

PUBLICATIONS MATHÉMATIQUES D'ORSAY

SEMINAIRE  
D'ANALYSE HARMONIQUE  
ORSAY

Année 1968/1969

Mathématiques (425)  
(Service des Publications)  
Faculté des Sciences  
91-ORSAY (France)

PUBLICATIONS MATHÉMATIQUES D'ORSAY

SEMINAIRE  
D'ANALYSE HARMONIQUE  
ORSAY

Année 1968/1969

Mathématiques (425)  
(Service des Publications)  
Faculté des Sciences  
91-ORSAY (France)

## TABLE DES MATIERES

- Exposé n° 1. Y. Meyer.- Synthèse harmonique
2. Y. Meyer.- A propos de la formule de Poisson
3. J. Faraut.- Semi-groupes de mesures complexes
4. S. W. Drury.- On non-triangular sets in tensor algebras
5. N. Leblanc.- Calcul symbolique dans le centre d'une algèbre de groupe
6. J. D. Stegeman.- Méthodes combinatoires en analyse harmonique
7. D. L. Salinger.- Ensembles d'analyticité dans les algèbres tensorielles
8. J. Faraut.- Semi-groupes de mesures
9. H. Queffélec.- Dérivabilité de la fonction de Riemann en certains points

Synthèse harmonique

par Y. Meyer

Soit  $E$  un ensemble compact de nombres réels et  $S$  une distribution, à valeurs complexes, dont le support est contenu dans  $E$ . On dit que  $S$  est une pseudomesure si la transformée de Fourier  $\hat{S}$  de  $S$  est une fonction bornée. On pose alors  $\|S\|_{PM} = \|\hat{S}\|_{\infty}$  et l'on vérifie aussitôt que l'espace vectoriel de toutes les pseudomesures de support contenu dans  $E$  est un espace de Banach pour la norme  $\|S\|_{PM}$ . Cet espace sera noté  $PM(E)$ .

On peut, par transport de structure, définir l'algèbre de Banach  $A(\mathbb{R})$  de toutes les transformées de Fourier  $\hat{f}$  des éléments  $f$  de  $L^1(\mathbb{R})$ . Les éléments  $S$  de  $PM(E)$  définissent des formes linéaires continues sur  $A(\mathbb{R})$  par  $\langle S, \hat{f} \rangle = \langle \hat{S}, f \rangle = \int_{\mathbb{R}} \hat{S}(x) f(x) dx$ .

Nous nous intéressons à la construction d'une suite  $(\mathcal{L}_n)_{n > 0}$  d'endomorphismes continus de  $PM(E)$  tels que

- a) le support de  $\mathcal{L}_n(S)$  soit une partie finie de  $E$
- b) pour tout  $f \in L^1(\mathbb{R})$ , on ait

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \langle \mathcal{L}_n(S), \hat{f} \rangle = \langle S, \hat{f} \rangle.$$

C'est à dire : les  $\mathcal{L}_n$  approchent l'identité dans la topologie faible des endomorphismes de  $PM(E)$ .

A cet effet, nous démontrons un théorème analogue à la condition de Herz ([1] th. VI p. 124) où les progressions arithmétiques sont remplacées par les "modèles" définis au §1

### 1. Les modèles.

Soient

-  $K$  un compact de  $\mathbb{R}^{n-1}$

-  $a_1, \dots, a_n$   $n$  nombres réels, linéairement indépendants sur  $\mathbb{Z}$ .  $I$  la forme linéaire sur  $\mathbb{R}^n$  définie par  $I(x_1, \dots, x_n) = a_1 x_1 + \dots + a_n x_n$

-  $L_1, \dots, L_{n-1}$   $n-1$  autres formes linéaires sur  $\mathbb{R}^n$  formant avec  $I$  une base du dual de  $\mathbb{R}^n$ .

A ces données correspond un ensemble de nombres réels  $\Lambda$  que nous appellerons un modèle ;  $\Lambda$  est l'ensemble de tous les nombres réels s'écrivant  $a_1 k_1 + \dots + a_n k_n$  tels que les entiers relatifs  $k_1, \dots, k_n$  vérifient la condition :  $(L_1(k_1, \dots, k_n), \dots, L_{n-1}(k_1, \dots, k_n)) \in K$ .

### 2. Pas intérieur d'un modèle.

Les notations sont les mêmes que ci-dessus. Appelons pas d'un ensemble  $\Lambda$  de nombres réels la quantité  $\inf \{ |\lambda' - \lambda| ; \lambda \in \Lambda, \lambda' \in \Lambda, \lambda \neq \lambda' \}$ . Appelons, pour tout  $\varepsilon > 0$ ,  $K_\varepsilon$  l'ensemble des points de  $\mathbb{R}^{n-1}$  dont la distance à  $K$  ne dépasse pas  $\varepsilon$ . Soit  $\Lambda_\varepsilon$  le modèle défini comme le modèle  $\Lambda$  mais où  $K$  est remplacé par  $K_\varepsilon$ .

Posons  $2d = \sup_{\varepsilon > 0} (\text{pas de } \Lambda_\varepsilon)$

$2d$  est le pas intérieur du modèle  $\Lambda$  (il arrive souvent que  $2d$  soit égal au pas de  $\Lambda$ )

### 3. Condition pour qu'un ensemble soit de synthèse

Théorème. Soit  $E$  un ensemble compact de nombres réels. Supposons qu'un modèle  $\Lambda$ , un réel strictement positif  $\eta$  et une suite  $(s_n)_{n \geq 1}$  de nombres réels strictement positifs  $s_n$  tendant vers 0 soient tels que la distance entre  $(s_n \Lambda) \cap E$  et  $E$  ne dépasse pas  $(d - \eta)s_n$  où  $d$  est le pas intérieur de  $\Lambda$ . Alors  $E$  est un ensemble de synthèse.

4. Nous n'utilisons, dans la preuve du théorème, la définition des modèles que pour avoir le résultat suivant.

Proposition 1. A tout  $\varepsilon > 0$  on peut associer une mesure complexe, non bornée,  $\mu$  sur la droite telle que la transformée de Fourier (au sens des distributions)  $\hat{\mu}$  de  $\mu$  soit

$$(1) \quad \hat{\mu} = \sum_{\lambda \in \Lambda} \delta(x - \lambda) + \sum_{\lambda \in \Lambda_\varepsilon \setminus \Lambda} \alpha(\lambda) \delta(x - \lambda)$$

où  $0 \leq \alpha(\lambda) \leq 1$  et telle que l'on ait

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} \int_x^{x+1} d|\mu|(t) < +\infty.$$

Pour démontrer la proposition, nous étendons la fonction  $\alpha$  à tout  $\Lambda_\varepsilon$  en posant

$\alpha(\lambda) = 1$  pour tout  $\lambda$  de  $\Lambda$ .

Soit  $\varphi$  une fonction indéfiniment dérivable sur  $\mathbb{R}^{n-1}$ , égale à 1 sur  $K$ , 0 hors de  $K_\varepsilon$ . Nous poserons

$$(2) \quad \alpha(\lambda) = \varphi [L_1(k_1, \dots, k_n), \dots, L_{n-1}(k_1, \dots, k_n)] = \beta(k_1, \dots, k_n)$$

si  $\lambda = a_1 k_1 + \dots + a_n k_n$ ;  $k_j \in \mathbb{Z}$  ( $1 \leq j \leq n$ ).

Appelons  $\gamma$  la mesure discrète définie par le second membre de (1) lorsque  $\alpha$  est défini par (2). Calculons la transformée de Fourier  $\hat{\gamma}$  de  $\gamma$ . Soit  $f(x)$  une fonction indéfiniment dérivable d'une variable réelle à support compact.

On a

$$\int f(x) d\hat{\mu}(x) = \sum_{\mathbb{Z}^n} \beta(k_1, \dots, k_n) f(a_1 k_1 + \dots + a_n k_n).$$

La fonction  $\beta(x_1, \dots, x_n) f(a_1 x_1 + \dots + a_n x_n)$  est à décroissance rapide et a une transformée de Fourier de la forme

$$\gamma(L_1^*(x_1, \dots, x_n), \dots, L_{n-1}^*(x_1, \dots, x_n)) \hat{f}(L_n^*(x_1, \dots, x_n))$$

où, à un facteur près,  $\gamma = \hat{\varphi}$  et où l'endomorphisme  $L^*$  de  $\mathbb{R}^n$  est l'inverse de l'adjoint de  $L = (L_1, \dots, L_{n-1}, I)$ . La formule de Poisson donne alors

$$\int f(x) d\hat{\mu}(x) = \sum_{\mathbb{Z}^n} \gamma(L_1^*(k_1, \dots, k_n), \dots, L_{n-1}^*(k_1, \dots, k_n)) \hat{f}(L_n^*(k_1, \dots, k_n)) = \int \hat{f} d\mu(x)$$

où  $\mu$  est la mesure discrète donnant au point  $L_n^*(k_1, \dots, k_n)$  la masse

$\gamma(L_1^*(k_1, \dots, k_n), \dots, L_{n-1}^*(k_1, \dots, k_n))$ . Que  $\mu$  soit une mesure vient de l'indépendance des  $L_j^*$ ,  $1 \leq j \leq n$  et de la décroissance rapide de  $\gamma$ . On vérifie sans peine que

$$(3) \quad \sup_{x \in \mathbb{R}} \int_x^{x+1} d|\mu|(t) < +\infty.$$

5. Dès ce moment la preuve court d'elle même.

Soient  $\varepsilon$  et  $\eta'$  deux nombres réels positifs tels que, si  $d'$  est le pas de  $\Lambda_\varepsilon$ ,

on ait

$$(4) \quad \text{distance entre } (s_n \Lambda) \cap E \text{ et } E \leq (d' - \eta') s_n.$$

Soit  $g(x)$  une fonction paire indéfiniment dérivable d'une variable réelle égale à 1

sur  $[0, d' - \eta']$ , à 0 hors de  $[0, d' - \eta'/2]$ . On pose

$$(5) \quad \mu_n = s_n^{-1} \mu(s_n x)$$

$$(6) \quad g_n = g(x/s_n)$$

et l'on définit un endomorphisme  $\mathcal{L}_n$  de  $\mathcal{PM}(E)$  par la formule

$$(7) \quad \mathcal{L}_n(S) = (S * g_n) \hat{\mu}_n = \sum_{\lambda \in \Lambda_{s_n}} \delta(x - \lambda) \int_{\lambda - s_n(d' - \eta')}^{\lambda + s_n(d' - \eta')} dS(t).$$

On a  $\|\mathcal{L}_n(S)\|_{\mathcal{PM}} = \|\mu_n * (\hat{S} \cdot \hat{g}_n)\|_\infty \leq \|\hat{S}\|_\infty \|\mu_n\| * \|\hat{g}_n\|_\infty = \|\hat{S}\|_\infty \|\mu\| * \|\hat{g}\|_\infty \leq C \|\hat{S}\|_\infty$  où  $C < +\infty$  grâce à (3) et à la décroissance rapide de  $\hat{g}$ . Soit  $\|\mathcal{L}_n\| \leq C$ .

On vérifie sans peine que, grâce aux hypothèses du théorème,

$\lim_{n \rightarrow +\infty} s_n \text{Card}((s_n \Lambda) \cap E) = 0$  (en particulier  $E$  est de mesure nulle). Appelons  $\mathcal{A}_n$

la partie de  $\mathcal{A}(\mathbb{R})$  composée des éléments de  $\mathcal{A}(\mathbb{R})$  constants sur chaque intervalle

$[\lambda - s_n d', \lambda + s_n d']$  où  $\lambda \in (s_n \Lambda) \cap E$ . La réunion  $\mathcal{A}_\infty$  des  $\mathcal{A}_n$  est dense dans

$\mathcal{A}(\mathbb{R})$  et la convergence simple de la suite des  $\mathcal{L}_n(S)$  sur  $\mathcal{A}_\infty$  entraîne la convergence

simple sur tout  $\mathcal{A}(\mathbb{R})$  car la suite des normes des  $\mathcal{L}_n$  est bornée.

6. Application. Soit  $\theta$  un entier algébrique dont tous les conjugués (sauf  $\theta$  lui-même) appartiennent à  $]0, 1[$ . Supposons  $\theta > 2$ . Alors l'ensemble parfait à rapport de dissection  $\theta^{-1}$  est de synthèse.

Appelons en effet  $\sigma_j$ ,  $1 \leq j \leq n$  les  $n$   $\mathbb{Q}$ -isomorphismes distincts de  $\mathbb{Q}[\theta]$  dans  $\mathbb{C}$  où  $n$  est le degré de  $\theta$  et où  $\sigma_1 = \text{Id}$ .

Soit  $\Lambda$  l'ensemble des nombres réels de la forme  $\lambda = p_0 + p_1\theta + \dots + p_{n-1}\theta^{n-1}$ ,  $p_j \in \mathbb{Z}$ , tels que  $0 \leq \sigma_j(\lambda) \leq \frac{1}{1 - \sigma_j(\theta)}$  pour  $2 \leq j \leq n$ . Le pas intérieur du modèle  $\Lambda$  est  $\prod_2^n (1 - \sigma_j(\theta))$ . En effet, si  $\lambda$  et  $\lambda'$  appartiennent à  $\Lambda_\varepsilon$ , on a  $|\sigma_j(\lambda - \lambda')| \leq \frac{1}{1 - \sigma_j(\theta)} + 2\varepsilon$ .

Or le produit  $\prod_1^n \sigma_j(\lambda - \lambda')$  est un entier relatif non nul si  $\lambda \neq \lambda'$ . On a donc  $|\lambda - \lambda'| \geq \prod_2^n (1 - \sigma_j(\theta)) - O(\varepsilon)$  et le pas intérieur de  $\Lambda$  est  $\prod_2^n (1 - \sigma_j(\theta))$ .

Si  $\theta - 1$  n'est pas une unité, on a  $(\theta - 1) \prod_2^n (1 - \sigma_j(\theta)) \geq 2$ . L'intersection de  $\theta^{-n}\Lambda$  et de  $E$  se réduit aux points de  $E$  de la forme  $\sum_0^n \varepsilon_k \theta^{-k}$ ,  $\varepsilon_k \in \{0, 1\}$  et le théorème s'applique immédiatement.

Si  $\theta - 1$  est une unité, on a  $(\theta - 1) \prod_2^n (1 - \sigma_j(\theta)) = 1$ . L'intersection de  $\theta^{-n}\Lambda_\varepsilon$  et de  $E$  se compose des points  $\sum_0^n \varepsilon_k \theta^{-k}$  et, éventuellement, de certains points  $\sum_0^n \varepsilon_k \theta^{-k} + \theta^{-n}/\theta - 1$ , dès que  $\varepsilon$  est assez petit.

Soit  $g(x)$  une fonction paire égale à 1 sur  $[0, 1/\theta(\theta-1)]$  nulle hors de  $[-\theta^{-1}, \theta^{-1}]$  et indéfiniment dérivable. On forme

$$\mathcal{L}'_n(s) = \sum_{\lambda \in \Lambda} \delta(x - \theta^{-n}\lambda) \langle s, \varphi(\theta^n x - \lambda) \rangle + \sum_{\lambda \in \Lambda_\varepsilon \setminus \Lambda} \alpha(\lambda) \delta(x - \theta^{-n}\lambda) \langle s, \varphi(\theta^n x - \lambda) \rangle.$$

On vérifie comme dans la preuve de la proposition 1 que, pour une constante  $C$ , on a

$$\|\mathcal{L}'_n(S)\|_{\text{PM}} \leq C \|S\|_{\text{PM}}. \text{ Grâce au calcul du pas de } \Lambda_\varepsilon, \text{ on vérifie que si } S \in \text{PM}(E),$$

$\mathcal{L}'_n(S)$  charge les points de  $\theta^{-n}\Lambda$  et éventuellement certains points de  $\theta^{-n}\Lambda + \theta^{-n}/\theta - 1$

et que le second terme définissant  $\mathcal{L}'_n(S)$  est nul.

On définit alors  $\mathcal{L}''_n$  comme  $\mathcal{L}'_n$  à la seule différence que  $\Lambda_\varepsilon$  y est remplacé par  $\Lambda_\varepsilon + 1/\theta - 1$  et l'on pose

$$\mathcal{L}_n(S) = \mathcal{L}'_n(S) + \mathcal{L}''_n[S - \mathcal{L}'_n(S)], \quad S \in \text{PM}(E).$$

(Si  $\mathcal{L}'_n(S)$  charge déjà  $\sum_0^n \varepsilon_k \theta^{-k} + \theta^{-n}/\theta - 1$ , la masse de  $\mathcal{L}''_n[S - \mathcal{L}'_n(S)]$  en ce point est nulle).

La suite des  $\mathcal{L}_n(S)$  est l'approximation désirée de  $S \in \text{PM}(E)$ .

Exemples. Soit  $\theta$  la solution supérieure à 2 de  $X^3 - 6X^2 + 5X - 1 = 0$ . L'ensemble à rapport de dissection  $\theta^{-1}$  est de synthèse. L'ensemble à rapport de dissection  $2 + \sqrt{2}$  est de synthèse.<sup>(1)</sup>

[1] J.-P. Kahane et R. Salem. Ensembles parfaits et séries trigonométriques. Hermann (1962)

<sup>(1)</sup> En suivant cette méthode on peut démontrer que si  $\theta$  est un nombre de Pisot quadratique, l'ensemble à rapport de dissection  $\theta^{-1}$  est toujours de synthèse.

## A PROPOS DE LA FORMULE DE POISSON

par Yves Meyer

Une généralisation de la formule de Poisson donne de nouveaux résultats sur le problème de la répartition modulo 1 et sur celui de la synthèse harmonique.

1. La formule de Poisson dit que si  $\mathbb{Z}$  est l'ensemble des entiers relatifs et  $\zeta$

la mesure (non bornée)  $\sum_{-\infty}^{+\infty} \delta(x - n)$ , somme des masses 1 placées en chaque entier, alors la transformée de Fourier,  $\mathcal{F}\zeta$ , (au sens des distributions) de  $\zeta$  est  $\zeta$ . (La

transformée de Fourier de l'élément  $f$  de  $L^1(\mathbb{R})$  est  $\hat{f}$  définie par

$$\hat{f}(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-2\pi ixy) f(x) dx.$$

Nous donnerons des exemples d'ensembles  $\Lambda$  de nombres

réels possédant la propriété suivante : pour tout  $\varepsilon > 0$  on peut trouver une mesure, à

valeurs complexes,  $\mu_\varepsilon$ , telle que

$$a) \sup_{-\infty < x < +\infty} \int_x^{x+1} d|\mu_\varepsilon|(t) < +\infty$$

$$b) \mathcal{F}\mu_\varepsilon = \sum_{\lambda \in \Lambda} \delta(x - \lambda) + R_\varepsilon(x)$$

où  $\sum_{\lambda \in \Lambda} \delta(x - \lambda)$  est une mesure,  $R_\varepsilon(x)$  également et où

$$c) \overline{\lim}_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T d|R_\varepsilon|(x) \leq \varepsilon.$$

2. La condition c) signifie que le terme d'erreur est petit. Ne peut-on pas, tout simplement, le prendre nul ? Nous allons voir que l'on retombe alors sur la formule de

Poisson usuelle.

Supposons, en effet, qu'il existe une mesure, à valeurs complexes,  $\mu$  telle que

$$a) \quad \sup_{-\infty < x < +\infty} \int_x^{x+1} d|\mu|(t) < +\infty$$

$$b) \quad \mathcal{F}\mu = \sum_{\lambda \in \Lambda} \delta(x - \lambda).$$

La somme  $\sum_{\lambda \in \Lambda} \delta(x - \lambda)$  ne peut être une distribution que si elle est une mesure ; alors

$\Lambda$  est un ensemble fermé dont chaque élément est isolé. Soit  $\varphi(x)$  une fonction d'une variable réelle, à valeurs réelles, indéfiniment dérivable et à support compact et telle que  $\varphi(0) = 1$  ; soit  $\psi$  la fonction à décroissance rapide dont la transformée de Fourier est  $\varphi$ . Grâce à a), la suite des normes (ou variations totales) des mesures

$$d\mu_n(x) = n^{-1} \varphi(n^{-1}x) d\mu(x) \quad \text{est une suite bornée. D'autre part } \hat{\mu}_n(t) = \sum_{\lambda \in \Lambda} \varphi(nt - n\lambda).$$

Si  $t$  n'appartient pas à  $\Lambda$ ,  $\hat{\mu}_n(t) \rightarrow 0$  ( $n \rightarrow \infty$ ) car  $\Lambda$  est fermé. Si  $t$  appartient à  $\Lambda$ ,  $\hat{\mu}_n(t) \rightarrow 1$  ( $n \rightarrow +\infty$ ) car chaque point de  $\Lambda$  est isolé. Il existe

donc une mesure  $\gamma$  portée par le compactifié de Bohr de  $\mathbb{R}$  dont la transformée de Fourier vaut 1 sur  $\Lambda$  et 0 ailleurs ( $\gamma$  est la limite vague des  $\mu_n$ ). D'après une conséquence du théorème de Paul Cohen due à P. H. Rosenthal, ([3] th. 1.6 p. 22)  $\Lambda$  est à un ensemble fini près, la réunion de  $k$  parties de  $\mathbb{R}$  de la forme  $\alpha_j \mathbb{Z} + \beta_j$  ( $1 \leq j \leq k$ )

On retrouve donc la formule de Poisson habituelle.

3. Avant de donner des exemples, montrons que la donnée des mesures  $\mu_\varepsilon$  vérifiant

a), b), c) permet de résoudre le problème de la répartition modulo 1 des "suites  $x\Lambda$ ".

D'abord l'hypothèse que  $\sum_{\lambda \in \Lambda} \delta(x - \lambda)$  est une mesure entraîne que l'on peut ordonner  $\Lambda \cap [0, +\infty[$  en une suite croissante  $(\lambda_n)_{n \geq 1}$ . Une fois pour toutes, cette suite sera associée à  $\Lambda$ .

Théorème 1. Supposons les conditions a), b) et c) satisfaites et que, de plus

$\inf \lambda_{n+1} - \lambda_n > 0$ . Alors pour tout  $x$  réel,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n^{-1} [\exp(2\pi i \lambda_1 x) + \dots + \exp(2\pi i \lambda_n x)] = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mu_\varepsilon\{x\}.$$

( $\mu\{x\}$  désigne la masse au point  $x$  de la mesure  $\mu$ ).

La preuve du théorème 1 repose sur le fait que, si  $\nu$  est une mesure bornée, la moyenne de la fonction  $\hat{\nu}(t)\exp(2\pi itx)$  est égale à la masse de  $\nu$  en  $x$ . Nous ne pouvons appliquer cette remarque à  $\mu_\varepsilon$  mais soit  $\varphi(t)$  une fonction indéfiniment dérivable, à support compact, et telle que  $\hat{\varphi}(x)$  soit différent de zéro. Posons  $\nu(y) = \hat{\varphi}(-y)\mu_\varepsilon(y)$ . Grâce à la condition a) et à la décroissance rapide de  $\hat{\varphi}$ ,  $\nu$  est une mesure bornée.

Pour calculer la moyenne de  $\hat{\nu}$ , appelons  $\chi_n$  la fonction égale à  $\lambda_n^{-1}\exp(-2\pi itx)$  sur  $[0, \lambda_n]$ , à 0 ailleurs. On a  $\hat{\nu}(t) = \varphi * \mu_\varepsilon = \sum_{\lambda \in \Lambda} \varphi(x - \lambda) + R_\varepsilon * \varphi$ .

Mais  $\overline{\lim}_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T |R_\varepsilon * \varphi| dt \leq \varepsilon \|\varphi\|_1$  et donc  $\overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} |\langle R_\varepsilon * \varphi, \chi_n \rangle| \leq \varepsilon \|\varphi\|_1$

( $\langle f, g \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \overline{g(t)} dt$  chaque fois que cette intégrale a un sens).

Enfin  $\langle \sum_{\lambda \in \Lambda} \varphi(x - \lambda), \chi_n \rangle = M_n(x) \hat{\varphi}(-x) + o(1)$ , grâce à la condition que

$\inf(\lambda_{n+1} - \lambda_n) > 0$ . On a donc  $\overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} |M_n(x) - \mu_\varepsilon\{x\}| \leq \varepsilon \|\varphi\|_1 / \hat{\varphi}(x)$  ce qui entraîne

évidemment  $\lim_{n \rightarrow +\infty} M_n(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mu_\varepsilon\{x\}$ .

Corollaire. Supposons que  $\lambda_n = O(n)$ . Alors

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1} [\exp(2\pi i \lambda_1 x) + \dots + \exp(2\pi i \lambda_n x)] = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mu_{\varepsilon} \{x\} / \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mu_{\varepsilon} \{0\}.$$

#### 4. Les modèles.

Soient

-  $n$  un entier supérieur ou égal à 2

-  $K$  un compact de  $\mathbb{R}^{n-1}$

-  $a_1, \dots, a_n$   $n$  nombres réels, linéairement indépendants sur  $\mathbb{Z}$

-  $I$  la forme linéaire sur  $\mathbb{R}^n$  définie par

$$I(x_1, \dots, x_n) = a_1 x_1 + \dots + a_n x_n$$

-  $L_1, \dots, L_{n-1}$ ,  $n-1$  autres formes linéaires sur  $\mathbb{R}^n$  formant avec  $I$  une base

du dual de  $\mathbb{R}^n$ .

A ces données correspond un ensemble de nombres réels,  $\Lambda$ , que nous appellerons un modèle;  $\Lambda$  est l'ensemble de tous les nombres réels  $a_1 k_1 + \dots + a_n k_n$  où  $k_1, \dots, k_n$  sont des entiers relatifs tels que le point de  $\mathbb{R}^{n-1}$  de coordonnées  $L_1(k_1, \dots, k_n), \dots, L_{n-1}(k_1, \dots, k_n)$  appartienne à  $K$ .

#### Pas intérieur d'un modèle.

Les notations sont les mêmes que ci-dessus. Appelons pas d'un ensemble  $\Lambda$  de nombres réels la quantité  $\inf \{ |\lambda' - \lambda| ; \lambda \in \Lambda, \lambda' \in \Lambda, \lambda \neq \lambda' \}$ . Appelons, pour tout  $\varepsilon > 0$ ,  $K_\varepsilon$  l'ensemble des points de  $\mathbb{R}^{n-1}$  dont la distance à  $K$  ne dépasse pas  $\varepsilon$ .

Soit  $\lambda_\varepsilon$  le modèle défini comme le modèle  $\lambda$  mais où  $K$  est remplacé par  $K_\varepsilon$ .

Posons  $2d = \sup_{\varepsilon > 0} (\text{pas de } \lambda_\varepsilon)$

$2d$  est le pas intérieur du modèle  $\lambda$  (il arrive souvent que  $2d$  doit être égal au pas de  $\lambda$ ).

Proposition. Le pas (et donc le pas intérieur) d'un modèle sont strictement positifs.

En effet, soit  $\lambda \in \Lambda$ ,  $\lambda' \in \Lambda$ ,  $\lambda \neq \lambda'$ ,  $\mu = \lambda - \lambda'$ . On veut montrer que  $\mu$  ne peut être arbitrairement voisin de 0. On peut donc se restreindre à  $|\mu| \leq 1$ ; on a  $\mu = I(k_1, \dots, k_n)$  où  $k_j \in \mathbb{Z}$  pour  $1 \leq j \leq n$ . Quand  $|\mu| \leq 1$ , le point  $(k_1, \dots, k_n)$  de  $\mathbb{Z}^n$  vérifie  $|I(k_1, \dots, k_n)| \leq 1$ ; on a, d'autre part, si  $D$  est le diamètre de  $K$ ,  $|L_j(k_1, \dots, k_n)| \leq D$  ( $1 \leq j \leq n-1$ ). Ces  $n$  inégalités ne peuvent être satisfaites que par un nombre fini de points de  $\mathbb{Z}^n$  et donc il n'y a qu'un nombre fini de différences  $\lambda - \lambda'$  telles que  $|\lambda - \lambda'| \leq 1$ .

### Mesures associées à un ensemble

Théorème 2. Soit  $K$  un compact de  $\mathbb{R}^{n-1}$  dont la frontière est de mesure de Lebesgue nulle ;  $\lambda$  et  $\lambda_\varepsilon$  sont définis à l'aide de  $K$  et  $K_\varepsilon$  comme ci-dessus. A tout  $\varepsilon > 0$  on peut associer une mesure complexe  $\mu_\varepsilon$  telle que

$$1) \sup_{-\infty < x < +\infty} \int_x^{x+1} d|\mu_\varepsilon|(t) < +\infty$$

$$2) \mathcal{F} \mu_\varepsilon = \sum_{\lambda \in \Lambda} \delta(x - \lambda) + R_\varepsilon(x)$$

$$3) R_\varepsilon(x) = \sum_{\lambda \in \Lambda_\varepsilon \setminus \Lambda} \alpha(\lambda) \delta(x - \lambda) \text{ et } 0 \leq \alpha(\lambda) \leq 1$$

$$4) \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T d|R_\varepsilon(x)| \rightarrow 0 \quad (\varepsilon \rightarrow 0).$$

Cela signifie que la transformée de Fourier de  $\mu_\varepsilon$  est la somme des masses unités placées en chaque point de  $\Lambda$  et d'un terme d'erreur. Ce terme d'erreur est formé de masses comprises entre 0 et 1 et placées sur  $\Lambda_\varepsilon \setminus \Lambda$ . En moyenne, les masses du terme d'erreur peuvent être rendues arbitrairement petites.

Passons à la démonstration. Nous allons d'abord définir la fonction  $\alpha$  que l'on va étendre à tout  $\Lambda_\varepsilon$  en posant  $\alpha(\lambda) = 1$  si  $\lambda \in \Lambda$ . Soit  $\varphi$  une fonction indéfiniment dérivable sur  $\mathbb{R}^{n-1}$ , égale à 1 sur  $K$ , à 0 hors de  $K_\varepsilon$ . Soit

$$\alpha(\lambda) = \varphi[L_1(k_1, \dots, k_n), \dots, L_{n-1}(k_1, \dots, k_n)]$$

si  $\lambda = a_1 k_1 + \dots + a_n k_n$ ;  $k_j \in \mathbb{Z}$  ( $1 \leq j \leq n$ ).

Soit enfin  $\beta$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}^n$  par

$$\beta(x_1, \dots, x_n) = \varphi[L_1(x_1, \dots, x_n), \dots, L_{n-1}(x_1, \dots, x_n)].$$

Posons  $\gamma = \sum_{\lambda \in \Lambda_\varepsilon} \alpha(\lambda) \delta(x - \lambda)$  et calculons  $\mathcal{F}\gamma$ ! Soit  $f(x)$  une fonction indéfiniment dérivable d'une variable réelle, à support compact (une fonction test). On a

$$\int f(x) d\gamma(x) = \sum_{\mathbb{Z}^n} \beta(k_1, \dots, k_n) f(a_1 k_1 + \dots + a_n k_n).$$

La fonction  $\beta(x_1, \dots, x_n) f(a_1 x_1 + \dots + a_n x_n)$  est à décroissance rapide et a pour

transformée de Fourier la fonction à décroissance rapide  $\rho(x_1, \dots, x_n) =$

$(\det L)^{-1} \hat{\varphi}(L_1^*, L_2^*, \dots, L_{n-1}^*) \hat{f}(L_n^*)$  où  $L = (L_1, \dots, L_{n-1}, I)$  et où l'endomorphisme

de  $L^*$  de  $\mathbb{R}^n$ , défini par  $L^*(x_1, \dots, x_n) = (L_1^*(x_1, \dots, x_n), \dots, L_n^*(x_1, \dots, x_n))$ ,

est l'inverse de l'adjoint de  $L$ .

La formule de Poisson relative à  $\mathbb{Z}^n$  donne alors

$$\int_{\mathbb{R}} f(x) d\gamma(x) = \sum_{\mathbb{Z}^n} \rho(k_1, \dots, k_n) = \int_{\mathbb{R}} \hat{f} d\mu$$

où  $\mu$  est la mesure discrète donnant au point  $L_n^*(k_1, \dots, k_n)$  la masse

$(\det L)^{-1} |\hat{\phi}|(L_1^*, \dots, L_{n-1}^*)(k_1, \dots, k_n)$ . On a  $\int_x^{x+1} d|\mu(t)| = (\det L)^{-1} \sum |\hat{\phi}|(L_1^*, \dots, L_{n-1}^*)$

où la somme est étendue à tous les éléments  $X$  de  $\mathbb{Z}^n$  tels que  $L_n^*(X)$  appartienne à

$[x, x+1]$ . Soit  $\theta$  la fonction caractéristique de  $[0, 1]$ . Alors  $\int_x^{x+1} d|\mu(t)| =$

$(\det L)^{-1} \sum |\hat{\phi}|(L_1^*, \dots, L_{n-1}^*) \theta(L_n^* - x)$ . Puisque les formes  $L_1^*, \dots, L_n^*$  forment

une base du dual de  $\mathbb{R}^n$ , il y a un  $\xi$  dans  $\mathbb{R}^n$  tel que  $L_1^*(\xi) = \dots = L_{n-1}^*(\xi) = 0,$

$L_n^*(\xi) = x$ . Appelons  $\omega$  la fonction, définie sur  $\mathbb{R}^n$  par  $\omega = (\det L)^{-1} |\hat{\phi}|(L_1^*, \dots,$

$\dots, L_{n-1}^*) \theta(L_n^*)$ . Avec cette notation,  $\int_x^{x+1} d|\mu(t)| = \sum_{X \in \mathbb{Z}^n} \omega(X - \xi)$ . La décroissance

rapide de  $\omega$  entraîne  $\sup_{\xi \in \mathbb{R}^n} \sum_{X \in \mathbb{Z}^n} \omega(X - \xi) < +\infty$  et donc  $\sup_{x \in \mathbb{R}} \int_x^{x+1} d|\mu(t)| < +\infty$ .

Soit à prouver 4). Nous avons besoin de l'étape suivante : soit  $U$  un compact de

$\mathbb{R}^{n-1}$ ,  $\Lambda_U$  le modèle associé à  $U$  et  $L$ . Ordonnons  $\Lambda_U \cap [0, +\infty]$  en une suite

croissante  $(\lambda_n)_{n \geq 1}$  et posons  $\overline{\text{dens}} \Lambda_U = \overline{\lim} \frac{n}{\lambda_n}$ .

Lemme. On a  $\overline{\text{dens}} \Lambda_U \leq (\det L)^{-1} \text{mes } U$ .

En effet, soit  $\phi(x)$  une fonction positive d'intégrale égale à 1, indéfiniment

dérivable, à support compact. Alors, parce que  $R_\varepsilon$  est une mesure positive,

$\overline{\text{dens}} \Lambda_U \leq \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T (\hat{\mu}_\varepsilon * \phi) dx = \mu_\varepsilon\{0\}$ . La dernière égalité est due à un théorème

de Wiener appliqué à la mesure bornée  $\hat{\phi}(-x) d\mu_\varepsilon(x)$ .

En passant à la limite quand  $\varepsilon$  tend vers 0, on obtient le lemme.

Soit alors  $U = \overline{K_\varepsilon} \setminus K$ . On a  $\overline{\text{dens}}(\Lambda_\varepsilon \setminus \Lambda) \leq (\det L)^{-1} \text{mes}(\overline{K_\varepsilon} \setminus K)$  et la mesure de la frontière de  $K$  étant nulle, on a  $\lim \overline{\text{dens}}(\Lambda_\varepsilon \setminus \Lambda) = 0$ . Puisque les masses de  $R_\varepsilon$  sont comprises entre 0 et 1 et portées par  $\Lambda_\varepsilon \setminus \Lambda$ , 4) en résulte.

### 5. Application au problème de la répartition modulo 1

Soit  $\Lambda$  un modèle défini par un compact  $K$  de  $\mathbb{R}^{n-1}$  et un endomorphisme linéaire inversible  $L$  de  $\mathbb{R}^n$  où  $L = (L_1, \dots, L_{n-1}, I)$ . Rappelons que  $I(x_1, \dots, x_n) = a_1 x_1 + \dots + a_n x_n$ , les  $a_j$ ,  $1 \leq j \leq n$  étant indépendants sur  $\mathbb{Z}$ . Ordonnons  $\Lambda \cap [0, +\infty[$  en une suite croissante  $(\lambda_n)_{n \geq 1}$  et par abus de langage, appelons  $K$  la fonction caractéristique du compact  $K$  et  $\hat{K}$  sa transformée de Fourier. Enfin l'endomorphisme  $L^* = (L_1^*, \dots, L_n^*)$  de  $\mathbb{R}^n$  est l'adjoint de l'inverse de  $L$ .

Proposition 1. Si le nombre réel  $x$  peut être écrit  $L_n^*(k_1, \dots, k_n)$  où  $k_j \in \mathbb{Z}$ ,  $1 \leq j \leq n$ , alors

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n^{-1} [\exp(2\pi i \lambda_1 x) + \dots + \exp(2\pi i \lambda_n x)] = \frac{\hat{K}(L_1^*(k_1, \dots, k_n), \dots, L_{n-1}^*(k_1, \dots, k_n))}{\text{mes } K}$$

Sinon  $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^{-1} [\exp(2\pi i \lambda_1 x) + \dots + \exp(2\pi i \lambda_n x)] = 0$ .

C'est là une conséquence immédiate des théorèmes 1 et 2.

En particulier appelons, pour tout nombre réel  $x$ ,  $\|x\|$  le reste modulo 1 de  $x$  situé dans l'intervalle  $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[$ .

Proposition 2. Soit  $k$  un entier supérieur ou égal à 1. Soient  $\theta_1, \dots, \theta_k$  k

nombre irrationnels et  $\eta_1, \dots, \eta_k$  k nombre réels non nuls tels que les  $k+1$  nombre réels  $1 + \eta_1 \theta_1 + \dots + \eta_k \theta_k, \eta_1, \dots, \eta_k$ , soient linéairement indépendants sur  $\mathbb{Z}$ .  
Soit  $\lambda_n = n + \eta_1 \|n\theta_1\| + \dots + \eta_k \|n\theta_k\|$ . Alors si  $x = p_1 \theta_1 + \dots + p_k \theta_k + q$ ,  $p_1, \dots, p_k$  et  $q$  étant des entiers relatifs,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1} [\exp(2\pi i \lambda_1 x) + \dots + \exp(2\pi i \lambda_n x)] = \frac{\sin \pi (\eta_1 x + p_1)}{\pi (\eta_1 x + p_1)} \dots \frac{\sin \pi (\eta_k x + p_k)}{\pi (\eta_k x + p_k)}. \text{ Si au contraire, } x \text{ n'est pas de cette forme, } \lim_{n \rightarrow +\infty} n^{-1} [\exp(2\pi i \lambda_1 x) + \dots + \exp(2\pi i \lambda_n x)] = 0.$$

Cette proposition est une conséquence immédiate de la précédente car en dérivant chaque  $\|n\theta_j\|$  sous la forme  $n\theta_j - m_j$  à la condition que  $|n\theta_j - m_j| < 1/2$  (il n'y a pas d'ambiguïté car  $\theta_j$  est irrationnel), on voit que l'ensemble des  $\lambda_n$  est l'ensemble des éléments positifs d'un modèle.

Proposition 3. Soit  $(\theta_k)_{k \geq 1}$  une suite de nombre irrationnels et  $(\eta_k)_{k \geq 1}$  une suite de nombre réels non nuls telle que  $\sum_1^\infty |\eta_k| < +\infty$ . Supposons que, pour toute valeur de l'entier  $k$ , les  $k+1$  nombre réels  $1 + \eta_1 \theta_1 + \dots + \eta_k \theta_k, \eta_1, \dots, \eta_k$  soient linéairement indépendants sur  $\mathbb{Z}$ . Posons  $\lambda_n = n + \sum_1^\infty \eta_k \|n \theta_k\|$ .

a) Si  $x = q + p_1 \theta_1 + \dots + p_k \theta_k$ ,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^{-1} [\exp(2\pi i \lambda_1 x) + \dots + \exp(2\pi i \lambda_n x)] = \prod_{1 \leq j \leq k} \frac{\sin \pi (\eta_j x + p_j)}{\pi (\eta_j x + p_j)} \prod_{k+1}^\infty \frac{\sin \pi \eta_j x}{\pi \eta_j x}$  (nous excluons le cas évident où  $x = 0$ .)

b) Si pour aucune valeur de l'entier  $k$ ,  $x$  ne s'écrit  $q + p_1 \theta_1 + \dots + p_k \theta_k$  ( $p_1, \dots, p_k$  et  $q$  entiers relatifs), alors  $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^{-1} [\exp(2\pi i \lambda_1 x) + \dots + \exp(2\pi i \lambda_n x)] = 0$ .

Appelons, en effet  $\prod(x)$  le produit infini qui figure au second membre de a)

et, pour tout entier  $m$ , appelons  $\prod_m(x)$  le produit des  $m$  premiers termes de  $\prod(x)$ .

Pour tout  $\varepsilon > 0$ , il y a un entier  $m$  tel que  $|\prod(x) - \prod_m(x)| \leq \varepsilon/3$  et que  $\sum_{k=1}^{\infty} |\eta_k| \leq \varepsilon/6\pi|x|$ . Posons  $\lambda_{n,m} = n + \sum_1^m \eta_k \|n \theta_k\|$ . On a alors  $|n^{-1} [\exp(2\pi i \lambda_1 x) + \dots + \exp(2\pi i \lambda_n x)] - n^{-1} [\exp(2\pi i \lambda_{1,m} x) + \dots + \exp(2\pi i \lambda_{n,m} x)]| \leq \varepsilon/3$ ;  $m$  étant ainsi fixé, il existe un entier  $N$  tel que, si  $n \geq N$ , on ait  $|n^{-1} [\exp(2\pi i \lambda_{1,m} x) + \dots + \exp(2\pi i \lambda_{n,m} x)] - \prod_m(x)| \leq \varepsilon/3$ . Mais  $|\prod(x) - \prod_m(x)| \leq \varepsilon/3$ . Ainsi, pour  $n \geq N$ ,  $|n^{-1} [\exp(2\pi i \lambda_1 x) + \dots + \exp(2\pi i \lambda_n x)] - \prod(x)| \leq \varepsilon$ .

La seconde partie de la proposition 3 se prouve de façon analogue.

Théorème 3. Pour tout  $\varepsilon > 0$  il existe une suite  $(\lambda_n)_{n \geq 1}$  de nombres réels telle que  $|\lambda_n - n| \leq \varepsilon$  et que  $(x \lambda_n)_{n \geq 1}$  soit équirépartie modulo 1 si et seulement si le nombre réel  $x$  est transcendant.

Soit en effet  $\mathcal{A}$  l'espace vectoriel sur  $\mathbb{Q}$  formé des nombres algébriques. Soit  $1, \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k, \dots$  une base de  $\mathcal{A}$  sur  $\mathbb{Q}$ . Les  $\theta_k$  sont donc irrationnels. Soit  $\eta$  un nombre transcendant appartenant à l'intervalle  $]0, \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}[$ . Posons  $\lambda_n = n + \sum_1^{\infty} \eta^k \|n \theta_k\|$ . Les hypothèses de la proposition 3 sont satisfaites et le théorème 3 résulte du critère de Weyl.

## 6. Application au problème de la synthèse harmonique

Soit  $E$  un ensemble compact de nombres réels et  $S$  une distribution, à valeurs

complexes, dont le support est contenu dans  $E$ . On dit que  $S$  est une pseudomesure si la transformée de Fourier  $\hat{S}$  de  $S$  est une fonction bornée. On pose alors  $\|S\|_{PM} = \|\hat{S}\|_{\infty}$  et l'on vérifie aussitôt que l'espace vectoriel de toutes les pseudomesures de support contenu dans  $E$  est un espace de Banach pour la norme  $\|S\|_{PM}$ . Cet espace sera noté  $PM(E)$ .

On peut, par transport de structure, définir l'algèbre de Banach  $\Lambda(R)$  de toutes les transformées de Fourier  $\hat{f}$  des éléments  $f$  de  $L^1(R)$ . Les éléments de  $S$  de  $PM(E)$  définissent des formes linéaires continues sur  $\Lambda(R)$  par  $\langle S, \hat{f} \rangle = \langle \hat{S}, f \rangle = \int_R \hat{S}(x) f(x) dx$ .

Nous nous intéressons à la construction d'une suite  $(\mathcal{L}_n)_{n \geq 0}$  d'endomorphismes continus de  $PM(E)$  tels que

- a) le support de  $\mathcal{L}_n(S)$  soit une partie finie de  $E$
- b) pour tout  $f \in L^1(R)$ , on ait

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \langle \mathcal{L}_n(S), \hat{f} \rangle = \langle S, \hat{f} \rangle.$$

C'est-à-dire : les  $\mathcal{L}_n$  approchent l'identité dans la topologie faible des endomorphismes de  $PM(E)$ .

L'existence d'une telle suite entraîne évidemment que  $E$  est un ensemble de synthèse harmonique.

A cet effet, nous démontrons un théorème analogue à la condition de Herz ([1], th. VII p. 124) où les progressions arithmétiques sont remplacées par les "modèles" définis au § 4.

Théorème 4. Soit E un ensemble compact de nombres réels. Supposons qu'un scalaire  
 $\lambda$ , un nombre réel strictement positif  $\eta$  et deux suites  $s_n$  et  $t_n$  de nombres réels  
strictement positifs tendant vers 0 soient tels que la distance entre  $(s_n \lambda) \cap E + t_n$   
et E ne dépasse pas  $(d - \eta)s_n$  où  $2d$  est le pas intérieur de  $\lambda$ . Alors E est un  
ensemble de synthèse.

Soient, en effet,  $\varepsilon$  et  $\eta'$  deux nombres réels positifs tels que, si  $2d'$  est le pas de  $\lambda_\varepsilon$ , la distance entre  $(s_n \lambda) \cap E + t_n$  et E ne dépasse pas  $(d' - \eta')s_n$ . Alors les points de  $s_n \lambda_\varepsilon + t_n$  n'appartenant pas à  $(s_n \lambda) \cap E + t_n$  sont centres d'intervalles de longueur  $2(d' + \eta')s_n$  ne rencontrant pas E. Soit  $g(x)$  une fonction paire, indéfiniment dérivable, d'une variable réelle, égale à 1 sur  $[0, d' - \eta'/\varepsilon]$  à 0 hors de  $[-d', d']$ . Soit  $\mu = \mu_\varepsilon$  la mesure canoniquement associée, par le théorème 2, au modèle  $\lambda$ . On pose

$$\mu_n = s_n^{-1} \mu(s_n x)$$

$$g_n = g\left(\frac{x - t_n}{s_n}\right)$$

et l'on définit un endomorphisme  $\mathcal{L}_n$  de  $\mathcal{PM}(E)$  par la formule

$$\mathcal{L}_n(S) = (S * g_n) \hat{\mu}_n = \sum_{\lambda \in \lambda_{s_n}} \delta(x - \lambda) \int_{\lambda - s_n(d' - \frac{\eta'}{2}) + t_n}^{\lambda + s_n(d' - \frac{\eta'}{2}) + t_n} dS(t).$$

On a  $\|\mathcal{L}_n(S)\|_{\mathcal{PM}} = \|\mu_n * (\hat{S} \cdot \hat{g}_n)\|_\infty \leq \|\hat{S}\|_\infty \|\mu_n\| * \|\hat{g}_n\|_\infty = \|\hat{S}\|_\infty \|\mu\| * \|\hat{g}\|_\infty \leq C \|\hat{S}\|_\infty$  où  $C < +\infty$  grâce à la condition 1) du théorème 2 et à la décroissance rapide de  $\hat{g}$ . Soit

$$\|\mathcal{L}_n\| \leq C.$$

On vérifie sans peine que, grâce aux hypothèses du théorème 4,

$\lim_{n \rightarrow +\infty} s_n \text{Card}((s_n \Lambda) \cap E) = 0$  (en particulier  $E$  est de mesure nulle). Appelons  $\mathcal{C}_n$

la partie de  $A(\mathbb{R})$  composée des éléments de  $A(\mathbb{R})$  constants sur chaque intervalle

$[\lambda - s_n d', \lambda + s_n d']$  où  $\lambda \in (s_n \Lambda) \cap E$ . La réunion  $\mathcal{C}_\infty$  des  $\mathcal{C}_n$  est dense dans

$A(\mathbb{R})$  (voir p. ex. [2], 1.3, p. 256) et la convergence simple de la suite des  $\mathcal{C}_n(\mathcal{C})$

sur  $\mathcal{C}_\infty$  entraîne la convergence simple sur tout  $A(\mathbb{R})$  car la suite des normes des

$\mathcal{C}_n$  est bornée.

7. Application. Soit  $\theta$  un entier algébrique, soit  $P(X) = a_0 + a_1 X + \dots + a_{n-1} X^{n-1} + X^n$  le polynôme irréductible de  $\mathbb{Z}[X]$  tel que  $P(\theta) = 0$ .

Supposons que les conjugués de  $\theta$  (sauf  $\theta$  lui-même) appartiennent à  $]0, 1[$  et que  $P(1)$  ne soit ni  $-1$ , ni  $1$ .

Alors l'ensemble parfait à rapport de dissection  $\theta^{-1}$  est de synthèse.

Appelons, en effet,  $\sigma_j$ ,  $1 \leq j \leq n$  les  $n$   $\mathbb{Q}$ -isomorphismes distincts de  $\mathbb{Q}[\theta]$  dans  $\mathbb{C}$ ;  $\sigma_1$  est l'application identique de  $\mathbb{Q}[\theta]$  dans  $\mathbb{C}$ .

Soit  $\Lambda$  l'ensemble des nombres réels de la forme  $\lambda = p_0 + p_1 \theta + \dots + p_{n-1} \theta^{n-1}$  tels que  $p_k \in \mathbb{Z}$ ,  $0 \leq k \leq n-1$ , et que  $0 \leq \sigma_j(\lambda) \leq \frac{1}{1 - \sigma_j(\theta)}$  pour  $2 \leq j \leq n$ ; toute somme finie  $\sum_{k \geq 0} \varepsilon_k \theta^k$  où  $\varepsilon_k \in \{0, 1\}$  appartient à  $\Lambda$ . Soit  $\Lambda_\varepsilon$  l'ensemble des  $\lambda = p_0 + p_1 \theta + \dots + p_{n-1} \theta^{n-1}$  tels que  $-\varepsilon \leq \sigma_j(\lambda) \leq \frac{1}{1 - \sigma_j(\theta)} + \varepsilon$  pour  $2 \leq j \leq n$ .

Lemme 1. Le pas intérieur du module  $\Lambda$  est supérieur ou égal à  $\frac{n}{2} (1 - \sigma_j(\theta))$ .

En effet, si  $\lambda$  et  $\lambda'$  appartiennent à  $\Lambda$ , on a  $|\sigma_j(\lambda - \lambda')| \leq \frac{1}{1 - \sigma_j(\theta)} + 2\varepsilon$ .

Or le produit  $\prod_1^n \sigma_j(\lambda - \lambda')$  est un entier relatif non nul si  $\lambda \neq \lambda'$ . On a donc  $|\lambda - \lambda'| \geq \frac{1}{\prod_2^n (1 - \sigma_j(\theta))} - O(\varepsilon)$  et le pas intérieur de  $\Lambda$  est supérieur ou égal à  $\frac{1}{\prod_2^n (1 - \sigma_j(\theta))}$ .

Soit  $E$  l'ensemble de toutes les sommes  $\sum_{k \geq 0} \varepsilon_k \theta^{-k}$  associées à toutes les suites  $(\varepsilon_k)_{k \geq 0}$  de 0 ou de 1. Appelons  $E_n$  l'ensemble des sommes  $\sum_0^n \varepsilon_k \theta^{-k}$  correspondantes. Alors  $E_n \subset E \subset E_n + [0, \theta^{-n}/\theta - 1]$ .

Lemme 2. On a  $E_n = E \cap \theta^{-n} \Lambda$ .

En effet  $|P(1)| = (\theta - 1)(1 - \sigma_2(\theta)) \dots (1 - \sigma_n(\theta))$  est un entier supérieur ou égal à 2. Le pas intérieur comme le pas de  $\Lambda$  dépassent  $2/\theta - 1$ . Chaque élément de  $E_n$  appartient à  $\theta^{-n} \Lambda$  et le pas de  $\theta^{-n} \Lambda$  est "grand",  $E$  est "proche" de  $E_n$  si bien que les autres points de  $\theta^{-n} \Lambda$  ne peuvent appartenir à  $E$ .

Le théorème 4 s'applique avec  $s_n = \theta^{-n}$ ,  $t_n = \theta^{-n}/2(\theta - 1)$ ,  $d \geq \theta^{-n}/\theta - 1$  puisque la distance entre  $\theta^{-n} \Lambda \cap E + t_n = E_n + \theta^{-n}/2(\theta - 1)$  et  $E$  ne dépasse pas  $\theta^{-n}/2(\theta - 1)$ .

Exemples. L'ensemble à rapport de dissection  $3 - 2\sqrt{2}$  est de synthèse. Soit  $\theta$  la solution supérieure à 1 de l'équation  $X^3 - 8X^2 + 6X - 1 = 0$ . L'ensemble à rapport de dissection  $\theta^{-1}$  est de synthèse.

- [1] J.-P. Kahane. - Ensembles parfaits et séries trigonométriques. Hermann (1953)
- [2] Y. Katznelson et W. Rudin. - The Stone-Weierstrass property in Banach algebras. Pacific J. Math. 11 (1961), 253-265
- [3] P. H. Rosenthal. - Projections onto translation-invariant subspaces of  $L^p(G)$ . Memoirs of the A. M. S. n° 63 (1966).

Semi-groupes de mesures complexes

par J. Faraut

Introduction

Soit  $G$  un groupe abélien localement compact. Soit  $\{\mu_t\}_{t \geq 0}$  un semi-groupe de mesures sur  $G$ , c'est-à-dire une famille de mesures complexes sur  $G$  vérifiant

$$\|\mu_t\| \leq 1$$

$$\mu_0 = \delta, \quad \forall t, s \geq 0, \quad \mu_t * \mu_s = \mu_{t+s}$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} \mu_t = \delta \quad (\text{B-convergence})$$

(des mesures  $\mu_i$  B-convergent vers une mesure  $\mu$  si pour toute fonction  $f$  continue

bornée,  $\int f d\mu_i$  converge vers  $\int f d\mu$ ).

Alors il existe une fonction  $\psi$  continue sur le groupe dual  $\Gamma$  du groupe  $G$  telle que pour tout  $t$  positif la transformée de Fourier de la mesure  $\mu_t$  soit égale à la fonction  $e^{-t\psi}$ . L'objet de l'exposé est de donner une caractérisation des fonctions  $\psi$  telles que  $e^{-t\psi}$  soit la transformée de Fourier d'un tel semi-groupe de mesures.

Semi-produit intérieur et opérateurs dissipatifs

G. Lumer et R. S. Phillips ont caractérisés les générateurs infinitésimaux de semi-groupes fortement continus de contractions d'un espace de Banach  $E$  à l'aide de semi-produits intérieurs [1].

Un semi-produit intérieur sur  $E$  est une application de  $E \times E$  dans  $\mathbb{C}$ ,

$(x, y) \rightarrow [x, y]$ , vérifiant :

$[x, y]$  est linéaire en  $x$

$|[x, y]| \leq \|x\| \|y\|$

$[x, x] = \|x\|^2$ .

Supposons l'espace de Banach  $E$  muni d'un semi-produit intérieur. Un opérateur  $(D_A, A)$  désigne le couple d'un sous-espace  $D_A$  de  $E$  et d'une application linéaire  $A$  de  $D_A$  dans  $E$ .

Définition 1. Un opérateur  $(D_A, A)$  sur  $E$  est dit dissipatif si

$$\forall x \in D_A, \operatorname{Re}[Ax, x] \leq 0.$$

Comme dans le cas hilbertien le générateur infinitésimal d'un semi-groupe fortement continu de contractions est dissipatif, et on a la réciproque suivante, qui est une variante de résultats démontrés par Lumer et Phillips [1].

Théorème 1. Soit  $(D_A, A)$  un opérateur dissipatif, de domaine  $D_A$  dense tel que

$$\forall \lambda > 0, (\lambda I - A)D_A \text{ est dense dans } E.$$

Alors  $(D_A, A)$  admet un plus petit prolongement fermé qui est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe fortement continu de contractions.

Principe du maximum du module [2].

Soit  $X$  un espace localement compact, et  $C_0(X)$  l'espace des fonctions continues sur  $X$  tendant vers 0 à l'infini, muni de la norme  $\|f\| = \text{Sup } |f|$ .

Définition 2. Un opérateur  $(D_A, A)$  sur  $C_0(X)$  vérifie le principe du maximum du module si

$$f \in D_A, \|f\| = \|Af\| \implies \text{Re } Af(x) \leq 0.$$

Définissons sur  $C_0(X)$  un semi-produit intérieur de la façon suivante : soit  $f$  une fonction de  $C_0(X)$ ,  $|f|$  atteint son maximum en au moins un point de  $X$ , nous en choisissons un que nous notons  $x_f$ , et posons

$$[f, g] = f(x_f) \overline{g(x_g)}.$$

Si un opérateur  $(D_A, A)$  vérifie le principe du maximum du module, il est dissipatif pour ce semi-produit intérieur.

Semi-groupes de mesures complexes

Soit  $G$  un groupe abélien localement compact,  $\Gamma$  le groupe dual,  $B(\Gamma)$  l'espace des transformées de Fourier des mesures de variation totale finie sur  $G$ . Les fonctions de  $B(\Gamma)$  sont caractérisées par la propriété suivante [3] :

Soit  $\varphi$  une fonction continue sur  $\Gamma$ , pour que  $\varphi$  soit la transformée de Fourier d'une mesure sur  $G$  de variation totale inférieure ou égale à  $A$ , il faut et suffit que pour tout polynôme trigonométrique sur  $G$

$$f(x) = \sum_{k=1}^n c_k(x, \gamma_k)$$

on ait

$$\left| \sum_{k=1}^n c_k \varphi(\gamma_k) \right| \leq A \|f\|_{\infty}.$$

Théorème 2. Soit  $\psi$  une fonction continue sur  $\Gamma$ . Les deux propriétés suivantes sont équivalentes

a) Pour tout  $t$  positif  $e^{-t\psi}$  est la transformée de Fourier d'une mesure de variation totale inférieure ou égale à 1

b) Pour tout polynôme trigonométrique sur  $G$

$$f(x) = \sum_{k=1}^n c_k(x, \gamma_k)$$

tel que  $f(0) = \|f\|_{\infty}$  on a

$$\operatorname{Re} \sum_{k=1}^n c_k \varphi(\gamma_k) \geq 0.$$

Montrons que a) entraîne b). Soit  $f$  un polynôme trigonométrique

$$f(x) = \sum_{k=1}^n c_k(x, \gamma_k)$$

tel que  $f(0) = \|f\|_{\infty}$ . D'après la caractérisation des fonctions de  $B(\Gamma)$

$$\forall t > 0, \left| \sum_{k=1}^n c_k e^{-t\psi(\gamma_k)} \right| \leq f(0) = \sum_{k=1}^n c_k$$

donc

$$\forall t > 0, \operatorname{Re} \sum_{k=1}^n c_k (1 - e^{-t\psi(\gamma_k)}) \geq 0$$

et en passant à la limite quand  $t$  tend vers 0

$$\operatorname{Re} \sum_{k=1}^n c_k \psi(\gamma_k) \geq 0.$$

Montrons que b) entraîne a).

Soit  $\bar{G}$  le compactifié de Bohr de  $G$ ,  $C(\bar{G})$  l'espace des fonctions continues sur  $\bar{G}$  muni de la norme  $\|f\| = \text{Sup}|f|$ . Définissons l'opérateur  $(D_A, A)$  de la façon suivante :  $D_A$  est l'espace des polynômes trigonométriques sur  $G$  considéré comme sous-espace de  $C(\bar{G})$  et si  $f$  est un polynôme trigonométrique

$$f(x) = \sum_{k=1}^n c_k(x, \gamma_k)$$

posons

$$Af(x) = - \sum_{k=1}^n c_k \psi(\gamma_k)(x, \gamma_k).$$

Soit  $f$  un polynôme trigonométrique tel que en  $\bar{x}_0$  point de  $\bar{G}$  on ait

$$f(\bar{x}_0) = \|f\|$$

le polynôme trigonométrique  $g$  défini par

$$g(x) = f(x + \bar{x}_0) = \sum_{k=1}^n c_k(\bar{x}_0, \gamma_k)(x, \gamma_k)$$

vérifie  $g(0) = \|g\|$ , et par suite de l'hypothèse faite sur la fonction  $\psi$

$$\text{Re} \sum_{k=1}^n c_k(\bar{x}_0, \gamma_k) \psi(\gamma_k) \geq 0$$

c'est à dire

$$\text{Re} Af(\bar{x}_0) \leq 0.$$

L'opérateur  $(D_A, A)$  vérifie le principe du maximum du module, il existe donc un semi produit intérieur sur  $C(\bar{G})$  pour lequel  $(D_A, A)$  est dissipatif. D'autre part le domaine  $D_A$  est dense. En considérant  $f(x) = (x, \gamma)$ , on obtient  $\text{Re} \psi(\gamma) \geq 0$ . Il en résulte que pour tout  $\lambda$  positif et tout  $\gamma$ ,  $\lambda + \psi(\gamma) \neq 0$ , et donc que

$$\forall \lambda > 0, (\lambda I - A)D_A = D_A.$$

L'opérateur  $(D_A, A)$  vérifie les hypothèses du théorème 1 et par suite les opérateurs  $P_t$  définis sur  $D_A$  par

$$P_t f(\bar{x}) = \sum_{k=1}^n c_k e^{-t \psi(\gamma_k)}(\bar{x}, \gamma_k)$$

se prolongent, pour  $t$  positif, en des contractions sur  $C(\bar{G})$ , ce qui se traduit par,

pour  $\bar{x} = 0$

$$\forall t > 0, \left| \sum_{k=1}^n c_k e^{-t \psi(\gamma_k)} \right| \leq \|f\|_{\infty}$$

d'où le résultat en utilisant la caractérisation des fonctions de  $B(\Gamma)$ .

- [1] Lumer G. - Phillips R. S.  
Dissipative operators in a Banach space. Pacific J. Math., 11, p. 679-698, (1961)
- [2] Faraut J.  
Principe du maximum du module et semi-groupes de mesures. C. R. Acad. Sc. Paris, 267, série A, p. 257-260, (1968)
- [3] Rudin W.  
Fourier analysis on groups. Interscience publishers, (1962).

On non-triangular sets in tensor algebras

by

S. W. Drury (Orsay, France)

For an arbitrary regular symmetric algebra  $R(K)$  of continuous functions on a compact hausdorff space  $K$  and an arbitrary closed subset  $E$  of  $K$  we denote

$$I(E) = \{f ; f \in R(K), f \text{ vanishes on } E\}$$

$$I_0(E) = \{f ; f \in R(K), f \text{ vanishes on a neighbourhood of } E\}.$$

It is easy to see that  $I(E)$  is a closed ideal of  $R(K)$  and that  $I_0(E)$  is an ideal in  $R(K)$ . The subset  $E$  is said to be of synthesis if  $\overline{I_0(E)} = I(E)$  (closure in  $R(K)$ ) and

$E$  is said to be a strong dytkin set if there exists a sequence  $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$  such that

$u_n \in I_0(E)$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) and for every  $f \in I(E)$  we have  $u_n f \rightarrow f$  as  $n \rightarrow \infty$

for the norm of  $R(K)$ . Every strong dytkin set is clearly a set of synthesis. Together

the following conditions imply that  $E$  is a strong dytkin set :

- 1)  $E$  is of synthesis

2) There exist open sets  $\Omega_n$  containing  $E$  such that  $\Omega_{n+1} \subseteq \Omega_n$  for  $n = 1, 2, \dots$   
 and  $\bigcap_{n=1}^{\infty} \bar{\Omega}_n = E$

3) There exists a sequence  $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$  with  $1 - u_n \in I_0(E)$   $n = 1, 2, \dots$  satisfying  
 the two conditions

$$u_n(x) = 0 \text{ for all } x \notin \Omega_n$$

$$\|u_n\|_{R(K)} \leq 1 + \varepsilon_n$$

where  $\{\varepsilon_n\}_{n=1}^{\infty}$  is a sequence decreasing to zero. We observe that these conditions tend to bear on the case  $K$  metrizable. We also point out that 3) could be weakened considerably without affecting the conclusion.

The following are examples of regular symmetric algebras :

A) All continuous functions  $C(K)$  on a compact metrizable space  $K$

B) Absolutely convergent Fourier series  $A(G)$  on a compact abelian metrizable group  $G$ . We denote by  $\hat{G}$  the dual group of  $G$  and by  $G_d$  the group  $G$  furnished with the discrete topology.

C) The tensor algebra  $V(K_1 \times K_2) = C(K_1) \hat{\otimes} C(K_2)$  where  $K_1, K_2$  will always denote compact metrizable spaces. A theory of this algebra can be found in Varopoulos [1].

In this paper we shall be concerned with the examples B) and C). A closed subset  $E$  of  $K_1 \times K_2$  is said to be non-triangular if for all  $\Lambda_j \subseteq K_j$  such that  $\text{card}(\Lambda_j) = 2$  ( $j = 1, 2$ ) we have that  $\text{card}(E \cap (\Lambda_1 \times \Lambda_2)) \neq 3$ . The set  $\{0_G\}$  satisfies conditions 1), 2) and 3) for the algebra  $A(G)$ ; it is the main object of this

paper to use this result to show that every non-triangular set satisfies 1), 2) and 3) with respect to a tensor algebra and hence is a strong dytkin set.

If  $K$  is a compact hausdorff space we shall denote by  $M(K)$  the space of bounded complex regular Borel measures on  $K$  and by  $M^+(K)$  the subset of such positive measures.

The reader should observe that a non-triangular subset  $E$  of  $D_1 \times D_2$  the product of discrete spaces  $D_1, D_2$  is the union of rectangles  $X_\alpha \times Y_\alpha$  ( $X_\alpha \in D_1, Y_\alpha \in D_2$ ) with pairwise disjoint sides ( $X_\alpha \cap X_\beta = Y_\alpha \cap Y_\beta = \emptyset, \alpha \neq \beta$ ). We now prove the analogous result for compact metrizable spaces.

Lemma 1. Let  $E \subseteq K_1 \times K_2$  be a non-triangular closed subset. Then there exists a compact metrizable space  $Q$  and continuous mappings  $\alpha_j : K_j \rightarrow Q$  ( $j = 1, 2$ ) such that  $E = \{(x_1, x_2) ; \alpha_1(x_1) = \alpha_2(x_2)\}$ .

Proof. We define an equivalence relation  $\sim$  on  $K_1 \cup K_2$  (the disjoint union of  $K_1$  and  $K_2$ ) as follows :

If  $x \in K_1, y \in K_2$  then  $x \sim y$  if and only if  $(x, y) \in E$ .

If  $(x_1, x_2) \in K_1$  then  $x_1 \sim x_2$  if and only if either  $x_1 = x_2$  or there exists  $y \in K_2$  such that  $(x_1, y)$  and  $(x_2, y) \in E$ .

If  $y_1, y_2 \in K_2$  then  $y_1 \sim y_2$  if and only if either  $y_1 = y_2$  or there exists  $x \in K_1$  such that  $(x, y_1)$  and  $(x, y_2) \in E$ .

The relation  $\sim$  is clearly reflexive and symmetric. We show that  $\sim$  is transitive. There are essentially 3 cases.

A)  $x_1, x_2, x_3 \in K_1$  (identical argument for  $K_2$ ) and  $x_1 \sim x_2, x_2 \sim x_3$ . There exist  $y_1, y_2 \in K_2$  such that  $(x_1, y_1), (x_2, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_2) \in E$ . If  $y_1 = y_2$  then  $x_1 \sim x_3$ . If  $y_1 \neq y_2$  then  $(x_3, y_1) \in E$  since already  $(x_2, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_2) \in E$  and  $E$  is non-triangular. Hence  $x_1 \sim x_3$ .

B)  $y \in K_2, x_1, x_2 \in K_1$  (or vice-versa) and  $y \sim x_1, x_1 \sim x_2$ . There exists  $y_0 \in K_2$  such that  $(x_1, y_0), (x_2, y_0) \in E$ . If  $y = y_0$  then clearly  $y \sim x_2$ . If  $y \neq y_0$  then  $(x_2, y) \in E$  since already  $(x_2, y_0), (x_1, y), (x_1, y_0) \in E$ . Hence  $x_2 \sim y$ .

C)  $y \in K_2, x_1, x_2 \in K_1$  (or vice-versa) and  $x_1 \sim y, y \sim x_2$ . Clearly  $(x_1, y), (x_2, y) \in E$ . Hence  $x_1 \sim x_2$ .

Next we show that the  $\sim$ -saturation of any closed subset of  $K_1 \cup K_2$  is closed. Let

$\pi_j$  denote the projection of  $K_1 \times K_2$  onto  $K_j$  for  $j = 1, 2$ . For  $L \subseteq K_1$  we define

$$\sigma_1(L) = \pi_2((L \times K_2) \cap E) \subseteq K_2$$

and  $\sigma_2$  is defined similarly. If  $L$  is closed in  $K_1$  then we observe that  $\sigma_1(L)$  is closed in  $K_2$ . Let  $M$  be an arbitrary closed subset of  $K_1 \cup K_2$ . Then  $M = M_1 \cup M_2$

where  $M_j \subseteq K_j$  ( $j = 1, 2$ ) is closed. We observe that

$$\text{saturation}(M) = M_1 \cup M_2 \cup \sigma_1(M_1) \cup \sigma_2(M_2) \cup \sigma_2 \circ \sigma_1(M_1) \cup \sigma_1 \circ \sigma_2(M_2)$$

is closed. Let  $g : K_1 \cup K_2 \rightarrow Q$  be the canonical projection associated with  $\sim$ .

Since  $\sim$ -saturation preserves closedness and  $K_1 \cup K_2$  is a normal space we see that

the projection  $g$  is hausdorff and that  $Q$  is a compact metrizable space in the quotient topology. It is an immediate consequence of the definition of  $\sim$  that

$$E = \{(x_1, x_2) ; \alpha_1(x_1) = \alpha_2(x_2)\} \quad \text{where } \alpha_j = g|_{K_j} \quad (j = 1, 2).$$

If we denote  $Q_j = \alpha_j(K_j)$  ( $j = 1, 2$ ),  $Q = Q_1 \cup Q_2$ ,  $P = Q_1 \cap Q_2$  then we have

$$E = (\alpha_1 \times \alpha_2)^{-1}(\Delta) \quad \text{where } \Delta \text{ denotes the diagonal of } P \times P \text{ considered as a subset of } Q_1 \times Q_2.$$

Now let us explain how a non-triangular set  $E$  satisfies the conditions 2) and 3).

Since  $Q$  is a compact metrizable space it can be embedded in  $T_\infty$  the torus of countable infinite dimension. We consider the mapping  $\rho : K_1 \times K_2 \rightarrow T_\infty$  given by

$$\rho(x_1, x_2) = \alpha_1(x_1) - \alpha_2(x_2)$$

where the subtraction takes place relative to the group structure of  $T_\infty$ . There exist

open sets  $\sum_n \subseteq T_\infty$  such that  $0 \in \sum_n$ ,  $\sum_{n+1} \subseteq \sum_n$  for  $n = 1, 2, \dots$  and

$\bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{\sum_n} = \{0\}$  and also functions  $v_n \in A(T_\infty)$  such that  $1 - v_n \in I_0(\{0\})$  ( $n = 1, 2, \dots$ ),

$v_n(x) = 0$  for all  $x \notin \sum_n$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) and  $\|v_n\|_A \leq 1 + \epsilon_n$  where  $\epsilon_n$  is a sequence

of positive numbers decreasing to zero. We define  $\Omega_n = \rho^{-1}(\sum_n)$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) open

sets in  $K_1 \times K_2$  satisfying condition 2) with respect to  $E$ . We also set  $u_n = v_n \circ \rho \in C(K_1 \times K_2)$

functions taking the value 1 in a neighbourhood of  $E$  and vanishing outside  $\Omega_n$

( $n = 1, 2, \dots$ ). To show that 3) is satisfied it remains to show that the mapping

$$v \longrightarrow v \circ \rho$$

is norm decreasing between the spaces  $A(T_\infty)$  and  $V(K_1 \times K_2)$ . Let  $\chi \in \hat{T}_\infty$ . We observe

that

$$\chi \circ \rho = (\chi \circ \alpha_1) \otimes (\bar{\chi} \circ \alpha_2)$$

where  $\chi_0 \alpha_1$  and  $\bar{\chi}_0 \alpha_2$  are functions of unit modulus on  $K_1, K_2$  respectively. Extending by linearity and continuity we have the result.

Theorem 1. Every non-triangular set satisfies conditions 2) and 3) of the introduction with respect to the tensor algebra.

Suppose now that  $G$  is a compact abelian group and that  $K_1, K_2$  are two disjoint compact metrizable subsets of  $G$  such that  $K_1 \cup K_2$  is a kronecker set. It is well known (Varopoulos [1] 4 §2) that the restriction algebra  $A(K_1 + K_2)$  can be identified isometrically with  $V(K_1 \times K_2)$  by means of the dual of the multiplication mapping

$\sigma: K_1 \times K_2 \rightarrow K_1 + K_2$ . Let  $E$  be a closed subset of  $K_1 \times K_2$  and let  $\tilde{E} = \sigma(E)$  be the corresponding set in  $K_1 + K_2$ .

Theorem 2. The set  $E$  is non-triangular if and only if  $\tilde{E} = (K_1 + K_2) \cap (g + H)$  for some  $g \in G$  and some (discrete) subgroup  $H$  of  $G$ .

Proof. Suppose the latter statement holds. Let  $x_1, x_2 \in K_1, y_1, y_2 \in K_2$  such that  $x_1 \neq x_2, y_1 \neq y_2$  and  $(x_1, y_1), (x_1, y_2), (x_2, y_1) \in E$ . Since  $x_1 + y_1, x_1 + y_2, x_2 + y_1$  belong to  $\tilde{E} = (K_1 + K_2) \cap (g + H)$  we can write  $x_1 + y_1 = g + h_1, x_1 + y_2 = g + h_2, x_2 + y_1 = g + h_3$  where  $h_1, h_2, h_3 \in H$ . Hence  $x_2 + y_2 = g + (h_2 + h_3 - h_1)$  and it follows that  $x_2 + y_2 \in (K_1 + K_2) \cap (g + H)$  and that  $(x_2, y_2) \in E$ . This shows that  $E$  is non-triangular.

Suppose now that  $E$  is non-triangular and that  $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$  is the sequence constructed in theorem 1. Regarding  $u_n$  as elements of  $A(K_1 + K_2)$  we choose extensions  $\tilde{\omega}_n$  to  $A(G)$

such that

$$\|\tilde{\omega}_n\|_{A(G)} \leq 1 + 2\varepsilon_n, \quad \tilde{\omega}_n|_{K_1+K_2} = u_n.$$

On account of the fact that there exists  $g \in G$  such that  $\tilde{\omega}_n(g) = 1$  the Fourier coefficients of  $\tilde{\omega}_n$  are very well aligned; we shall perturb the  $\tilde{\omega}_n$  very slightly so as to make the alignment perfect. Towards this let  $\omega \in A(G)$  be such that  $\|\omega\|_{A(G)} \leq 1 + 2\varepsilon$  and  $\omega(0) = 1$ . We have  $\sum_{\chi \in G} \hat{\omega}(\chi) = 1$  and  $\sum_{\chi \in G} |\hat{\omega}(\chi)| \leq 1 + 2\varepsilon$ . Let  $\hat{\lambda}(\chi) = |\hat{\omega}(\chi)|$  and define  $\theta_\chi = \arg[\hat{\omega}(\chi)]$ . Then

$$\begin{aligned} \|\lambda - \omega\|_{A(G)} &\leq 2^{1/2} \sum_{\chi \in G} \hat{\lambda}(\chi) (1 - \cos \theta_\chi)^{1/2} \\ &\leq 2^{1/2} \left( \sum_{\chi \in G} \hat{\lambda}(\chi) \right)^{1/2} \left( \sum_{\chi \in G} \hat{\lambda}(\chi) (1 - \cos \theta_\chi) \right)^{1/2} \\ &\leq 2\varepsilon^{1/2} (1 + 2\varepsilon)^{1/2} \end{aligned}$$

Let  $\omega_n(x) = \tilde{\omega}_n(x + g)$  and define  $\lambda_n$  by the method indicated above. We can regard  $\hat{\lambda}_n$  as belonging to  $M^+([G_d]^\wedge)$  with  $\|\hat{\lambda}_n\|_M \leq 1 + 2\varepsilon_n + 2\varepsilon_n^{1/2}(1 + 2\varepsilon_n)^{1/2}$  which bound decreases to 1 as  $n \rightarrow \infty$ . By the weak compactness of the unit ball of  $M([G_d]^\wedge)$  the sequence  $\{\hat{\lambda}_n\}_{n=1}^\infty$  has a weak limit point  $\hat{\lambda} \in M^+([G_d]^\wedge)$  such that  $\|\hat{\lambda}\|_M \leq 1$ . Since  $\|\omega_n - \lambda_n\|_{A(G)} \leq 2\varepsilon_n^{1/2}(1 + 2\varepsilon_n)^{1/2}$  tends to zero as  $n \rightarrow \infty$  we see that  $\hat{\lambda}$  is also a weak limit point of the sequence  $\{\hat{\omega}_n\}_{n=1}^\infty$ . The Fourier transform  $\lambda$  of  $\hat{\lambda}$  can be identified with a bounded function on  $G_d$ . We claim that  $H = \{h; h \in G, \lambda(h) = 1\}$  is a discrete subgroup of  $G$  on account of the implications

$$\lambda(h) = 1 \iff \int_{[G_d]} \langle h, \chi \rangle d\hat{\lambda}(\chi) = 1 \iff \langle h, \chi \rangle = 1 \quad \hat{\lambda} - \text{a.e.}$$

But  $\lambda(k)$  is a limit point of  $\{\omega_n(k)\}_{n=1}^{\infty}$  and hence also of  $\{u_n(g+k)\}_{n=1}^{\infty}$ . Given that  $g+k \in K_1 + K_2$  we shall have that  $g+k \in E$  if and only if  $k \in H$ . Hence

$$\tilde{E} = (K_1 + K_2) \cap (g + H). \text{ This completes the proof.}$$

Corollary. The conditions 2) and 3) characterize non-triangular sets.

In the remainder of the paper we discuss condition 1) that is the synthesis of non-triangular sets. We denote  $BM(K_1 \times K_2) = [V(K_1 \times K_2)]'$  the dual space of  $V(K_1 \times K_2)$  whose elements are called bimeasures. For  $E$  a closed subset of  $K_1 \times K_2$  we define the space  $BM(E)$  of bimeasures supported on  $E$  as the annihilator  $[I_0(E)]^0$  of the ideal  $I_0(E)$ . The set  $E$  has the unit bounded synthesis property if for every  $S \in BM(E)$  there exists a sequence  $\{\mu_n\}_{n=1}^{\infty}$

$$\mu_n \in M(E) \quad \|\mu_n\|_{BM} \leq \|S\|_{BM} \quad (n \geq 1)$$

with  $\mu_n \rightarrow S$  for the weak topology  $\sigma(BM, V)$ . Such a set is evidently a set of synthesis. We aim to show that non-triangular sets have the unit bounded synthesis property. We shall need the following standard lemma.

Lemma 2. Let  $L_1$  be closed in  $K_1$  and  $E$  be closed in  $L_1 \times K_2$ . The two spaces  $BM_{L_1 \times K_2}(E)$  and  $BM_{K_1 \times K_2}(E)$  of bimeasures supported on  $E$  defined with reference to the two tensor algebras  $V(L_1 \times K_2)$  and  $V(K_1 \times K_2)$  are isometrically identified and the two corresponding weak topologies on them coincide.

We start by considering those non-triangular sets for which the projection  $\alpha_2 : K_2 \rightarrow Q_2$  is identical. This is the case in which each ordinate  $\{k_1\} \times K_2$  ( $k_1 \in K_1$ ) cuts the set  $E$  in at most one point. Such a non-triangular set will be called a graph.

Theorem 3. For every graph  $E$  the inclusion  $M(E) \subset BM(E)$  is an isometric identification.

Proof. We embed  $K_2$  into a compact abelian metrizable group  $G$ . We denote  $K'_1 = \alpha_1^{-1}(Q_1 \cap Q_2)$ . Since  $E \subseteq K'_1 \times K_2$  and by lemma 2 it suffices to prove the result with respect to the algebra  $V(K'_1 \times G)$ . The set  $E$  is given by

$$E = \text{graph}(\alpha) = \{(k_1, \alpha(k_1)) ; k_1 \in K'_1\}$$

where  $\alpha : K'_1 \rightarrow G$  is the restriction of  $\alpha_1$  to  $K'_1$ . We shall need the following mappings :

$$\begin{aligned} \pi : K'_1 \times G &\longrightarrow K'_1 & \pi(k, g) &= k \\ i : K'_1 &\longrightarrow E & i(k) &= (k, \alpha(k)) \\ \sigma : K'_1 \times G &\longrightarrow G & \sigma(k, g) &= g - \alpha(k) \end{aligned}$$

where  $-$  is taken in the group  $G$ . The significance of  $\sigma$  is that the dual mapping

$$\sigma^* : A(G) \longrightarrow V(K'_1 \times G)$$

is norm decreasing. By extension by linearity and continuity it suffices to check this on an arbitrary character  $\chi \in \hat{G}$ .

$$[\sigma^*(\chi)](k, g) = \chi(g - \alpha(k)) = \chi(g) \cdot \overline{\chi \circ \alpha(k)} = [\chi \circ \alpha \otimes \chi](k, g)$$

For an arbitrary  $S \in BM(E)$  we have  $\check{\pi}(S) \in M(K'_1)$  and  $\mu = \check{\gamma}_0 \check{\pi}(S) \in M(E)$  where  $\check{\pi}$  and

$\check{Y}$  are the norm decreasing bidual mappings of  $\pi$  and  $i$ .

$$\check{\pi} : \text{BM}(K'_1 \times G) \longrightarrow M(K'_1) \quad , \quad \check{i} : M(K'_1) \longrightarrow M(E).$$

It suffices to show that  $S = \mu$ . We observe first that  $\check{\pi}(S) = \check{\pi}(\mu)$  since

$\pi_0 i = 1_{K'_1}$ . Let  $f \in C(K'_1)$  and  $\chi \in \hat{G}$  be arbitrary elements. We have

$$\begin{aligned} [f \otimes \chi - (f(\chi_0 \alpha) \otimes 1_G)](k, g) &= f(k) [\chi(g) - \chi_0 \alpha(k)] \\ &= f(k) \cdot \chi_0 \alpha(k) \cdot [\chi(g - \alpha(k)) - 1] \\ &= [(f(\chi_0 \alpha) \otimes 1_G) \cdot (\sigma^*(\chi - 1_G))](k, g). \end{aligned}$$

Now  $\chi - 1_G$  vanishes on  $\{0_G\}$  a set of synthesis for  $A(G)$ . Hence we can find functions  $\varphi_n \in A(G)$  vanishing on a neighbourhood of  $0_G$  and with  $\varphi_n \rightarrow \chi - 1_G$  in  $A(G)$ .

The functions  $\sigma^*(\varphi_n)$  vanish on a neighbourhood of  $E$  and tend to  $\sigma^*(\chi - 1_G)$  in

$V(K'_1 \times G)$ . Hence

$$\langle S - \mu, [(f(\chi_0 \alpha) \otimes 1_G) \cdot (\sigma^*(\chi - 1_G))] \rangle = 0.$$

Also we have

$$\langle S - \mu, (f(\chi_0 \alpha) \otimes 1_G) \rangle = \langle \check{\pi}(S - \mu), f(\chi_0 \alpha) \rangle = 0.$$

Therefore  $\langle S - \mu, f \otimes \chi \rangle = 0$ . Extending by linearity and continuity and using the fact that trigonometric polynomials are uniformly dense in  $C(G)$  we see that  $S = \mu$ .

Let  $K$  be a compact metrizable space. We shall denote  $\check{K}$  the space of continuous mappings of  $K$  into  $T$ .  $\check{K}$  is a group under pointwise multiplication on  $K$  and with the discrete topology. The dual group of  $\check{K}$  is denoted  $K^f$ . There is a natural topological embedding  $i_K$  of  $K$  in  $K^f$ . A continuous surjection  $\alpha : K \rightarrow Q$  between

compact metrizable spaces  $K$  and  $Q$  defines a dual mapping  $\alpha^* : \check{Q} \rightarrow \check{K}$  an injective group homomorphism and a bidual mapping  $\alpha^f : K^f \rightarrow Q^f$  a continuous surjective group homomorphism with the property  $\alpha^f \circ i_K = i_{Q_0} \alpha$ .

Lemma 3. Let  $\alpha : K \rightarrow Q$  be a continuous surjection between compact metrizable spaces  $K$  and  $Q$ . There exists  $\pi : G \rightarrow H$  a continuous surjective group homomorphism between compact abelian metrizable groups  $G$  and  $H$  and embeddings  $\epsilon_K : K \rightarrow G$ ,  $\epsilon_Q : Q \rightarrow H$  such that  $\pi \circ \epsilon_K = \epsilon_Q \alpha$ .

Proof. There exists a countable subset  $B$  of  $\check{K}$  which separates the points of  $K$ . To see this we embed  $K$  in  $T_\infty$  and project  $T_\infty$  onto its coordinate spaces. Let  $A$  be a similar subset of  $\check{Q}$ . We define the countable groups  $\hat{H}$  and  $\hat{G}$  to be the groups generated by  $A$  and  $A \cup B$  respectively in  $\check{K}$ . The inclusions  $\hat{H} \subset \check{Q}$ ,  $\hat{G} \subset \check{K}$  and  $\hat{H} \subset \hat{G}$  dualize to continuous surjective group homomorphisms  $p_Q : Q^f \rightarrow H$ ,  $p_K : K^f \rightarrow G$  and  $\pi : G \rightarrow H$  respectively such that  $\pi \circ p_K = p_Q \circ \alpha^f$  where  $G$  and  $H$  are compact abelian metrizable groups. The continuous mappings  $\epsilon_K = p_K \circ i_K : K \rightarrow G$  and  $\epsilon_Q = p_Q \circ i_Q : Q \rightarrow H$  are embeddings since  $\hat{G}$  and  $\hat{H}$  separate the points of  $K$  and  $Q$  respectively. Evidently  $\pi \circ \epsilon_K = \epsilon_Q \alpha$ . This completes the proof.

In the situation of lemma 3 we define  $\Lambda = \pi^{-1}(0_H)$  a closed subgroup of  $G$  and  $L = \pi^{-1}(Q) = K + \Lambda$  a closed subset of  $G$ . When we come to apply lemma 3 we shall regularize on  $K$  by the action of  $\Lambda$ . To compensate for the fact that  $K$  is not  $\Lambda$ -stable we shall need a well behaved borel mapping  $\beta : L \rightarrow K$ .

Since  $G$  is compact metrizable we may choose a translation invariant metric  $d$  on  $G$  of total distance 1 giving the topology of  $G$ .

Let  $I = [0, 1]$  be the unit interval and let  $X$  be a closed subspace of  $L \times I$  such that the coordinate projection  $X \rightarrow L$  is onto. We define the mapping  $\theta : L \rightarrow I$  by

$$\theta(\ell) = \inf \{t ; (\ell, t) \in X\}.$$

We denote

$$X' = \text{graph}(\theta) = \{(\ell, \theta(\ell)) ; \ell \in L\}$$

the unique subset of  $X$  with the properties :

$$B) (\ell, t_1) \in X \implies \exists t_2 \in I \text{ such that } (\ell, t_2) \in X'.$$

$$C) (\ell, t_1), (\ell, t_2) \in X' \implies t_1 = t_2$$

$$D) (\ell, t_1) \in X', (\ell, t_2) \in X \implies t_1 \leq t_2$$

Lemma 4. In addition we have

$$A) X' \text{ is a } G_\delta \text{ (intersection of a sequence of open sets).}$$

Proof. The mapping  $\theta$  is lower semicontinuous and therefore has a  $G_\delta$  graph. We

leave the details to the reader.

Lemma 5. There exists a borel mapping  $\beta : L \rightarrow K$  such that :

$$E) \alpha_\circ \beta(\ell) = \pi(\ell) \quad \forall \ell \in L.$$

$$F) k \in K, \ell \in L, \alpha(k) = \pi(\ell) \implies d(\ell, \beta(\ell)) \leq d(\ell, k).$$

Proof. We consider the continuous mapping

$$\gamma : L \times K \longrightarrow L \times I$$

given by  $\gamma(\ell, k) = (\ell, d(k, \ell))$  and the closed subset  $Y = \{(\ell, k) ; \ell \in L, k \in K, \alpha(k) = \pi(\ell)\}$  of  $L \times K$ . We set  $X = \gamma(Y)$  a closed subset of  $L \times I$  and denote by  $X'$  the subset of  $X$  in lemma 4. The subset  $Y' = Y \cap \gamma^{-1}(X')$  of  $L \times K$  has the following properties :

A')  $Y'$  is  $G_\delta$ .

B') For all  $\ell \in L \exists k \in K$  such that  $(\ell, k) \in Y'$ .

D')  $(\ell, k_1) \in Y', (\ell, k_2) \in Y \implies d(\ell, k_1) \leq d(\ell, k_2)$ .

E')  $(\ell, k) \in Y' \implies \pi(\ell) = \alpha(k)$ .

Let  $p_L : Y' \longrightarrow L$  and  $p_K : Y' \longrightarrow K$  be the continuous mappings defined by the inclusion of  $Y'$  into  $L \times K$  followed by projection on the coordinate spaces. On account of B')  $p_L$  is onto. On account of A') and Bourbaki [2] is an "espace ponctuel". The projection  $p_L : Y' \longrightarrow L$  satisfies the conditions of the Borel section theorem (Bourbaki [2]). It follows there exists a borel mapping  $\bar{\beta} : L \longrightarrow Y'$  which is surjective and satisfies  $p_{L \circ \bar{\beta}} = \text{id}_L$ . We set  $\beta = p_{K \circ \bar{\beta}} : L \longrightarrow K$  a borel mapping which satisfies E) on account of B') and F) on account of D'). This completes the proof.

Lemma 6. Let  $\beta : L \longrightarrow K_2$  be borel. Then the bidual mapping

$$(1_{K_1} \times \beta)^V : M(K_1 \times L) \longrightarrow M(K_1 \times K_2)$$

is norm decreasing for the bimeasure norm.

Proof. Let  $\mu \in M(K_1 \times L)$  with  $\|\mu\|_{BM} \leq 1$  and  $f \in C(K_1)$  with  $\|f\|_\infty \leq 1$  be fixed.

The mapping

$$g \longrightarrow \langle \mu, f \otimes g \rangle$$

is norm decreasing and linear form  $C(L)$  to  $\mathbb{C}$ . Hence there exists a measure

$\nu \in M(L)$  with  $\|\nu\|_M \leq 1$  such that

$$(*) \quad \langle \mu, f \otimes g \rangle = \langle \nu, g \rangle \quad \forall g \in C(L).$$

It follows that (\*) is true for every bounded borel function  $g$ . Let  $h \in C(K_2)$  with  $\|h\|_\infty \leq 1$ . Then

$$|\langle (1_{K_1} \times \beta)^\vee(\mu), f \otimes h \rangle| = |\langle \mu, f \otimes h_0 \beta \rangle| = |\langle \nu, h_0 \beta \rangle| \leq 1.$$

This gives the result.

Let  $\{\varepsilon_n\}_{n=1}^\infty$  be a sequence of positive reals decreasing to zero fixed for the remainder of the paper. In the situation of lemma 5 we define

$$U_n = \{\lambda ; d(0_G, \lambda) \leq \varepsilon_n, \lambda \in \Lambda\}$$

and also  $L_n = K + U_n \subseteq G$ . We denote by  $\beta_n$  the borel mapping  $\beta_n : L_n \longrightarrow K$  obtained by restricting the  $\beta$  of lemma 5. On account of F) we see

$$d(\ell, \beta_n(\ell)) \leq \varepsilon_n \quad \forall \ell \in L_n.$$

Lemma 7. Let  $\mu_n$  be a sequence of measures with  $\mu_n \in M(L_n)$ ,  $\|\mu_n\|_M \leq 1$  and  $\mu_n \longrightarrow \mu$  weakly where  $\mu \in M(K)$ . Then  $\beta_n^\vee(\mu_n) \longrightarrow \mu$  weakly also.

Proof. Let  $f \in C(L)$  with  $\|f\|_\infty \leq 1$  and  $\varepsilon > 0$ . There exists  $n$  such that

$$(i) \quad |\langle \mu - \mu_m, f \rangle| \leq \varepsilon/2 \quad \forall m \gg n.$$

$$(ii) \quad d(\ell_1, \ell_2) \leq \varepsilon_n \implies |f(\ell_1) - f(\ell_2)| \leq \varepsilon/2.$$

For  $m \gg n$

$$|\langle \mu_m - \beta_m(\mu_m), f \rangle| = |\langle \mu_m, f - f \circ \beta_m \rangle| \leq \varepsilon/2.$$

Hence  $|\langle \mu - \beta_m(\mu_m), f \rangle| \leq \varepsilon$  as required.

Theorem 4. Every non-triangular closed subset  $E \subseteq K_1 \times K_2$  ( $K_j$  metrizable) has the unit bounded synthesis property.

Proof. The mappings  $\alpha_j : K_j \rightarrow Q_j$  ( $j = 1, 2$ ) are given by lemma 1. We apply lemma 3 to the mapping  $\alpha_2 : K_2 \rightarrow Q_2$  and define  $G, H, L, L_n, \beta, \beta_n, U_n$  and  $\Lambda$  with respect to  $\alpha_2$  as in lemmas 3-7. By lemma 2 it suffices to prove the result with respect to the tensor algebra  $V(K_1 \times G)$ . We define the closed subset  $E^*$  of  $K_1 \times G$

$$E^* = \{(k, g) ; \alpha_1(k) = \pi(g)\}.$$

For  $f \in V(K_1 \times G)$  and  $\lambda \in \Lambda$  we define the translate  $f_\lambda$  by

$$f_\lambda(k, g) = f(k, g + \lambda).$$

Evidently  $f_\lambda \rightarrow f$  in  $V$  norm as  $\lambda \rightarrow 0_\Lambda$ . For  $S \in \text{BM}(K_1 \times G)$  we define the translate  $S_\lambda$  by

$$\langle S_\lambda, f \rangle = \langle S, f_{-\lambda} \rangle.$$

Since  $\|f_\lambda\|_V \leq \|f\|_V$  we have  $\|S_\lambda\|_{\text{BM}} \leq \|S\|_{\text{BM}}$  and since  $f_\lambda \rightarrow f$  as  $\lambda \rightarrow 0_\Lambda$  we see that  $S_\lambda \rightarrow S$  in  $\sigma(\text{BM}, V)$  as  $\lambda \rightarrow 0_\Lambda$ . We say that  $S \in \text{BM}(K_1 \times G)$  is invariant if  $S_\lambda = S$  for all  $\lambda \in \Lambda$ . Suppose that  $S$  is invariant and is supported on  $E^*$ . We act on  $S$  by the norm decreasing mapping

$$(1 \times \pi)^V : \text{BM}(K_1 \times G) \rightarrow \text{BM}(K_1 \times H)$$

and observe that

$$\text{supp}((1 \times \pi)^{\vee}(S)) \subseteq \{(k_1, \alpha_1(k_1)) ; k_1 \in K_1, \alpha_1(k_1) \in Q_2\}$$

where the right hand side is a graph in  $K_1 \times H$ . By theorem 3 we have that

$$(1 \times \pi)^{\vee}(S) \in M(K_1 \times H) \text{ and}$$

$$\|(1 \times \pi)^{\vee}(S)\|_M \leq \|S\|_{BM}.$$

Let  $f \in V(K_1 \times G)$ . Then

$$\langle S, f \rangle = \langle S, \int f_{\lambda} d\eta_{\Lambda}(\lambda) \rangle$$

where  $\eta_{\Lambda}$  is the haar measure of  $\Lambda$ . The function  $\int f_{\lambda} d\eta_{\Lambda}(\lambda)$  respects  $(1 \times \pi)$  and can be written

$$\int f_{\lambda} d\eta_{\Lambda}(\lambda) = F_{\circ}(1 \times \pi)$$

where  $F \in C(K_1 \times H)$  by virtue of the fact that  $(1 \times \pi)$  is a closed mapping. Hence

$$|\langle S, f \rangle| = |\langle (\pi \times 1)^{\vee}(S), F \rangle| = \|S\|_{BM} \|F\|_{\infty} \leq \|S\|_{BM} \|f\|_{\infty}.$$

Since  $V(K_1 \times G)$  is dense in  $C(K_1 \times G)$  we see that  $S$  is a measure and that

$$\|S\|_M \leq \|S\|_{BM}.$$

Let  $\sum \in BM(E)$ . We aim to synthesize  $\sum$ . Let  $\chi \in [\Lambda]^{\wedge}$ . We choose an extension

$\tilde{\chi}$  of  $\chi$  to  $G$  with  $\tilde{\chi} \in \hat{G}$ . We observe that the bimeasure

$$S = (1_{K_1} \otimes \tilde{\chi}) \int \sum_{\lambda} \chi(\lambda) d\eta_{\Lambda}(\lambda) \in BM(E^*)$$

is invariant. For all  $\rho \in \Lambda$  we have

$$\begin{aligned} \langle S, f_{\rho} \rangle &= \langle \sum, \int (1_{K_1} \otimes \tilde{\chi}_{\lambda}) f_{\rho+\lambda} \chi(\lambda) d\eta_{\Lambda}(\lambda) \rangle \\ &= \langle \sum, \int (1_{K_1} \otimes \tilde{\chi}_{\rho+\lambda}) f_{\rho+\lambda} \chi(\rho+\lambda) d\eta_{\Lambda}(\lambda) \rangle \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \langle \Sigma, \int (1_{K_1} \otimes \tilde{\chi}_\lambda) f_\lambda \chi(\lambda) d\eta_\Lambda(\lambda) \rangle \\
&= \langle S, f \rangle.
\end{aligned}$$

We denote  $\Sigma^{(\varphi)} = \int \Sigma_\lambda \varphi(\lambda) d\eta_\Lambda(\lambda)$  for  $\varphi \in C(\Lambda)$ . We have that  $\Sigma^{(\chi)}$  is a measure and  $\|\Sigma^{(\chi)}\|_M \leq \|\Sigma\|_{BM}$ . Hence for  $\varphi \in A(\Lambda)$  the two inequalities

$$\|\Sigma^{(\varphi)}\|_{BM} \leq \|\varphi\|_{L^1(\Lambda)} \|\Sigma\|_{BM}$$

$$\|\Sigma^{(\varphi)}\|_M \leq \|\varphi\|_{A(\Lambda)} \|\Sigma\|_{BM}$$

hold. Let  $\varphi_n$  be a sequence of functions in  $A(\Lambda)$  which are positive, such that

$\int \varphi_n(\lambda) d\eta_\Lambda(\lambda) = 1$  and with  $\text{supp}(\varphi_n) \subseteq U_n$ . It is easy to see that

- (i)  $\|\Sigma^{(\varphi_n)}\|_{BM} \leq \|\Sigma\|_{BM}$
- (ii)  $\Sigma^{(\varphi_n)}$  is a measure
- (iii)  $\Sigma^{(\varphi_n)} \rightarrow \Sigma$  in  $\sigma(BM, V)$
- (iv)  $\text{supp}(\Sigma^{(\varphi_n)}) \subseteq (K_1 \times L_n) \cap E^*$ .

We define  $\nu_n = (1_{K_1} \times \beta_n)^\vee (\Sigma^{(\varphi_n)}) \in M(K_1 \times K_2)$ . By lemma 6 we have

$$(**) \quad \|\nu_n\|_{BM} \leq \|\Sigma\|_{BM}$$

and by condition E) on  $\beta$  we see that

$$\text{supp}(\nu_n) \subseteq E.$$

We aim to show that  $\nu_n \rightarrow \Sigma$  in  $\sigma(BM, V)$  and by virtue of (\*\*) it suffices to check

the convergence on an arbitrary atom  $\psi_1 \otimes \psi_2$ ,  $\psi_1 \in C(K_1)$ ,  $\psi_2 \in C(G)$  with  $\|\psi_j\|_\infty \leq 1$

( $j = 1, 2$ ). We regard  $\psi_1$  as fixed and let  $\psi_2$  vary. Arguing as in lemma 6 we have

measures  $\mu$ ,  $\{\mu_n\}_{n=1}^\infty$  and  $\{\omega_n\}_{n=1}^\infty$  in  $M(G)$  bounded in the measure norm by  $\|\Sigma\|_{BM}$  and

such that

$$\langle \sum, \psi_1 \otimes \psi_2 \rangle = \langle \mu, \psi_2 \rangle$$

$$\langle \sum^{(\varphi_n)}, \psi_1 \otimes \psi_2 \rangle = \langle \mu_n, \psi_2 \rangle$$

$$\langle \nu_n, \psi_1 \otimes \psi_2 \rangle = \langle \omega_n, \psi_2 \rangle$$

where  $\text{supp}(\mu_n) \subseteq L_n$ . By virtue of (iii)  $\mu_n \rightarrow \mu$  weakly and evidently  $\omega_n = \check{\beta}_n(\mu_n)$ .

We conclude from lemma 7 that  $\omega_n \rightarrow \mu$  weakly. Hence

$$\langle \nu_n, \psi_1 \otimes \psi_2 \rangle \rightarrow \langle \sum, \psi_1 \otimes \psi_2 \rangle.$$

This completes the proof.

I should like to end by extending my thanks to Dr. Varopoulos for his guidance and suggesting theorem 3, to Mr. J. D. Stegeman for helpful suggestions, to the Faculté des Sciences d'Orsay and University of Warwick for their hospitality and to the S.R.C. for financial support.

#### REFERENCES

- [1] Varopoulos N. Th. : Tensor algebras and Harmonic analysis. Acta Math. 119 (1967) 51-112
- [2] Bourbaki N. : Topologie Générale Ch. 9 (Hermann) § 6.1 and § 6.8.

Calcul symbolique dans le centre d'une algèbre de groupe

par Noël Leblanc

Introduction

Il existe une analyse harmonique des groupes non commutatifs qui utilise des méthodes différentes de celles rencontrées en analyse harmonique des groupes abéliens ; en particulier, la théorie de Gelfand n'est pas applicable pour ces groupes. On peut toutefois rechercher les sous-algèbres commutatives d'une algèbre de groupe ; en particulier, le centre de l'algèbre de groupe d'un groupe  $G$  est toujours une sous-algèbre commutative de  $L^1(G)$ , et nous nous proposons de donner ici un résultat de calcul symbolique pour cette sous-algèbre.

Références

Nous exposerons ici un résultat devant paraître aux Annales de l'Institut Fourier, et nous le démontrerons dans un cas particulier.

Nous serons amené à utiliser certains résultats classiques d'analyse harmonique sur les groupes compacts non commutatifs. On en trouve de nombreuses références dans la littérature et notamment :

R. Godement.— Séminaire Bourbaki, 1957.

S. Helgason.— Differential geometry and symmetric spaces.— Academic Press 1962

L. Loomis.— An introduction to abstract harmonic analysis.— Van Nostrand 1953

L. Pontrjagin.— Topological groups.— Princeton 2nd ed. 1946

A. Weil.— L'intégration dans les groupes topologiques et ses applications.— 2me ed.  
Hermann 1953

H. Weyl.— The classical groups.— Princeton 2nd ed. 1946

Problème.

Soit  $G$  un groupe compact abélien. On sait que

$$\left\{ \begin{array}{l} G \text{ fini : toute fonction continue opère dans } \widehat{L^1(G)} \\ G \text{ infini : si } F \text{ opère dans } \widehat{L^1(G)}, F \text{ est analytique dans un voisinage de l'origine (Helson et Kahane).} \end{array} \right.$$

On se propose de voir ce que devient ce résultat pour un groupe  $G$  non commutatif.

On note  $L_c^1(G)$ , le centre de l'algèbre de groupe de  $G$ , et on obtient.

Théorème.— Si  $G$  est un groupe de Lie compact semi simple (i. e. dont le centre est fini), il existe des fonctions continues n<sup>t</sup> n'opérant pas dans  $\widehat{L_c^1(G)}$ , mais les fonctions dérivables un nombre suffisant de fois à l'origine opère dans  $\widehat{L_c^1(G)}$ .

Remarque 1. Si le centre de  $G$  est infini, on est dans le cadre du théorème de Helson et Kahane.

L'hypothèse " $G$  groupe de Lie" est également indispensable, comme on peut s'en

convaincre en étudiant le groupe  $[SO(3)]^\infty$  : les fonctions qui opèrent dans  $L_c^1\{|SO(3)|^\infty\}$  sont analytiques dans un voisinage de l'origine.

Remarque 2. Le centre de l'algèbre de groupe de  $G$  est formé des fonctions  $f$  telles que,

$$\forall g \in L^1(G),$$

$$\int_G g(y^{-1}x)f(y)dy = \int_G f(y^{-1}x)g(y)dy.$$

Si  $G$  est un groupe unimodulaire, cette condition s'écrit

$$\int_G g(y)[f(y^{-1}x) - f(xy^{-1})]dy = 0$$

$$\text{Alors, } f(xy) = f(yx) \quad \text{presque partout}$$

$$f(y) = f(x^{-1}yx) \quad \text{presque partout.}$$

Si  $G$  n'est pas compact, le centre de l'algèbre de groupe est en général réduit à la fonction nulle, et il est donc légitime de supposer  $G$  compact.

Démonstration.

On sait qu'un groupe de Lie semi simple peut se décomposer en un produit de groupes de Lie simple. Cette remarque permettra d'induire le théorème dès que nous l'aurons démontré pour les groupes de Lie simples.

Ceux-ci sont  $Su(n+1)$ ,  $Sp(2n)$ ,  $So(2n)$ ,  $So(2n+1)$  (plus 5 groupes exceptionnels).

Remarque 3. D'après la remarque 2, le centre de l'algèbre de groupe d'un groupe de matrices est formé des fonctions qui ne dépendent que des valeurs propres des matrices envisagées. Les fonctions de  $L_c^1(G)$ , où  $G$  est l'un des groupes  $SO(n+1)$ ,  $Sp(2n)$ ,  $SO(2n)$ ,  $SO(2n+1)$ , dépendent donc de  $n$  paramètres. On dit alors que  $G$  est de rang  $n$ .

Cas  $G = SO(3)$ . Nous allons montrer que si  $f \in L_c^1(G)$ , l'exponentielle de convolution satisfait

$$\|e^{if} - \delta\|_{L^1} \ll 20(\|f\|_{L^1}^{7/2} + 1).$$

Le calcul est dans ce cas simplifié du fait que les fonctions de  $L_c^1(G)$  ne dépendent que d'un paramètre, et le produit de convolution s'écrit

$$\sin t (f * g) = \frac{1}{\pi} \iint_{|x-y| < t < |x+y|} \sin x \sin y f(x)g(y) dx dy$$

avec  $|z| = \text{Arc cos}(\cos z)$ , la mesure de Haar se réduisant à  $d\mu = \frac{2}{\pi} \sin^2 x dx$ , et les

caractères à  $\omega_n(x) = n \frac{\sin nx}{\sin x}$ .

Nous remarquons alors que, si  $f$  et  $g$  ont un support compact disjoint de  $0$  et  $\pi$

$$\sin t |(f * g)(t)| \ll \frac{\|f\|_{L^1} \|g\|_{L^1}}{\inf_{\substack{x \in \text{supp.} f \\ y \in \text{supp.} g}} \sin x \sin y}$$

est borné, et  $f * g \in L^2(d\mu)$ .

Alors,  $e^{if} - \delta - if \in L^2(d\mu)$ , et l'égalité de Parseval implique même, compte tenu de la formule de Taylor

$$\|e^{if} - \delta - if\|_{L^2} \ll \|f * f\|_{L^2}.$$

Si donc  $f$  est à support compact disjoint de  $0$  et  $\pi$ ,

$$\|e^{iNf} - \delta\|_{L^1} \ll N \|f\|_{L^1} + N^2 \|f * f\|_{L^2}.$$

Nous allons maintenant adapter ce résultat particulier à une fonction quelconque.

Soit  $f \in L^1(d\mu)$ ; il existe  $\alpha$  tel que, si  $\varepsilon$  est fixé,

$$\int_0^\alpha |f(x)| \sin x \, dx + \int_{\pi-\alpha}^\pi |f(x)| \sin x \, dx \leq \varepsilon \pi,$$

et  $N$  tel que  $N\alpha \leq \frac{\pi}{2} < (N+1)\alpha$ .

On peut alors écrire

$$f(x) = \sum_{n=0}^N f_n(x) \quad \text{avec}$$

$$\text{supp } f_n(x) = [n\alpha, (n+1)\alpha] \cup [\pi - (n+1)\alpha, \pi - n\alpha],$$

ce qui nous donne

$$\begin{aligned} e^{if} - \delta &= \sum_{p=1}^N \left[ \exp\left(i \sum_{n=0}^p f_n\right) - \exp\left(i \sum_{n=0}^{p-1} f_n\right) \right] + (e^{if_0} - \delta) \\ &= \sum_{p=1}^N \left[ \exp\left(i \sum_{n=0}^p f_n\right) - \exp\left(i \sum_{n=0}^{p-1} f_n\right) - if_p * \exp\left(i \sum_{n=0}^{p-1} f_n\right) \right] \\ &\quad + \sum_{p=1}^N \sum_{q=1}^{p-1} if_p * \left[ \exp\left(i \sum_{n=0}^q f_n\right) - \exp\left(i \sum_{n=0}^{q-1} f_n\right) \right] \\ &\quad + e^{if_0} - \delta + i e^{if_0} * \sum_{p=1}^N f_p. \end{aligned}$$

On pose alors

$$\begin{aligned} F_{pp} &= \exp\left(i \sum_{n=1}^p f_n\right) - \exp\left(i \sum_{n=1}^{p-1} f_n\right) - if_p * \exp\left(i \sum_{n=1}^{p-1} f_n\right) \\ F_{pq} &= if_p * \left[ \exp\left(i \sum_{n=0}^q f_n\right) - \exp\left(i \sum_{n=0}^{q-1} f_n\right) \right], \end{aligned}$$

ce qui donne

$$\|e^{if} - \delta\|_{L^1} \leq e^\varepsilon - 1 + e^\varepsilon \|f\|_{L^1} + \sum_{p=1}^N \sum_{q=1}^p \|F_{pq}\|_{L^1}.$$

D'après la remarque initiale,  $f_p * f_q \in L^2(d\mu)$ , et on obtient d'après l'inégalité

de Minkowski

$$\|f_p * f_q\|_{L^2} \leq \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \int_0^\pi |f_p(x) f_q(y)| \sin x \sin y \, dx \, dy \sqrt{\int_{|x-y|}^{|x+y|} \frac{2}{\pi} \, dt}$$

$$\leq \frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{\|f_p\|_{L^1} \|f_q\|_{L^1}}{\sin p\alpha \sqrt{\sin q\alpha}}.$$

D'après la formule de Taylor

$$\hat{F}_{pq}^{\wedge}(m) = \hat{f}_p^{\wedge}(m) (e^{if_q} - 1)^{\wedge}(m) \left[ \exp(i \sum_{n=0}^{q-1} f_n) \right]^{\wedge}(m)$$

et

$$\hat{F}_{pp}^{\wedge}(m) = (e^{if_p} - 1 - if_p)^{\wedge}(m) \left[ \exp(i \sum_{n=0}^{p-1} f_n) \right]^{\wedge}(m)$$

satisfont l'inégalité ( $p = q$  ou  $p \neq q$ )

$$|\hat{F}_{pq}^{\wedge}(m)| \leq |\hat{f}_p^{\wedge}(m) \hat{f}_q^{\wedge}(m)|$$

et la formule de Parseval implique

$$\|F_{pq}\|_{L^2} \leq \|f_p * f_q\|_{L^2} \leq \frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{\|f_p\|_{L^1} \|f_q\|_{L^1}}{\sin p\alpha \sqrt{\sin q\alpha}}.$$

Posons alors  $r = \|f\|_{L^1}$  et

$$\Omega_{pq} = [0, \pi] \cap \{ [p\alpha - er(q+1)\alpha, (p+1)\alpha + er(q+1)\alpha]$$

$$\cup [\pi - (p+1)\alpha - er(q+1)\alpha, \pi - p\alpha + er(q+1)\alpha] \}$$

puis  $F_{pq} = G_{pq} + H_{pq}$  avec

$$G_{pq} = 0 \quad \text{en dehors de } \Omega_{pq}$$

$$H_{pq} = 0 \quad \text{sur } \Omega_{pq}.$$

L'inégalité de Schwarz implique alors

$$\|G_{pq}\|_{L^1} \leq \|F_{pq}\|_{L^2} \sqrt{\int_{\Omega_{pq}} \frac{2}{\pi} \sin^2 x \, dx}.$$

L'intégrale doit être évaluée différemment selon que  $er(q+1)$  est inférieur ou supérieur à  $p$ . On obtient dans les deux cas

$$\begin{aligned} \|G_{pq}\|_{L^1} &\leq \sqrt{\frac{64}{\pi} e^{33} r^3 \sin \alpha \sin^2 p\alpha} \|F_{pq}\|_{L^2} \\ &\leq 4(er)^{3/2} \|f_p\|_{L^1} \|f_q\|_{L^1}. \end{aligned}$$

L'étude du support de  $f_p * f_q$  et la formule de Stirling montrent en outre

$$\|H_{pq}\|_{L^1} \leq \|f_p\|_{L^1} \|f_q\|_{L^1}.$$

Alors,  $\|e^{if} - \delta\|_{L^1} \leq \|f\|_{L^1} + \|f\|_{L^1}^2 + 20\|f\|_{L^1}^{7/2}$  ce qui est le résultat annoncé.

Remarque 4.

Pour  $G = SO(3)$ , l'algèbre commutative que nous venons d'étudier satisfait

$$\|e^{if} - \delta\|_{L^1} \leq C(1 + \|f\|^{7/2}).$$

Il existe une autre sous algèbre commutative intéressante de  $L^1(G)$ , celle des fonctions ne dépendant que de l'angle d'Euler "de mutation"  $\theta$ . Dans cette sous algèbre, on obtient par un calcul semblable à celui effectué ici

$$\|e^{if} - \delta\|_{L^1} \leq C'(1 + \|f\|^4).$$

Pourtant, si on envisage la sous-algèbre  $L(G)$  de  $L^1(G)$  des fonctions ne dépendant que de  $\theta$  et de la valeur propre  $\alpha$ , cette algèbre  $L(G)$  est encore commutative, mais c'est une algèbre d'analyticité. On peut s'en rendre compte en remarquant que  $L(G)$

contient aussi une sous-algèbre isomorphe à  $L^1(\mathbb{T})$ , à savoir l'ensemble des fonctions de  $L^1(G)$  ne dépendant que de la somme  $\varphi + \psi$  des autres angles d'Euler

$$\cos(\varphi + \psi) = \frac{\cos \alpha - \cos \theta}{1 + \cos \theta} .$$

Méthodes combinatoires en analyse harmonique

par J. D. Stegeman

§ 1. Ensembles d'interpolation

Soient  $\Gamma_1, \Gamma_2$  et  $\Gamma = \Gamma_1 \times \Gamma_2$  des espaces discrets. Considérons l'algèbre tensorielle  $V = V(\Gamma) = C(\Gamma_1) \hat{\otimes} C(\Gamma_2)$ ,  $C(\Gamma_i)$  étant l'algèbre de Banach des fonctions bornées sur  $\Gamma_i$  ( $i = 1, 2$ ). Les éléments de  $V(\Gamma)$  sont les fonctions  $\varphi : \Gamma \rightarrow \mathbb{C}$  qui peuvent s'écrire  $\varphi = \sum_{i=1}^{\infty} f_i \otimes g_i$  avec  $f_i \in C(\Gamma_1)$ ,  $g_i \in C(\Gamma_2)$  et  $\sum \|f_i\|_{\infty} \|g_i\|_{\infty} < \infty$ ; mais on peut dire aussi que ce sont les fonctions  $\varphi$  qui s'écrivent  $\varphi = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i f_i \otimes g_i$  avec  $f_i : \Gamma_1 \rightarrow \{0, 1\}$ ,  $g_i : \Gamma_2 \rightarrow \{0, 1\}$ ,  $\alpha_i \in \mathbb{C}$  et  $\sum |\alpha_i| < \infty$ . [On le voit en deux étapes : en écrivant  $f_i = f_{i1} + if_{i2} - f_{i3} - if_{i4}$  et de même pour  $g_i$ , on remplace  $f_i \otimes g_i$  par une somme de termes  $\alpha_{jk} f_{ij} \otimes g_{ik}$  avec les  $f$  et  $g$  positifs, ensuite en écrivant  $f = \sum_{t=1}^{\infty} 2^{-t} k_t$  (disons que  $0 \leq f \leq 1$ ) et de même pour  $g$ , on obtient le but].

Soit  $E \subset \Gamma$ .  $E$  est ensemble d'interpolation (pour l'algèbre  $V$ ) si  $V(E) = C(E)$ , c'est-à-dire si chaque fonction bornée sur  $E$  peut être prolongée en une fonction de  $V(\Gamma)$ . Pour démontrer que  $E$  est d'interpolation, il suffit de montrer que les fonctions caractéristiques  $k_F$  ( $F \subset E$ ) sont dans  $V(E)$ . De là, en combinant avec les remarques plus

haut on obtient que  $E$  est d'interpolation si et seulement si pour chaque  $F \subset E$  il existe un nombre fini de rectangles  $R_1, \dots, R_N$  dans  $\Gamma$  tels que  $F = (R_1 \cup \dots \cup R_N) \cap E$ .

Si  $\Delta \subset \Gamma$ , on notera  $R(\Delta)$ , le rectangle engendré par  $\Delta$ , l'ensemble  $\pi_1 \Delta \times \pi_2 \Delta$ , où  $\pi_i : \Gamma \rightarrow \Gamma_i$  est la projection canonique ( $i = 1, 2$ ).

Soient  $a, b \in E$ . On dit que  $a \underset{E}{\sim} b$ ,  $a$  et  $b$  liés dans  $E$ , si et seulement si  $\text{Card}(R(a, b) \cap E) \geq 3$ .

Une coloration  $X$  de  $E$  est une application  $X : E \rightarrow \{1, 2, 3, \dots\}$  telle que  $a \underset{E}{\sim} b \implies X(a) \neq X(b)$ .

Le nombre chromatique  $K(E)$  de  $E$  est le nombre minimal de couleurs nécessaires pour colorer  $E$  :  $K(E) = \inf \{N \mid \exists \text{ coloration } X : E \rightarrow \{1, 2, \dots, N\}\}$  (on prend  $\inf \emptyset = +\infty$ ).

Théorème ([2]).  $E \subset \Gamma$  est ensemble d'interpolation (pour  $V$ ) si et seulement si  $K(E) < +\infty$ .

Démonstration. Soit  $K(E) = N < +\infty$ . Soit  $E = E_1 \cup \dots \cup E_N$  une décomposition chromatique de  $E$  (c'est-à-dire  $E_i = X^{-1}(i)$  pour une coloration minimale  $X$  de  $E$ ).

Soit  $F \subset E$ .  $F = F_1 \cup \dots \cup F_N$  avec  $F_i = F \cap E_i$ . On vérifie facilement que  $(R(F_1) \cup \dots \cup R(F_N)) \cap E = F$ . Donc  $E$  est d'interpolation.

Dans l'autre direction c'est plus compliqué. En utilisant le fait que  $E$  est ensemble de Sidon (voir [2]) on peut démontrer (loc. cit.) que  $E = E_1 \cup \dots \cup E_p$  où les  $E_j$  ( $j = 1, \dots, p$ ) sont des sections disjointes, c'est à dire que pour chaque  $E_j$

$\pi_1$  ou  $\pi_2$  est injectif. Il existe des rectangles  $R_{jk}$  ( $j = 1, \dots, p, k = 1, \dots, q_j$ ), disjoints pour  $j$  fixé, tels que  $\bigcup_k R_{jk} \cap E = E_j$ . Grâce à la structure spéciale des  $E_j$  on obtient une coloration avec  $\sum q_j$  couleurs si on utilise une couleur différente pour chaque  $R_{jk}$ . Ceci achève la démonstration.

Démontrons encore le lemme

Lemme.  $K(E) = \sup\{K(F) \mid F \subset E, \text{Card } F < \infty\}$ .

Démonstration.  $K(E) \geq K(F)$ , donc il reste à démontrer que si  $K(F) \leq N$  pour chaque  $F$  fini alors  $K(E) \leq N$ . Or, posons  $I = \{1, \dots, N\}$  et  $I^E = \{X : E \rightarrow I\}$  avec la topologie du produit. Pour chaque  $F \subset E$  fini, soit  $\Phi_F = \{X \in I^E \mid X|_F \text{ est une coloration de } F\}$ .  $\Phi_F \neq \emptyset$  et  $\Phi_F$  est fermé. Aussi  $\Phi_{F_1} \cap \dots \cap \Phi_{F_p} \supset \Phi_{F_1 \cup \dots \cup F_p} \neq \emptyset$ .  $I^E$  étant compact, il en découle que  $\bigcap_F \Phi_F \neq \emptyset$ , et il est clair qu'un  $X$  qui est coloration pour chaque  $F$ , l'est aussi pour  $E$ .

## § 2. Bisections

Le paragraphe précédent donne une motivation pour étudier un problème tout à fait combinatoire : prendre un ensemble  $E \subset \Gamma$  et étudier son nombre chromatique. Le lemme, là, indique qu'il ne s'agit pas seulement de décider si  $K(E)$  est fini ou non, mais, en particulier pour les  $E$  finis, d'obtenir des évaluations plus précises de  $K(E)$ .

Considérons le cas spécial où  $E$  est une bisection [1]. Rappelons que  $E \subset \Gamma$  est une bisection s'il existe une décomposition  $E = E_1 \cup E_2$  ( $E_1 \cap E_2 = \emptyset$ ) telle que  $\pi_i$

est injectif sur  $E_i$  ( $i = 1, 2$ ). Pour chaque  $a \in E_1$  il existe au plus un élément dans  $E_2$ , notons-le  $da$ , tel que  $\pi_2 a = \pi_2 da$ . On a donc une application  $d : E_1 \rightarrow E_2$ , définie sur une partie de  $E_1$ . De même on a  $d : E_2 \rightarrow E_1$  telle que  $\pi_1 b = \pi_1 db$  chaque fois que  $b \in E_2$  et qu'il existe un tel  $db \in E_1$ . Deux points  $a$  et  $b$  de  $E$  sont liés si et seulement si une (au moins) des relations suivantes est satisfaite :

$$(*) \begin{cases} \text{(i)} & d^2 a = b, & \text{(ii)} & d^2 b = a \\ \text{(iii)} & d^2 a = db, da \neq b & \text{(iv)} & d^2 b = da, db \neq a. \end{cases}$$

Les cas typiques sont resp.

$$\begin{array}{cccc} & & & x \\ x \underline{0} & \underline{0} & 0 \ x \ \underline{x} & 0 \ \underline{x} \\ \underline{0} & , \ \underline{0} \ x & , \ \underline{0} & , \ \underline{0} \end{array} .$$

( $x =$  élément de  $E_1$ ,  $0 =$  élément de  $E_2$ ;  $a$  et  $b$  sont soulignés).

Disons que  $a$  et  $b$  sont connectés dans  $E$  s'il existe  $m > 0$  et  $n > 0$  tels que  $d^m a = d^n b$ . C'est une relation d'équivalence et il suit de (\*) qu'on peut colorer les classes d'équivalence de  $E$  indépendamment. Supposons alors désormais que la bissection  $E$  soit connexe (tous ses points connectés).

Soit  $c \in E$  tel que pour un  $N > 0$  (nécessairement pair) on a  $d^N c = c$ ,  $d^n c \neq c$  ( $1 \leq n < N$ ). On dit alors que  $c$  est cyclique d'ordre  $N$ .  $S = \{dc, d^2c, \dots, d^N c = c\} = \{c_1, c_2, \dots, c_N\}$  est l'ensemble de tous les éléments cycliques de  $E$ . Car soit  $d^M b = b$  pour un  $b \in E$ . On a aussi  $d^m b = d^n c$  (certains  $m$  et  $n$ ;  $E$  est connexe), alors  $b = d^{Mm} b = d^{Mm-m+n} c \in S$ .

On dit que la bisection connexe  $E$  est cyclique d'ordre  $N$  si elle contient un cycle  $S$  avec  $N$  éléments, sinon  $E$  est acyclique. L'arbre  $T_n$  est l'ensemble des éléments  $b \in E \setminus S$  qui "entrent dans  $S$  à la place  $c_n$ ", c'est-à-dire pour lesquels il existe  $h = h(b)$  (la hauteur de  $b$ ) tel que  $d^h b = c_n$ ,  $d^{h-1} b \notin S$ . L'indice  $n$  de l'arbre  $T_n$  est déterminé modulo  $N$ .

Si  $E$  (connexe) est acyclique on définit une coloration  $X : E \rightarrow \{1, 2, 3\}$  en prenant  $a \in E$  quelconque et en définissant  $X(b) = (n - m) \bmod 3$  si  $d^n b = d^m a$ .  $X$  est bien défini (soit aussi  $d^{n'} b = d^{m'} a$ , alors  $d^{m+n'} a = d^{n+n'} b = d^{n+m'} a$ , donc  $m + n' \equiv n + m' \pmod{3}$  car  $E$  est acyclique). Les relations (\*) montrent que  $X$  est une coloration. La même méthode s'applique encore si  $E$  est cyclique avec ordre  $N \equiv 0(6)$ . Si au contraire  $N \equiv 2(6)$  ou  $N \equiv 4(6)$  ça ne va plus, mais il est clair qu'avec quatre couleurs  $\{1, 2, 3, 4\}$  on peut le faire facilement. Donc  $K(E) \leq 4$  si  $E$  est une bisection. Il faut être plus précis pour démontrer qu'il existe des bisections avec nombre chromatique 4 :

Théorème. Soit  $E$  une bisection connexe cyclique avec ordre  $N \not\equiv 0(6)$  telle que aucun arbre est vide et qu'il existe deux arbres avec distance impaire ( $T_n$  et  $T_m$ ,  $n-m$  impair) qui possèdent un élément d'hauteur 2 et deux éléments d'hauteur 1. Alors  $K(E) = 4$ .

Démonstration. Supposons que  $X : E \rightarrow \{1, 2, 3\}$  est une coloration. Il existe un  $m$  tel que  $X(c_m) = X(c_{m+1})$  ( $S = \{c_n\}$  est le cycle de  $E$ ). Sinon on aurait pour  $S$  une coloration comme  $1, 2, 3, 1, 2, 3, 1, \dots$ , mais ça ne se ferme pas si  $N \not\equiv 0(6)$ .

Alors on peut supposer que  $X(c_1) = X(c_2) = 1$ ,  $X(c_3) = 2$ . Soit  $b_n \in T_n$  avec  $h(b_n) = 1$ .  $X(b_3) \neq X(c_1) = 1$ . Si  $X(b_3) = 2$  alors  $X(b_4) = 3$  (car  $X(b_4) \neq X(c_2)$  et  $\neq X(b_3)$ ), et de même  $X(c_4) = 3$ ,  $X(b_5) = X(c_5) = 1$ , etc. Toujours on aurait  $X(c_n) \neq X(c_{n+1})$ , mais on a déjà  $X(c_{N+1}) = X(c_{N+2}) = 1$ . Donc  $X(b_3) = 3$ . Il en découle que  $X(b_4) = X(c_4) = X(c_3) = 2$ . En continuant on trouve que toujours  $X(b_{2m}) = X(c_{2m}) = X(c_{2m-1}) \neq X(c_{2m-2})$  et que  $X(b_{2m-1}) \neq X(c_{2m-1})$ ,  $X(b_{2m-1}) \neq X(c_{2m-2})$  donc  $X(b_{2m-1})$  est la troisième couleur. Prenons maintenant l'arbre spécial avec indice impair, disons  $T_n$ . Pour l'élément  $a_n$  avec hauteur 2 il n'y a plus de couleur, parce que  $b'_n$ ,  $c_n$  et  $c_{n-1}$  occupent les trois couleurs ( $b'_n \in T_n$ ,  $h(b'_n) = 1$ ,  $a_n \neq b'_n$ ). Donc  $X$  n'est pas une coloration et le théorème est démontré.

Le théorème nous permet de construire des ensembles avec nombre chromatique 4, par

exemple :

```

X X X   X
X X     X
X       X
      X
     X
    X
   X
  X
 X

```

```

                                     X
                                   X
                                 X
                               X
                             X
                           X X
                          X X
                         X X
                        X X
                       X X
                      X X
                     X X
                    X X
                   X X
                  X X
                 X X
                X X
               X X
              X X
             X X
            X X
           X X
          X X
         X X
        X X
       X X
      X X
     X X
    X X
   X X
  X X
 X X

```

§ 3. Les ensembles de type  $B_M$

On peut démontrer ([1], § 8) qu'un ensemble  $E \subset \Gamma$  est une bisection si et seulement si pour chaque  $\Delta_1 \subset \Gamma_1$ ,  $\Delta_2 \subset \Gamma_2$ ,  $\Delta_1, \Delta_2$  finis, on a

$$\text{Card}(\Delta_1 \times \Delta_2 \cap E) \ll \text{Card} \Delta_1 + \text{Card} \Delta_2$$

et qu'il est acyclique si l'inégalité est toujours stricte (sauf si  $\Delta_1 = \Delta_2 = \emptyset$ ). C'est une définition plus naturelle que celle du § 2, qui se prête aussi à des généralisations.

En effet, disons que  $E \subset \Gamma$  est un ensemble de type  $B_M$ , et écrivons  $E \in B_M$ , si  $E$  satisfait à

$$(**) \quad \sup_{\substack{\Delta_i \subset \Gamma_i \\ 0 < \text{Card} \Delta_i < \infty}} \text{Card}(\Delta_1 \times \Delta_2 \cap E) = \text{Card} \Delta_1 + \text{Card} \Delta_2 + M.$$

Si  $M \leq -2$ ,  $B_M$  est vide (prendre  $\text{Card} \Delta_1 = \text{Card} \Delta_2 = 1$ ).  $B_{-1}$  est la classe des bisections acycliques,  $B_0$  la classe des bisections cycliques. On peut démontrer que si  $E \in B_M$  alors  $K(E) \leq 4 + M$ , de sorte que tous les ensembles de type  $B_M$  ( $M < \infty$ )

sont d'interpolation. La question se pose d'évaluer la fonction

$$K(M) = \sup \{K(E) \mid E \in B_M\}.$$

On peut démontrer que  $K(1) = 4$  et  $K(2) = 5$ . La démonstration du théorème de § 2 est une indication que ce problème sera peut être assez difficile pour  $M$  grand.

D'autre part, l'ensemble  $E = \Gamma_1 \times Z \subset \Gamma$  ( $Z \subset \Gamma_2$ ) satisfait à

$$K(E) = \text{Card} Z,$$

$$\sup_{\substack{\Delta_i \subset \Gamma_i \\ \Delta_i \text{ finis}}} \frac{\text{Card}(\Delta_1 \times \Delta_2 \cap E)}{\text{Card} \Delta_1 + \text{Card} \Delta_2} = \text{Card} Z,$$

ce qui démontre en particulier que pour chaque  $M$  il existe  $E \in \mathcal{B}_M$  avec  $K(E) = 2$ .

Donnons enfin un exemple d'un ensemble  $E \subset \mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$  ("l'ensemble des sept") qui se décompose en deux sections,  $E = E_1 \cup E_2$  telles que  $\pi_1$  est injectif sur  $E_1$  et sur  $E_2$  (mais  $E$  n'est pas une bisection), et dont le nombre chromatique est  $+\infty$ .

En effet, soit  $\Gamma_1 = \mathbf{Z}_- \times \mathbf{Z}_-$  et  $\Gamma_2 = \mathbf{Z}_-$  où  $\mathbf{Z}_- = \{-1, -2, \dots\}$ ; naturellement  $\Gamma_1 \cong \Gamma_2 \cong \mathbf{Z}$ . Posons pour  $k \geq 1$

$$E_1^{(k)} = \{((-j, -k), -k) ; j > k\},$$

$$E_2^{(k)} = \{((-j, -k), -j) ; j > k\}.$$

Chaque  $E^{(k)} = E_1^{(k)} \cup E_2^{(k)}$  forme un sept, et  $\pi_1$  est injectif sur les  $E_i = \bigcup_{k \geq 1} E_i^{(k)}$ ,  $i = 1, 2$ .

Supposons que  $K(E) = N < +\infty$  et soit  $X : E \rightarrow \{1, \dots, N\}$  une coloration de  $E$ . Alors il existe un sous-ensemble infini monochrome  $F_1^{(1)} \subset E_1^{(1)}$ . Il est maintenant facile à voir qu'on peut extraire un sous-ensemble  $F$  de  $E$  tel que  $F_1^{(1)} \subset F$ , que  $E' = F \setminus E^{(1)}$  est isomorphe à  $E$  (dans un sens immédiat) et que chaque point de  $E'$  est lié avec un point de  $F_1^{(1)}$ . Donc nécessairement  $\text{Card}(X^{-1}(E')) \leq N - 1$ , et cela implique que  $K(E) = K(E') \leq N - 1$ . Il résulte de cette contradiction que  $K(E) = +\infty$ .

#### Bibliographie

- [1] J. D. Stegeman. On Bisections, à paraître
- [2] N. Th. Varopoulos. Tensor algebras over discrete spaces, Journal of Functional Analysis 3 (1969), 321-335.

Ensembles d'analyticité dans les Algèbres Tensorielles

par D.L. Salinger

Soient  $G$  un groupe abélien compact et  $A(G)$  l'algèbre de Banach des séries de Fourier absolument convergentes sur  $G$ . Pour un sous-ensemble fermé  $E$  de  $G$  notons  $I(E)$  l'idéal fermé des fonctions de  $A(G)$  s'annulant sur  $E$  et notons  $A(E) = A(G)/I(E)$  l'algèbre des restrictions à  $E$  des fonctions de  $A(G)$ .

Soit  $R$  une algèbre de Banach commutative, régulière de fonctions à valeurs complexes à spectre compact. Une fonction  $\varphi : [-1,1] \rightarrow \mathbb{C}$  opère sur  $R$  quand  $\varphi f \in R$  pour chaque fonction  $f \in R$  prenant ses valeurs dans  $[-1,1]$ . Nous disons que seules les fonctions analytiques opèrent sur  $R$  si chaque fonction  $\varphi$  qui opère sur  $R$  est prolongeable en fonction analytique dans un voisinage de  $[-1,1]$ . Seules les fonctions analytiques opèrent sur  $A(G)$ .

Soit  $E$  un sous-ensemble fermé de  $G$ .  $E$  sera dite d'analyticité si seules les fonctions analytiques opèrent sur  $A(E)$ . J.P. Kahane et Y. Katznelson [2] ont donné une condition pour qu'un sous-ensemble fermé  $E$  de  $G$  soit d'analyticité : s'il existe une constante réelle  $\alpha > 0$  telle que pour tout réel positif  $r$  il

existe une fonction  $f$  à valeurs réelles appartenant à  $A(E)$  satisfaisant à

$$\|f\|_{A(E)} < r$$

et

$$\|e^{if}\| > e^{\alpha r}$$

alors  $E$  est d'analyticité.

En utilisant ce critère, Y. Katznelson et P. Malliavin ont donné des conditions arithmétiques pour que  $E$  soit d'analyticité [3]. Ils ont aussi fait [4] une vérification statistique, pour une certaine classe d'ensembles, de la conjecture de la dichotomie (tout sous-ensemble fermé d'un groupe compact est soit de Helson soit d'analyticité).

Nous donnons ici des résultats analogues dans le cadre des algèbres tensorielles. Soient  $X, Y$  deux compacts. Notons, comme d'habitude,  $V(X \times Y)$  l'algèbre de Banach  $C(X) \hat{\otimes} C(Y)$ . Pour un sous-ensemble fermé  $E$  de  $X \times Y$  notons  $I(E)$  l'idéal fermé de fonctions de  $V(X \times Y)$  s'annulant sur  $E$  et notons  $V(E) = V(X \times Y)/I(E)$  l'algèbre des restrictions à  $E$  des fonctions de  $V(X \times Y)$ . Seules les fonctions analytiques opèrent sur  $V(X \times Y)$ . Un sous-ensemble fermé  $E$  de  $X \times Y$  sera dit d'analyticité si seules les fonctions analytiques opèrent sur  $V(E)$ .

Remarquons que le critère de Kahane et Katznelson s'applique dans ce cas : il suffit de trouver un groupe compact  $G$  et une application biunivoque continue

$\Psi : X \cup Y \rightarrow G$  telle que  $\Psi(X \cup Y)$  soit un Kronecker. Alors il y a une application biunivoque  $\varphi : X \times Y \rightarrow X + Y$  telle que  $\check{\varphi} : A(X + Y) \xrightarrow{\cong} V(X \times Y)$  soit une isométrie ([8], §4).

Nous considérerons une certaine classe de sous-ensembles de  $X \times Y$ . Appelons  $S$  un carré d'ordre  $n$  si  $S$  est de la forme  $S = X_n \times Y_n$  où  $X_n$  et  $Y_n$  sont des sous-ensembles de  $X$  et  $Y$  respectivement, avec  $\text{card } X_n = \text{card } Y_n = n$ . Nous disons qu'une partie fermée  $E$  de  $X \times Y$  contient des carrés arbitrairement grands si  $E$  contient un carré d'ordre  $n$  pour tout entier positif  $n$ .

Proposition : Soient  $X, Y$  deux compacts et  $E$  un sous-ensemble fermé de  $X \times Y$  contenant des carrés arbitrairement grands. Alors  $E$  est d'analyticité.

Démonstration :  $\mathbb{T}$  désignera le tore. On sait [1] qu'il existe une constante  $\alpha > 0$  telle que pour un réel positif quelconque  $r$  il existe une fonction  $f \in A(\mathbb{T})$  à valeurs réelles satisfaisant à

$$\|f\|_A < r$$

et

$$\|e^{if}\|_A > e^{\alpha r}.$$

Pour un entier positif quelconque  $n$  soit  $\mathbb{Z}(n)$  le groupe des racines  $n$ -ièmes de l'unité plongé dans  $\mathbb{T}$ . Notons  $f_n$  la restriction de  $f$  à  $\mathbb{Z}(n)$ . Alors  $f_n \in A(\mathbb{Z}(n))$  et

$$\|f_n\|_{A(\mathbb{Z}(n))} \leq \|f\|_{A(\mathbb{T})} < r.$$

En utilisant la régularisation de Herz (cf. par exemple [6]) on peut montrer qu'il existe un entier positif  $n = n(r)$  tel que

$$\|e^{if_n}\|_A > e^{\alpha r}.$$

Utilisons maintenant l'application  $M : A(\mathbb{Z}(n)) \rightarrow V(\mathbb{Z}(n) \times \mathbb{Z}(n)) = V(S_n)$  donnée par

$$(Mg)(x,y) = g(x+y)$$

pour tout  $g \in A(\mathbb{Z}(n))$  tout  $x,y \in \mathbb{Z}(n)$ . Cette application est une isométrie,

donc  $h_n = Mf_n \in V(S_n)$  vérifie

$$\|h_n\|_V < r$$

et

$$\|e^{ih_n}\|_V > e^{\alpha r}$$

$h_n$  étant une fonction à valeurs réelles, nous pouvons trouver une fonction

$h \in V(E)$  à valeurs réelles satisfaisant aux deux inégalités au-dessus ; donc  $E$  est d'analyticité.

Nous obtiendrons une amélioration apparente de ce résultat à l'aide des techniques combinatoires.

Théorème : Soient  $X, Y$  deux compacts,  $E$  un sous-ensemble fermé de  $X \times Y$ . Supposons qu'il existe une suite  $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$  de carrés dans  $X \times Y$  telle que  $S_n$  soit d'ordre  $n$  et que pour un nombre infini de carrés,

$$\text{card}(S_n \cap E) > n^{2-\epsilon_n}$$

où  $\epsilon_n \rightarrow 0$  quand  $n \rightarrow \infty$ . Alors  $E$  est d'analyticité.

Démonstration : Le théorème découle de la proposition précédente et du lemme suivant.

Lemme (cf. par exemple [5]) : Soit  $E$  un sous-ensemble du produit  $X \times Y$  de deux ensembles infinis. Supposons qu'il existe une suite  $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$  de carrés dans  $X \times Y$  telle que  $S_n$  soit d'ordre  $n$  et que pour un nombre infini de carrés

$$\text{card}(S_n \cap E) \geq n^{2-\varepsilon_n}$$

où  $\varepsilon_n \rightarrow 0$  quand  $n \rightarrow \infty$ . Alors  $E$  contient des carrés arbitrairement grands.

Démonstration : On peut supposer que pour tout  $n$

$$\text{card}(S_n \cap E) \geq n^{2-\varepsilon_n}$$

et que  $n^{\varepsilon_n}$  soit un entier.

Soit  $S_n = X_n \times Y_n$ . Nous considérerons  $S_n$  comme matrice, alors rang (respectivement colonne) de  $S_n$  notera un ensemble de la forme  $X_n \times y$  (respectivement  $x \times Y_n$ ) où  $y \in Y_n$  (respectivement  $x \in X_n$ ). Soit  $r > 1$  un entier positif et supposons que  $n_0$  est un entier tel que  $rn^{\varepsilon_n} < n$  pour  $n \geq n_0$ . Pour un tel  $n$  nous choisissons un sous-ensemble  $S \subset S_n$  composé de  $rn^{\varepsilon_n}$  rangs de  $S_n$  tel que

$$\text{card}(S \cap E) \geq rn.$$

Notons  $S^{(1)}$  l'ensemble des colonnes de  $S$  qui contiennent au moins  $r$  points de  $E$ . Posons  $S^{(2)} = S \setminus S^{(1)}$ .

Soit  $s$  le nombre de colonnes de  $S^{(1)}$ , alors

$$\text{card}(S^{(2)} \cap E) \leq (n-s)(r-1),$$

donc, en posant  $rn^{\varepsilon_n} = t$ ,

$$st + (n-s)(r-1) \geq \text{card}(S \cap E)$$

$$\geq rn$$

alors

$$st \geq n.$$

Dans chaque colonne de  $S$ ,  $r$  points peuvent être rangés de  ${}^r C_t$  façons. Alors si  $S^{(1)}$  contient plus de  $(r-1) {}^r C_t$  colonnes c'est-à-dire si

$$s > (r-1) {}^r C_t,$$

nous obtenons un carré d'ordre  $r$  dans  $S^{(1)} \cap E$ . Mais

$$\begin{aligned} (r-1) {}^r C_t &< t^r \\ &= r^r n^{r\epsilon_n} \end{aligned}$$

et

$$s \geq n^{1-\epsilon_n}/r.$$

Donc quand  $n$  est suffisamment grand,  $S_n \cap E$  contient un carré d'ordre  $r$ .

Nous ne savons pas si le lemme ci-dessus est le meilleur possible. Dans le sens contraire T. Kovari, V.T. Sos et P. Turan [5] ont construit un ensemble  $E$  ne contenant pas de carrés d'ordre 2 mais tel qu'il existe une suite  $\{S_p\}_p$  premier de carrés avec  $S_p$  d'ordre  $p^2$  et

$$\text{card}(S_p \cap E) = p^3.$$

Par des techniques tout à fait différentes (c'est-à-dire suivant les méthodes de Katznelson et Malliavin [3], [4]) on peut montrer le théorème suivant.

Théorème [7] : Soient  $X, Y$  deux compacts;  $E$  un sous-ensemble fermé de  $X \times Y$ .

Soit  $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$  une suite de carrés de  $X \times Y$  avec  $S_n$  d'ordre  $n$ . Notons  $\delta_n$

la mesure de Dirac en un point  $x \in X \times Y$  et notons  $\Delta_n = \{\delta_n\}_{x \in S_n}$ . Soit  $\theta_n$  une mesure aléatoire équadistribuée dans  $\Delta_n$ . Soit  $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$  une suite d'entiers positifs et posons

$$\xi_n = \frac{1}{p_n} \sum_{j=1}^{p_n} \theta_{nj}$$

où les  $\theta_{nj}$  sont des copies de  $\theta_n$  telles que  $\{\theta_{nj}\}_{j=1}^{p_n}, n=1, \infty$  est un ensemble indépendant. Posons  $E_n = \text{supp } \xi_n$ .

Alors si  $np_n^{-1} \rightarrow 0$  quand  $n \rightarrow \infty$ , l'ensemble  $H = \overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n}$  est presque sûrement d'analyticité.

Références

- [1] H. HELSON, J.P. KAHANE, Y. KATZNELSON, W. RUDIN.- The functions which operate on Fourier transforms. Acta Math 102 (1959) 135-157.
- [2] J.P. KAHANE, Y. KATZNELSON.- Contribution à deux problèmes concernant les fonctions de la classe A. Israël J. Math 1 (1963) 110-131.
- [3] Y. KATZNELSON, P. MALLIAVIN.- Un critère d'analyticité pour les algèbres de restriction. C. R. Acad. Sci. Paris 261 (1965) 4964-4967.
- [4] Y. KATZNELSON, P. MALLIAVIN.- Vérification statistique de la conjecture de la dichotomie sur une classe d'algèbres de restriction. C. R. Acad. Sci. Paris 262 (1966) 490-492.
- [5] T. KOVARI, V.T. SOS, P. TURAN.- On a problem of K. Zarankiewicz. Colloq. Math. 3 (1954) 50-57.
- [6] W. RUDIN.- Fourier Analysis on Groups. p. 168-169, Interscience.
- [7] D.L. SALINGER.- Large squares and sets of analyticity. A paraître.
- [8] N.Th. VAROPOULOS.- Tensor algebras and harmonic analysis. Acta Math. 119 (1967) 51-112.

Semi-groupes de mesures

par J. Faraut

$G$  groupe abélien localement compact

$\Gamma$  groupe dual

$B(\Gamma)$  espace des transformées de Fourier des mesures bornées sur  $G$ .

Les fonctions de  $B(\Gamma)$  sont caractérisées par la propriété suivante

Théorème. Soit  $\varphi$  une fonction continue sur  $\Gamma$ , pour que  $\varphi = \mathfrak{F}\mu$ ,  $\|\mu\| \leq A$ , il faut

et suffit que pour tout polynôme trigonométrique sur  $G$

$$f(x) = \sum_{k=1}^n c_k(x, \gamma_k)$$

on ait

$$\left| \sum_{k=1}^n c_k \varphi(\gamma_k) \right| \leq A \|f\|_{\infty}$$

(Rudin, Fourier analysis on groups, p. 32).

Proposition 1. Soit  $\psi$  une fonction continue sur  $\Gamma$  telle que pour tout  $t > 0$

$e^{-t\psi} = \mathfrak{F}\mu_t$ ,  $\|\mu_t\| \leq 1$ , alors pour tout polynôme trigonométrique sur  $G$

$$f(x) = \sum_{k=1}^n c_k(x, \gamma_k) \text{ tel que } f(0) = \|f\|_{\infty}$$

on a

$$\operatorname{Re} \sum_{k=1}^n c_k \psi(\gamma_k) \geq 0.$$

En effet d'après le théorème précédent

$$\forall t > 0, \quad \left| \sum_{k=1}^n c_k e^{-t\psi(\gamma_k)} \right| \leq f(0) = \sum_{k=1}^n c_k$$

donc

$$\forall t > 0, \quad \operatorname{Re} \sum_{k=1}^n c_k (1 - e^{-t\psi(\gamma_k)}) \geq 0$$

et en passant à la limite quand  $t$  tend vers 0

$$\operatorname{Re} \sum_{k=1}^n c_k \psi(\gamma_k) \geq 0$$

Proposition 2. Supposons  $G$  compact, soit  $\psi$  une fonction définie sur  $\Gamma$  telle que  
pour tout polynôme trigonométrique sur  $G$

$$f(x) = \sum_{k=1}^n c_k(x, \gamma_k) \quad \text{tel que} \quad f(0) = \|f\|_{\infty}$$

on ait

$$\operatorname{Re} \sum_{k=1}^n c_k \psi(\gamma_k) \geq 0$$

alors, pour tout  $t > 0$ ,  $e^{-t\psi} = \mathcal{F}\mu_t$ ,  $\|\mu_t\| \leq 1$ .

Soit  $C(G)$  l'espace des fonctions continues sur  $G$ . Pour tout polynôme trigonométrique sur  $G$

$$f(x) = \sum_{k=1}^n c_k(x, \gamma_k)$$

posons

$$Af(x) = \sum_{k=1}^n c_k \psi(\gamma_k)(x, \gamma_k).$$

Ceci définit un opérateur  $(D_A, A)$  en général non borné de domaine dense dans  $C(G)$  (l'espace des polynômes trigonométriques). Soit  $f$  un polynôme trigonométrique dont le module est maximum en  $x_0$ , et  $f(x_0) > 0$ , la fonction  $g$  définie par  $g(x) = f(x + x_0)$  vérifie

$$g(0) = \|g\|_{\infty}$$

$$g(x) = \sum_{k=1}^n c_k(x_0, \gamma_k)(x, \gamma_k)$$

donc, d'après l'hypothèse faite sur la fonction  $\psi$

$$\operatorname{Re} \sum_{k=1}^n c_k(x_0, \gamma_k) \psi(\gamma_k) \geq 0$$

c'est à dire

$$\operatorname{Re} Af(x_0) \geq 0.$$

L'opérateur  $(D_A, A)$  vérifie le principe du maximum du module. En considérant  $f(x) = (x, \gamma)$ ,

on obtient  $\operatorname{Re} \psi(\gamma) \geq 0$ . Pour tout  $z > 0$ ,  $(zI+A)D_A = D_A$ . Il en résulte que les opérateurs

$P_t$  définis par

$$P_t f(x) = \sum_{k=1}^n c_k e^{-t\psi(\gamma_k)}(x, \gamma_k)$$

se prolongent en des contractions sur  $C(G)$ .

(C. R. Acad. Sc. Paris, t. 267, 1968, p. 257, Proposition 2).

Ce qui se traduit par

$$\forall t > 0, \left| \sum_{k=1}^n c_k e^{-t\psi(\gamma_k)} \right| \leq \|f\|_{\infty}.$$

D'où le résultat en utilisant le théorème.

Proposition 3. Soit  $\psi$  une fonction continue sur  $\mathbb{R}$  telle que pour tout polynôme trigonométrique

$$f(x) = \sum_{k=1}^n c_k e^{i\alpha_k x}, \quad \text{vérifiant } f(0) = \|f\|_{\infty}$$

on ait

$$\operatorname{Re} \sum_{k=1}^n c_k \psi(\alpha_k) \geq 0$$

alors, pour tout  $t > 0$ ,  $e^{-t\psi} = \mathcal{F} \mu_t$ ,  $\|\mu_t\| \leq 1$ .

Soit  $f$  un polynôme trigonométrique

$$f(x) = \sum_{k=1}^n c_k e^{i\alpha_k x}$$

il existe  $\xi_{kj}, \beta_j$  ( $j = 1, \dots, p$ ) tels que

$$\alpha_k = \sum_{j=1}^p \xi_{kj} \beta_j$$

les nombres  $\beta_j$  sont des réels indépendants sur  $\mathbb{Q}$ , et les nombres  $\xi_{kj}$  des entiers

relatifs. Considérons le polynôme trigonométrique  $g$  sur  $\mathbb{T}^p$

$$g(y_1, \dots, y_p) = \sum_{k=1}^n c_k e^{i(\xi_{k1}y_1 + \dots + \xi_{kp}y_p)}$$

on a

$$f(x) = g(\beta_1 x, \dots, \beta_p x).$$

Posons

$$\Psi(\gamma_1, \dots, \gamma_p) = \Psi(\beta_1 \gamma_1 + \dots + \beta_p \gamma_p).$$

Ceci définit une fonction sur  $\mathbb{Z}^p$ . Soit  $h$  un polynôme trigonométrique sur  $\mathbb{T}^p$

$$h(x) = \sum_k a_{k_1 k_2 \dots k_p} e^{i(\gamma_{k1} y_1 + \dots + \gamma_{kp} y_p)} \quad (k = (k_1, \dots, k_p)).$$

Supposons  $g(0) = \|g\|_\infty$  et posons

$$h^*(x) = h(\beta_1 x, \dots, \beta_p x)$$

alors  $h^*(0) = \|h^*\|_\infty$  et par suite de l'hypothèse faite sur  $\Psi$

$$\operatorname{Re} \sum_k a_{k_1 \dots k_p} \Psi(\gamma_{k1} \beta_1 + \dots + \gamma_{kp} \beta_p) \geq 0$$

c'est à dire

$$\operatorname{Re} \sum_k a_{k_1 \dots k_p} \Psi(\gamma_{k1}, \dots, \gamma_{kp}) \geq 0.$$

La fonction  $\Psi$  vérifie donc les hypothèses de la proposition 2, et pour tout polynôme trigonométrique sur  $\mathbb{T}^p$

$$h(x) = \sum_k a_{k_1 k_2 \dots k_p} e^{i(\gamma_{k1} y_1 + \dots + \gamma_{kp} y_p)}$$

$$\left| \sum_k a_{k_1 \dots k_p} e^{-t \Psi(\gamma_{k_1}, \dots, \gamma_{k_p})} \right| \leq \|h\|_\infty$$

en particulier pour le polynôme  $g$ , et comme

$$\Psi(\xi_{k_1}, \dots, \xi_{k_p}) = \Psi(\xi_{k_1} \beta_1 + \dots + \xi_{k_p} \beta_p) = \Psi(\alpha_k)$$

$$\left| \sum_{k=1}^n c_k e^{-t \Psi(\alpha_k)} \right| \leq \|g\|_\infty$$

D'autre part, les nombres  $\beta_j$  étant indépendants, l'application de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{T}^p$

$$x \rightarrow (\beta_1 x, \dots, \beta_p x)$$

a une image dense dans  $\mathbb{T}^p$ , donc  $\|f\|_\infty = \|g\|_\infty$  et

$$\left| \sum_{k=1}^n c_k e^{-t \Psi(\alpha_k)} \right| \leq \|f\|_\infty$$

d'où le résultat en utilisant le théorème.

Remarque : La démonstration de la proposition 3 se généralise sans difficulté au cas

$$G = \mathbb{R}^m.$$

Proposition 4. Supposons  $G$  compact, où  $G = \mathbb{R}^m$ . Soit  $\psi$  une fonction continue sur  $\Gamma$ ,

les deux propriétés suivantes sont équivalentes

a) Pour tout  $t$  réel,  $e^{+t\psi}$  appartient à  $B(\Gamma)$  et  $\|e^{+t\psi}\| \leq e^{w|t|}$ ,  $w \geq 0$

b) Pour tout polynôme trigonométrique

$$f(x) = \sum_{k=1}^n c_k(x, \gamma_k) \text{ vérifiant } f(0) = \|f\|_\infty$$

on a

$$\left| \operatorname{Re} \sum_{k=1}^n c_k \psi(\gamma_k) \right| \leq wf(0).$$

Cette proposition est un corollaire direct des propositions 2 et 3.

Dérivabilité de la fonction de Riemann en certains points

par Hervé Queffélec

d'après Joseph Gerver

I. Introduction. Soit  $f(x) = \sum_1^{\infty} \frac{\sin(n^2 x)}{n^2}$  ; Riemann avait conjecturé que cette fonction était partout non dérivable, et Hardy avait partiellement confirmé cette conjecture, en montrant par exemple que  $f$  n'était pas dérivable aux points de la forme  $\xi\pi$ , où  $\xi$  était irrationnel ; mais Gerver a montré que  $f$  était dérivable en certains points, notamment au point  $\pi$ . C'est ce qu'on va montrer.

II. Dérivabilité de  $f$  au point  $\pi$  : On va montrer que  $f'(\pi) = -\frac{1}{2}$ . Il revient au même de montrer que  $\sum_1^{\infty} \frac{\sin[n^2(x+\pi)]}{n^2}$  est dérivable en zéro, avec pour dérivée  $-\frac{1}{2}$ . Or,

$$\sum_1^{\infty} \frac{\sin[n^2(x+\pi)]}{n^2} = \sum_1^{\infty} (-1)^{n^2} \frac{\sin(n^2 x)}{n^2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin(2k+2)^2 x}{(2k+2)^2} - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin(2k+1)^2 x}{(2k+1)^2} .$$

Tout revient à montrer que

$$g(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \left( \frac{\sin(2k+1)^2 x}{(2k+1)^2} - \frac{\sin(2k+2)^2 x}{(2k+2)^2} \right) \text{ a pour dérivée à droite } +\frac{1}{2} \text{ au point } 0.$$

On utilisera les notations suivantes :  $n$  est un entier variable, qui tend vers  $+\infty$ . On

prend  $0 < x < \frac{1}{n^2}$ . On pose, pour  $i \geq 1$ ,  $S(i) = \frac{\sin(i^2 x)}{i^2}$ , car on raisonnera la plupart du

temps à  $x$  fixé. On a donc à considérer :

$$\sum_{k=0}^{\infty} [S(2k+1) - S(2k+2)].$$

On divise cette expression en 3 parties :

$$\sum_{k=0}^{a-1} \quad \sum_{k=a}^{b-1} \quad \sum_{k=b}^{\infty}, \quad \text{où } a \text{ et } b \text{ sont les entiers déterminés par}$$

$$a - 1 < \frac{1}{n\sqrt{x}} \leq a$$

$$b - 1 < \frac{1}{nx} \leq b.$$

On montre que

$$1) \quad \sum_{k=0}^{a-1} = O\left(\frac{x}{n}\right)$$

$$2) \quad \sum_{k=a}^{b-1} = \frac{x}{2} + O\left(\frac{x}{n}\right)$$

$$3) \quad \sum_{k=b}^{\infty} = O\left(\frac{x}{n}\right).$$

1) Valeurs de k inférieures ou égales à a-1 :

$$k \leq a-1 \implies 2k+2 \leq 2a \leq \frac{4}{n\sqrt{x}} \implies (2k+2)^2 x \leq \frac{16}{n} \leq \frac{\pi}{2}, \quad \text{dès que } n \geq 4. \text{ A fortiori,}$$

$$(2k+1)^2 x \leq \frac{\pi}{2}, \quad \text{si } n \geq 5.$$

Si  $0 < i < j \leq a-1$ , on a  $S(i) \geq S(j)$ , car  $S(i) - S(j)$ , comme fonction de  $x$ , est nulle en 0, et a à droite de 0 une dérivée  $\cos i^2 x - \cos j^2 x$  positive, la fonction cosinus décroissant sur  $[0, \frac{\pi}{2}]$ . Donc,

$$\left| \sum_{k=0}^{a-1} [S(2k+1) - S(2k+2)] \right| = \sum_{k=0}^{a-1} [S(2k+1) - S(2k+2)] \leq \sum_{k=0}^{a-1} [S(2k+1) - S(2k+3)]$$

$$= S(1) - S(2a+1) = \sin x - \frac{\sin(2a+1)^2 x}{(2a+1)^2}$$

$$\leq x - \frac{\sin(2a+1)^2 x}{(2a+1)^2} \leq \frac{(2a+1)^6 x^3}{6(2a+1)^2} \leq \frac{3^4}{6} a^4 x^3$$

$$\ll \frac{3^4}{6} \frac{16}{n^4} \frac{3}{2^x} = O\left(\frac{x}{n^4}\right) = O\left(\frac{x}{n}\right).$$

(on a utilisé  $u - \sin u \ll \frac{u^3}{6}$ , pour  $u > 0$ ).

2) Valeurs de k comprises entre a et b-1 : il nous faut d'abord un lemme

$$\text{Lemme 1 : } |S(i) - 2S(i+1) + S(i+2)| \ll 4x^2 + \frac{6x}{i^2} + \frac{6}{i^4}.$$

On utilise la majoration classique  $|S(i) - 2S(i+1) + S(i+2)| \ll \max_{i \leq t \leq i+2} |S''(t)|$ ,

où  $S(t) = \frac{\sin(t^2 x)}{t^2}$ ,  $x$  étant considéré comme un paramètre. Il suffit de calculer  $S''(t)$  :

$$S''(t) = -4x^2 \sin(t^2 x) - 6x \frac{\cos(t^2 x)}{t^2} + \frac{6 \sin(t^2 x)}{t^4}. \text{ Et on majore } |\sinus| \text{ et } |\cosinus| \text{ par}$$

1.

Soit maintenant  $c$  l'entier déterminé par  $c-1 \ll \frac{1}{\sqrt{x}} < c$ . Nous avons

$$S(2k+1) - S(2k+2) - \frac{1}{2}(S(2k+1) - S(2k+3)) = \frac{1}{2}[S(2k+1) - S(2k+2) + S(2k+3)]$$

$$\implies |S(2k+1) - S(2k+2) - \frac{1}{2}(S(2k+1) - S(2k+3))| \ll 2x^2 + \frac{3x}{k^2} + \frac{3}{k^4}. \text{ On va sommer ces inéga-}$$

lités de  $a$  à  $b-1$ , en passant par  $c$ .

(Il est évident que  $a \ll c \ll b$ ). Ecrivons symboliquement  $| \quad |$  pour

$$|S(2k+1) - S(2k+2) - \frac{1}{2}(S(2k+1) - S(2k+3))|. \text{ Nous avons } \sum_{k=a}^{c-1} | \quad | \ll c(2x^2 + \frac{3x}{a^2} + \frac{3}{a^4}). \text{ Le}$$

second membre est de l'ordre de  $n^4 \frac{x^2}{\sqrt{x}} = n^4 \sqrt{x} x$ . Or,  $n^4 \sqrt{x} < \frac{1}{n}$ , puisque  $0 < x < \frac{1}{10}$ .

$$\text{Donc : } \sum_{k=a}^{c-1} | \quad | = O\left(\frac{x}{n}\right)$$

$$\sum_{k=c}^{b-1} | \quad | \ll b(2x^2 + \frac{3x}{c^2} + \frac{3}{c^4}). \text{ Le second membre est de l'ordre de } bx^2, \text{ c'est à dire}$$

précisément de  $\frac{x}{n}$ .

$$\text{Donc, } \sum_{k=a}^{b-1} | \quad | = O\left(\frac{x}{n}\right), \text{ et } \left| \sum_{k=a}^{b-1} [S(2k+1) - S(2k+2) - \frac{1}{2}(S(2k+1) - S(2k+3))] \right| = O\left(\frac{x}{n}\right).$$

Ou encore :

$$\left| \sum_{k=a}^{b-1} [S(2k+1) - S(2k+2)] - \frac{1}{2}(S(2a+1) - S(2b+1)) \right| = O\left(\frac{x}{n}\right).$$

Or,

$$|S(2b+1)| \ll \frac{1}{b} \ll \frac{1}{n} \frac{2^2}{x^2} = O\left(\frac{x}{n}\right). \text{ Et } |S(2a+1) - x| = O\left(\frac{x}{4}\right) = O\left(\frac{x}{n}\right), \text{ comme on l'a vu dans}$$

l'étude des valeurs de  $k$  inférieures ou égales à  $a-1$ . D'où :

$$\sum_{k=a}^{b-1} [S(2k+1) - S(2k+2)] = \frac{x}{2} + O\left(\frac{x}{n}\right).$$

3) Valeurs de  $k$  supérieures ou égales à  $b$  : alors que le groupement  $S(2k+1) - S(2k+2)$  était l'essentiel dans le 2), puisqu'il a permis de faire apparaître la valeur  $\frac{1}{2}$  de la dérivée de  $g$ , avec l'apparition de  $\frac{x}{2}$ , il ne sert plus à rien dans cette partie. On va montrer en fait que :

$$\left| \sum_{k=b}^{\infty} S(2k+1) \right| = O\left(\frac{x}{n}\right) \text{ et } \left| \sum_{k=b}^{\infty} S(2k+2) \right| = O\left(\frac{x}{n}\right). \text{ Les calculs étant parallèles,}$$

on fera seulement la démonstration pour  $\left| \sum_{k \geq b} S(2k+1) \right|$ . On utilisera le lemme suivant de van der Corput (Zygmund, Trigonometric Series, tome 1, page 198).

Lemme 2 : si  $f$  est réelle, deux fois continûment dérivable sur  $[\alpha, \beta]$ , si  $f'' \geq \rho > 0$  sur  $[\alpha, \beta]$ , on a  $\left| \sum_{\alpha < k \leq \beta} e^{2i\pi f(k)} \right| \ll [f'(\beta) - f'(\alpha) + 2] \left( A + \frac{4}{\sqrt{\rho}} \right)$ , où  $A$  est une constante universelle, qui ne dépend pas de la fonction  $f$ .

On applique le lemme 2 avec

$$f(k) = \frac{(2k+1)^2 x}{2\pi} \implies f''(k) = \frac{8x}{\pi} = \rho = \text{constante.}$$

$$\left| \sum_{\alpha < k < \beta} e^{2i\pi f(k)} \right| = \left| \sum_{\alpha < k < \beta} e^{i(2k+1)^2 x} \right| \ll \left| 2 + \frac{8x}{\pi}(\beta - \alpha) \right| \left( A + 4\sqrt{\frac{\pi}{8x}} \right).$$

On divise les entiers supérieurs ou égaux à  $b$  en blocs successifs  $R_u$  de  $j$  éléments

consécutifs,  $j$  étant l'entier :  $j = \left[ \frac{n^2}{\sqrt{x}} \right] + 1$ . Ainsi :

$$R_1 = \{b, b+1, \dots, b+j-1\}, \quad R_2 = \{b+j, \dots, b+2j-1\}, \dots$$

On va montrer que

$$\left| \sum_{k \in R_u} S(2k+1) \right| \ll C \frac{j}{n^2 t^2}, \quad \text{où } C \text{ est une constante universelle, et où } t$$

désigne le plus petit élément de  $R_u$ .  $R_u = \{t, t+1, \dots, t+j-1\}$ . Posons

$$U_t = e^{i(2t+1)^2 x} = \sum_{t-1 < k \leq t} e^{i(2k+1)^2 x}$$

$$U_{t+1} = e^{i(2t+1)^2 x} + e^{i(2t+3)^2 x} = \sum_{t-1 < k \leq t+1} e^{i(2k+1)^2 x}$$

⋮

$$U_{t+j-1} = e^{i(2t+1)^2 x} + \dots + e^{i(2t+2j-1)^2 x} = \sum_{t-1 < k \leq t+j-1} e^{i(2k+1)^2 x}. \quad \text{Nous avons :}$$

$$\sum_{k \in R_u} S(2k+1) = \operatorname{Im} \left\{ \frac{e^{i(2t+1)^2 x}}{(2t+1)^2} + \frac{e^{i(2t+3)^2 x}}{(2t+3)^2} + \dots + \frac{e^{i(2t+2j-1)^2 x}}{(2t+2j-1)^2} \right\}$$

$$\sum_{k \in R_u} S(2k+1) = \operatorname{Im} \left\{ \frac{U_t}{(2t+1)^2} + \frac{U_{t+1} - U_t}{(2t+3)^2} + \dots + \frac{U_{t+j-1} - U_{t+j-2}}{(2t+2j-1)^2} \right\}$$

Pour  $0 \leq \ell \leq j-1$ , on a :

$$\begin{aligned} |U_{t+\ell}| &= \left| \sum_{t-1 < k \leq t+\ell} e^{i(2k+1)^2 x} \right| \ll \left[ 2 + \frac{8x}{\pi} (\ell+1) \right] (A + 2\sqrt{\frac{\pi}{x}}) \\ &\ll \left( 2 + \frac{8xj}{\pi} \right) (A + 2\sqrt{\frac{\pi}{x}}). \end{aligned}$$

Or,  $jx \ll 1$ , donc le second membre est de l'ordre de grandeur de  $\frac{1}{\sqrt{x}}$ . On peut donc écrire

(utilisant  $|\operatorname{Im} z| \leq |z|$ ) :

$$\left| \sum_{k \in R_u} S(2k+1) \right| \ll \frac{C}{\sqrt{x}} \left[ \frac{1}{(2t+1)^2} - \frac{1}{(2t+2j-1)^2} + \frac{1}{(2t+2j-1)^2} \right]$$

$\ll \frac{C}{t^2 \sqrt{x}}$ , où  $C$  est une constante universelle. Or,

$\frac{1}{t\sqrt{x}} \ll \frac{j}{n^2 t^2}$ , par choix de  $j$ . D'où :  $|\sum_{k \in R_u} S(2k+1)| \ll \frac{C j}{n^2 t^2}$ . C'est ce qu'on voulait montrer.

Or,  $t \gg b \gg \frac{1}{nx}$ , donc  $t \gg j$ , donc  $t+j \ll 2t$ , donc

$$(t+j)^2 \ll 4t^2 \implies \frac{1}{t^2} \ll \frac{4}{(t+j)^2}, \implies |\sum_{k \in R_u} S(2k+1)| \ll \frac{4C}{n^2} \sum_{k \in R_u} \frac{1}{k^2}. \quad \text{D'où :}$$

$$|\sum_{k \gg b} S(2k+1)| \ll \frac{4C}{n^2} \sum_{k \gg b} \frac{1}{k^2} \ll \frac{8C}{n^2} \frac{1}{b} \ll \frac{8C}{n^2} nx = O\left(\frac{x}{n}\right). \quad \text{Même estimation pour } |\sum_{k \gg b} S(2k+2)|.$$

$$\text{Donc : } \left| \sum_{k \gg b} [S(2k+1) - S(2k+2)] \right| = O\left(\frac{x}{n}\right).$$

On a donc montré qu'il existe une constante universelle  $D$  telle que

$$|g(x) - \frac{x}{2}| \ll D \frac{x}{n}, \quad \text{pour } 0 < x < \frac{1}{10}.$$

Il est alors immédiat que  $g'(0)$  existe et vaut  $\frac{1}{2}$ .

III. Généralisations. On a montré le théorème suivant

**Théorème 1.**  $\sum_{k=0}^{\infty} \left[ \frac{\sin(2k+1)^2 x}{(2k+1)^2} - \frac{\sin(2k+2)^2 x}{(2k+2)^2} \right]$  est dérivable en 0, avec pour dérivée

$$+ \frac{1}{2}.$$

On peut facilement, en adaptant point par point les méthodes employées pour la démonstration du théorème 1, obtenir le

**Théorème 1 bis.** Soient  $\mu, \nu, \lambda$  trois entiers tels que  $0 < \mu < \nu \leq \lambda$ , et  $\tau$  un réel

tel que  $-\frac{\pi}{2} \leq \tau \leq -\frac{\pi}{\lambda}$ , ou  $0 \leq \tau \leq \frac{\pi}{2}$ . Alors

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left[ \frac{\sin[(\lambda k + \mu)^2 x + \tau]}{(\lambda k + \mu)^2} - \frac{\sin[(\lambda k + \nu)^2 x + \tau]}{(\lambda k + \nu)^2} \right] \quad \text{a une dérivée à droite en zéro,}$$

qui vaut  $\frac{(\nu - \mu)}{\lambda} \cos \tau$ .

A partir du théorème 1 bis, on obtient facilement le

Théorème 1 ter. Soient  $\mu, \nu, \lambda$  trois entiers tels que  $0 < \mu < \nu \leq \lambda$ , et  $\tau$  un réel quelconque

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left[ \frac{\sin[(\lambda k + \mu)^2 x + \tau]}{(\lambda k + \mu)^2} - \frac{\sin[(\lambda k + \nu)^2 x + \tau]}{(\lambda k + \nu)^2} \right] \text{ a une dérivée en zéro}$$

qui vaut  $\frac{(\nu - \mu)}{\lambda} \cos \tau$ .

On est alors parés à démontrer le théorème essentiel obtenu par Gervert :

Théorème 2.  $f(x) = \sum_1^{\infty} \frac{\sin(n^2 x)}{n^2}$  est dérivable au point  $\frac{2A+1}{2B+1} \pi$ , où A et B sont des entiers, avec la dérivée  $-\frac{1}{2}$ .

Tout entier n peut s'écrire :  $n = (2B+1)k + r$ , avec  $1 \leq r \leq 2B+1$ ,  $k \geq 0$ . La dérivabilité de la fonction f au point considéré équivaut à la dérivabilité de la fonction

$$\sum_1^{\infty} \frac{\sin[n^2(x + \frac{2A+1}{2B+1} \pi)]}{n^2} = h(x) \text{ au point zéro. On peut écrire :}$$

$$h(x) = \sum_{r=1}^{2B+1} \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin[((2B+1)k+r)^2 x + \frac{2A+1}{2B+1} ((2B+1)k+r)^2 \pi]}{((2B+1)k+r)^2} \right\}.$$

Ou encore, en distinguant les valeurs paires et impaires de k.

$$h(x) = \sum_{r=1}^{2B+1} \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} \left( \frac{\sin[(2(2B+1)k+r)^2 x + \frac{2A+1}{2B+1} r^2 \pi]}{(2(2B+1)k+r)^2} - \frac{\sin[(2B+1)2k+2B+1+r)^2 x + \frac{2A+1}{2B+1} r^2 \pi]}{(2(2B+1)k+2B+1+r)^2} \right) \right\}$$

Donc,

$$h(x) = \sum_{r=1}^{2B+1} \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} \left( \frac{\sin[(\lambda k + \mu_r)^2 x + \tau_r]}{(\lambda k + \mu_r)^2} - \frac{\sin[(\lambda k + \nu_r)^2 x + \tau_r]}{(\lambda k + \nu_r)^2} \right) \right\},$$

avec  $\lambda = 2(2B+1)$ ,  $\mu_r = r$ ,  $\nu_r = 2B+1+r$ ,  $\tau_r = \frac{2A+1}{2B+1} r^2 \pi$ . D'après le théorème 1 ter, h est dérivable en 0, avec pour dérivée :

$$\sum_{r=1}^{2B+1} \frac{\nu_r - \mu_r}{\lambda} \cos \tau_r = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{2B+1} \cos \tau_r.$$

Or, pour  $r < 2B+1$ , on a  $1 \ll 2B+1 - r \ll 2B+1$  ; si on groupe les valeurs  $r$  et  $2B+1-r$ , on constate aisément que  $\cos \tau_r + \cos \tau_{2B+1-r} = 0$ . Donc, dans l'expression de  $h'(0)$ , il reste seulement :

$$\frac{1}{2} \cos \tau_{2B+1} \cdot 0_r, \quad \tau_{2B+1} = \frac{2A+1}{2B+1} (2B+1)^2 \pi = \pi \pmod{2\pi}, \quad \text{donc}$$

$\cos \tau_{2B+1} = -1$ , et donc

$$h'(0) = -\frac{1}{2}, \quad \text{ce qui achève la démonstration du théorème 2.}$$

### Bibliographie

- [1] Zygmund. Trigonometric series, tome 1, p. 198
- [2] Gerver. The differentiability of the Riemann function at certain rational multiple of
- [3] Hardy. Weierstrass's non-differentiable function. Transactions A.M.S. (1916), pp. 322-323.

