\pi])$ a été défini en [2] 2.2 ; pour plus de détails sur K_1 et Wh_1 on peut se reporter à l'article de Milnor [4].

1.2 Avant de prouver que $\tau_i(W, V_0)$ ne dépend pas des différents choix qui ont été faits au cours de la construction, nous allons exhiber la matrice représentant ∂ . Pour cela choisissons un système de nappes adaptées à f , $A_1^{(i)}, \dots, A_q^{(i)}$, montant des points critiques d'indice i jusqu'à M tel que

$$A_k^{(i)} \cap D_\ell^{(i)} = \emptyset \quad \text{si } k \neq \ell$$

$$A_j^{(i)} \cap D_j^{(i)} = 1 \text{ point.}$$

On oriente $A_j^{(i)}$ de sorte que cette intersection soit positive. Ceci étant, $\tilde{A}_j^{(i)}$ est le relèvement de $A_j^{(i)}$ dans $\tilde{W}$ qui rencontre $\tilde{D}_j^{(i)}$. Les classes $[\tilde{A}_j^{(i)}]$ sont déterminées de façon unique dans $H_{n-i+1}(\tilde{W}_-, \tilde{M}; \mathbb{Z})$ par la donnée des disques orientés $\tilde{D}_k^{(i)}$.

Remarque : Soit $z \in H_i(\tilde{W}_-, \tilde{V}_0)$; le coefficient de z sur l'élément de base $[\tilde{D}_j^{(i)}]$ est l'élément de $\mathbb{Z}[\pi]$ donné par

$$\sum_{g \in \pi} (z \cap [g \cdot \tilde{A}_j^{(i)}])g$$

où $g \cdot \tilde{A}_j^{(i)}$ est le translaté par g de $\tilde{A}_j^{(i)}$.

Maintenant, on peut écrire le coefficient $a_{k\ell}$ de la matrice de ∂ :

$$\begin{aligned} a_{k\ell} &= \sum_{g \in \pi} ([\partial D_\ell^{(i+1)}] \cap [g \cdot \tilde{A}_k^{(i)}])_g \\ &= \sum_{g \in \pi} ([\partial D_\ell^{(i+1)}] \cap [g \cdot \partial \tilde{A}_k^{(i)}])_g \end{aligned}$$

Dans ces formules $\partial D_\ell^{(i+1)}$ et $\partial \tilde{A}_k^{(i)}$ sont les bords orientés de $\tilde{D}_\ell^{(i+1)}$ et de $\tilde{A}_k^{(i)}$; dans la première, le coefficient de g est un nombre d'intersection dans $\tilde{W}_-$; dans la seconde, c'est un nombre d'intersection dans $\tilde{M}$, orienté comme bord de $\tilde{W}_-$.

1.3 La torsion est bien définie

Si on change l'orientation et le relèvement d'une nappe, on modifie la matrice de ∂ en multipliant une de ses lignes ou colonnes par $\pm g$, $g \in \pi$.

Si on change de système de nappes adaptées à f , on effectue sur la matrice une opération dite élémentaire, addition de lignes ou de colonnes.

Choisissons maintenant sur W une autre fonction de Morse $f' \in \mathcal{F}_{i,q}^0$. D'après la connexité de l'espace $\mathcal{F}_i$ ([2], prop. 1.2), f et f' sont joignables par un chemin de fonctions sur lequel les seuls accidents sont des croisements de valeurs critiques ou des naissances ou éliminations de paires de points critiques. Chaque croisement pouvant se faire avec une base adaptée fixe convenablement choisie, il n'en résulte aucun phénomène algébrique. Quant aux naissances (resp. éliminations), elles s'accompagnent de la stabilisation (resp. la déstabilisation) de la matrice de ∂ .

Remarque : Par un petit effort algébrique - la définition de la torsion pour un complexe de chaînes acyclique - on peut remplacer la connexité de $\mathcal{F}_i$, par celle, beaucoup plus facile à prouver, de l'espace $\mathcal{W}$ (adhérence de l'espace des

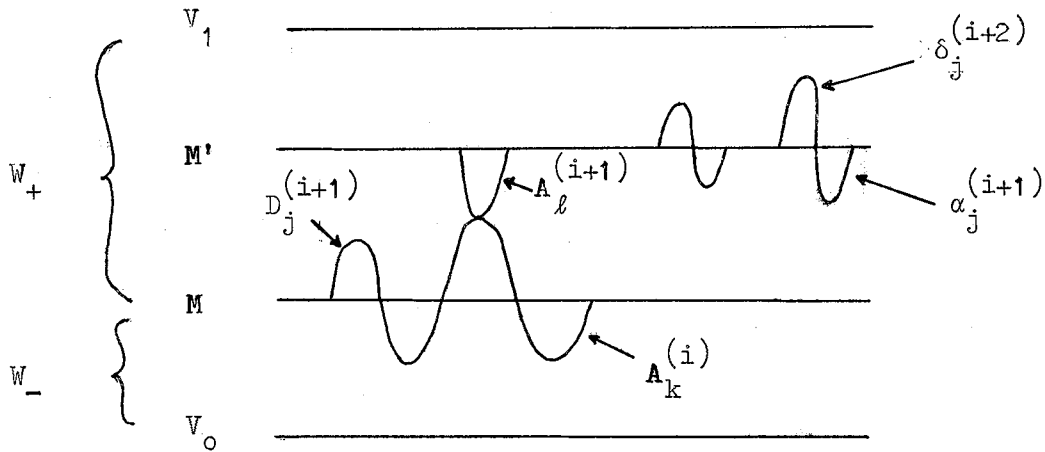
fonctions de Morse ordonnées). De toutes façons, la bonne définition de la torsion était bien connue avant le moindre théorème sur l'espace des fonctions numériques sur W (voir [4]) : à la place, on utilisait le théorème d'unicité, à subdivision et isomorphisme linéaire homotope à l'identité près, des C^1 -triangulations d'une variété lisse [8] et le lemme d'invariance de la torsion par subdivision [4].

1.4 Proposition : Si $2 \leq i \leq n-3$, on a

$$\tau_{i+1}(W, V_0) = -\tau_i(W, V_0)$$

Conséquence : Après cette proposition, il est naturel de définir la torsion $\tau(W, V_0)$ comme $(-1)^i \tau_i(W, V_0)$, ce qui est d'ailleurs la définition classique.

Démonstration : Soit $f \in \mathcal{F}_{i,q}^0$; on va échanger les points critiques d'indice i par des points critiques d'indice $i+2$ et ainsi construire une fonction $f' \in \mathcal{F}_{i+1,q}^0$, extrémité d'un chemin de Smale issu de f (voir [1] ch V 2.3). On commence par faire naître q paires de points critiques d'indice $i+1$ et $i+2$ au-dessus des points critiques d'indice $i+1$ de f , de sorte que la fonction f'' ainsi obtenue soit ordonnée. On note M' une surface de niveau de f'' séparant les points d'indice $i+2$ de ceux d'indice $i+1$. On choisit des systèmes de nappes adaptées à f'' , $\delta_1^{(i+2)}, \dots, \delta_q^{(i+2)}$ descendant des points d'indice $i+2$ jusqu'à M' et $\alpha_1^{(i+1)}, \dots, \alpha_q^{(i+1)}$ montant des nouveaux points d'indice $i+1$ jusqu'à M' .



On choisit ces nappes et leurs relèvements $\tilde{\delta}$, $\tilde{\alpha}$ dans $\tilde{W}$ tels que

$$(*) \begin{cases} \delta_j \cap A_k^{(i+1)} = \emptyset \text{ pour tout } j, k \\ \delta_j \cap \alpha_k = \emptyset \text{ si } j \neq k \text{ et } \delta_j \cap \alpha_j = 1 \text{ point} \\ \tilde{\delta}_j \cap \tilde{\alpha}_j = 1 \text{ point (intersection transversale)}; \end{cases}$$

comme toujours les orientations sont choisies pour que cette intersection soit positive.

Puisque la matrice $(a_{k\ell} = \sum_{g \in \pi} ([\partial \tilde{D}_\ell^{(i+1)}] \cap [g \cdot \tilde{A}_k^{(i)}])g)$ appartient à $GL_q(\mathbb{Z}[\pi])$, il existe des éléments $\lambda_{k\ell} \in \mathbb{Z}[\pi]$ tels que

$$\sum_{\substack{g \in \pi \\ \ell=1, \dots, q}} \lambda_{k\ell} ([\partial \tilde{D}_\ell^{(i+1)}] \cap [g \cdot \tilde{A}_j^{(i)}])g = \begin{cases} 0 & \text{si } j \neq k \\ 1 & \text{si } j = k \end{cases}$$

La matrice $(\lambda_{k\ell})$ est la transposée de $(a_{k\ell})^{-1}$. Choisissons maintenant un système de nappes orientées adaptées à f'' , $\Delta_1^{(i+1)}, \dots, \Delta_q^{(i+1)}$, descendant des nouveaux points d'indice $i+1$ jusqu'à M , et leurs relèvements de sorte que l'on ait :

$$\tilde{\Delta}_k^{(i+1)} \cap \tilde{\alpha}_j^{(i+1)} = \begin{cases} \emptyset & \text{si } j \neq k \\ 1 \text{ point positif} & j = k \end{cases}$$

$$[\tilde{\Delta}_k^{(i+1)}] = \sum_{\ell=1}^q \lambda_{k\ell} [\tilde{D}_\ell^{(i+1)}] \text{ dans } H_*(\tilde{W}_+, \tilde{M})$$

La nappe Δ_k permet donc l'élimination du point critique correspondant avec le k -ième point d'indice i , bien entendu après tous les croisements nécessaires de valeurs critiques d'indice $i+1$. Toutes ces éliminations étant faites, on arrive à la fonction cherchée f' qui admet M' pour variété intermédiaire. Si l'on remplace le système $A_1^{(i+1)}, \dots, A_q^{(i+1)}$ par un nouveau système de nappes $A'_1{}^{(i+1)}, \dots, A'_q{}^{(i+1)}$ adapté à f'' et disjoint de $\Delta_1^{(i+1)}, \dots, \Delta_q^{(i+1)}$, alors ce nouveau système sera aussi adapté à f' et $\tau_{i+1}(W, V_0)$ sera la classe de Whitehead de la matrice

$$(b_{k\ell} = \sum_{g \in \pi} ([\partial \delta_\ell^{(i+2)}] \cap [g \cdot \tilde{A}'_k]g)).$$

Homologiquement, la condition $A'_k{}^{(i+1)} \cap \Delta_j^{(i+1)} = \emptyset$ pour tout j et tout k impose

$$[\tilde{A}'_k{}^{(i+1)}] = [\tilde{A}_k^{(i+1)}] - \sum_{\ell} \lambda_{\ell k} [\tilde{\alpha}_\ell^{(i+1)}].$$

Compte tenu des relations (*), on trouve

$$b_{k\ell} = -\lambda_{\ell k}$$

donc

$$(b_{k\ell}) = \pm (a_{k\ell})^{-1}$$

ou encore

$$\tau_{i+1}(W, V_0) = -\tau_i(W, V_0).$$

cqfd

1.5 Quelques propriétés élémentaires

1.5.1 Commençons par rappeler que si C est un automorphisme intérieur d'un groupe G , alors C induit l'identité sur $Wh_1(G)$; donc si X est un espace topologique connexe par arcs et si $x, y \in X$, $Wh_1(\pi_1(X, x))$ est naturellement isomorphe à $Wh_1(\pi_1(X, y))$; de là cette habitude de ne pas préciser le point base. Si $f : X \rightarrow Y$ est une application continue de source et but connexes par arcs, f induit un morphisme $f_* : Wh_1(\pi_1(X)) \rightarrow Wh_1(\pi_1(Y))$.

1.5.2 Naturalité de la torsion

Soient (W, V_0, V_1) et (W', V'_0, V'_1) deux h -cobordismes de groupe fondamental respectivement π et π' . Soit $F : W \rightarrow W'$ un difféomorphisme tel que $V'_0 = F(V_0)$. Alors $\tau(W', V'_0) = F_* \tau(W, V_0)$.

Exemple : Si Φ est un difféomorphisme de V_0 on peut construire $W' = V_0 \times [0, 1] \cup_{\Phi} W$. Il existe un difféomorphisme $F : W \rightarrow W'$ dont la restriction à V_0 est Φ^{-1} . Donc $\tau(W', V_0) = \Phi_*^{-1}(\tau(W, V_0)) \in Wh_1(\pi_1(V_0))$.

1.5.3 Formule d'addition

Soient (W_0, V_0, V_1) et (W_1, V_1, V_2) deux h -cobordismes et Φ un difféomorphisme de V_1 . Alors $(W_0 \cup_{\Phi} W_1, V_0, V_2)$ est un h -cobordisme et l'on a $\tau(W_0 \cup_{\Phi} W_1, V_0) = \tau(W_0, V_0) + \Phi_*^{-1} \tau(W_1, V_1)$, formule qui prend son sens une fois que l'on a identifié $Wh_1(\pi_1(W_0))$ à $Wh_1(\pi_1(W_1))$ par l'isomorphisme induit par les équivalences d'homotopie : $W_0 \hookrightarrow V_1 \hookrightarrow W_1$.

Démonstration : D'après 1.5.2, il suffit de prouver la formule lorsque

$\Phi = \text{Identité}$. Soient $f_0 \in \mathcal{F}_i^0(W_0)$, $f_1 \in \mathcal{F}_i^0(W_1)$; on peut construire $f' = f_0 \cup (f_1 + 1) : W_0 \cup_{V_1} W_1 \rightarrow [0, 2]$, puis $f \in \mathcal{F}_i(W_0 \cup W_1)$ par réordonnement des

points critiques de f' et par composition avec un difféomorphisme

$[0,2] \rightarrow [0,1]$. Ainsi on trouve naturellement un représentant de $\tau(W_0 \cup W_1, V_0)$

de la forme $\begin{pmatrix} A_0 & B \\ 0 & A_1 \end{pmatrix}$ où $A_0 \in \tau(W_0, V_0)$ et $A_1 \in \tau(W_1, V_1)$. Alors le

lemme de Whitehead (voir [4] lemme 1.1) implique la formule d'addition.

cqfd

1.5.4 Formule de dualité

Rappelons d'abord que $\mathbb{Z}[\pi]$ est muni d'une conjugaison, antiautomorphisme d'anneau, $x = \sum_{g \in \pi} n_g g \mapsto \bar{x} = \sum_{g \in \pi} n_g g^{-1}$, laquelle induit une conjugaison sur $GL(\mathbb{Z}[\pi])$, $(a_{ij}) \mapsto (\bar{a}_{ji})$. Elle induit un isomorphisme involutif sur les groupes abéliens $K_1(\mathbb{Z}[\pi])$ et $Wh_1(\pi)$, noté $\tau \mapsto \bar{\tau}$.

Proposition : $\tau_i(W^{n+1}, V_0) = \bar{\tau}_{n-i}(W, V_1)$
donc $\tau(W^{n+1}, V_0) = (-1)^n \bar{\tau}(W, V_1)$

Indication : On calcule $\tau_i(W, V_0)$ avec une fonction $f \in \mathcal{F}_i^0$ et un système de bases adaptées. Pour calculer $\tau_{n-i}(W, V_1)$, on considère la fonction $1-f$; les nappes montantes de f sont les nappes descendantes de $1-f$ et vice versa ; le calcul est alors immédiat si l'on observe que

$$\sum_{g \in \pi} ([\partial \tilde{D}] \cap [g, \partial \tilde{A}])_g = \sum_{g \in \pi} ([g^{-1} \cdot \partial \tilde{D}] \cap [\partial \tilde{A}])_g = \sum_{g \in \pi} ([g \cdot \partial \tilde{D}] \cap \partial \tilde{A})_g^{-1}$$

(les notations sont celles de 1.1 et 1.2).

1.6 Le théorème de classification

Théorème : 1°) $\tau(W, V_0) \iff W \cong V_0 \times [0, 1]$;

2°) Pour tout $x \in Wh_1(\pi_1(V_0))$, il existe un h -cobordisme (W, V_0, V_1) tel que $\tau(W, V_0) = x$;

3°) Soient (W, V_0, V_1) et (W', V_0, V_1') deux h -cobordismes "d'origine" V_0 ; $\tau(W, V_0) = \tau(W', V_0)$ équivaut à l'existence d'un difféomorphisme $F : W \rightarrow W'$ tel que $F|_{V_0} = \text{Identité}$.

Démonstration : Le 1°) est connu sous le nom de théorème du s-cobordisme.

Pour sa démonstration nous renvoyons à l'article de Kervaire dans [5]. Cependant la démonstration que nous avons donnée dans [2] §5 pour le théorème du h -cobordisme se traduit immédiatement en une démonstration du théorème du s -cobordisme si l'on réécrit le §3 en remplaçant les espaces par leurs revêtements universels et l'anneau $\mathbb{Z}$ par $\mathbb{Z}[\pi]$.

2°) On choisit une matrice $A = (a_{k\ell}) \in GL_q(\mathbb{Z}[\pi])$ représentant x . On attache à $V_0 \times [0, 1]$ q anses triviales d'indice $i, 2 \leq i \leq n-2$,

$$W_- = V_0 \times [0, 1] + (\varphi_1^i) + \dots + (\varphi_q^i) .$$

On a $M \equiv \partial W_- - V_0 \times \{0\} \cong V_0 \# S_1^i \times S_1^{n-i} \# \dots \# S_q^i \times S_q^{n-i}$. Les sphères S_j^i sont à fibré normal trivial, ainsi que celles que l'on construit à partir d'elles par sommes connexes plongées le long d'arcs simples les joignant. Toutes ces i -sphères peuvent donc servir de sphères d'attachement à des anses d'indice $i+1$. Choisissons donc des sphères $\sigma_1, \dots, \sigma_q$ plongées mutuellement disjointes dans M telles que, dans le revêtement universel, on ait en homologie

$$[\tilde{\sigma}_\ell] = \sum_{k=1}^q a_{k\ell} [\tilde{S}_k^i]$$

On construit W en attachant à W_0 des anses d'indice $i+1$ le long de $\sigma_1, \dots, \sigma_q$; c'est un h -cobordisme et l'on a $\tau(W, V_0) = x$.

3°) (Partie directe ; la réciproque est triviale).

Soit (W'', V_1, V'_1) un h -cobordisme de torsion $-\tau(W, V_0)$, $Wh_1(\pi_1(V_1))$ ayant été identifié à $Wh_1(\pi_1(V_0))$ par l'isomorphisme induit par les équivalences d'homotopie $V_0 \hookrightarrow W \hookrightarrow V_1$. D'après la formule d'addition et le 1°), il existe un difféomorphisme $\Phi : W \cup_{V_1} W'' \rightarrow V_0 \times [0, 1]$ qui est l'identité sur V_0 . Le cobordisme $(W'' \cup_{\Phi} W', V_1, V'_1)$ a pour torsion $\tau(W'', V_1) + \Phi_*^{-1} \tau(W', V_0)$; mais, sous l'identification faite plus haut, Φ_* est l'identité et cette torsion est nulle ; par conséquent il existe un difféomorphisme $\psi : W'' \cup W' \rightarrow V_1 \times [0, 1]$ tel que $\psi|_{V_1} = \text{Id}$. Finalement on a une suite de difféomorphismes qui sont l'identité sur V_0 :

$$W' \cong V_0 \times [0, 1] \cup_{V_0 \times \{1\}} W'' \cong W \cup_{V_1} W'' \cup_{\Phi} W' \cong W \cup_{V_1} V_1 \times [0, 1] \cong W$$

cqfd

1.7 Applications

1°) Un difféomorphisme F de V_0 se prolonge à W si et seulement si $\tau(W, V_0) = F_* \tau(W, V_0)$. En effet F se prolonge toujours en un difféomorphisme de W sur $V_0 \times [0, 1] \cup_{F^{-1}} W$. Il suffit d'appliquer alors le théorème 1.6 3°).

2°) $W - V_1$ est difféomorphe à $V_0 \times [0, 1[$. On utilise le fait que W a un inverse W' et le procédé de répétition infinie (voir [7] p. I-7).

On déduit aussi $V_0 \times]0, 1[\cong V_1 \times]0, 1[$. Le résultat est à rapprocher du théorème d'isomorphisme stable de B. Matur [3], concernant les équivalences d'homotopie entre variétés qui se relèvent en isomorphisme de leurs fibrés tangents stables.

3°) $W \times S^1$ est un h-cobordisme trivial, donc $V_0 \times S^1 \cong V_1 \times S^1$. Il résulte en effet de la formule du produit 1.8 que $\tau(W \times S^1, V_0 \times S^1) = 0$.

4°) Si $\tau(W, V_0)$ est de la forme $\tau + (-1)^n \tau$, alors $V_1 \cong V_0$. En effet W est difféomorphe à $W' \bigcup_{V_1} W'$, où (W', V_0, V_1) est un h-cobordisme de torsion τ . Si π est fini, des théorèmes sur $Wh_1(\pi)$ permettent de prouver que si n est pair, il n'y a (à difféomorphisme près) qu'un nombre fini de variétés h-cobordantes (voir [4], théorème II.5).

1.8 Formule du produit

Soient (W, V_0, V_1) un h-cobordisme et N une variété fermée. Alors $(W \times N, V_0 \times N, V_1 \times N)$ est un h-cobordisme et on a $\tau(W \times N, V_0 \times N) = \chi(N) \cdot u_* \tau(W, V_0)$ où $\chi(N)$ est la caractéristique d'Euler et $u : W \times \text{pt} \hookrightarrow W \times N$ l'injection d'un facteur du produit.

Démonstration : On choisit $f \in \mathcal{F}_1(W)$ et g une fonction de Morse ordonnée sur N . Considérons la fonction

$$h : W \times N \rightarrow \mathbb{R}$$

donnée par $h(x, y) = f(x) + g(y)$ pour $(x, y) \in W \times N$. Malheureusement la fonction h ne prend pas des valeurs constantes sur les composantes du bord $V_0 \times N$ et $V_1 \times N$. On modifie donc h comme l'indique le lemme suivant, dont les hypothèses sont clairement satisfaites ici.

Lemme : Soient une variété compacte X , ∂X une composante de son bord et $h : X \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction C^∞ . On suppose qu'il existe un champ de vecteurs v sur X , transversal à ∂X , tel que $v(h)(x) > 0$ pour tout $x \in X$. Alors il existe un prolongement de h

$$\bar{h} : \bar{X} \equiv X \cup_{\partial X = \partial X \times \{0\}} \partial X \times [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$$

sans point critique dans $\partial X \times [0,1]$ et tel que $\bar{h}|_{\partial X \times \{1\}}$ soit constante.

Preuve : Par hypothèse, il existe un voisinage collier $\partial X \times [-1,0]$ de ∂X dans X tel que pour $(x,t) \in \partial X \times [-1,0]$ $h(x,t) = h(x) + t$. Soient d'une part un nombre $c \geq \max h|_{\partial X}$ et d'autre part une fonction $C^\infty \alpha : [0,1] \rightarrow [0,1]$, telle que $\alpha' \leq 0$ et que $\alpha = 1$ (resp. $\alpha = 0$) au voisinage de 0 (resp. de 1). Pour $(x,t) \in \partial X \times [0,1]$, on pose $\bar{h}(x,t) = t + \alpha(t) h(x) + (1-\alpha(t))c$. On voit que $\frac{\partial \bar{h}}{\partial t}(x,t) > 0$. $\square$

De cette façon, on définit $\bar{h} : \bar{W} \times N \rightarrow B$ où $\bar{W}$ est obtenu à partir de W en ajoutant un collier "extérieur" du bord. Notons $\alpha_0, \dots, \alpha_p$ les points critiques de g , numérotés par indice croissant, et $c_1, \dots, c_q$ (resp. $c'_1, \dots, c'_q$) les points critiques d'indice $i+1$ (resp. i) de f . Ceux de $\bar{h}$ sont (c_k, α_ℓ) et (c'_k, α_ℓ) ; ils appartiennent à $W \times N$.

Pour avoir $\bar{h}(c_k, \alpha_\ell) < \bar{h}(c'_k, \alpha_{\ell'})$ dès que $\ell' < \ell$, on impose que l'écart entre deux valeurs critiques de g soit supérieur à la longueur de l'intervalle contenant les valeurs critiques de f . Il existe alors des valeurs régulières $a_0, a_1, \dots, a_{p+1}$ telles que $\Omega_j \equiv \bar{h}^{-1}[a_j, a_{j+1}]$ contiennent tous les points critiques (c_k, α_j) et (c'_k, α_j) , et rien qu'eux. Pour pouvoir prendre Ω_j dans $W \times N$, on impose

$$\min g + 1 > h(c_k, \alpha_\ell)$$

$$h(c'_k, \alpha_\ell) > \max g$$

Cette dernière condition est compatible avec la précédente.

La fonction $h|_{\Omega_j}$ appartient à $\mathcal{F}_{i+\text{ind}\alpha_j}(\Omega_j)$. Si l'on munit $W \times N$ d'une métrique Riemannienne produit, on s'aperçoit que, dans Ω_j , les nappes de gradient h se coupent comme celles de f dans W : en effet une ligne de gradient joignant (c_k, α_j) à $(c_{k'}, \alpha_j)$ se trouve en fait dans $W \times \alpha_j$. On en déduit que $(\Omega_j, h^{-1}(a_j), h^{-1}(a_{j+1}))$ est un h -cobordisme et que

$$\tau_{i+\text{ind}\alpha_j}(\Omega_j, h^{-1}(a_j)) = u_* \tau_i(W, V_0).$$

D'après 1.4, on a $\tau(\Omega_j, h^{-1}(a_j)) = (-1)^{\text{ind}\alpha_j} u_* \tau(W, V_0)$. La conclusion découle alors de la formule d'addition 1.5.3. cqfd.

§2 - TORSION D'UN h -COBORDISME A FACE LATÉRALE

2.1 Définitions

Une triade (W^{n+1}, V_0, V_1) est un cobordisme à face latérale si W est une variété à bord et à coins de dimension $n+1$, dont le bord

$$\partial W = V_0 \cup_{\partial V_0} \Delta W \cup_{\partial V_1} V_1$$

où ΔW est un cobordisme de ∂V_0 à ∂V_1 , appelé face latérale. (W, V_0, V_1) est un h -cobordisme si les inclusions $V_0 \hookrightarrow W \hookrightarrow V_1$ et $\partial V_0 \hookrightarrow \Delta W \hookrightarrow \partial V_1$ sont des équivalences d'homotopie. Il revient au même de dire que les inclusions $(V_0, \partial V_0) \hookrightarrow (W, \Delta W) \hookrightarrow (V_1, \partial V_1)$ sont des équivalences d'homotopie de paires.

Pour un tel cobordisme, on peut définir une torsion $\tau(W, V_0)$ dont la nullité n'est suffisante pour affirmer que W est trivial que dans le cas particulier où ΔW est déjà trivial (on dit que W est un h -cobordisme relatif).

2.2 Cas d'un h-cobordisme relatif

2.2.1 On choisit une fonction $h : (\Delta W, \partial V_0, \partial V_1) \rightarrow ([0,1], 0,1)$ sans point critique et on considère l'espace $\mathcal{F}$ des fonctions C^∞

$(W, V_0, V_1) \rightarrow ([0,1], 0,1)$ dont la restriction à ΔW est h . On définit le sous-espace $\mathcal{F}_i$ de $\mathcal{F}$ des fonctions ordonnées n'ayant de points critiques que d'indice i et $i+1$. Comme dans le cas sans bord si $n \geq 5$ et $2 \leq i \leq n-2$, $\mathcal{F}_i$ est connexe non vide. Soit $f \in \mathcal{F}_i^0$; on prend un système de nappes adaptées à f ne rencontrant pas ΔW , ce que l'on peut toujours faire en prenant par exemple les nappes de gradient pour une métrique Riemannienne telle que les lignes de gradient issues de ΔW y restent. Toute la théorie esquissée au §1 marche de la même façon ici et les résultats sont les mêmes. En particulier si $\tau(W, V_0) = 0$, W est trivial : la fonction h se prolonge en une fonction sans point critique sur W . Il faut seulement vérifier que $\tau(W, V_0)$ ne dépend pas de h , ce qui est prouvé par le

2.2.2 Lemme : Soient une variété M et deux fonctions sans point critique

$h_0, h_1 : M \times ([0,1], 0,1) \rightarrow ([0,1], 0,1)$. Alors il existe une fonction sans point critique

$$H : M \times ([0,1], 0,1) \times [0,1] \rightarrow ([0,1], 0,1)$$

telle que $H|_{M \times [0,1] \times \{0\}} = h_0$ et $H|_{M \times [0,1] \times \{1\}} = h_1$.

Remarque : Cet énoncé revient à dire que toute pseudo-isotopie est pseudo-isotope à l'identité.

Démonstration : Un point de $M \times [0,1] \times [0,1]$ est noté (x, t, u) . Posons

$H(x, t, u) = (1-u) h_0(x, t) + u h_1(x, t)$. Si pour $(x, t) \in M \times]0,1[$,

$h_1(x, t) > h_0(x, t)$, alors $\frac{\partial}{\partial u} H(x, t, u) \neq 0$ et H est la fonction cherchée. Or,

par une isotopie de h_0 et de h_1 , on peut se ramener à ce cas : on peut par exemple imposer que sur chaque composante de $M \times ([0, 1/4] \cup [3/4, 1])$ h_0 et h_1 soient des fonctions affines de la seule variable t et que

$$h_0(M \times [1/4, 3/4]) = [1/4, 1/2], \quad h_1(M \times [1/4, 3/4]) = [1/2, 3/4].$$

cqfd.

2.2.3 Une autre formule d'addition

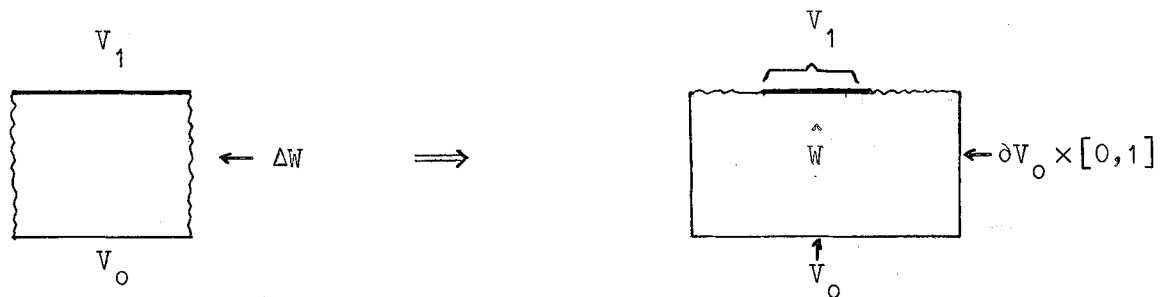
On peut recoller des h -cobordismes relatifs le long d'une partie de leurs faces latérales. Soit, pour $j = 1, 2$, un h -cobordisme relatif (W^j, V_0^j, V_1^j) où $\partial V_0^j = B_j \cup B$. On construit un h -cobordisme relatif (W, V_0, V_1) en posant

$$W = W^1 \cup_{B \times [0, 1]} W^2, \quad V_0 = V_0^1 \cup_{B \times \{0\}} V_0^2, \quad V_1 = V_1^1 \cup_{B \times \{1\}} V_1^2.$$

Notons i_j l'inclusion $V_0^j \hookrightarrow V_0$. On a la formule $\tau(W, V_0) = i_{1*} \tau(W^1, V_0^1) + i_{2*} \tau(W^2, V_0^2)$. La démonstration est laissée en exercice.

2.3 Cas général

2.3.1 A partir de (W, V_0, V_1) on peut construire plus ou moins canoniquement un h -cobordisme relatif : on considère $V_0 \times [0, 1] \cup W$; on lisse l'arête ∂V_1 et on fait apparaître une arête le long de $\partial V_0 \times \{1\}$. Le h -cobordisme relatif $\hat{W}$ ainsi obtenu va de V_0 à $V_1 \cup_{\partial V_1} \Delta W$. Par définition $\tau(W, V_0) = \tau(\hat{W}, V_0)$.



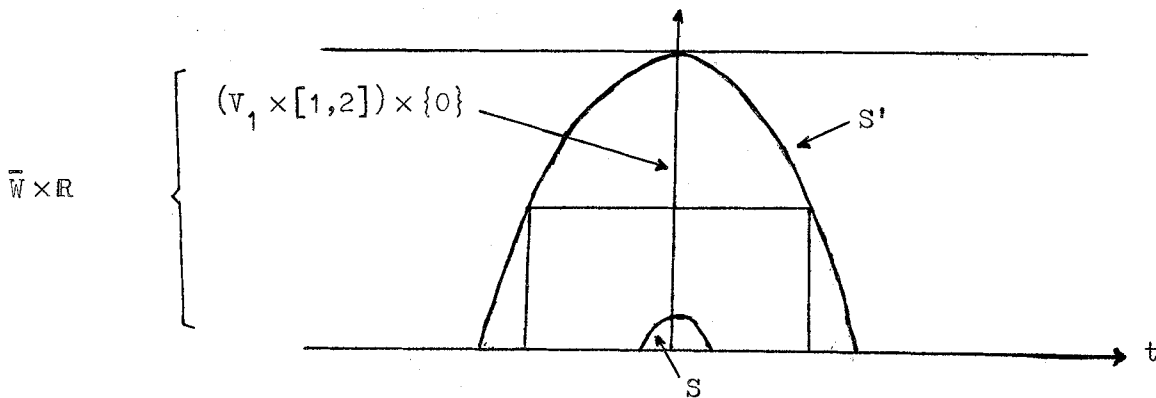
2.3.2 Attention : Si ΔW n'est pas trivial, il n'y a pas à proprement parler de formule de dualité. On a

$$\tau(W, V_1) = (-1)^n [\tau(W, V_0) - i_* \tau(\Delta W, \partial V_0)]$$

où i est l'inclusion $\partial V_0 \hookrightarrow V_0$.

2.3.3 Exemple : Soit (W^{n+1}, V_0, V_1) un h -cobordisme sans face latérale ; alors $(W \times [0, 1], V_0 \times [0, 1], V_1 \times [0, 1])$ est un h -cobordisme à face latérale. On a $\tau(W \times [0, 1], V_0 \times [0, 1]) = \tau(W, V_0)$.

Démonstration : Soit $f \in \mathcal{F}_1(W)$. Notons $\bar{W} = W \cup V_1 \times [1, 2]$ et $\bar{f} = f \cup \text{pr}_2 : \bar{W} \rightarrow [0, 2]$; $\bar{f}$ est C^∞ pour une structure différentiable convenable de $\bar{W}$ comme recollement de W et de $V_1 \times [1, 2]$. Considérons sur $\bar{W} \times \mathbb{R}$ la fonction $\bar{h}$ définie par $\bar{h}(x, t) = \bar{f}(x) + t^2$ pour $(x, t) \in \bar{W} \times \mathbb{R}$.



On s'intéresse au h -cobordisme relatif $\mathcal{W} = \{(x, t) | \bar{h}(x, t) \in [\varepsilon, 2]\}$ où ε est un nombre positif inférieur aux valeurs critiques de f . Ses extrémités sont $S' = \{(x, t) | \bar{h}(x, t) = 2\}$ et $S = \{(x, t) | \bar{h}(x, t) = \varepsilon\}$.

En utilisant les lignes du champ de gradient de $\bar{h}$, pour une métrique produit sur $\bar{W} \times \mathbb{R}$, on constate que S' est le résultat du lissage de $W \times \{-1\} \cup V_1 \times [-1, +1] \cup W \times \{+1\}$ et que $S \cong V_0 \times [-\sqrt{\varepsilon}, +\sqrt{\varepsilon}]$. Il est alors facile de voir que $\mathcal{W}$ est difféomorphe au h -cobordisme relatif $\widehat{W \times [-1, +1]}$. Il reste à remarquer que $\tau(W, V_0 \times [-\sqrt{\varepsilon}, +\sqrt{\varepsilon}]) = \tau(\mathcal{W}, V_0)$. Or les points critiques

de $\bar{h}$ se trouvent dans $W \times \{0\}$ et sont ceux de f avec le même indice ; les intersections de nappes de gradient descendantes et ascendantes de $\bar{h}$, pour une métrique produit, sont les mêmes que celles de f , car une ligne de gradient issue de $W \times \{0\}$ y reste.

cqfd

2.3.4 Corollaire : Soit $(\Omega^{n+2}, V_0^n \times [0,1], W_1)$ un h-cobordisme relatif de dimension $n+2$, $n \geq 4$. Alors W_1 est un h-cobordisme de V_0 à V_0 et l'on a

$$\tau(W_1, V_0) = \tau(\Omega, V_0 \times [0,1]) + (-1)^n \tau(\Omega, V_0 \times [0,1])$$

Démonstration : Soit (W, V_0, V_1) un h-cobordisme de torsion $\tau(\Omega, V_0 \times [0,1])$ (On utilise le théorème 1.6 2°) qui est valable pour $n=4$). D'après 2.3.1 et 2.3.3, le h-cobordisme relatif $(\widehat{W \times [0,1]}, V_0 \times [0,1], W \bigcup_{V_1} W)$ a la même torsion. D'après 1.6 1°), il est donc difféomorphe à Ω . Donc W_1 est difféomorphe à $W \bigcup_{V_1} W$, par un difféomorphisme qui est l'identité sur les deux copies de V_0 . La formule résulte donc de 1.5.3 et 1.5.4.

cqfd

2.4 Formule d'addition générale

Pour $j = 1, 2, 3$, considérons un h-cobordisme (W^j, V_0^j, V_1^j) , de dimension $n+1$ pour $j = 1, 2$ et n pour $j = 3$. On donne des inclusions

$$\begin{array}{ccccc} \partial V_1^1 & \longleftrightarrow & V_1^3 & \longleftrightarrow & \partial V_1^2 \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \Delta W^1 & \longleftrightarrow & W^3 & \longleftrightarrow & \Delta W^2 \\ \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ \partial V_0^1 & \longleftrightarrow & V_0^3 & \longleftrightarrow & \partial V_0^2 \end{array}$$

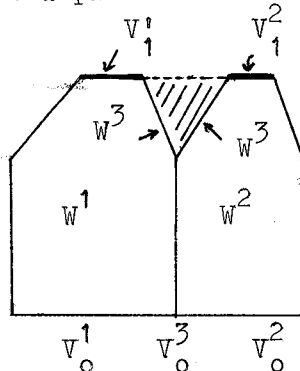
Alors $(W, V_0, V_1) \equiv (W^1 \bigcup_{W^3} W^2, V_0^1 \bigcup_{V_0^3} V_0^2, V_1^1 \bigcup_{V_1^3} V_1^2)$ est un h-cobordisme et

l'on a $\tau(W, V_0) = i_{1*} \tau(W^1, V_0^1) + i_{2*} \tau(W^2, V_0^2) - i_{3*} \tau(W^3, V_0^3)$ où, pour $j = 1, 2, 3$,

i_j est l'inclusion de V_o^j dans V_o .

Remarque : Cette formule d'addition contient comme cas particulier celles données aux §1 et 2, que nous allons d'ailleurs utiliser.

Démonstration : Considérons d'abord les h-cobordismes relatifs $\hat{W}^1$ et $\hat{W}^2$ et celui (Ω, V_o, X) obtenu par recollement le long de $V_o^3 \times [0,1]$



où $X = (\Delta W^1 \cup V_1^1) \cup_{V_o^3} (\Delta W^2 \cup V_1^2)$. On a

$$\tau(\Omega, V_o) = i_{1*} \tau(W^1, V_o^1) + i_{2*} \tau(W^2, V_o^2).$$

Par ailleurs, d'après 2.3.3 et la formule de dualité

$$\tau(\widehat{W^3 \times [0,1]}, W^3 \cup_{V_o^3} W^3) = -\tau(W^3, V_o^3) \quad (*)$$

Or on obtient $\hat{W}$ en recollant à Ω le h-cobordisme $\widehat{W^3 \times [0,1]}$ comme il est indiqué sur la figure (partie hachurée). En appliquant alors une formule d'addition du type 1.5.3, on a la conclusion.

cqfd

(*) Ici, à la différence de 2.3.1, la construction $\hat{}$ est faite en conservant la face "supérieure" $V_1 \times [0,1]$.

2.5 Exercice : Généraliser la formule du produit au cas où N a un bord. Par la formule générale d'addition, on peut se limiter au cas où N est un cobordisme élémentaire. On peut alors utiliser les idées de 1.8 et 2.3.3.

§3 - PSEUDO-ISOTOPIES SUR L'ESPACE TOTAL D'UN FIBRE DE BASE S^1 (d'après Siebenmann [6])

3.1 Soit $F^n \hookrightarrow E^{n+1} \xrightarrow{p} S^1$ une fibration localement triviale où la fibre F est une variété lisse compacte de dimension n , $n \geq 4$. Cette fibration est caractérisée par un difféomorphisme de monodromie $\theta : F \rightarrow F$, unique à isotopie près tel que

$$E \cong F \times [0,1] / (x,1) \sim (\theta(x),0)$$

En passant aux groupes fondamentaux on a une suite exacte

$$1 \rightarrow H \hookrightarrow G \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow 0$$

où H est un sous-groupe invariant de G . Soit $t \in G$, relèvement de $1 \in \mathbb{Z}$; la monodromie induit sur H un morphisme θ_* , bien défini à la composition près par un automorphisme intérieur : $\theta_*(\alpha) = t^{-1} \alpha t$.

Au sous-groupe H correspond le revêtement infini cyclique de E associé à la fibration. Le difféomorphisme σ de $F \times \mathbb{R}$,

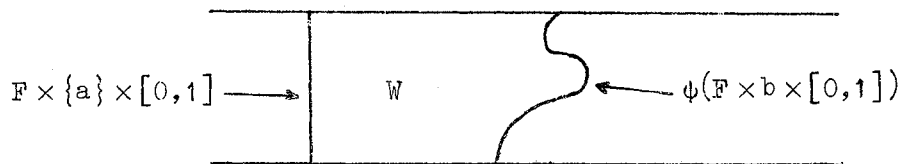
$$\sigma(x,t) = (\theta(x), t-1)$$

est un générateur du groupe de ce revêtement.

Notation : Si X est une variété lisse, $\mathcal{G}(X)$ est le groupe $\text{Diff}(X \times [0,1] \text{ mod } X \times \{0\})$, muni de la topologie C^∞ .

3.2 Construction d'un morphisme $\chi : \pi_0(\mathcal{G}(\mathbb{F} \times \mathbb{R})) \rightarrow \text{Wh}_1(H)$.

Soit $\phi \in \mathcal{G}(\mathbb{F} \times \mathbb{R})$; on considère le cobordisme W limité dans $\mathbb{F} \times \mathbb{R} \times [0,1]$ par $\mathbb{F} \times \{a\} \times [0,1]$ et $\phi(\mathbb{F} \times b \times [0,1])$, de base $\mathbb{F} \times [a,b]$, où $a, b \in \mathbb{R}$ sont choisis pour que $a < b$ et $\mathbb{F} \times \{a\} \times [0,1] \cap \phi(\mathbb{F} \times b \times [0,1]) = \emptyset$.

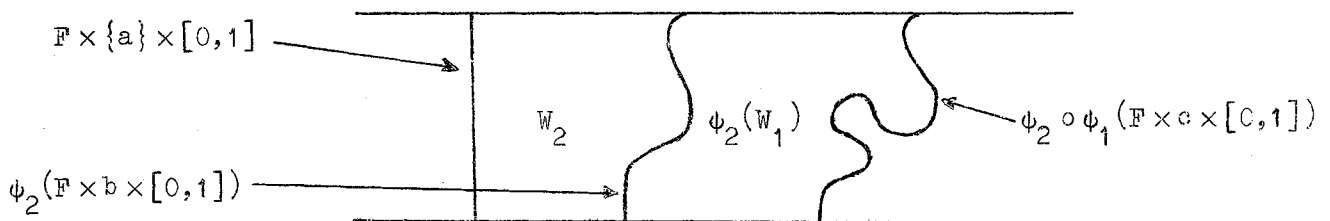


On vérifie immédiatement que W est h -cobordisme relatif qui, à difféomorphisme près, est indépendant de a et b satisfaisant à la condition ci-dessus, et qui ne dépend que de la classe d'isotopie de ϕ . On pose

$$\chi(\phi) = \tau(W, \mathbb{F} \times [a, b])$$

Propriétés :

(1) χ est un morphisme : Soient $\phi_1, \phi_2 \in \mathcal{G}(\mathbb{F} \times \mathbb{R})$



En appliquant la formule d'addition 2.2.3, on voit sur cette figure que $\chi(\phi_2 \circ \phi_1) = \chi(\phi_2) + \phi_{2*} \chi(\phi_1)$. Or $\phi_{2*} = \text{Id}$ car $\phi_2|_{\mathbb{F} \times \mathbb{R} \times \{0\}} = \text{Id}$.

(2) χ est un monomorphisme : Si $\chi(\phi) = 0$, d'après le théorème du s -cobordisme, quitte à modifier ϕ par isotopie, on peut supposer que $\phi|_{\mathbb{F} \times \{0\} \times [0,1]} = \text{Id}$. Par le procédé de linéarisation, on peut faire coïncider ϕ avec l'identité sur un voisinage tubulaire de $\mathbb{F} \times \{0\} \times [0,1]$,

contenant n'importe quel compact donné à l'avance. Dans la topologie C^∞ (droite), ceci prouve que ψ est isotope à l'identité.

(3) On a un morphisme naturel de relèvement

$$q : \pi_0(g(E)) \rightarrow \pi_0(g(F \times R)) \quad ;$$

$$\psi \mapsto \bar{\psi}$$

$\bar{\psi}$ commute avec la transformation $\sigma : \bar{\psi} = \sigma \bar{\psi} \sigma^{-1}$. Or on vérifie sur la définition que

$$\chi(\sigma \bar{\psi} \sigma^{-1}) = \sigma_* \chi(\bar{\psi}) = \theta_* \chi(\bar{\psi})$$

Donc $\chi(\bar{\psi}) = \theta_* \chi(\bar{\psi})$ ou encore $(\text{Id} - \theta_*) \circ \chi \circ q = 0$.

3.3 Proposition : La suite

$$\pi_0(g(E)) \xrightarrow{\chi \circ q} \text{Wh}_1(H) \xrightarrow{\text{Id} - \theta_*} \text{Wh}_1(H)$$

est exacte.

Corollaire : χ est un épimorphisme. (Il suffit d'appliquer la proposition au fibré trivial $F \times S^1$).

Démonstration : D'après les propriétés prouvées en 3.2, il reste à démontrer que, si $\tau \in \text{Wh}_1(H)$ avec $\theta_*(\tau) = \tau$, il existe alors $\bar{\psi} \in g(F \times R)$ tel que $\chi(\bar{\psi}) = \tau$ et $\bar{\psi} = \sigma \bar{\psi} \sigma^{-1}$, ce qui garantit que $\bar{\psi}$ est le relèvement d'un élément de $g(E)$.

D'après 1.6, il existe des h-cobordismes relatifs W de torsion τ sur $F \times [0, \frac{1}{2}]$ et W' de torsion $-\tau$ sur $F \times [\frac{1}{2}, 1]$. Pour $k \in \mathbb{Z}$, on note $W(\theta^k)$ un h-cobordisme relatif sur $F \times [k, k + \frac{1}{2}]$ tel que le difféomorphisme $\sigma^k : F \times [k, k + \frac{1}{2}] \rightarrow F \times [0, \frac{1}{2}]$ se prolonge en un difféomorphisme de $W(\theta^k)$ sur W . On définit de même $W'(\theta^k)$ sur $F \times [k + \frac{1}{2}, k + 1]$. On peut alors construire

le h-cobordisme infini

$$V = \text{---} W(\theta^0) \cup W'(\theta^0) \cup \text{---} \cup W(\theta^k) \cup W'(\theta^{k+1}) \cup \text{---}$$

où les recollements sont faits suivant les faces latérales communes. V est muni d'un difféomorphisme canonique Σ dont la restriction à $F \times \mathbb{R}$ est σ ; il a la propriété de rendre commutatif les diagrammes suivants

$$\begin{array}{ccc} W(\theta^k) & \xrightarrow{\Sigma^k} & W(\theta^0) \\ \uparrow & & \uparrow \\ F \times [k, k+\frac{1}{2}] & \xrightarrow{\sigma^k} & F \times [0, \frac{1}{2}] \end{array}$$

et

$$\begin{array}{ccc} W'(\theta^k) & \xrightarrow{\Sigma^k} & W'(\theta^0) \\ \uparrow & & \uparrow \\ F \times [k+\frac{1}{2}, k+1] & \xrightarrow{\sigma^k} & F \times [\frac{1}{2}, 1] \end{array}$$

Choisissons une trivialisation $h : W \cup W' \rightarrow [0, 1]$. Alors $h \circ \Sigma^k$ est une trivialisation de $W(\theta^k) \cup W'(\theta^k)$; on trivialise ainsi le cobordisme V . Il en suit un difféomorphisme (Σ, σ) -équivariant $\varphi_1 : V \rightarrow F \times \mathbb{R} \times [0, 1]$ tel que $\varphi_1(W(\theta^k) \cup W'(\theta^k)) = F \times [k, k+1] \times [0, 1]$.

Remarquons que si $\tau = \theta_* \tau$, le h-cobordisme relatif $W'(\theta^0) \cup W(\theta^1)$ est trivial (en général sa torsion est $-\tau + \theta_*^{-1}(\tau)$). Si $h' : W'(\theta^0) \cup W(\theta^1) \rightarrow [0, 1]$ est une trivialisation, on trivialise $W'(\theta^k) \cup W(\theta^{k+1})$ par $h' \circ \Sigma^k$. On construit ainsi un difféomorphisme (Σ, σ) -équivariant $\varphi_2 : V \rightarrow F \times \mathbb{R} \times [0, 1]$ tel que $\varphi_2(W'(\theta^k) \cup W(\theta^{k+1})) = F \times [k+\frac{1}{2}, k+\frac{3}{2}] \times [0, 1]$. Posons finalement $\bar{\varphi} = \varphi_1 \circ \varphi_2^{-1}$, qui est un difféomorphisme σ -équivariant. On observe que le h-cobordisme limité dans $F \times \mathbb{R} \times [0, 1]$ par $F \times \{0\} \times [0, 1]$ et par $\bar{\varphi}(F \times \{\frac{1}{2}\} \times [0, 1])$ est difféomorphe à $\varphi_1(W)$ par un difféomorphisme qui est l'identité sur $F \times [0, \frac{1}{2}] \times \{0\}$. Sa torsion est donc $\varphi_{1*} \tau = \tau$, car φ_1 est l'identité sur $F \times \mathbb{R} \times \{0\}$.

cqfd

$$3.4 \quad \chi' : \pi_0(\text{Diff}(F \times R)) \rightarrow \text{Wh}_1(H)$$

Supposons ici $n \geq 5$. Soit $\varphi \in \text{Diff}(F \times R)$. Comme en 3.2, on peut considérer la torsion du h -cobordisme (sans face latérale) W limité dans $F \times R$ par $F \times \{a\}$ et $\varphi(F \times \{b\})$ pour $a \ll b$. On pose $\chi'(\varphi) = \tau(W, F \times \{a\})$, qui est indépendant de a et b et ne dépend que de la classe d'isotopie de φ . χ' est un monomorphisme de groupe.

D'autre part on a un morphisme de restriction à $F \times R \times \{1\}$

$$\rho : \pi_0(F \times R) \rightarrow \pi_0(\text{Diff}(F \times R)).$$

Proposition : $\chi' \circ \rho(\psi) = \chi(\psi) + (-1)^n \overline{\chi(\psi)}$.

C'est une conséquence immédiate du corollaire 2.3.4.

Références

- [1] J. Cerf. La stratification naturelle des espaces de fonctions différentiables réelles et le théorème de la pseudo-isotopie. Publications mathématiques de l'IHES n° 39.
- [2] A. Chenciner et F. Laudenbach. Le Wh_2 et le théorème de la pseudo-isotopie dans le cas simplement connexe (première partie de "pseudo-isotopie et torsion").
- [3] B. Mazur. Stable equivalence of differentiable manifolds, Bull. Amer. Math. Soc. 67 (1961) p. 377-384.
- [4] J. Milnor. Whitehead torsion, Bull. AMS 72 (1966) p. 358-426.
- [5] G. de Rham, S. Maumary, M. Kervaire. Torsion et type simple d'homotopie Lect. Notes n° 48 (1967).
- [6] L. Siebenmann. Torsion invariants for pseudo-isotopies on closed manifolds, Notices AMS 14 (1967) p. 942.
- [7] " Le fibré tangent, cours d'Orsay (1966-67), notes reproduites par le centre de Math. de l'Ecole polytechnique.
- [8] J.H.C. Whitehead. On C^1 -complexes, Ann. of Math. 41 (1940) p. 809-824.