UNIVERSITÉ PARIS XI
U.E.R. MATHÉMATIQUE
91-ORSAY (FRANCE)

N° 1

séminaire

d'algèbre non commutative

1971-1972

(Publications mathématiques d'Orsay)

- 1ère Partie -

-:-:-

TABLE DES MATIERES

-:-:-:-:-:-:-

UNIVERSITE PARIS - SUD XI

Centre d'ORSAY

-:-:-:-:-:-:-:-

SEMINAIRE D'ALGEBRE NON COMMUTATIVE.

Conférences N^{os} 1 et 2 des
3 et 10 Novembre 1971

-:-:-:-:-

CARACTERISATION DES ANNEAUX SUR LESQUELS LES ANNEAUX DE MATRICES SONT DES ANNEAUX DE BAER,

par Annie PAGE-CAILLEAU.

-:-:-:-:-:-

Les anneaux considérés sont supposés unitaires. Pour un anneau A, les A-modules à droite (resp. à gauche) seront notés M_A, P_A, L_A, ... (resp. ${}_AM$, ${}_AP$, ${}_AL$) ; en particulier A muni de sa structure naturelle de A-module à droite (resp. à gauche) sera noté A_A (resp. ${}_AA$). $Z(M_A)$ désignera le sous-module singulier d'un module M_A ; on sait que si $Z(A_A) = 0$ l'enveloppe injective de A_A est un anneau régulier auto-injectif à droite [6], lorsque nous serons dans cette hypothèse cet anneau sera désigné par $\hat{A}$.

Un anneau A est <u>un anneau de Baer</u> si l'annulateur à droite (ou à gauche, c'est équivalent) de tout sous-ensemble non vide de A est engendré par un idempotent. Dans le § 1, nous caractérisons les anneaux A tels que, pour tout entier $n > 0$, l'anneau $M_n(A)$ des matrices $n \times n$ à coefficients dans A soit un anneau de Baer : ce sont les anneaux A tels que pour tout ensemble I les sous-modules de type fini de A_A^I soient projectifs (théorème 1.4.). Dans le § 2, nous étudierons les anneaux A vérifiant $Z(A_A) = 0$ et sur lesquels les modules M_A de type fini tels que $Z(M_A) = 0$ sont projectifs. Sur de tels anneaux, les anneaux de matrices sont des anneaux de Baer ; de plus cette propriété les caractérise (théorème 2.5.) lorsqu'ils vérifient la condition suivante : (P) ${}_AA$ est un sous-A-module à gauche essentiel dans $\hat{A}$.

Le § 3 est consacré à l'étude du cas commutatif : les anneaux commutatifs A sur lesquels les anneaux de matrices sont des anneaux de Baer, sont les anneaux commutatifs semi-héréditaires dont l'anneau total de fractions est auto-injectif (théorème 3.7.). En outre, dire que $M_n(A)$ est un anneau de Baer pour tout entier $n > o$, équivaut à dire que $M_2(A)$ est un anneau de Baer.

§ 1. CAS GENERAL.

Le résultat suivant est dû à Stephenson et Tsukerman [9].

THEOREME 1.1. : *Pour un anneau* A *les assertions suivantes sont équivalentes* :

(i) *pour tout ensemble* I *tout sous-module du module* A^I_A *est projectif.*

(ii) *pour tout module projectif* P_A, End P_A *est un anneau de Baer.*

(iii) *pour tout module libre* L_A, End L_A *est un anneau de Baer.*

(iv) A *est un anneau semi-primaire héréditaire.*

(v) *pour tout module libre* ${}_AL$, End ${}_AL$ *est un anneau de Baer.*

(vi) *pour tout module projectif* ${}_AP$, End ${}_AP$ *est un anneau de Baer.*

(vii) *pour tout ensemble* I, *tout sous-module du module* ${}_AA^I$ *est projectif.*

Nous allons montrer que l'équivalence entre les assertions (i), (ii), (iii), (iv), (v), (vi), (vii) subsiste si l'on ne considère que des modules de type fini. Nous aurons besoin du lemme suivant.

LEMME 1.2. : *Pour un module* L_A *générateur de la catégorie des A-modules à droite les assertions suivantes sont équivalentes.*

(i) *pour tout sous-ensemble non vide* $\mathcal{S}$ *de* $\mathcal{B}$ = End L_A *le sous-module* $\cap(\ker f\ ;\ f \in \mathcal{S})$ *est facteur direct de* L_A.

(ii) $\mathcal{B}$ *est un anneau de Baer.*

(i) $\Longrightarrow$ (ii) L'annulateur à droite d'un sous-ensemble non vide $\mathcal{S}$ de $\mathcal{B}$ est de la forme $p\mathcal{B}$ où p est un projecteur de L_A sur $\cap(\ker f\ ;\ f \in \mathcal{S})$.

D'où le résultat.

(ii) $\Longrightarrow$ (i) Soit $\mathcal{S}$ un sous-ensemble non vide de $\mathcal{B}$; il existe un projecteur p de L_A tel que $p\mathcal{B}$ soit l'annulateur à droite de $\mathcal{S}$. Posons $K = \operatorname{Im} p$, $M = \bigcap(\operatorname{Ker} f \,;\, f \in \mathcal{S})$ et montrons que $M = K$. On a pour tout $f \in \mathcal{S}$, $fp = 0$ d'où $\operatorname{Im} p \subset \ker f$, et il en résulte que K est un sous-module de M . Soit par ailleurs $x \in M$ tel que $xA \cap K = 0$; pour tout $g \in \operatorname{Hom}(L_A, xA)$ on a $\mathcal{S}g = 0$ d'où $\operatorname{Im} g \subset K$. Ceci entraîne $\operatorname{Hom}(L_A, xA) = 0$ soit $xA = 0$ puisque L_A est générateur.

En particulier si L_A est un module libre, les assertions (i) et (ii) du lemme 1.2. sont équivalentes. Ce résultat est exprimé d'une autre façon par Wolfson [10, théorème 9] .

Un module M_A (resp. ${}_AM$) de type fini est dit <u>sans torsion</u> s'il existe un ensemble I tel que M_A (resp. ${}_AM$) soit un sous-module du module A_A^I (resp. ${}_AA^I$) .

<u>PROPOSITION 1.3.</u> : <u>soit</u> A <u>un anneau et</u> n <u>un entier</u>, $n > 0$. <u>Les assertions suivantes sont équivalentes.</u>

(i) <u>tout module</u> M_A <u>engendré par</u> n <u>éléments, sans torsion, est projectif.</u>

(ii) $M_n(A)$ <u>est un anneau de Baer.</u>

Nous poserons $L_A = A_A^n$.

(i) $\Longrightarrow$ (ii) Nous allons montrer que $\mathcal{B} = \operatorname{End} L_A$ vérifie la condition (i) du lemme 1.2. Si $\mathcal{S}$ est un sous-ensemble non vide de $\mathcal{B}$, on construit un homomorphisme g de L_A dans $L_A^{\mathcal{S}}$ en posant $g(x) = (f(x))_{f \in \mathcal{S}}$. $g(L_A)$ est comme L_A , un module engendré par n éléments, d'autre part il est plongé dans A_A^n et c'est donc un module de type fini sans torsion. D'après l'hypothèse, $g(L_A)$ est projectif et par suite $\ker g = \bigcap(\ker f \,;\, f \in \mathcal{S})$ est facteur direct de L_A .

(ii) $\Longrightarrow$ (i) Soit M_A un module engendré par n éléments sans torsion ; M_A est quotient de L_A , et il est plongé dans un module de la forme A_A^I . Nous désignerons par g un homomorphisme surjectif de L_A sur M_A , par h un plongement de M_A dans A_A^I , et pour tout $i \in I$ par p_i la projection canonique de A_A^I sur sa composante d'indice i . On peut appliquer L_A dans A_A au moyen des homomorphismes $f_i = p_i \circ h \circ g$ qui, par hypothèse, sont tels que $\bigcap(\ker f_i \,;\, i \in I)$ soit facteur direct de L_A (lemme 1.2.). Or $\ker g$ coïncidant avec $\bigcap(\ker f_i \,;\, i \in I)$, M_A est bien un module projectif.

LEMME 2.3. : Soient A un anneau, M_A un module tel que $Z(M_A) = 0$, E l'enveloppe injective de M_A. On suppose que $\mathfrak{B}' = \mathrm{End}\ M_A$ est un sous-$\mathfrak{B}'$-module à droite, essentiel dans $\mathfrak{B} = \mathrm{End}\ E$. Alors les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) Dans M tout sous-module complément admet un supplémentaire.

(ii) Dans $\mathfrak{B}$ tout idéal à droite complément est engendré par un idempotent.

(i) $\Longrightarrow$ (ii) Les idéaux à droite complément dans $\mathfrak{B}$ sont de la forme $p\mathfrak{B} \cap \mathfrak{B}'$ où p est un projecteur de $E.p(E) \cap M_A = P$ est un facteur direct de M_A et si p' est un projecteur de M_A sur P, on a $p\mathfrak{B} \cap \mathfrak{B}' = p'\mathfrak{B}'$.

(ii) $\Longrightarrow$ (i) Soit K un sous-module complément dans M_A ; il est de la forme $F \cap M_A$ où F est un sous-module injectif de E. Désignons par p un projecteur de E d'image F, $p\mathfrak{B} \cap \mathfrak{B}'$ est un idéal à droite complément dans $\mathfrak{B}'$, on peut donc le mettre sous la forme $p'\mathfrak{B}'$ où p' est un projecteur de M. Nous allons montrer que $K = \mathrm{Im}\ p'$. On a $\mathrm{Im}\ p' \subset \mathrm{Im}\ p \cap M_A = K$. Soit d'autre part X un sous-module complément dans K ; le raisonnement précédent montre que l'on peut trouver un projecteur non nul q de M, que l'on peut supposer appartenir à $p\mathfrak{B} \cap \mathfrak{B}' = p'\mathfrak{B}'$, tel que l'on ait $\mathrm{Im}\ q \subset X$; ceci entraîne $\mathrm{Im}\ p' \cap X \neq 0$. Comme $\mathrm{Im}\ p'$ rencontre tout sous-module complément dans K on a $\mathrm{Im}\ p' = K$.

(iii) $\Longrightarrow$ (iv) Evident.

(iv) $\Longrightarrow$ (i*) Evident d'après le lemme 2.3.

Soit A un anneau tel que $Z(A_A) = 0$. Considérons la propriété suivante :

(P) ${}_A A$ est un sous A-module à gauche essentiel dans $\hat{A}$.

LEMME 2.4. : [V.C. Cateforis et F.L. Sandomierski, 3, théorème 1.1.]. Soit A un anneau tel que $Z_d(A) = 0$; alors si A satisfait à (P) tout module M_A de type fini tel que $Z(M_A) = 0$ est sans torsion.

THEOREME 1.4. : Pour un anneau A, les assertions suivantes sont équivalentes.

(i) tout module M_A de type fini sans torsion est projectif.

(ii) pour tout module projectif de type fini P_A, End P_A est un anneau de Baer.

(iii) pour tout entier $n > 0$, $M_n(A)$ est un anneau de Baer.

(iv) pour tout module projectif de type fini ${}_AP$, End ${}_AP$ est un anneau de Baer.

(v) tout module ${}_AM$ de type fini sans torsion est projectif.

Soit $\overset{o}{A}$ l'anneau opposé à A ; l'assertion (iii) équivaut à dire que pour tout entier $n > 0$, $M_n(\overset{o}{A})$ est un anneau de Baer, il nous suffit donc d'établir l'équivalence entre les assertions (i), (ii), (iii). Il est évident que (ii) entraîne (iii) puisque $M_n(A) = \text{End } A_A^n$. Réciproquement un module projectif de type fini P_A est facteur direct d'un module libre de type fini A_A^n, on peut écrire End $P_A \simeq p\,M_n(A)p$ où p est un idempotent de $M_n(A)$, et si $M_n(A)$ est un anneau de Baer, il en est de même de End P_A [8] ; d'où (iii) $\Longrightarrow$ (ii). Enfin l'équivalence (i) $\Longleftrightarrow$ (iii) résulte de la proposition 1.3.

Si un anneau A vérifie les conditions du théorème 1.4., A_A^I est un module plat pour tout ensemble I puisqu'il est limite inductive de ses sous-modules de type fini tous projectifs, A est alors [S.U. Chase, [4], théorème 4.1.] un anneau semi-héréditaire à gauche et donc, par symétrie, semi-héréditaire. On peut retrouver cette propriété au moyen du lemme 1.5. ci-dessous, qui nous servira par la suite. Rappelons qu'un anneau A est un anneau de Rickart à droite (resp. à gauche) si l'annulateur à droite (resp. à gauche) de tout élément de A est engendré par un idempotent.

LEMME 1.5. : soit A un anneau et p un entier, $p > 0$. Les assertions suivantes sont équivalentes.

(i) $M_p(A)$ est un anneau de Rickart à droite.

(ii) tout idéal à droite de A engendré par p éléments est projectif.

(iii) tout sous-module M_A engendré par p éléments d'un module projectif P_A, est projectif.

(i) $\Longrightarrow$ (ii) Soit I un idéal à droite de A engendré par p éléments. Hom(A_A^p, I) s'identifie à un idéal à droite monogène de $M_p(A)$, et comme $M_p(A)$ est un anneau de Rickart à droite, cet idéal est projectif. Or le foncteur Hom$(A_d^p\,,\,.)$ étant un foncteur d'équivalence entre les catégories de modules à droite sur A et $M_p(A)$ respectivement, il en résulte que I est un idéal à droite projectif.

THEOREME 2.5. : Soit A un anneau tel que $Z(A_A) = 0$ et satisfaisant à (P) ; les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) Tout module M_A de type fini tel que $Z(M_A) = 0$ est projectif.

(ii) a) A est semi-héréditaire.

b) $\hat{A}$ est un A-module à droite plat.

c) Le A-module à droite $\hat{A} \oplus_A \hat{A}$ est à sous-module singulier nul.

(iii) Pour tout entier $n > 0$, $M_n(A)$ est un anneau de Baer et tout idéal à droite complément dans $M_n(A)$ est engendré par un idempotent.

(iv) Pour tout entier $n > 0$, tout idéal à droite complément dans $M_n(A)$ est engendré par un idempotent.

(v) Pour tout entier $n > 0$, $M_n(A)$ est un anneau de Baer.

(i) $\Longleftrightarrow$ (ii) $\Longleftrightarrow$ (iii) $\Longleftrightarrow$ (iv) . D'après le théorème 2.2.

(iii) $\Longrightarrow$ (v) Evident.

(v) $\Longrightarrow$ (i) D'après le théorème 1.4. et le lemme 2.4.

Remarque : On peut montrer l'équivalence entre les assertions (i) et (v) du théorème 2.5. sans utiliser le théorème 1.2. et le lemme 2.4. En effet, la condition (i) signifie que tout sous-module complément dans A^n_A est facteur direct de A^n_A . Or on peut montrer que si un module M_A à sous-module singulier nul sur un anneau A quelconque, est tel que tout sous-module complément dans M_A soit facteur direct de M_A alors $\mathrm{End}(M_A)$ est un anneau de Baer. On a donc l'implication (i) $\Longrightarrow$ (v) (valable sans supposer que A satisfait à (p)). D'autre part si A est tel que $Z(A_A) = 0$ et vérifie (P) , $M_n(A)$ est à idéal singulier à droite nul et il vérifie également (P). Si, de plus $M_n(A)$ est un anneau de Baer, on voit facilement que ceci entraîne que tout idéal à droite complément dans $M_n(A)$ est engendré par un idempotent, et le lemme 2.3. ((ii) $\Longrightarrow$ (i)) permet de conclure.

PROPOSITION 2.6. : *Soit* A *un anneau régulier satisfaisant à* (P) ; *les assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) *Pour tout entier* $n > 0$, $M_n(A)$ *est un anneau de Baer.*

(ii) $M_2(A)$ *est un anneau de Baer.*

(iii) A *est auto-injectif à droite.*

(i) $\Longrightarrow$ (ii) Evident.

(ii) $\Longrightarrow$ (iii) D'après la proposition 1.3. et le lemme 2.4., tout module M_A engendré par deux éléments tel que $Z(M_A) = 0$ est projectif, il résulte alors du théorème 2.1. que A est auto-injectif à droite).

(iii) $\Longrightarrow$ (i) Evident.

§ 3. ETUDE DU CAS COMMUTATIF.

C. Yohe [11] a montré que pour un anneau commutatif A satisfaisant à la condition de chaîne descendante sur les annulateurs, $M_n(A)$ est un anneau de Baer pour tout entier $n > 0$ si, et seulement si, $M_2(A)$ est un anneau de Baer. Nous allons montrer que cette propriété est vraie pour tout anneau commutatif.

LEMME 3.1. : *soit* A *un anneau commutatif d'anneau total de fractions* Q ; *alors si* $M_2(A)$ *est un anneau de Baer,* $M_2(Q)$ *est un anneau de Baer.*

Soit $T \in M_2(Q)$, il existe un élément régulier s de A tel que $st \in M_2(A)$ et les annulateurs de T et de sT dans $M_2(A)$ sont égaux. Si maintenant $\mathcal{S}$ est un sous-ensemble non vide de $M_2(Q)$, d'après ce qui précède son annulateur dans $M_2(A)$ est de la forme $M_2(A)e$ où e est un idempotent de $M_2(A)$. L'annulateur de $\mathcal{S}$ dans $M_2(Q)$ s'écrit alors $M_2(Q)e$, ce qui établit le résultat.

LEMME 3.2. : *Soit* A *un anneau commutatif d'anneau total de fractions* Q ; *alors si* A *est un anneau de Rickart,* Q *est un anneau régulier.*

Soient $x \in A$ et e l'idempotent engendrant l'annulateur de x ; il est facile de voir que la somme $xA+eA$ est directe, essentielle dans A, et égale à $(x+e)A$. $x+e$ est donc un élément régulier et il en résulte que $(x+e)Q = xQ + eQ = xQ \oplus eQ = Q$.

(i) $\Longrightarrow$ (ii) Evident.

(ii) $\Longrightarrow$ (iii) Doit à un élément de l'enveloppe injective $\hat{A}$ de A_A ; par hypothèse le module $M_A = A + aA$ est projectif. A sous-module de type fini de M_A, admet un supplémentaire dans M_A, et comme M_A est un sous-A-module de $\hat{A}$ on doit avoir $A = M_A$ d'où $a \in A$.

(iii) $\Longrightarrow$ (i) Evident.

Rappelons que si A est un anneau, un sous-module M_A d'un module M_A est dit complément dans M_A s'il n'admet pas d'extension essentielle propre dans M_A. Un idéal à droite de A est complément dans A, si c'est un sous-module complément dans A_A.

THEOREME 2.2. : Pour un anneau A tel que $Z(A_A) = 0$, les assertions suivantes sont équivalentes.

(i) Tout module de type fini M_A tel que $Z(M_A) = 0$ est projectif.

(ii) a) A est semi-héréditaire à droite.
b) $\hat{A}$ est un A-module à droite plat.
c) le A-module à droite $\hat{A} \oplus_A \hat{A}$ est à sous-module singulier nul.

(iii) Pour tout entier $n > 0$, $M_n(A)$ est un anneau de Baer et tout idéal à droite complément dans $M_n(A)$ est engendré par un idempotent.

(iv) Pour tout entier $n > 0$, tout idéal à droite complément dans $M_n(A)$ est engendré par un idempotent.

(i) $\Longleftrightarrow$ (ii) C'est un résultat de V.C. Cateforis [2, théorème 2.3.]. L'assertion (i) est manifestement équivalente à l'assertion (i*).

(i*) Pour tout entier $n > 0$, tout sous-module complément dans A_A^n admet un supplémentaire dans A_A^n.

(i) $\Longrightarrow$ (ii). Soit n un entier, $n > 0$. Comme $Z(A_A) = 0$, un module M_A de type fini sans torsion est tel que $Z(M_A) = 0$, et le théorème 1.4. montre que $M_n(A)$ est un anneau de Baer. D'autre part posons $L_A = A_A^n$; $E = \hat{A}^n$ est l'enveloppe injective de L_A. Les isomorphismes $\mathfrak{B}' = \mathrm{End}\ L_A \simeq M_n(A)$, $\mathfrak{B} = \mathrm{End}\ E \simeq M_n(\hat{A})$, et le fait que $M_n(A)$ soit un sous-$M_n(A)$-module à droite essentiel dans $M_n(\hat{A})$, montrent facilement que $\mathfrak{B}'$ est un sous-$\mathfrak{B}'$-module à droite essentiel dans $\mathfrak{B}$. Le lemme suivant montrera alors que tout idéal à droite complément dans $M_n(A)$ est engendré par un idempotent.

(ii) $\Longrightarrow$ (iii) Il suffit de reprendre une démonstration de H. Cartan et S. Eilenberg ([1], propositions 6.1. et 6.2.).

(iii) $\Longrightarrow$ (i) Soit f un endomorphisme de $L_A = A_A^p$. $f(L_A)$ est engendré par p éléments et c'est un sous-module du module libre L_A, il est donc projectif et par suite $\ker f$ est facteur direct de A_A^p.

Une démonstration analogue à celle du lemme 1.2. (i) $\Longrightarrow$ (ii) montre que l'annulateur à droite de f est engendré par un idempotent.

COROLLAIRE 1.6. : *Soit A un anneau tel que $M_n(A)$ soit un anneau de Baer pour tout entier $n > 0$; alors A est semi-héréditaire.*

En effet $M_n(A)$ et $M_n(\overset{o}{A})$ sont des anneaux de Rickart à droite pour tout $n > 0$; et A et $\overset{o}{A}$ sont donc semi-héréditaires à droite (lemme 1.5., (i) $\Longrightarrow$ (ii)).

La réciproque n'est pas vraie ; un anneau de Baer semi-héréditaire ne vérifie pas nécessairement les conditions équivalentes du théorème 1.4. Nous verrons en effet (théorème 2.1.) qu'un anneau de Baer commutatif régulier, ne vérifie ces conditions que s'il est auto-injectif. On peut alors se demander sous quelles conditions un anneau de Baer, semi-héréditaire A, est tel que $M_n(A)$ soit un anneau de Baer pour tout entier $n > 0$. On a le résultat suivant :

PROPOSITION 1.7. : *Soit A un anneau tel que A_A soit de dimension finie ; les assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) *A est un anneau semi-héréditaire à droite.*

(ii) *Pour tout entier $n > 0$, $M_n(A)$ est un anneau de Baer.*

(iii) *Pour tout entier $n > 0$, $M_n(A)$ est un anneau de Rickart à droite.*

(iv) *A est un anneau de Baer, semi-héréditaire.*

(i) $\Longrightarrow$ (ii) F.L. Sandomierski [8, théorème 2.6.] a montré que si A est un anneau semi-héréditaire à droite tel que A_A soit de dimension finie, les A-modules à droite de type fini sans torsion sont projectifs. D'où le résultat, compte-tenu du théorème 1.4.

(ii) $\Longrightarrow$ (iii) Evident.

(iii) $\Longrightarrow$ (i) C'est une conséquence du lemme 1.5.

Comme pour tout $x \in A$, xQ est facteur direct de Q , la propriété est vraie pour tout $x \in Q$ et Q est bien un anneau régulier.

PROPOSITION 3.3. : Soit A un anneau commutatif d'anneau total de fractions Q ; alors si $M_2(A)$ est un anneau de Baer, Q est l'enveloppe injective de A .

$M_2(Q)$ est un anneau de Baer (lemme 3.1.) , et comme Q est un anneau régulier (lemme 3.2.), satisfaisant à (P) puisqu'il est commutatif, il est auto-injectif (proposition 2.6.), A étant un sous-A-module essentiel dans Q , Q est bien l'enveloppe injective de A .

Soit A un anneau tel que $M_2(A)$ soit un anneau de Baer, $M_2(A)$ est en particulier un anneau de Rickart à droite et (lemme 1.5.) tout idéal à droite engendré de A par deux éléments est projectif. Nous allons montrer que si, de plus, A est commutatif, cette dernière propriété entraîne qu'il est semi-héréditaire.

LEMME 3.4. : Soit A un anneau commutatif tel que tout idéal engendré par deux éléments soit projectif ; alors si S est une partie multiplicativement stable de A , dans $S^{-1}A$ tout idéal engendré par deux éléments est projectif.

Un idéal de $S^{-1}A$ engendré par deux éléments s'écrit $S^{-1}I$ où I est un idéal de A engendré par deux éléments. Comme I est projectif, $S^{-1}I$ est projectif.

LEMME 3.5. : Soit A un anneau local commutatif tel que tout idéal engendré par deux éléments soit projectif ; alors A est un anneau de valuation.

L'hypothèse entraîne que A est un anneau de Rickart, or il est immédiat qu'un anneau de Rickart local est intègre. D'autre part, un idéal I engendré par deux éléments étant projectif, il est libre et comme A est intègre, I est principal. Ceci prouve que A est semi-héréditaire, c'est donc bien un anneau de valuation.

PROPOSITION 3.6. : Pour un anneau commutatif A les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) A est semi-héréditaire.

(ii) Tout idéal de A engendré par deux éléments est projectif.

(iii) Tout sous-module engendré par deux éléments d'un module projectif est projectif.

(i) ==> (ii) Evident.

(ii) ==> (i) L'anneau total de fractions de A est un anneau régulier. (lemme 3.2.) et tout localisé de A par rapport à un idéal maximal est un anneau de valuation (lemme 3.4., et lemme 3.5.); d'après un théorème d'Endo [5, théorème 2] ceci suffit pour conclure.

(ii) <==> (iii) D'après le lemme 1.5.

THEOREME 3.7. : Pour un anneau commutatif A les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) Pour tout entier $n > 0$, $M_n(A)$ est un anneau de Baer.

(ii) $M_2(A)$ est un anneau de Baer.

(iii) A est un anneau semi-héréditaire, et l'anneau total de fractions de A est auto-injectif.

(i) ==> (ii) Evident.

(ii) ==> (iii) D'après la proposition 3.3. et la proposition 3.6.

(iii) ==> (i) L'enveloppe injective $\hat{A}$ de A est l'anneau total de fractions de A, c'est donc un A-module plat et $Z(\hat{A} \otimes_A \hat{A}) = 0$. Le théorème 2.5. permet de conclure.

Dans le cas où A est un anneau commutatif intègre, la condition (iii) devient ; A est un anneau semi-héréditaire, c'est-à-dire un anneau de Prüffer et on retrouve ainsi le résultat de Yohe [11] .

(ii) $\Longrightarrow$ (iv) D'après le corollaire 1.6.

(iv) $\Longrightarrow$ (i) Evident.

On retrouve ainsi un résultat dû à F.L. Sandomierski [8].

Si A est un anneau semi-héréditaire à droite tel que A_A soit de dimension finie, A est un anneau semi-héréditaire.

Soit A un anneau principal à droite ; A_A est de dimension finie, et pour que A soit semi-héréditaire à droite (c'est-à-dire en fait héréditaire à droite) il est nécessaire et suffisant que A soit un anneau de Rickart à droite. D'où le résultat :

COROLLAIRE 1.8. : Pour un anneau A principal à droite, les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) A est un anneau de Rickart à droite.

(ii) Pour tout entier $n > 0$, $M_n(A)$ est un anneau de Baer.

COROLLAIRE 1.9. : [Wolfson, 10]. Sur un anneau A intègre principal à droite l'anneau des endomorphismes de tout module libre de type fini L_A est un anneau de Baer.

§ 2. ANNEAUX SUR LESQUELS LES MODULES DE TYPE FINI A SOUS-MODULE SINGULIER NUL SONT PROJECTIFS.

V.C. Cateforis [2] a étudié les anneaux A vérifiant $Z(M_A) = 0$ et sur lesquels les modules M_A de type fini tels que $Z(M_A) = 0$ sont projectifs. En particulier les anneaux réguliers satisfaisant à cette condition sont les anneaux réguliers auto-injectifs à droite [2, théorème 2.1.]. Nous allons donner une autre démonstration de cette propriété due à Rangaswany K.M. et Vanaja N. [7].

THEOREME 2.1. : Pour un anneau régulier A les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) Tout module M_A de type fini tel que $Z(M_A) = 0$ est projectif.

(ii) Tout module M_A engendré par deux éléments tels que $Z(M_A) = 0$ est projectif.

(iii) A est auto-injectif à droite.

BIBLIOGRAPHIE

[1] CARTAN H. et EILENBERG S., Homological Algebra (Princeton, New Jersey, 1956).

[2] CATEFORIS V.C., On regular self-injective rings (Pacific J. Of Math., 30, 1, 1969, pp. 39-45).

[3] CATEFORIS V.C. et SANDOMIERSKI F.L., On modules of singular submodules zero (Can. J. Math., 23, 2, 1971, pp. 345-354).

[4] CHASE S.U. , Direct products of modules (Trans. Amer. Math. Soc. 97, 1960, pp. 457-473).

[5] ENDO S., On semi-hereditary rings (J. Math. Soc. Japan, 13, 2, 1961, pp. 109-119).

[6] JOHNSON, the extended centralizer of a ring on a module (Proc. Amer. Math. Soc., 2, 1951, pp. 891-895).

[7] RANGAWANY K.M. et VANAJA N., A note on modules over regular rings (Bull. Austral. Math. Soc., 4, 1971, pp. 57-62).

[8] SANDOMIERSKI F.L., Nonsingular rings (Proc. Amer. Math. Soc., 13, 1, 1968, pp. 225-230).

[9] STEPHENSON W. et TSUKERMAN G.M., Rings of endomorphisms of projective modules (Sibirsk. Matem. Zh., 11, 1, 1970, pp. 228-232).

[10] WOLFSON K., Baer rings of endomorphisms (Math. Ann. 143, 1961, pp.19-28).

[11] YOHE C., Commutative rings whose matrix rings are Baer rings (Proc. Amer. Math. Cos., 22, 1, 1969, pp. 189-191).

-:-:-:-:-:-

UNIVERSITE PARIS-SUD XI

Centre d'ORSAY

SEMINAIRE D'ALGEBRE NON COMMUTATIVE

Conférences N^{os} 3 et 4

des 17 et 24 Novembre 1971

-:-:-:-:-:-:-

LA TORSION ASSOCIEE A UN IDEAL PREMIER D'UN ANNEAU NOETHERIEN A GAUCHE par

L. LESIEUR, d'après J. LAMBEK et G. MICHLER [*]$_1$.

-:-:-:-:-:-:-

§ 1. IDEAL A GAUCHE PREMIER.

R est un anneau unitaire qui sera supposé dans toute la suite noethérien à gauche.

DEFINITION 1. A est un idéal à gauche premier si l'on a :

(1) $aRb \subseteq A \Longrightarrow b \in A$ ou $a \in A$.

Cette notion coïncide avec celle d'idéal à gauche premier à droite définie dans [11] , p. 47 , par :

(2) $aRb \subseteq A$, $b \notin A \Longrightarrow aR \subseteq A$.

En effet : (2) $\Longrightarrow$ (1). Inversement (1) et l'hypothèse de (2) impliquent $a\lambda Rb \subseteq aRb \subseteq A$, d'où $a\lambda \in A$ et $aR \subseteq A$.

Il en résulte que, si A est un idéal à gauche premier, $P = A^{\cdot}. R = \{x \in R | xR \subseteq A\}$ est un idéal bilatère premier contenu dans A , associé à A , et qui est l'idéal bilatère maximum contenu dans A .

La propriété suivante, entre autres, montre l'intérêt des idéaux à gauche premiers.

PROPRIETE 1. Pour que R soit quasi-simple, il faut et il suffit que tout idéal à gauche soit premier.

Soit R quasi-simple, et $aRb \subseteq A$, $a \notin A$. On a donc $a \neq o$ et $(a) = A$, soit $\Sigma\lambda a\mu = 1$, d'où $b = \Sigma\lambda a\mu b \in A$.

[*]$_1$: Article à paraître.

Réciproquement soit R tel que tout idéal à gauche est premier. En particulier (0) est premier et l'anneau R est noethérien à gauche premier. Si A est un idéal à gauche on a pour tout $a \in A$, $aAa \subseteq A^2$, d'où $a \in A^2$ puisque A^2 est premier, et par suite $A = A^2$. Soit alors $a \neq o$; l'idéal bilatère (a) est non nul, essentiel dans R, et il contient un élément régulier c. Comme $Rc = (Rc)^2$, on a : $c = \Sigma\lambda c\mu c$ d'où $1 = \Sigma\lambda c\mu$ et $(a) = A$. L'anneau est quasi-simple.

§ 2. IDEAUX $\cap$-IRREDUCTIBLES ASSOCIES.

Tout R-module injectif indécomposable est isomorphe à $I = E(R/_A)$, où A est un idéal à gauche irréductible, et I l'enveloppe injective du R-module $R/_A$. Dans cette expression, A n'est déterminé qu'à une relation d'équivalence près, qu'on peut préciser.

<u>DEFINITION 2.</u> Les idéaux à gauche irréductibles A et B sont <u>liés</u> s'il existe $s \notin A$ et $t \notin B$ tels que :

$$A \cdot . s = B \cdot . t$$

$A \cdot . s$ désigne l'idéal à gauche annulateur de $\bar{s} \in R/_A$, c'est-à-dire l'ensemble $\{x \in R | xs \in A\}$.

<u>PROPRIETE 2.</u> (Dlab, [2]) <u>Pour que</u> A <u>et</u> B <u>soient liés, il faut et il suffit que :</u> $E(R/_A) \simeq E(R/_B)$.

En effet, si A et B sont liés, on a :

$$E(R/_A) \simeq E(R\bar{s}) \simeq E(R/_{\mathrm{Ann}\ \bar{s}}) = E(R/_{A\cdot.s})$$

et, de même : $E(R/_B) \simeq E(R/_{B\cdot.t})$, d'où l'isomorphisme.

Réciproquement, si l'on a : $E(R/_A) \simeq E(R/_B)$, par l'isomorphisme σ, il vient : $A = \mathrm{Ann}\ \bar{1} = \mathrm{Ann}\ \sigma(\bar{1})$. On a donc : $0 \neq \bar{t} = s\sigma(\bar{1}) = \sigma(\bar{s}) \in R/_B$, et :

$$\mathrm{Ann}\ \bar{t} = B\cdot.t = \mathrm{Ann}(s\sigma(\bar{1})) = A\cdot.s .$$

La propriété 2 montre que la relation de liaison de la définition 2 est une relation d'équivalence.

§ 3. IDEAL A GAUCHE CRITIQUE.

Dans le cas commutatif, il y a équivalence entre les propriétés suivantes :

A est premier $\Longleftrightarrow$ A est irréductible et maximum dans la classe des idéaux irréductibles qui lui sont liés.

Dans le cas non commutatif, on obtiendra donc une autre généralisation de la notion d'idéal à gauche premier en considérant un idéal à gauche ayant la propriété (1) de la proposition suivante :

PROPOSITION 3. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

(1) A est un idéal à gauche irréductible maximal dans la classe des idéaux à gauche irréductibles liés.

(2) A est idéal à gauche maximal parmi les annulateurs à gauche des éléments non nuls d'un injectif indécomposable.

(3) A est irréductible et, pour tout idéal à gauche $B \supsetneq A$, $\mathrm{Hom}(R/_B \, , E(R/_A)) = 0$.

(4) $\forall s \notin A$, $u \notin A$, $t \in R$, $\exists r \in R$ tel que :

$$rt \in A + Rs \ , \ ru \notin A \ .$$

Preuve : (1) $\Longrightarrow$ (2). Posons $I = E(R/_A)$. On a $A = \mathrm{Ann}\ \bar{1}$, où $\bar{1}$ est non nul dans l'injectif indécomposable I. Si $B = \mathrm{Ann}\ j \supseteq A$, $o \neq j \in I$, on a : $I = E(Rj) \simeq E(R/_B) \simeq E(R/_A)$, de sorte que A et B sont liés d'après la propriété 2 de Dlab, et $B = A$.

(2) $\Longrightarrow$ (3). Comme $A = \mathrm{Ann}\ \xi$, $o \neq \xi \in I$, on a : $I = E(R\xi) \simeq E(R/_A)$ et on peut prendre $I = E(R_A)$. Considérons $f \in \mathrm{Hom}(R/_B \, , E(R/_A))$. Si $f(\bar{1}) = j \in E(R/_A)$, la relation $B\bar{1} = o$ entraîne $Bj = o$ et $\mathrm{Ann}\ j \supseteq B \supset A$. Cela n'est possible que pour $j = o$ et par suite $f = o$.

(3) $\Longrightarrow$ (1). Car si $R \supset A$ et lui est lié, $B \neq A$, B irréductible, on a $E(R/_B) \simeq E(R/_A)$ et $\mathrm{Hom}(R/_B \, , E(R/_A)) \neq o$.

(3) $\Longrightarrow$ (4). Prenons $B = A+Rs \supsetneq A$. Supposons que $rt \in A+Rs \Longrightarrow ru \in A$. On en déduirait dans $R/_B$ et $K/_A$: $r\bar{t} = o \Longrightarrow r\bar{u} = o$, d'où un homomorphisme non nul de $R\bar{t}$ dans $R\bar{u}$ qui pourrait être étendu à un homomorphisme non nul de $R/_B$ dans $E(R/_A)$.

(4) $\Longrightarrow$ (3). A est irréductible (prendre $t = u$). Soit $B \supsetneq A$. Si $\mathrm{Hom}(R/_B\,,\, E(R/_A)) \neq o$, on a $f(\bar{1}) = j \neq o$, d'où $o \neq tj = \bar{u} \in R/_A$ et $f(\bar{t}) = f(t.\bar{1}) = tf(\bar{1}) = \bar{u}$. En prenant $s \in B$, $s \notin A$, $u \notin A$, $t \in R$, la condition $rt \in A+Rs$ entraîne $r\bar{t} = o$, d'où $r\bar{u} = o$ et $ru \in A$.

DEFINITION 3. Un idéal à gauche satisfaisant les propriétés équivalentes de la proposition 3 est dit critique.

Remarque : La propriété (2) de la proposition 3 équivaut à la suivante, qui fait appel à la notion de coeur d'un module ($[*]_2$, p. 376) :

Un idéal à gauche A est critique, si et seulement si il est l'annulateur d'un élément non nul du coeur d'un injectif indécomposable.

§ 4. INJECTIFS INDECOMPOSABLES ET IDEAUX A GAUCHE CRITIQUES PREMIERS.

De même que, dans le cas commutatif, un injectif indécomposable est isomorphe à $E(R/_P)$, où P est un idéal premier, on peut obtenir tout injectif indécomposable dans le cas non commutatif par le théorème suivant :

THEOREME 4.1. : Si I est un injectif indécomposable, il existe un idéal à gauche critique et premier A tel que $I = E(R/_A)$, qui est déterminé à la relation de liaison près.

En effet, soit $I = E(R/_Q)$, où Q est irréductible. Soit P l'idéal premier bilatère associé à Q. On a en vertu de la théorie des idéaux tertiaires [11] : $Q.\cdot P \supsetneq Q$, et, si $s \in Q.\cdot P$, $s \notin Q$, $Q\cdot.s$ est un idéal à gauche irréductible P-premier. En effet : $aRb \subset Q\cdot.s$, $b \notin Q \Longrightarrow aRbs \subseteq Q$, $bs \notin Q$, d'où $a \in P$ et $aRs \subseteq Ps \subseteq Q$, c'est-à-dire $aR \subset Q\cdot.s$. De plus, pour que $Q\cdot.s$ soit critique il suffit, d'après la remarque qui suit la définition 3, de choisir pour $\bar{s}$ un élément du coeur de $R/_Q$. On prendra donc $o \neq \bar{s} \in [(Q.\cdot P)/Q] \cap C(R/_Q)$ ce qui est possible puisqu'on sait que le coeur n'est pas nul. L'idéal irréductible $A = Q\cdot.s$ est alors premier et critique et il est lié à Q, d'où :

$$E(R/_Q) \simeq E(R/_A) .$$

Le théorème est démontré car on vérifie aisément qu'un idéal irréductible lié à un idéal irréductible premier et critique est lui-même premier et critique.

$[*]_2$ L.LESIEUR et R. CROISOT, Coeur d'un module, Journ. Math., 1963.

§ 5. IDEAUX A GAUCHE P-CRITIQUES.

Soit P un idéal bilatère de l'anneau R. On appelle $C(P)$ le système multiplicatif des éléments de R réguliers modulo P.

Le théorème suivant fournit un exemple important d'idéal à gauche critique, sous diverses formes.

THEOREME 5.1. : A étant un idéal à gauche propre, les propriétés suivantes sont équivalentes :

(1) A est maximal pour la propriété $A \cap C(P) = \emptyset$.

(2) A est irréductible, contient P, et $A \cap C(P) = \emptyset$.

(3) A est critique, premier, admet P comme associé, et $A \cap C(P) = \emptyset$.

(4) $A \supseteq P$ et $A/_P$ est un idéal à gauche complètement maximal dans $R/_P$.

Les démonstrations sont données en détail dans $[*]_1$. Elles peuvent aussi se rattacher à la théorie des idéaux fermés de l'anneau noethérien à gauche premier $R/_P$ donnée dans $[*]_3$ dès 1959, en notant que l'idéal A qui vérifie les propriétés du théorème 1.5. est un idéal contenant P et qui est fermé maximal dans $R/_P$. Il en résulte qu'il vérifie :

$$cx \in A\ ,\quad c \in C(P) \Longrightarrow x \in A \quad ([*]_3,\ \text{th. 8, p. 177}).$$

Mentionnons seulement les points suivants :

Si A vérifie (1), il contient P. En effet :

$$A \cap C(P) = \emptyset \Longrightarrow (A+P) \cap C(P) = \emptyset$$

d'où $A+P = A \supseteq P$ puisque A est maximal.

Si $A \supseteq P$ est fermé maximal, il est critique. En effet, soit un idéal à gauche $B \supsetneq A$, lié à A. On a donc B essentiel dans $R/_P$ et $B \cap C(P) \neq \emptyset$. L'hypothèse $B^{\cdot}.t = A^{\cdot}.s$ $(t \notin B\ ,\ s \notin A)$ entraînerait l'existence de $c \in C(P)$ tel que $ct \in B$, d'où $cs \in A$, ce qui est impossible avec $s \notin A$.

Si A vérifie (3) il contient P. En effet, A est premier et admet P comme idéal premier associé d'où $P = A^{\cdot}.R$ et $PR = P \subseteq A$.

Si A vérifie (4), il figure dans une décomposition : $P = A \cap A_2 \cap \dots \cap A_n$ de P en intersection d'idéaux à gauche irréductibles non superflus, et réciproquement.

$[*]_3$: L. LESIEUR et R. CROISOT, Anneaux noethériens à gauche premiers, Annales de l'ENS, 1959.

DEFINITION 5.1. : Un idéal à gauche A vérifiant les propriétés équivalentes du théorème 1.5. est appelé idéal à gauche P-critique.

Avant d'utiliser les idéaux P-critiques dans la théorie de la P-torsion, on donne une application aux anneaux artiniens à gauche.

THEOREME 5.2. : Dans un anneau noethérien à gauche R, les propriétés suivantes sont équivalentes :

(1) Tout idéal à gauche irréductible premier est maximal.

(2) Tout idéal à gauche critique premier est maximal.

(3) L'anneau R est artinien à gauche.

(1) $\Longrightarrow$ (2). puisque tout idéal critique est irréductible (proposition 3).

(2) $\Longrightarrow$ (3) . Soit P un idéal premier quelconque. Démontrons que A/P est artinien simple. Soit $P = A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n$ une décomposition de P en idéaux irréductibles non superflus. Alors A_1 est complément maximal dans R/P, donc P-critique (th. 1.5.) et par suite maximal. On a donc $P = A_1 \cap B$, avec $B = A_2 \cap \dots \cap A_n \neq P$, d'où B minimal contenant P puisque A_1 est maximal. Il en résulte que le socle de l'anneau noethérien à gauche R/P n'est pas nul, et par suite que R/P est artinien simple. Dès lors, tout élément régulier modulo P est inversible modulo P, ce qui est une condition suffisante pour que R soit artinien ([11], p. 35).

(3) $\Longrightarrow$ (1). Soit A irréductible et premier. Son idéal bilatère premier associé est donc $P = A^{\cdot}.R$ et il est contenu dans A. On a donc $P \subset A \subset R$. Si A est artinien, R/P est artinien simple et A est donc l'intersection d'idéaux à gauche maximaux. Comme A est irréductible, il est lui-même maximal.

§ 6. FILTRE F_P et P-TORSION.

Soit F_P le filtre des idéaux à gauche D tels que :

$$\forall r \in R \quad (D^{\cdot}. r) \cap C(P) \neq \emptyset \ .$$

Il vérifie les propriétés suivantes, considérées par Gabriel :

(1) $D \in F_P$, $D' \supseteq D \Longrightarrow D' \in F_P$.

(2) $D \in F_P$, $D' \in F_P \Longrightarrow D \cap D' \in F_P$.

(3) $D \in F_P$, $r \in R \Longrightarrow D^{\cdot}.r \in F_P$.

Soit M un R-module. Alors :

$$T_P(M) = \{m \in M \mid \mathrm{Ann}\ m = o^{\cdot}.m \in F_P\}$$

est un sous-module de M qu'on appelle <u>le sous-module de P-trosion de M .</u>

M est dit <u>sans P-torsion</u> si $T_P(M) = 0$.

<u>REMARQUE 6.1.</u> : Si $D \supseteq P$ on a : $D \in F_P \Longleftrightarrow D \cap C(P) \neq \emptyset$. En effet, la condition $D \cap C(P) \neq \emptyset$ est nécessaire pour que $D \in F_P$ d'après la propriété 3°, en faisant $r = 1$. Elle est également suffisante, car la condition de Ore mod. P , appliquée à $c \in D \cap C(P)$ et à $r \in R$, donne : $c'r = tc+p \in D$, d'où :

$$c' \in (D^{\cdot}.\, r) \cap C(P) .$$

Donnons quelques lemmes supplémentaires sur les idéaux P-critiques, dont l'un fait intervenir la P-torsion.

<u>LEMME 6.1.</u> : <u>Si</u> A <u>est P-critique et</u> $s \notin A$, $A^{\cdot}.s$ <u>est P-critique.</u> En effet, il suffit de démontrer, d'après le théorème 5.1., que $(A^{\cdot}.s) \cap C(P) = \emptyset$. Or, supposons $cs \in A$. L'idéal $A+Rs$ contient $d \in C(P)$ (th. 5.1.). On a donc $d = a+rs \in C(P)$. La condition de Ore dans $R/_P$ donne alors $c'r = tc+p$, $c' \in C(P)$. On en déduit $c'd = ca+tcs+ps \in A$, ce qui est contraire à la propriété $A \cap C(P) = \emptyset$.

<u>LEMME 6.2.</u> : <u>Deux idéaux à gauche P-critiques sont liés.</u> En effet, on sait que P est un idéal isotypique ([11], p. 111), c'est-à-dire que :

$$E(R/_P) = I_1 \oplus \dots \oplus I_n$$

où les I_j sont des injectifs indécomposables isomorphes, et n la dimension de Goldie de $R/_P$. Mais, alors, si A est P-critique, on a d'après le th. 5.1. :

$$P = A \cap A_2 \cap \dots \cap A_n$$

comme intersection d'idéaux irréductibles non superflus, d'où

$$E(R/_P) = E(R/_A) \oplus \dots \oplus E(R/_{A_n})$$

ce qui prouve que $E(R/_A) \simeq I_1$. Pour un autre idéal P-critique B , on a de même $E(R/_B) \simeq I_1$, d'où $E(R/_A) \simeq E(R/_B)$ et A et B sont liés d'après la propriété 2 de Dlab.

LEMME 6.3. : Soit A irréductible $\supseteq P$. Alors :

A est P-critique $\Longleftrightarrow E(R/_A)$ est sans P-torsion.

Supposons A P-critique. Soit $0 \neq \xi \in E(R/_A) = I$, et $\xi \in T_P(I)$. Il existe donc $\lambda \in R$ tel que $0 \neq \lambda\xi = \bar{s} \in R/_A$, avec $\bar{s} \in T_P(M)$, d'où $0 \cdot . \bar{s} = A \cdot . s \in F_P$ et $(A \cdot . s) \cap C(P) \neq \emptyset$, $s \notin A$, ce qui est contraire au lemme 6. On a donc $T_P(E(R/_A)) = 0$.

Réciproquement, si A est irréductible $\supseteq P$, et $E(R/_A)$ est sans P-torsion, on a : $A = 0 \cdot . \bar{1} \notin F_P$. Il en résulte $A \cap C(P) = \emptyset$ d'après la remarque 6.1., puis A P-critique d'après le théorème 5.1. .

§ 7. P-INJECTIFS INDECOMPOSABLES SANS P-TORSION.

Nous arrivons au théorème fondamental.

THEOREME 7.1. : Pour tout idéal premier bilatère P de l'anneau R noethérien à gauche, il existe un injectif indécomposable I_P , d'idéal premier associé P , sans P-torsion. I_P est défini à un isomorphisme près. De plus $E(R/_P) \simeq I_P^n$, où n est la dimension de Goldie de $R/_P$.

Démonstration : D'après le théorème 5.1., il existe un idéal à gauche premier, critique, d'idéal premier associé P , tel que $A \cap C(P) = \emptyset$. $I = E(R/_A)$ est injectif indécomposable, d'idéal premier associé P , et sans P-torsion d'après le Lemme 6.3. .

Soit J un autre injectif indécomposable sans P-torsion, d'idéal premier associé P . D'après le théorème 4.1., on a $J = E(R/_B)$ pour un idéal à gauche critique premier B . L'idéal premier P est l'associé de B ; on a donc , B étant premier, $P = B \cdot . R \subset B$. Comme J est sans P-torsion, B est P-critique (lemme 6.3.), et $J \simeq I$ (lemme 6.2.).

La propriété $E(R/_P) \simeq I^n$ a été vue dans la démonstration du lemme 6.2.

On a donc une application biunivoque :

$$P \longmapsto I_P$$

entre les idéaux premiers bilatères de R et les classes d'isomorphisme des injectifs indécomposables I tels que $P = \text{Ass } I$ et qui sont sans P-torsion.

<u>COROLLAIRE 7.2.</u> : <u>L'application</u> $I \to \mathrm{Ass}\ I = P$ <u>entre les classes d'isomorphisme des injectifs indécomposables et les idéaux premiers de</u> R <u>est biunivoque si et seulement si tout injectif indécomposable</u> I <u>est sans</u> P-torsion ($P = \mathrm{Ass}\ I$).

Cette propriété est vérifiée si on a la condition suivante :

Condition de Krause : <u>tout idéal à gauche essentiel de</u> R/P <u>contient un idéal bilatère non nul.</u>

En effet, soit $I = E(R/A)$ un injectif indécomposable ; on peut supposer A irréductible <u>premier</u> (th. 4.1.) , d'où $P = \mathrm{Ass}\ I = A^{\bullet}.R \subset A$. Si I n'était pas sans P-torsion, A ne serait pas P-critique (lemme 6.3.) et par suite $A \cap C(P) \neq \emptyset$ (th. 5.1.) . Alors A/P serait essentiel dans R/P et il contiendrait K/P non nul, bilatère, d'où $P \subsetneqq K \subseteq A$. Cela est impossible puisque $P = A^{\bullet}.R$ est le plus grand idéal bilatère contenu dans A .

Lambek et Michler démontrent donc que la condition de Krause est suffisante pour que la correspondance $P \mapsto I_P$ soit biunivoque. Krause a démontré qu'elle est également nécessaire. (Voir l'exposé ultérieur de G. Renault dans ce Séminaire). Elle entraîne que tout idéal à gauche tertiaire est isotypique.

Elle est vérifiée en particulier lorsqu'on a la condition (H) de Gabriel ([3], p. 422) ou si R/P satisfait une identité polynomiale (th. de Amitsur).

Rappelons la condition (H) :

Si A est un idéal à gauche de R , on a :

$$A^{\bullet}.\ R = \bigcap_{i=1}^{n} (A^{\bullet}.\ x_i) .$$

La condition de Krause en résulte car si $P \subseteq A$, et si A est essentiel mod. P , il en est de même de $A^{\bullet}.\ x_i$, donc de $A^{\bullet}.\ R = K$ qui est par suite un idéal bilatère K tel que :

$$P \subsetneqq K \subseteq A .$$

Un autre corollaire concerne l'identité des théories de torsion que l'on peut définir à partir d'un idéal premier ([10]).

(1) La théorie de torsion T_1 déterminée par l'injectif $E_R(R/P)$.

(2) La théorie de torsion T_2 déterminée par le filtre F_P .

(3) La théorie de torsion T_3 déterminée par les injectifs indécomposables ayant P pour idéal premier associé et qui sont sans P-torsion.

§ 8. ANNEAU DE QUOTIENTS R_P.

Idéal $T_P(R)$: Le sous-module de P-torsion de R est un idéal bilatère, puisque :

$$0\cdot .m \in F_P \Longrightarrow (0\cdot .m) \subset 0\cdot .m\lambda \in F_P .$$

On a : $T_P(R) \subseteq P$. En effet, soit $t \in T_P(R)$. Il existe donc $D \in F_P$ tel que : $Dt = 0$, et par suite $c \in D \cap C(P)$ tel que $ct = 0 \in P$. Comme c est régulier mod. P, on a : $t \in P$.

On pose dans la suite : $\bar{R} = R/_{T_P(R)}$. Alors $\bar{P} = P/_{T_P(R)}$ est un idéal premier de $\bar{R}$.

LEMME 8.1. :

a) $C(\bar{P}) = (C(P) + T_P(R))/T_P(R)$.

b) Le filtre $F_{\bar{P}}$ est constitué par les $\bar{D}$, $D \in F_P$.

c) $T_{\bar{P}}(\bar{R}) = 0$ ($\bar{R}$ est sans $\bar{P}$-torsion).

d) Tout R-module sans P-torsion est un $\bar{R}$-module.

e) R satisfait la condition de Ore vis-à-vis de $C(P)$ si et seulement si $\bar{R}$ la satisfait pour $C(\bar{P})$.

a) b) c) d) sont faciles. Démontrons e). Il est clair que la condition de Ore dans R pour $C(P)$ entraîne la condition analogue modulo $T_P(R)$ dans $\bar{R}$. Réciproquement, soit $c \in C(P)$, $r \in R$. On a donc dans $\bar{R}$: $\bar{c}'\bar{r} = \bar{r}'\bar{c}$, d'où $c'r - r'c = t \in T_P(R)$. Il existe donc $D \in F_P$ tel que $Dt = 0$, d'où $d \in C(P)$ tel que $d(c'r-r'c) = 0$, avec $dc' \in C(P)$.

Anneau de quotients R_P : La définition de Lambek d'un anneau de quotients s'applique à une théorie de torsion quelconque ([10]). Elle donne, ici, pour la P-torsion :

$$R_P = \{q \in \hat{E}_R(\bar{R}) \mid \bar{R}\cdot .\, q \in F_P\} ,$$

qui est un R-module que l'on peut munir d'une structure d'anneau, contenant $\bar{R}$.

Rappelons un procédé de construction.

LEMME 8.2. $R_P = \{q \in E_R(\bar{R}) \mid \bar{R}\cdot .\, q \in F_P\}$ peut être muni d'une structure d'anneau contenant $\bar{R}$.

L'addition se définit comme dans $E_R(\bar{R})$, et la multiplication $q.q'$ comme suit : si $\bar{R}\cdot .q' = \Delta \in F_P$ et si $\bar{R}\cdot .q = D \in F_P$ on a $\bar{\Delta}\cdot .q \in F_P$. En effet, on montre $(\bar{\Delta} \cdot\!. \, q) \cdot\!. \, \lambda = (\bar{\Delta} \cdot\!. \, \lambda q) \cap C(P) \neq \emptyset$, car soit $c\lambda q = \bar{u} \in \bar{R}$ (possible avec $c \in D \cdot\!. \, \lambda$; $c \in C(P)$). On prend ensuite $c' \in C(P)$ tel que $c'u \in \Delta$, on a alors $c'u = c'c\lambda q \in \bar{\Delta}$ d'où $c'c \in \bar{\Delta} \cdot\!. \, \lambda q$.

Il en résulte $\bar{\Delta} \cdot\!. \, q = I \in F_P$ (Si Δ est dense et $q \in Q$, $\Delta \cdot\!. \, q$ est dense) On a alors un R-homomorphisme de I dans $\bar{R}$ de la façon suivante :

$$f : i \to iq = \bar{\delta} \in \bar{\Delta} \to \delta q' \in \bar{R} .$$

f peut être réalisé par un homomorphisme unique (parce que $E_R(\bar{R})$ est sans torsion) de multiplication iq'', $q'' \in E_R(\bar{R})$. On pose $\boxed{q'' = qq'}$. C'est un produit d'homomorphismes d'où l'associativité et finalement une structure d'anneau.

On a $\bar{R} \hookrightarrow R_P$ car $q \in \bar{R} \Longrightarrow \bar{R} \cdot\!. \, q = R \in F_P$ et la multiplication est celle de $\bar{R}$.

§ 9. CONDITION DE ORE DANS R POUR C(P).

Je me propose surtout de relever dans la suite les conditions d'existence de l'anneau de fractions classique pour $C(P)$, c'est-à-dire de la condition de Ore dans R pour $C(P)$. On a déjà vu au lemme 8.1. qu'elle équivaut à la même condition pour $\bar{R}$. Or l'anneau $\bar{R}$ suffit pour étudier l'anneau de quotients R_P, d'après le théorème suivant :

<u>THEOREME 9.1.</u> : <u>L'anneau de quotient</u> R_P <u>coïncide avec l'anneau de quotients</u> $\bar{R}_{\bar{P}}$ <u>de l'anneau</u> $\bar{R} = R/T_P(R)$ <u>pour l'idéal premier</u> $\bar{P} = 0/T_P(R)$.

Je renvoie à la page 36 du mémoire [*]$_1$ pour la démonstration.

Le théorème suivant donne une réponse au problème posé, en supposant que l'anneau R est sans P-torsion, ce qui est légitime d'après le th. 9.1. et le lemme 8.1.

<u>THEOREME 9.2.</u> : R <u>satisfait la condition de Ore pour</u> $C(P)$ <u>si et seulement si les éléments de</u> $C(P)$ <u>sont des unités dans l'anneau de quotients</u> R_P.

Supposons $c \in C(P)$ inversible dans R_P. Soit $r \in R$. On a donc $q = rc^{-1} \in R_P$. Comme $R \cdot\!. \, q \in F_P$ d'après la définition de l'anneau de quotients, il existe $c' \in C(P)$ tel que $c'q = r' \in R$, d'où : $c'r = r'c$, ce qui est la condition de Ore. Supposons maintenant la condition de Ore vérifiée dans R pour $C(P)$. Nous allons d'abord en déduire que les éléments de $C(P)$ sont réguliers dans R.

1° - $\underline{cr = o \Longrightarrow r = o}$: soit $s \in R$, d'où $c's = s'c$ et par suite $(Rc \,.\, s) \cap C(P) \neq \emptyset$, et $Rc \in F_P$, d'où $r \in T_P(R) = o$.

2° - $\underline{rc = o \Longrightarrow r = o}$: prenons $c \in C(P)$ tel que $o \,.\, c$ soit maximal. La condition de Ore appliquée à r et c donne $r'c = c'r$, d'où $r'c^2 = o$ et $r' \in o \,.\, c^2$, donc $r'c = o = c'r$, ce qui implique $r = o$ d'après 1°.

Démontrons maintenant que c est inversible dans R_P. On a déjà vu que $Rc \in F_P$. L'application $rc \to r$ est une injection de $D \in F_P$ dans R, qui peut être réalisée par une multiplication par un élément unique $q \in R_P$, qui vérifie donc : $rcq = r$, d'où, avec $r = 1$, $cq = 1$. Il faut encore vérifier que $qc = 1$, ce qui a lieu si c est régulier à gauche dans R_P. De fait, soit $cq' = o$, avec $q' \neq o$. Comme R_P est extension essentielle de R, il existe $d \in R$ tel que $o \neq dq' \in R$. En appliquant la condition de Ore, il vient : $c'd = tc$, d'où $c'dq' = o$, ce qui est impossible.

Citons encore le théorème suivant, qui nécessite une hypothèse sur l'idéal bilatère engendré par R_P.

<u>THEOREME 9.3.</u> : On suppose que $M = R_P\bar{P}R_P$ est <u>le radical de Jacobson</u> de R_P. Alors les conditions suivantes sont équivalentes :

(1) $M = R_P\bar{P}$ et R_P/M est artinien simple.

(2) $M = R_P\bar{P}$ et $R_{P/M} \cong Q_{c\ell}(R/P)$.

(3) Tout R_P-module H est sans P-torsion et P-divisible en tant que R-module $(E(H)/H$ est sans P-torsion.

(4) R satisfait la condition de Ore pour $C(P)$.

Noter que (3) a d'intéressantes conséquences, en particulier $R \to R_P$ est un épimorphisme dans la catégorie des anneaux, R_P est plat en tant que R-module, R_P est noethérien à gauche (Silver [17], Walker and Walker).

§ 10. <u>EXEMPLE.</u>

Soit D un anneau local noethérien intègre commutatif, dont le radical de Jacobson M est principal, par exemple $D = \{\frac{a}{b} \in Q \mid b \notin 2\mathbb{Z}\}$, $M = 2D$. Soit $K = D/M$ le corps résiduel, et F le corps des quotients de D. On prend l'anneau de matrices :

$$R = \begin{pmatrix} D & D \\ M & D \end{pmatrix} \quad \text{et l'idéal bilatère} \quad P = \begin{pmatrix} M & D \\ M & D \end{pmatrix} .$$

P <u>est premier</u>, et même complètement premier.

C(P) <u>est le complémentaire de</u> P dans R .

<u>Le filtre</u> F_P ne contient que deux idéaux :

$$R \quad \text{et} \quad T = \begin{pmatrix} D & D \\ M & M \end{pmatrix} .$$

<u>$T_P(R) = 0$.</u> R est sans P-torsion.

<u>L'anneau de quotients est</u> :

$$R_P = \begin{pmatrix} D & D \\ D & D \end{pmatrix} .$$

Cet exemple appelle les remarques suivantes :

1° - <u>La condition de Ore n'est pas satisfaite pour</u> C(P) .

En effet, on a : $x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in P$ et $c = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in C(P)$ avec $cx = 0$, ce qui est en contradiction avec le théorème 9.2. qui affirme la régularité des éléments de C(P) .

Notons que des exemples d'anneaux ne vérifiant pas la condition de Ore pour C(P) ont été donnés ailleurs : Connel [12] , Lesieur (Séminaire Dubreil, 1970, et Proceedings of the Colloquium, Keszthely, Hungary).

2° - Dans sa théorie de la localisation [4] , Goldie suppose $\bigcap_{n=1}^{\infty} H_n = 0$, où H_n désigne la puissance $n^{\text{ème}}$ symbolique de P . Ici on a $\bigcap_{n=1}^{\infty} H_n = P$ car $P^2 = P$. Et pourtant l'anneau R_P est "local" au sens de Goldie : son radical de Jacobson J est l'idéal bilatère maximal unique ; R_P/J est artinien simple, $\bigcap_{n=1}^{\infty} J^n = 0$.

3° - On a $R_P R = R_P$ et $R_P T = R_P$. Alors la <u>condition de Walker</u> est vérifiée : ($\forall D \in F_P$ on a $R_P D = R_P$) et cela entraîne que tout module sans P-torsion et P-divisible est un R_P-module). Alors R satisfait la condition (3) du théorème 9.3. mais pas la condition de Ore. L'hypothèse que $M' = R_P P R_P$ est le radical de Jacobson de R_P est en défaut. De fait : $R_P P = P$ et $M' = R_P P R_P = R_P$.

REFERENCES

[1] S.A. AMITSUR, Prince rings having polynomial identities with arbitrary coefficients. Proc. London Math. Soc. (3), 17(1967), pp. 470-486.

[2] V. DLAB, Rank theory of modules. Fundamenta Mathematicae, 64(1969), pp. 313-324.

[3] P. GABRIEL, Des catégories abéliennes. Bull. Soc. Math. France, 90(1962), pp. 323-448.

[4] A.W. GOLDIE, Semi-prime rings with maximum conditions. Proc. London Math. Soc. (3) 10(1960), pp. 201-220.

[5] A.W. GOLDIE, Localisation in non-commutative Noetherian rings. J. Algebra 5(1967), pp. 89-105.

[6] A.W. GOLDIE, A note on non-commutative localisation. J. Algebra 8(1968), pp. 41-44.

[7] A.W. GOLDIE, Properties of the Idealiser (to appear).

[8] O. GOLDMAN, Rings and modules of quotients. J. Algebra 13(1969), pp.10-47.

[9] J. LAMBEK, Lectures on rings and modules. Waltham, Toronto, London, 1966.

[10] J. LAMBEK, Torsion theories, additive semantics, and rings of quotients. Springer Verlag, Lecture Notes on Mathematics 177(1971).

[11] L. LESIEUR ET R. CROISOT, Algèbre noethérienne non commutative. Mémorial des Sciences mathématiques 154(1963).

[12] J.C. McCONNEL, Localisation in enveloping rings. J. LONDON Math. Soc. 43(1968), pp. 421-428.

[13] G. MICHLER, Goldman's primary decomposition and the tertiary decomposition. J. Algebra 16(1970), pp. 129-137.

[14] G. MICHLER, Prime right ideals and right noetherian rings. Proceedings of the Symposium on Theory of rings, Salt Lake City, March 2-6, 1971 (to appear).

[15] M. NAGATA, Local rings. New York, 1962.

[16] R. RENTSCHLER et P. GABRIEL, Sur la dimension des anneaux et ensembles ordonnés. C.R. Acad. Sci. Paris 265(1967), pp. 712-715.

[17] L. SILVER, Non commutative localisation. J. Algebra 7(1967), pp. 44-76.

-:-:-:-:-:-:-:-:-:-

UNIVERSITE PARIS-SUD XI

CENTRE D'ORSAY

SEMINAIRE D'ALGEBRE NON COMMUTATIVE

Conférence n° 5 du 1.12.1971

-:-:-:-:-:-:-

FONCTEUR D' ENVELOPPE INJECTIVE

par Emilio VILLANUEVA NOVOA.

-:-:-:-:-

INTRODUCTION.

L'objet de ce mémoire a été, au début, de résoudre une question posée par P. Hilton dans un cours à l'Ecole Polytechnique Fédérale de Zurich, pendant l'hiver de 1966-67, cours qui a été rédigé et polycopié par M.-A. Knus.

On sait, d'après les travaux qui ont suivi l'article de R. Baer "Abelian groups that are direct summands of every containing abelian group", publié en 1940, que chaque module peut être plongé dans un module injectif, et qu'il existe une extension injective minimale (enveloppe injective) qui est déterminée à des isomorphismes près.

Un problème ouvert a été posé par Hilton sous la forme suivante :

"Est-ce qu'un homomorphisme $\beta : B_1 \to B_2$ induit un homomorphisme canonique $\gamma : E_1 \to E_2$ des extensions essentielles minimales ?"

On va prouver que la réponse est affirmative si on construit les enveloppes injectives canoniquement.

La définition du foncteur, qu'on a appelé : d'enveloppe injective, résoud le problème.

CHAPITRE 1.

.1. Définitions et notations :

Sauf mention contraire, ici, tous les anneaux seront toujours unitaires, et non nécessairement commutatifs. Tous les modules seront à gauche, et unitaires. Tous les idéaux considérés sont à gauche.

M_R sera la catégorie des R-modules à gauche sur l'anneau R .

Un morphisme h est un monomorphisme si hf = hg entraîne f = g . La notion duale est la notion d'épimorphisme. On notera par $\rightarrowtail$ et $\twoheadrightarrow$ les monomorphismes et épimorphismes respectivement. La catégorie M_R étant équilibrée (*), la notation $\rightarrowtail\!\!\!\!\twoheadrightarrow$ est compatible avec les notations antérieures pour désigner les isomorphismes.

Un R-module L est injectif si toute suite exacte $0 \to M' \to M \to M'' \to 0$ est transformée dans une autre suite exacte :

$$0 \longleftarrow H(M',L) \longleftarrow H(M,L) \longleftarrow H(M'',L) \longleftarrow 0$$

au moyen du foncteur de représentation covariante $h^L := \mathrm{Hom}_R(-,L)$, c'est-à-dire si h^L est exact.

Cette condition est évidemment équivalente à :

L est injectif si, et seulement si, pour chaque monomorphisme $j : M' \rightarrowtail M$, tout morphisme $f' : M' \longrightarrow L$ peut être étendu à un morphisme $f : M \longrightarrow L$

$$\begin{tikzcd} M' \arrow[r, tail, "j"] \arrow[d, "f'"'] & M \arrow[dl, "f"] \\ L & \end{tikzcd}$$

Un monomorphisme $L \rightarrowtail L_1$ est un effacement injectif [7] si tout diagramme

$$\begin{tikzcd} M' \arrow[r, tail] \arrow[d, "f'"'] & M \\ L \arrow[r, tail] & L_1 \end{tikzcd}$$

peut être complété à un diagramme commutatif, avec un morphisme $f : M \longrightarrow L_1$.

Un monomorphisme $L \longrightarrow L_1$ est une sous-enveloppe injective si tout diagramme

$$\begin{tikzcd} I \arrow[r, tail] \arrow[d, "f'"'] & R \\ L \arrow[r, tail] & L_1 \end{tikzcd}$$

(*) c'est-à-dire une catégorie dans laquelle une flèche est un isomorphisme si, et seulement si, elle est un monomorphisme et un épimorphisme. ("Balanced" dans [10], p. 6).

peut être complété à un diagramme commutatif avec un morphisme $f : R \longrightarrow L$, I étant idéal de R , et tous les morphismes, bien entendu, de R-modules.

Une extension $N \subset M$ est essentielle (et on écrira $N \subset^{e} M$ ou $N \overset{e}{\rightarrowtail} M$) si chaque sous-module non nul H de M rencontre N suivant un sous-module non nul.

On dira qu'une extension $j : N \rightarrowtail M$ est triviale s'il existe un module P tel que $M = N \oplus P$ et que $p_1 j = 1_N$, où p_1 est la projection du produit $N \times P$ sur N .

On appelle enveloppe injective de N une extension essentielle $\hat{N}$ de N qui est aussi un module injectif.

.2. Quelques propriétés :

1.2.1. Un module L est injectif si, et seulement si, toute extension $j : L \rightarrowtail M$ est triviale.

1.2.2. Un produit direct de modules est injectif si, et seulement si, chaque facteur est injectif [2] .

Dans M_R les sommes directes finies coïncident avec les produits directs finis ; on a donc :

1.2.3. Une somme directe finie de modules est injective si, et seulement si, chaque facteur est injectif [2] .

1.2.4. R est noethérienne à gauche si, et seulement si, toute somme directe de modules injectifs est injective (Faith, C. et Walker, B.A., Direct sums representations of injective modules. Th. 0.1.).

1.3. Critère de Baer :

1.3.1. Un R-module L est injectif si, et seulement si, pour chaque idéal à gauche I de R et $f \in H(I,L)$ donné, il existe un élément $y \in L$ tel que $f(\lambda) = \lambda y$ pour tout $\lambda \in I$ [2] .

CHAPITRE 2.

2.1. Rappel sur les extensions essentielles :

La définition d'une extension essentielle peut se faire avec le langage des catégories :

$N \overset{j}{\rightarrowtail} M$ est une extension essentielle si, et seulement si,

$N \overset{j}{\rightarrowtail} M \xrightarrow{f} L$, $f \circ j$. monomorphisme $\Longrightarrow$ f monomorphisme.

Une autre définition équivalente pour les modules est :

$N \subset M$ est une extension essentielle si, pour tout $x \in M$, $(x \neq 0)$, il existe un $\lambda \in R$ tel que $\lambda x \neq 0$, $\lambda x \in N$.

Cette condition peut être exprimée par :

$$N \overset{e}{\subset} M \Longleftrightarrow \forall x \in M ,\ x \neq 0 ,\ [0 : x] \neq [N : x]^{(*)}.$$

2.1.1. $P \overset{e}{\rightarrowtail} N \overset{e}{\rightarrowtail} M \Longleftrightarrow P \overset{e}{\rightarrowtail} M$

2.1.2. $N \overset{e}{\rightarrowtail} M \qquad \Longrightarrow N \cap P \overset{e}{\rightarrowtail} M \cap P$

2.1.3. $N \overset{e}{\rightarrowtail} M$, $P \overset{e}{\rightarrowtail} M \Longleftrightarrow N \cap P \overset{e}{\rightarrowtail} M$, $N \cap P \neq 0$

2.1.4. $P \overset{e}{\rightarrowtail} P \oplus N \Longrightarrow N = 0$.

Ces propriétés sont des conséquences immédiates des définitions. Elles peuvent toutes être prouvées avec le langage des catégories. Par exemple, pour prouver $P \overset{e}{\rightarrowtail} N \overset{e}{\rightarrowtail} M \Longrightarrow P \overset{e}{\rightarrowtail} M$ on peut le faire dans les catégories abéliennes avec la définition donnée ci-dessus pour les catégories, en utilisant la propriété du "pushout" ([5], Théorème 2.5.4.*, p. 53) : k monomorphisme $\Longrightarrow$ k' monomorphisme.

(*) $[N:x]$ est, comme d'habitude, l'idéal à gauche formé par tous les $\lambda \in R$ tels que $\lambda x \in N$.

$$\begin{tikzcd} \cdot \arrow[r, tail, "j"] \arrow[dr, tail, "f \circ j"'] & \cdot \arrow[r, tail, "k"] \arrow[d, "f"] & \cdot \arrow[d, "f'"] \\ & \cdot \arrow[r, "k'"'] & \cdot \end{tikzcd}$$

En effet, $f \circ j$ monomorphisme $\Longrightarrow$ f' monomorphisme parce que $k \circ j$ est essentielle, et on a $f' \circ k = k' \circ f$ monomorphisme, d'où f est monomorphisme.

<u>2.1.5.</u> $N_1 \overset{e}{\rightarrowtail} M_1$, $N_2 \overset{e}{\rightarrowtail} M_2 \Longrightarrow N_1 \oplus N_2 \overset{e}{\rightarrowtail} M_1 \oplus M_2$
([6], lemme 2., p. 358).

<u>2.1.6.</u> $N/P \overset{e}{\rightarrowtail} M/P \Longrightarrow P \rightarrowtail N \overset{e}{\rightarrowtail} M$.

<u>2.1.7.</u> Si $\{N_i\}$ est une chaîne ou un système filtrant vis-à-vis de la relation d'inclusion, on a :

$$P \overset{e}{\rightarrowtail} N_i \; , \; \forall i \Longrightarrow P \overset{e}{\rightarrowtail} \bigcup_i N_i \; .$$

2.2. <u>Extensions essentielles maximales</u> :

<u>2.2.1.</u> Si P est un sous-module de M , il y a des sous-modules de M qui sont une extension essentielle maximale (parmi les sous-modules de M) de P .

Il suffit de considérer l'ensemble des sous-modules de M , qui sont une extension essentielle de P . Un tel ensemble n'est pas vide et, d'après 2.1.7., et le lemme de Zorn, la propriété en résulte.

<u>2.2.2.</u> Un module L est injectif si, et seulement si, il n'admet pas d'extensions essentielles propres.

<u>2.2.3.</u> Si $L \rightarrowtail M$ est une extension non triviale, il existe une extension essentielle propre $L \overset{e}{\rightarrowtail} L'$.

Cela est une conséquence de 1.2.1. et 2.2.2.

<u>2.2.4.</u> $P \rightarrowtail M$, M injectif $\Longrightarrow E_M(P)$ (extension essentielle maximale de P dans M) est injectif.

Il suffit de prouver que $E_M(P)$ n'admet pas d'extensions essentielles propres. Soit $E_M(P) \overset{e}{\rightarrowtail} E'$.

$$\begin{tikzcd}
 & & E' \arrow[dr, "f"] & \\
P \arrow[r, tail, "e"] & E_M(P) \arrow[ur, tail, "e", "j"'] \arrow[rr, tail, "k"] & & M
\end{tikzcd}$$

M injectif $\Longrightarrow \exists f$, $f \circ j = k$ et f monomorphisme $\Longrightarrow f(E') = E_M(P)$.

CHAPITRE 3.

3.1. Enveloppe injective :

3.1.1. $\hat{N}$ est enveloppe injective de N si, et seulement si, $\hat{N}$ est une extension essentielle maximale de N .

3.1.2. $\hat{N}$ est enveloppe injective de N si, et seulement si, $\hat{N}$ est une extension injective minimale de N .

Tout cela est une conséquence de 2.2.2. et 2.2.4.

3.1.3. Toute extension essentielle M de N peut être plongée dans une enveloppe injective $\hat{N}$ de N .

3.1.4. L'enveloppe injective est déterminée à des isomorphismes près.

3.1.5. $N \overset{e}{\rightarrowtail} M \Longrightarrow \hat{N} = \hat{M}$.

3.1.6. $N_1 \rightarrowtail N_2 \Longrightarrow \hat{N}_1 \subset \hat{N}_2$.

3.1.7. Un isomorphisme de modules admet une prolongation à leurs enveloppes injectives qui est aussi un isomorphisme.

3.1.8. L'enveloppe injective d'un module peut être plongée dans une extension injective quelconque du même module.

3.1.9. $N_1 \overset{e}{\rightarrowtail} M_1$, $N_2 \overset{e}{\rightarrowtail} M_2 \Longrightarrow N_1 \oplus N_2 \overset{e}{\rightarrowtail} M_1 \oplus M_2$

([6], Lemme 2., p. 358).

3.1.10. $N = N_1 \oplus N_2 \oplus \dots \oplus N_r \Longrightarrow \hat{N} = \hat{N}_1 \oplus \hat{N}_2 \oplus \dots \oplus \hat{N}_r$.

Cela est une conséquence de ce que la somme directe finie de modules injectifs est injective ([2], p. 8), et de 3.1.9.).

3.2. Existence :

L'existence de l'enveloppe injective est une conséquence de 2.2.4. et du théorème :

"Tout R-module est un sous-module d'un R-module injectif".

R. Baer [1] utilise la terminologie de groupe abélien qui admet un anneau d'opérateurs et qui est summand direct de tout groupe abélien qui le contient (groupe complet) et démontre, essentiellement, le critère de Baer (1.3.1.) (Théorème 1 du travail de Baer) et le théorème antérieur. A peu de chose près, les deux théorèmes se trouvent dans le livre de Cartan et Eilenberg (théorèmes 3.2. et 3.3. du même livre).

Dans la démonstration que Baer a faite de l'existence d'une extension injective pour chaque module, on construit la sous-enveloppe injective (p. 2, Chap. 1) par induction dans les idéaux de l'anneau.

Dans [2] on obtient la sous-enveloppe injective en une seule fois comme module facteur de la somme directe $A \oplus F$, où A est le module et F le module libre engendré par l'ensemble des couples (I,f) des idéaux de l'anneau et les morphismes de ces idéaux dans le module. Or, dans la construction de Cartan, la sous-enveloppe injective qu'on obtient n'est pas une extension essentielle de A, tandis que dans le travail de Baer la condition (iii") entraîne l'essentialité (propriété (E) dans le travail de Baer).

La construction du module injectif se termine de la même façon dans les deux cas, par induction transfinie sur les sous-enveloppes, la chaîne étant limitée pour le cardinal de l'anneau. Dans [1] on obtient l'enveloppe injective, mais non canoniquement car on fait usage de l'axiome du choix pour construire la sous-enveloppe injective.

Dans [3] on prouve l'existence d'extensions injectives dans les R-modules avec le même théorème dans les groupes abéliens, et il ne faut pas employer d'induction transfinie.

Cette démonstration, à peu de choses près, on peut la trouver aussi dans [4] et elle consiste à plonger le module L dans un groupe abélien divisible L'. $\mathrm{Hom}_Z(R,L')$ a une structure de R-module, et est injective et contient L comme sous-module.

De toutes les méthodes antérieures, la plus proche de la solution du problème posé par Hilton [8](p. 1 de ce mémoire), est la méthode de Baer, car elle construit directement l'enveloppe injective, mais cette construction n'a pas un caractère canonique parce qu'elle suppose un arrangement transfini des idéaux, arrangement qui nécessite l'axiome du choix.

La construction qu'on va faire du foncteur d'enveloppe injective se fera en utilisant une méthode analogue à celle de Cartan et Eilenberg, mais la sous-enveloppe sera une extension essentielle, et alors plus petite que ce qu'on obtient par la méthode classique. On fait usage aussi d'induction transfinie.

3.3. Foncteur d'enveloppe injective :

3.3.1. Si R est un anneau avec 1 et A un R-module à gauche unitaire, A est isomorphe à $\mathrm{Hom}_R(R,A)$ quand, avec l'application bijective qui fait correspondre à un élément $a \in R$ l'homomorphisme $\bar{a} : R \to A$ tel que $\bar{a}(\lambda) = \lambda a$, on transporte au groupe abélien $\mathrm{Hom}_R(R,A)$ la structure de R-module à gauche de A ([10], Ex. 12, p. 77).

Pour $r \in R$ et $a \in A$, $r.\bar{a} = \overline{ra}$, d'où :

$$(r.\bar{a})\lambda = \lambda r a \ .$$

3.3.2. I étant un idéal à gauche de R et $\mu \in R$, on utilise la notation $[I:\mu]$ pour l'idéal à gauche défini par :

$$\lambda \in [I:\mu] \iff \lambda\mu \in I \qquad \text{(voir remarque page 6)} \ .$$

3.3.3. $\lambda \in [I:\nu\mu] \iff \lambda\nu \in [I:\mu] \iff \lambda\nu\mu \in I \iff \lambda \in [[I:\mu]:\nu]$

$$[I:\nu] \cap [I:\mu] \subset [I:(\nu+\mu)] \ .$$

3.3.4. Soit A un R-module à gauche et $\mathrm{Id}(R)$ l'ensemble de tous les idéaux à gauche de R. Soit Φ_A la réunion des ensembles d'homomorphismes de R-module des idéaux à gauche de R dans A :

$$\Phi_A = \bigcup_{I_i \in \mathrm{Id}(R)} \mathrm{Hom}_R(I_i, A) \ .$$

Soit F_{Φ_A} le R-module libre à gauche sur Φ_A. Un élément de F_{Φ_A} a une expression unique comme combinaison linéaire des éléments f_i de Φ_A

$$x = \sum_{f_i \in \Phi_A} \lambda_i f_i \qquad (1)$$

où chaque f_i n'apparaît qu'une fois dans la somme ; cependant x peut s'exprimer de diverses formes comme combinaison linéaire :

$$x = \Sigma\, \mu_i f_i \qquad (2)$$

si on décompose un, ou plusieurs, μ_i comme une somme d'éléments de l'anneau, et alors il peut y avoir des f_i égaux. On va appeler (1) expression canonique de x.

Soit M_A l'ensemble des éléments $x \in F_{\Phi_A}$ qui admettent une expression $x = \Sigma\, \mu_i f_i$ (non nécessairement canonique) telle que, pour chaque $\lambda \in \cap [I_i : \mu_i]$ on a $\Sigma\, f_i(\lambda\mu_i) = 0$. (cette dernière expression a un sens car $\lambda\mu_i$ appartient au domaine de f_i).

<u>3.3.5.</u> M_A est un sous-module de F_{Φ_A}.

En effet, si $a, b \in M_A$, ils admettent des expressions :

$a = \Sigma\, \mu_i f_i$, $b = \Sigma\, \nu_i f_i$ telles que pour tout $\lambda \in \cap [I_i : \mu_i]$ et pour tout $\lambda' \in \cap [I_i : \nu_i]$ on a $\Sigma\, f_i(\lambda\mu_i) = 0$ et $\Sigma\, f_i(\lambda'\nu_i) = 0$. Or, une des expressions possibles de $a+b$ est :

$$a+b = \Sigma\, \mu_i f_i + \Sigma\, \nu_i f_i ,$$

et, si $$\lambda \in (\cap [I_i : \mu_i]) \cap (\cap [I_i : \nu_i]) ,$$

on a : $$\Sigma\, f_i(\lambda\mu_i) + \Sigma\, f_i(\lambda\nu_i) = 0 .$$

Si $a \in M_A$ et $\lambda \in R$, on a pour a une expression $a = \Sigma\, \mu_i f_i$ telle que $\forall \lambda \in \cap [I_i : \mu_i]$, $\Sigma\, f_i(\lambda\mu_i) = 0$. Or $\lambda a = \Sigma\, \lambda\mu_i f_i$ et si $\mu \in \cap [I_i : \lambda\mu_i]$ alors $\mu\lambda \in \cap [I_i : \mu_i]$, et, de $a \in M_A$ on tire :

$$\forall \mu \in \cap [I_i : \lambda\mu_i] , \quad \Sigma\, f_i(\mu\lambda\mu_i) = 0 .$$

<u>3.3.6.</u> On appellera <u>première sous-enveloppe injective</u> $D(A)$ ou $D^1(A)$ d'un module A une extension essentielle de A qui soit une sous-enveloppe injective minimale de A.

La définition d'une sous-enveloppe injective peut être donnée en termes analogues à ceux que l'on emploie dans le critère de Baer.

<u>3.3.7.</u> $L \overset{i}{\hookrightarrow} L_1$ est une sous-enveloppe injective si, et seulement si, pour chaque idéal I de R et chaque $f' \in \mathrm{Hom}_R(I, L)$ il existe un élément $y \in L_1$ tel que $i \circ f'(\lambda) = \lambda y$ pour tout $\lambda \in I$

$$\begin{tikzcd}
I \arrow[r, hook, "j"] \arrow[d, "f'"'] & R \arrow[d] & 1 \arrow[d, mapsto] \\
L \arrow[r, hook, "i"] & L_1 & y
\end{tikzcd}$$

<u>3.3.8.</u> Soit A un R-module et $h:A \longmapsto \mathrm{Hom}_R(R,A)$ l'isomorphisme décrit dans 3.3.1. On a $\mathrm{Hom}_R(R,A) \subset \Phi_A$. Soit $j:\mathrm{Hom}_R(R,A) \longmapsto \Phi_A$ l'inclusion (application d'ensembles), et soit $j_{\Phi_A} : \Phi_A \longmapsto F_{\Phi_A}$ l'application qui définit le R-module libre F_{Φ_A} ; soit $\varphi:F_{\Phi_A} \longrightarrow F_{\Phi_A}/M_A$ l'épimorphisme canonique de noyau M_A . On écrira $i = \varphi \circ j_{\Phi_A} \circ j \circ h$, et $D(A) = E_{\Phi_A}/M_A$.

$$\begin{array}{ccccccccc} A & \xrightarrow{h} & \mathrm{Hom}_R(R,A) & \xrightarrow{j} & \Phi_A & \xrightarrow{j_{\Phi_A}} & F_{\Phi_A} & \xrightarrow{\varphi} & D(A) \\ a & \rightsquigarrow & \bar{a} & \rightsquigarrow & \bar{a} & \rightsquigarrow & \bar{a} & \rightsquigarrow & |\bar{a}| \end{array}$$

On utilisera la même notation pour les éléments de $\mathrm{Hom}_R(R,A)$ et pour leurs images dans Φ_A et F_{Φ_A} . $|\bar{a}|$ désigne la classe de $\bar{a}$ modulo M_A . De même, f désignera un élément de Φ_A ou son image dans F_{Φ_A} .

<u>3.3.9.</u> $A \xrightarrow{i} D(A)$ est une première sous-enveloppe injective.

On va prouver cela en plusieurs étapes.

1) <u>$A \xrightarrow{i} D(A)$ est un monomorphisme de modules.</u>

En effet, soit $a,b \in A$, $h(a) = \bar{a}$, $h(b) = \bar{b}$, $g(a+b) = \overline{a+b}$. $\overline{a+b} - \bar{a} - \bar{b} \in M_A$ car le domaine de $\overline{a+b}$, $\bar{a}$, $\bar{b}$ est l'anneau tout entier, et pour chaque $\lambda \in R([R:1] = [R:(-1)] = R)$ on a :

$$\overline{a+b}(\lambda) - \bar{a}(\lambda) - \bar{b}(\lambda) = 0 .$$

Si $\mu \in R$ et $a \in A$, $\overline{\mu a} - \mu\bar{a} \in M_A$, car pour chaque $\lambda \in [R:1] \cap [R:\mu] = R$ on a $\overline{\mu a}(\lambda) - \bar{a}(\lambda\mu) = \lambda(\mu a) - (\lambda\mu)a = 0$.

Tout cela équivaut à dire $i(a+b) = i(a) + i(b)$ et $i(\mu a) = \mu i(a)$.

Soit $a \in \mathrm{Ker}\, i$. On a $\bar{a} \in M_A$, et alors $\bar{a}$ admet une expression

$$\bar{a} = \sum_{i=1}^{n} \mu_i \bar{a} \quad \text{avec} \quad \sum_{i=1}^{n} \mu_i = 1$$

telle que $\forall\lambda \in \bigcap_{i=1}^{n} [R:\mu_i] = R$, on a :

$$\sum_{i=1}^{n} \bar{a}(\lambda\mu_i) = 0 ,$$

d'où $\lambda a = \bar{a}(\lambda) = \bar{a}(\sum_{i=1}^{n} \lambda\mu_i) = \sum_{i=1}^{n} \bar{a}(\lambda\mu_i) = 0$ pour tout $\lambda \in R$;

R unitaire $\Longrightarrow a = 0$.

2) $\underline{A \xrightarrow{i} D(A)}$ est une sous-enveloppe injective :

Soit I un idéal à gauche de R et $f : I \longrightarrow A$ un R-homomorphisme. D'après 3.3.7., on doit prouver qu'il existe un élément $y \in D(A)$ tel que $i \circ f(\lambda) = \lambda y$ pour tout $\lambda \in I$.

$$\begin{tikzcd} I \arrow[r, hook, "j"] \arrow[d, "f"'] & R \arrow[d] & 1 \arrow[d, mapsto] \\ A \arrow[r, hook, "i"] & D(A) & y \end{tikzcd} .$$

Or, $f(\lambda) \in A$ pour chaque $\lambda \in I$, et on a $i \circ f(\lambda) = |\overline{f(\lambda)}| \in D(A)$; encore $\forall \nu \in R$ on a $\overline{f(\lambda)}(\nu) = \nu f(\lambda)$, et alors $\lambda f - \overline{f(\lambda)} \in M_A$, car pour chaque $\nu \in [I:\lambda] \cap [R:(-1)] = R$, $f(\nu\lambda) - \overline{f(\lambda)}(\nu) = \nu f(\lambda) - \nu f(\lambda) = 0$. D'où, $\forall \lambda \in I \quad \lambda|f| - |\overline{f(\lambda)}| = |\lambda f - \overline{f(\lambda)}| = 0$, ou ce qui est la même chose :

$$\lambda|f| = |\overline{f(\lambda)}| = i \circ f(\lambda) ,$$

et il suffit de prendre $y = |f|$.

3) $\underline{\text{L'extension } A \xrightarrow{i} D(A) \text{ est essentielle}}$:

D'après 2.1. il suffira de prouver que pour $0 \neq y \in D(A)$, il existe un $a \in A$, $a \neq 0$, tel que $\mu y = i(a)$ pour un $\mu \in R$. Mais y admet une expression $y = \sum \mu_i |f_i|$ car $\{|f_i|\}$ est un système de générateurs de $D(A)$. De $y \neq 0$ on peut assurer que pour toute expression de y comme ci-dessus, il existe un $\mu \in R$ tel que $\mu \in \bigcap [I:\mu_i]$ et que $\sum f_i(\mu\mu_i) \neq 0$. Si on prend $a = \sum f_i|\mu\mu_i) \in A$, on a $a \neq 0$, et également :

$$\bar{a} - \sum \mu\mu_i f_o \in M_A ,$$

car $\forall \lambda \in [R:1] \cap (\bigcap [I_i : \mu\mu_i]) = \bigcap [I_i : \mu\mu_i]$ on obtient :

$$\bar{a}(\lambda) - \sum f_i(\lambda\mu\mu_i) = \lambda a - \lambda \sum f_i(\mu\mu_i) = 0 .$$

Alors :

$$i(a) = |\bar{a}| = \sum \mu\mu_i |f_i| = \mu y .$$

4) <u>$A \xrightarrow{i} D(A)$ est une sous-enveloppe injective minimale</u> :

Pour prouver cette minimalité on va démontrer auparavant le lemme :

3.3.10. Si $f \in \mathrm{Hom}_R(I,A)$, on a $\lambda|f| = |\overline{f(\lambda)}|$, pour tout $\lambda \in I$.

En effet :

$$\lambda|f| = |\overline{f(\lambda)}| \iff \lambda f - \overline{f(\lambda)} \in M_A \iff \forall \nu \in [I:\lambda] \cap [R:1] = R$$

$f(\nu\lambda) - \nu f(\lambda) = 0$, ce qui se vérifie trivialement.

Pour démontrer 4) on va regarder $\{|f_i|\}$ comme un système de générateurs de $D(A)$. Pour un $|f_i|$ on va prouver qu'il appartient à une sous-enveloppe injective quelconque de A qui soit sous-module de $D(A)$.

Soit alors B une sous-enveloppe injective de A qui est aussi un sous-module de $D(A)$, et soit $|f_i|$ un élément du système de générateurs considérés. Il existe un élément, (3.3.7.), $y = \Sigma\, \mu_j |f_j| \in B$ tel que $\forall \lambda \in I_i$, $i \circ f_i(\lambda) = \lambda y$.

$$\begin{tikzcd} I_i \arrow[r, hook] \arrow[d, "f_i"'] & R \arrow[d, dashed] & 1 \arrow[d, dashed, maps to] \\ A \arrow[r, hook, "i"'] & B & y \end{tikzcd}$$

On peut écrire cette dernière condition sous la forme :

$\forall \lambda \in I_i$, $|\overline{f_i(\lambda)}| = \Sigma\, \lambda\mu_j |f_j|$ ou, ce qui est là même chose :

$\forall \lambda \in I_i$, $\overline{f_i(\lambda)} - \Sigma\, \lambda\mu_j\ f_j \in M_A$, et, avec le lemme 3.3.10., on obtient :

$$\forall \lambda \in I_i \cap (\cap [I_j : \mu_j])\ ,\ \overline{f_i(\lambda)} - \Sigma\ \overline{f_j(\lambda\mu_j)} \in M_A\ , \implies$$

(i monomorphisme) $f_i(\lambda) - \Sigma\, f_j(\lambda\mu_j) = 0$.

Cette condition assure que :

$$|f_i| = \Sigma\, \mu_j |f_j| \in B\ .$$

Alors, B contient le système de générateurs $\{|f_i|\}$ de $D(A)$, et ainsi $B = D(A)$.

3.4. <u>Construction simplifiée</u> :

<u>3.4.1.</u> Si I_1 et I_2 sont des idéaux de R, $I_1 \subset I_2$, $f_1 \in \mathrm{Hom}_R(I_1,A)$, $f_2 \in \mathrm{Hom}_R(I_2,A)$, et si le diagramme

$$\begin{tikzcd} I_1 \arrow[r, hook] \arrow[d, "f_1"'] & I_2 \arrow[dl, "f_2"] \\ A & \end{tikzcd}$$

est commutatif, on a $|f_1| = |f_2|$.

En effet, $f_1 - f_2 \in M_A$, car si $\forall\lambda \in [I_1:1] \cap [I_2:1] = I_1 \cap I_2 = I_1$, on a $f_1(\lambda) - f_2(\lambda) = 0$.

3.4.2. Comme conséquence de 3.4.1., si $\lambda \in I$, et si f_λ est la restriction de $f : I \to A$ à $R\lambda \subset I$, on a $|f| = |f_\lambda|$. Les éléments $\{|f_\lambda|\}$ forment ainsi un système de générateurs de $D(A)$.

Les morphismes $f_\lambda : R \to A$ sont déterminés par le couple (λ, a), $a = f_\lambda(\lambda) \in A$, où $\mu\lambda = 0 \Longrightarrow \mu a = 0$,

Réciproquement, tout couple (λ, a), $\lambda \in R$, détermine un morphisme $R_\lambda \to A$, $\mu\lambda \rightsquigarrow \mu a$, lorsque $\mathrm{Ann}\,\lambda \subseteq \mathrm{Ann}\,a$ $(\mu\lambda = 0 \Longrightarrow \mu a = 0)$.

On fera usage de la notation (λ, a) pour désigner aussi l'élément correspondant de F_{Φ_A} ; en particulier $(1, a) = \bar{a}$, et l'élément correspondant de $D(A)$ sera désigné par $|1, a|$.

3.4.3. Tout élément $|x| \in D(A)$ peut s'écrire :

$$|x| = \sum_{i=1}^{n} \mu_i |\lambda_i, a_i| \ , \ \mu_i, \lambda_i \in R \ , \ a_i \in ({}^{R}_{\lambda_i})^{A} \ ,$$

$$x = \sum_{i=1}^{n} \mu_i (\lambda_i, a_i) \in F_{\Phi_A} \ .$$

La condition pour que $|x|$ soit nul est, alors qu'il existe une décomposition de chaque μ_i :

$$\mu_i = \sum_{i=1}^{n_i} \mu_{ik} \ ,$$

telle que, $\forall \nu \in \bigcap [R\lambda_i : \mu_{ik}]$ ou, ce qui est la même chose, si $\nu \in R$ est tel qu'il existe ν_{ik}, avec :

$$\nu\mu_{ik} = \nu_{ik}\lambda_i \ , \quad \text{l'équation}$$

$\Sigma\, \nu_i a_i = 0$ est vérifiée, où $\nu_i = \sum_{k=1}^{n_i} \nu_{ik}$.

Tout cela est une conséquence de la définition de M_A ; la propriété : $a \in M_A \iff$ existe une expression $a = \Sigma \mu_i f_i$ tel que $\forall \lambda \in \cap [I_i : \mu_i]$ on a $\Sigma f_i(\lambda\mu_i) = 0$, prend la forme :

$$a \in M_A \iff \forall \nu \ , \ \nu\mu_{ik} = \nu_{ik}\lambda_i \ , \ \Sigma(\lambda_i, a_i)(\nu\mu_{ik}) = 0 \ ;$$

ou :

$$\Sigma(\lambda_i, a_i)(\nu\mu_{ik}) = \Sigma(\lambda_i, a_i)(\nu_{ik}\lambda_i) \ ,$$

et

$$(\lambda_i, a_i)(\nu_{ik}\lambda_i) = \nu_{ik} a_i \ .$$

Après tout ce qui a été établi dans les paragraphes antérieurs pour la construction de la première sous-enveloppe injective, on peut prendre, au lieu de l'ensemble Φ_A, l'ensemble Φ_A^* (sous-ensemble de Φ_A) des homomorphismes des idéaux principaux à gauche, dans A.

$$\Phi_A^* = \bigcup_{\lambda} \mathrm{Hom}_R(R\lambda, A).$$

On obtient ainsi la construction simplifiée de la sous-enveloppe.

3.5. <u>Le foncteur</u> D^1 :

On a construit, pour chaque R-module à gauche A, une extension essentielle $D(A)$, première sous-enveloppe, qui est caractérisée (à des isomorphismes près) par la condition d'être une sous-enveloppe injective minimale.

La construction effectuée est canonique (ne dépend pas d'isomorphismes) et on peut lui donner un caractère fonctoriel.

<u>3.5.1.</u> Soit $\varphi : A \to B$ un homomorphisme de R-modules, et $i_A : A \to D(A)$, $i_B : B \to D(B)$, les premières sous-enveloppes. Il existe, alors, un homomorphisme canonique $D(\varphi) : D(A) \to D(B)$, tel que le diagramme

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, tail, "i_A"] \arrow[d, "\varphi"'] & D(A) \arrow[d, "D(\varphi)"] \\ B \arrow[r, tail, "i_B"] & D(B) \end{tikzcd}$$

est commutatif.

Du morphisme $\varphi : A \to B$, par application du foncteur h_I (I idéal de R) on obtient $h_I\varphi : \mathrm{Hom}_R(I,A) \to \mathrm{Hom}_R(I,B)$

$$\begin{tikzcd} I \arrow[d, "f"'] \arrow[dr, "\varphi \circ f =: \bar{\varphi}(f)"] & \\ A \arrow[r, "\varphi"] & B \end{tikzcd}$$

La réunion des $h_I\varphi$, quand I parcourt l'ensemble des idéaux de R, définit une application $\bar{\varphi} : \Phi_A \to \Phi_B$

$$h_I\varphi = \bar{\varphi}|\mathrm{Hom}_R(I,A) .$$

L'application $\bar{\varphi}$ induit canoniquement un R-homomorphisme $F(\bar{\varphi})$ entre les modules libres engendrés pour Φ_A et Φ_B,

$$\begin{tikzcd} \Phi_A \arrow[r, hook, "j_{\Phi_A}"] \arrow[d, "\bar{\varphi}"'] & F_{\Phi_A} \arrow[d, "F(\bar{\varphi})"] \\ \Phi_B \arrow[r, hook, "j_{\Phi_B}"] & F_{\Phi_B} \end{tikzcd}$$

L'image de M_A, sous-module de F_{Φ_A}, 3.3.4., est un sous-module de M_B.

En effet, pour $a \in M_A$, il est possible d'écrire $a = \Sigma\, \mu_i f_i$ de telle façon que $\Sigma\, f_i(\lambda\mu_i) = 0$ pour toutes les valeurs de λ pour lesquelles le premier membre de l'égalité a un sens, c'est-à-dire pour tout $\lambda \in \bigcap [I_i : \mu_i]$.

On a alors :

$$(F(\bar{\varphi}))(a) = (F(\bar{\varphi}))(\Sigma\, \mu_i f_i) = \Sigma\, \mu_i (F(\bar{\varphi}))(f_i) = \Sigma\, \mu_i(\varphi f_i) ,$$

et comme $\forall\lambda \in \bigcap [I_i : \mu_i]$, on a ;

$$\Sigma(\varphi f_i)(\lambda\mu_i) = \varphi[\Sigma\, f_i(\lambda\mu_i)] = \varphi(0) = 0 .$$

On en déduit que :

$$(F(\bar{\varphi}))(a) = \Sigma\, \mu_i(\varphi f_i)$$

est un élément de M_B.

Alors, il existe un morphisme canonique $D(\varphi) : D(A) \to D(B)$, unique, qui rend commutatif le diagramme :

$$\begin{tikzcd}
F_{\Phi_A} \arrow[r, "\varphi_A"] \arrow[d, "F(\bar{\varphi})"'] & D(A) \arrow[d, "D(\varphi)"] \\
F_{\Phi_B} \arrow[r, "\varphi_B"] & D(B)
\end{tikzcd}$$

Les rectangles partiels du diagramme :

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, tail, "h_A"] \arrow[d, "\varphi"'] & \mathrm{Hom}_R(R,A) \arrow[r, tail, "j_A"] \arrow[d, "h_R\varphi"] & \Phi_A \arrow[r, tail, "j_{\Phi_A}"] \arrow[d, "\bar{\varphi}"] & F_{\Phi_A} \arrow[r, tail, "\varphi_A"] \arrow[d, "F(\bar{\varphi})"] & D(A) \arrow[d, "D(\Phi)"] \\
B \arrow[r, tail, "h_B"] & \mathrm{Hom}_R(R,B) \arrow[r, tail, "j_B"] & \Phi_B \arrow[r, tail, "j_{\Phi_B}"] & F_{\Phi_B} \arrow[r, tail, "\varphi_B"] & D(B)
\end{tikzcd}$$

sont commutatifs, donc le rectangle total :

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, tail, "i_A"] \arrow[d, "\varphi"'] & D(A) \arrow[d, "D(\varphi)"] \\
B \arrow[r, tail, "i_B"] & D(B)
\end{tikzcd}$$

sera aussi commutatif.

<u>3.5.2.</u> <u>D est un foncteur.</u>

Si φ est une identité, $\varphi = 1_A$, de la construction de $D(\varphi)$ on déduit trivialement $D(\varphi) = 1_{D(A)}$.

Pour $A \xrightarrow{\varphi} B \xrightarrow{\psi} C$, on obtient :

$$D(\psi\varphi)|x| = D(\psi\varphi)(\Sigma\, \mu_i |f_i|) = \Sigma\, \mu_i |\psi\varphi f_i|$$

$$D(\psi)(D(\varphi)|x|) = D(\psi)(\Sigma\, \mu_i |\varphi f_i|) = \Sigma\, \mu_i |\psi\varphi f_i| \;,$$

et alors,

$$D(\psi\varphi) = D(\psi)D(\varphi) \;.$$

<u>3.5.3.</u> <u>D est un monofoncteur.</u>

Si $\varphi \in \mathrm{Hom}_R(A,B)$ est un monomorphisme, $D(\varphi) \in \mathrm{Hom}_R(D(A),D(B))$ est un monomorphisme.

φ monomorphisme $\Longrightarrow$ $i_B \circ \varphi$ monomorphisme $\Longrightarrow$ $D(\varphi)$ monomorphisme, car i_A est essentielle.

<u>3.5.4.</u> <u>D est un foncteur additif.</u>

En effet, tout élément $|x|$ de $D(A)$ admet une expression

$$|x| = \sum_{f_i \in \Phi_A} \mu_i |f_i| \quad .$$

Soit $\varphi \in \mathrm{Hom}_R(A,B)$; $D(\varphi)$ est défini par 3.5.1.,

$$(D(\varphi))|x| = \Sigma\, \mu_i |\bar{\varphi}(f_i)| = \Sigma\, \mu_i |\varphi \circ f_i| \ ,$$

et alors,

$$D(\varphi_1+\varphi_2)|x| = \sum_{f_i \in \Phi_A} \mu_i |(\varphi_1+\varphi_2) f_i| \quad .$$

L'additivité du foncteur vient de :

$$|(\varphi_1+\varphi_2) \circ f_i| - |\varphi_1 \circ f_i| - |\varphi_2 \circ f_i| = 0 \ ,$$

ce qui est vérifié, car

$$\forall \lambda \in I_i,\ ((\varphi_1+\varphi_2)f_i)(\lambda) - (\varphi_1 \circ f_i)(\lambda) - (\varphi_2 \circ f_i)(\lambda) =$$
$$(\varphi_1+\varphi_2)(f_i(\lambda)) - \varphi_1(f_i(\lambda)) - \varphi_2(f_i(\lambda)) = 0 \ ,$$

et alors,

$$D(\varphi_1+\varphi_2) = D(\varphi_1) + D(\varphi_2) \quad .$$

<u>3.5.5.</u> $D(0) = 0$.

<u>3.5.6.</u> $D(A_1 \oplus A_2) = D(A_1) \oplus D(A_2)$.

Ce sont des conséquences de l'additivité de D .

3.6. <u>Construction du foncteur d'enveloppe injective</u> :

<u>3.6.1.</u> Soit A un R-module et Ω un nombre ordinal. Il existe une extension essentielle $i^\Omega : D^\Omega(A) \rightarrowtail D^\Omega(B)$, construite de façon canonique. Pour chaque R-homomorphisme $\varphi : A \to B$, on peut définir $D^\Omega(\varphi) : D^\Omega(A) \to D^\Omega(B)$ de façon canonique, tel que le diagramme

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, tail, "i_A^\Omega"] \arrow[d, "\varphi"'] & D^\Omega(A) \arrow[d, "D^\Omega(\varphi)"] \\ B \arrow[r, tail, "i_B^\Omega"] & D^\Omega(B) \end{tikzcd}$$

soit commutatif.

On définit D^Ω par induction transfinie : pour $\alpha \leqslant \Omega$, si $\alpha = \beta + 1$, $D^\alpha = D(D^\beta)$; si α est ordinal limite : $D^\alpha(A) = \bigcup\limits_{\beta<\alpha} D^\beta(A) = \underrightarrow{\lim}\, D^\beta(A)$, (limite inductive vis-à-vis de la relation d'inclusion et de la relation d'ordre des nombres ordinaux), $D^\alpha(\varphi) = \underrightarrow{\lim}\, D^\beta(\varphi)$. Il faut préciser que $i^\alpha_A : A \to D^\alpha(A)$ est monomorphisme pour chaque α. Par induction : pour $\alpha = \beta+1$, c'est immédiat; pour α ordinal limite c'est "presque trivial" (la preuve, dans les catégories de Grothendieck, est le théorème 6.23. du Livre de Freyd [5]) .

$$
\begin{tikzcd}
A \arrow[r] \arrow[dr, "i^\alpha_{0A}"] \arrow[dd, "\varphi"'] & D^1(A) \arrow[r] \arrow[d, "i^\alpha_{1A}"] \arrow[dd, "D^1(\varphi)"', near start] & \cdots \arrow[r] & D^\beta(A) \arrow[r] \arrow[dll, "i^\alpha_{\beta A}"'] \arrow[dd, "D^\beta(\varphi)"] & {} \\
 & D^\alpha(A) \arrow[dd, "D^\alpha(\varphi)"] & & & \\
B \arrow[r] \arrow[dr, "i^\alpha_{0B}"'] & D^1(B) \arrow[r] \arrow[d, "i^\alpha_{1B}"] & \cdots \arrow[r] & D^\beta(B) \arrow[r] \arrow[dll, "i^\alpha_{\beta B}"] & {} \\
 & D^\alpha(B) & & &
\end{tikzcd}
$$

Le morphisme $D^\alpha(\varphi)$ est la limite inductive du système inductif $D^\beta(\varphi)$ de morphismes de $(D^\beta(A),\ i^\gamma_{\beta A})$ dans $(D^\beta(B),\ i^\gamma_{\beta B})$.

<u>3.6.2.</u> Les applications $A \rightsquigarrow D^\Omega(A)$, $\varphi \rightsquigarrow D^\Omega(\varphi)$, définissent un foncteur D^Ω .

On utilise le fait que le produit de foncteurs est un foncteur et les propriétés fonctorielles de $\underrightarrow{\lim}$.

<u>3.6.3.</u> L'inclusion i^Ω définit une transformation naturelle entre le foncteur identité 1, et le foncteur D .

$$
\begin{tikzcd}
 & M_R \arrow[dl, "1"'] \arrow[dr, "D^\Omega"] & \\
M_R \arrow[rr, "i^\Omega"'] & & M_R
\end{tikzcd}
$$

<u>3.6.4.</u> D^Ω est un monofoncteur.

D'après 3.5.3., si α est un ordinal limite, $x_1, x_2 \in D^\alpha(A)$, $x_1 \neq x_2$, il existe un $\beta < \alpha$ tel que :

$x_1 = i^{\alpha}_{\beta A}(x'_1)$, $x_2 = i^{\alpha}_{\beta A}(x'_2)$, ($x'_1 \neq x'_2$ car $i^{\alpha}_{\beta A}$ est un monomorphisme)

et alors :

$$(D^{\alpha}(\varphi))x_1 = (D^{\alpha}(\varphi)(i^{\alpha}_{\beta A}\ x'_1) = (i^{\alpha}_{\beta A})(D^{\beta}(\varphi)x'_1) \neq (i^{\alpha}_{\beta A})(D^{\beta}(\varphi)x'_2)$$

$$= (D^{\alpha}(\varphi))(i^{\alpha}_{\beta A}\ x'_2) = (D^{\alpha}(\varphi))x_2 \ .$$

<u>3.6.4.</u> <u>D^{Ω} est additif.</u>

Cela est une conséquence de 3.5.4. et 3.5.5., et du fait que $\varinjlim$ est, dans les catégories de modules, un foncteur additif exact. Plus généralement $\varinjlim$ est un foncteur additif exact dans les catégories de Grothendieck ([7], Prop. 1.8. p. 133).

<u>3.6.5.</u> L'inclusion $i^{\Omega}_{A} : A \rightarrowtail D^{\Omega}(A)$ est essentielle.

Cela eşt une conséquence de 2.1.1. et 2.1.7.

<u>3.6.6.</u> La chaîne de foncteurs D^{Ω} s'arrête.

Soit Ω le plus petit ordinal dont le cardinal est plus grand que le cardinal de R. $D^{\Omega}(A)$ est injectif, car l'image d'un homomorphisme $f : I \to D^{\Omega}(A)$ est dans quelque $D^{\beta}(A)$, où $\beta < \Omega$ (card I $\leqslant$ card R $\leqslant$ card Ω) . On peut construire le diagramme :

$$\begin{tikzcd}
I \arrow[r, tail] \arrow[d] \arrow[ddr, "f"] & R \arrow[d] \\
D^{\beta}(A) \arrow[r, tail] \arrow[dr] & D^{\beta+1}(A) \arrow[d] \\
 & D^{\Omega}(A)
\end{tikzcd}$$

car $D^{\beta+1}(A)$ est sous-enveloppe injective de $D^{\beta}(A)$, et, après 1.3.1. $D^{\Omega}(A)$ est injectif. On a, donc, $\forall A \in M_R$, $D^{\Omega+1}(A) = D(D^{\Omega}(A)) = D^{\Omega}(A)$.

<u>3.6.7.</u> Le foncteur D^{Ω} (Ω le plus petit ordinal dont le cardinal est plus grand que le cardinal de R) est le foncteur d'enveloppe injective.

En effet, d'après 3.6.5. et 3.6.6., $D^{\Omega}(A)$ est l'enveloppe injective de R.

<u>3.6.8.</u> Pour chaque anneau R on peut définir un nombre ordinal $\alpha < \Omega$ "ordinal injectif à gauche de R", le premier nombre ordinal pour lequel la chaîne de foncteurs D^{Ω} s'arrête .

$$\beta < \alpha \Longrightarrow D^{\beta} \neq D^{\alpha}$$
$$\alpha < \gamma \Longrightarrow D^{\alpha} \neq D^{\gamma} \ .$$

BIBLIOGRAPHIE

[1] BAER R., Abelian groups which are direct summands of every containing abelian groups. Bull. Amer. Math. Soc. 46(1940), pp. 800-806.

[2] CARTAN H. et EILENBERG S., Homological algebra. Princeton University Press, Princeton, N.J. (1956).

[3] ECKMANN B. et SCHOPF A., Ueber injektive moduln. Arch. der Math. 4(1953), pp. 75-78.

[4] FAITH C., Lectures on injective modules and quotient rings, Springer. Heidelberg (1967).

[5] FREYD P., Abelian categories. Harper. New York (1964).

[6] GABRIEL P., Des catégories abéliennes. Bull. Soc. Math. France 90(1962), pp. 323-448.

[7] GROTHENDIECK A., Sur quelques points d'algèbre homologique, Tôhoku Math. Journ. 9(1957), pp. 119-121.

[8] HILTON P., Algèbre homologique I. Cours à l'Ecole polytechnique féderale, Zurich. Hiver 1966-67.

[9] MATLIS E., Injective modules over noetherian rings. Pac. J. Math. 8(1958), pp. 511-528.

[10] MITCHELL B., Theory of categories. Acad. Press. N.Y. (1965.

[11] MONTERO M., Categorias I. 'Alxebra" Santiago de Compostela (1967).

[12] MORITA K., KAWADA Y. et TACHIKAWA H., On injective modules. Math. Z. 68(1952) pp. 217-226.

[13] NORTHCOTT D.G., Ideal Theory. Cambridge Univ. Press 42(1960).

[14] NORTHCOTT D.G., An introduction to homological algebra. Cambridge Univ. Press (1960).

[15] ZARISKI O. et SAMUEL P., Commutative algebra. Van Nostrand. Princeton (1958).

- INDEX -

-:-:-:-:-:-:-

UNIVERSITE PARIS-SUD XI

CENTRE D'ORSAY

SEMINAIRE D'ALGEBRE NON COMMUTATIVE.

Conférences n^{os} 6 et 8

du 8 décembre 1971 et 5 janvier 1972

-:-:-:-:-:-:-

LOCALISATIONS ET PREMIERS A GAUCHE
(d'après O. Goldman et N. Popescu)

par J.P. DELALE

-:-:-:-:-:-

Le contenu de ces deux exposés est en grande partie emprunté à deux articles, le premier dû à O. Goldman ([2]) dont nous reprenons la terminologie, le second étant dû à N. Popescu ([5]).

L'exposé comprend quatre parties. La première est consacrée à la définition de la notion de localisation ; cette notion est bien connue et nous nous sommes contentés de brefs rappels sans démonstrations, celles-ci pouvant être trouvées dans [1], [2], [7]. La seconde introduit les notions de module de définition et de module porteur d'une localisation, notions fondamentales pour l'étude des premiers à gauche que nous entreprenons dans la troisième partie. Cette troisième partie traite aussi des rapports existant entre les premiers à gauche et les idéaux que, pour reprendre la terminologie de [4], nous appellerons idéaux critiques et qui semblent avoir été introduits plus ou moins indépendamment en [5], [4], [8]. Enfin, la dernière partie est consacrée à des compléments et exemples ; on y trouvera en particulier au § 7, un contre-exemple à un théorème de [5].

Dans tout ce qui suit, on se fixe un anneau unitaire R . Sauf mention expresse du contraire les modules (resp. les idéaux) sont des R-modules à gauche unitaires (resp. des idéaux à gauche de R), et le terme homomorphisme désigne un homomorphisme de R-modules à gauche.

On notera R Mod la catégorie des R-modules à gauche unitaires. Enfin, si M est un module, on note $E(M)$ son enveloppe injective (en tant que R-module à gauche).

I. RAPPELS SUR LA THEORIE DE LA LOCALISATION.

1. Parmi les diverses manières de définir ce que nous appellerons une localisation (à gauche) sur R, nous en retiendrons quatre qui sont utiles car leurs énoncés donnent en fait les propriétés fondamentales d'une localisation, propriétés qui nous serviront en permanence par la suite.

1.1. Nous appellerons localisation sur R la donnée d'un foncteur noyau (idempotent) sur R (ou "radical exact à gauche" suivant la terminologie de [7]), c'est-à-dire (selon [2]) un foncteur σ : R Mod $\rightarrow$ R Mod tel que :

a) pour tout module M, on a $\sigma(M) \subset M$ et pour tout homomorphisme $f : M \rightarrow M'$ on a $\sigma(f) = f|_{\sigma(M)}$ (et donc $f(\sigma(M)) \subset \sigma(M'))$.

b) si $M \subset M'$, alors $\sigma(M) = \sigma(M') \cap M$.

c) pour tout module M, on a $\sigma(M/\sigma(M)) = 0$.

Tous les foncteurs noyau considérés ici étant "idempotents", nous omettrons ce terme qui caractérise en fait les "foncteurs noyaux" qui vérifient la propriété c).

Si $\sigma(M) = M$, on dira que le module M est de σ-torsion. Si $\sigma(M) = 0$, on dira que M est σ-libre(*). Le module 0 est le seul module qui soit à la fois de σ-torsion et σ-libre.

1.2. Un foncteur noyau σ étant donné, on peut considérer la sous-catégorie pleine $\underline{T}_\sigma$ de R Mod dont les objets sont exactement les modules de σ-torsion. Cette sous-catégorie possède les propriétés suivantes :

a) si $0 \rightarrow M' \rightarrow M \rightarrow M'' \rightarrow 0$

est une suite exacte de modules, alors :

$$M \in \mathrm{Ob}(\underline{T}_\sigma) \Longleftrightarrow M' \in \mathrm{Ob}(\underline{T}_\sigma) \quad \text{et} \quad M'' \in \mathrm{Ob}(\underline{T}_\sigma)$$

(*) Traduction... libre de l'expression "σ-torsion-free" ([2], [7]). "Sans-σ-torsion" est vraiment imprononçable.

b) toute somme directe $\bigoplus_{i \in I} M_i$ de modules qui sont des objets de $\underline{T}_\sigma$ est encore un objet de $\underline{T}_\sigma$.

Une sous-catégorie pleine $\underline{T}$ de $\underline{R \text{ Mod}}$ qui vérifie les propriétés a) et b) ci-dessus sera dite une <u>catégorie localisante</u> sur R ([1]) (ou "théorie de torsion héréditaire" [7]).

Réciproquement, la donnée d'une catégorie localisante $\underline{T}$ définit une localisation. En effet, si pour tout module M on note $\sigma(M)$ le plus grand sous-module de M qui est un objet de $\underline{T}$, on vérifie que la collection des $\sigma(M)$ définit un foncteur noyau σ .

1.3. Soit σ un foncteur noyau. Au lieu de considérer la catégorie des modules de σ-torsion, on peut considérer la sous-catégorie pleine $\underline{L}_\sigma$ de $\underline{R \text{ Mod}}$ dont les objets sont les modules σ-libres. La catégorie $\underline{L}_\sigma$ possède les propriétés suivantes :

a) si $M \in Ob(\underline{L}_\sigma)$, tout sous-module de M et toute extension essentielle de M (et en particulier son enveloppe injective $E(M)$) appartient encore à $\underline{L}_\sigma$.

b) tout produit d'objets de $\underline{L}_\sigma$ et toute extension d'un objet de $\underline{L}_\sigma$ par un autre objet de $\underline{L}_\sigma$ appartient encore à $\underline{L}_\sigma$.

c) un module N est un objet de $\underline{L}_\sigma$ si et seulement si $Hom(M,N) = 0$ pour tout $M \in Ob(\underline{T}_\sigma)$.

d) un module M est un objet de $\underline{T}_\sigma$ si et seulement si $Hom(M,N) = 0$ pour tout $N \in Ob(\underline{L}_\sigma)$.

Inversement, à toute sous-catégorie pleine $\underline{L}$ vérifiant les propriétés a) et b) ci-dessus, on associe un foncteur noyau défini par :

$$\sigma(M) = \{m \in M / \forall N \in Ob\ \underline{L}\ ,\ \forall f : M \to N\ ,\ f(m) = 0\}$$

pour tout module M . Par ailleurs, la correspondance entre les catégories $\underline{L}_\sigma$ et $\underline{T}_\sigma$ est explicitée par les propriétés c) et d) ci-dessus.

1.4. La quatrième manière de définir une localisation sur R est de se donner <u>un système topologisant (idempotent) d'idéaux de</u> R , c'est-à-dire une famille F d'idéaux (à gauche) vérifiant les conditions suivantes :

a) $R \in F$.

b) si $U \in F$ et si $V \supset U$, alors $V \in F$.

c) si $U \in F$ et si $V \in F$, alors $U \cap V \in F$.

d) si $U \in F$ et si $x \in R$, alors $(U:x) = \{r \in R/rx \in U\}$ appartient encore à F .

e) si $U \in F$ et si V est un idéal tel que $\forall x \in U$, $(V:x) \in F$ alors $V \in F$.

Il est facile de montrer que les propriétés b) et c) découlent, en fait de d) et e) . Par ailleurs, il résulte de c) et e) que si U et V appartiennent à F , il en est de même de UV .

Nous ommetrons le terme "idempotent", bien que, selon l'usage ([1]) , on appelle système topologisant une famille F d'idéaux qui forme un système fondamental de voisinages de 0 pour une topologie d'anneau sur R , c'est-à-dire une famille F d'idéaux vérifiant a) b) c) d) mais pas e) .

L'équivalence entre foncteur noyau et système topologisant est définie de la manière suivante :

- au foncteur noyau σ on associe la famille, notée $F(\sigma)$, des idéaux U tels que R/U est de σ-torsion (i.e. appartient à la catégorie localisante T_σ). On vérifie que $F(\sigma)$ est bien un système topologisant.

- inversement, si F est un système topologisant, pour tout module M on pose :

$$\sigma(M) = \{m \in M/\mathrm{Ann}(m) \in F\} ,$$

et on voit facilement que la collection des $\sigma(M)$ définit un foncteur noyau.

Notons qu'il découle de ces équivalences qu'une catégorie localisante est entièrement déterminée dès que l'on connait les modules principaux qui y appartiennent. Dans le même ordre d'idée, nous verrons plus loin (II.1.3.) qu'une sous-catégorie pleine $\underline{L}$ vérifiant les conditions a) et b) de 1.3. est entièrement déterminée par un seul de ses objets convenablement choisi (à savoir un cogénérateur injectif de $\underline{L}$).

2. Foncteur module des quotients et résultats fondamentaux :

2.1. Les raisons qui ont conduit à l'introduction de la notion de localisation apparaissent dans la dernière définition, fondée sur la donnée d'un système topologisant F : on veut construire un anneau Q et un homomorphisme d'anneaux $\psi : R \to Q$ tel que l'on ait la propriété

(T) pour tout $U \in F$, on a $Q.\psi(U) = Q$,

c'est-à-dire que l'on veut généraliser la construction bien connu dans le cas commutatif de "l' anneau de fractions" (où à une partie multiplicative $S \subset R$ on associe le système topologisant formé des idéaux U qui rencontrent S).

Si σ est un foncteur noyau, on construira au § 2.3. un foncteur Q_σ : $\underline{R\ \mathrm{Mod}} \to \underline{R\ \mathrm{Mod}}$ muni d'un homomorphisme $\psi : \mathrm{Id} \to Q_\sigma$ dont on montre ([2]) qu'il possède les propriétés suivantes :

- $Q_\sigma(R)$ est un anneau et $\psi_R : R \to Q_\sigma(R)$ est un homomorphisme d'anneaux (et pas seulement de R-modules à gauche).

- pour tout module M, $Q_\sigma(M)$ est muni d'une unique structure de $Q_\sigma(R)$-module à gauche prolongeant sa structure de R-module, et tout R-homomorphisme $f : Q_\sigma(M) \to Q_\sigma(M')$ est en fait un homomorphisme de $Q_\sigma(R)$-modules.

- si U est un idéal qui n'appartient pas à $F(\sigma)$, on a $Q_\sigma(R).\psi_R(U) \neq Q_\sigma(R)$.

$Q_\sigma(M)$ sera dit <u>module des quotients (à gauche) de M relativement à la localisation</u> σ ; $Q_\sigma(R)$ sera appelé <u>l'anneau des quotients (à gauche) relativement à</u> σ et il sera simplement noté Q lorsqu'aucune confusion ne sera à craindre.

Malheureusement, l'anneau des quotients ainsi obtenu ne vérifie pas en général la propriété (T) (même dans le cas commutatif et noethérien, on peut construire des contre-exemples). Par ailleurs, dans le cas où cette propriété (T) se trouve vérifiée, l'anneau $Q_\sigma(R)$ ne possède pas en général la propriété universelle qui était vérifiée dans le cas commutatif (on voit facilement, en s'appuyant sur les résultats qui suivent, qu'une condition suffisante pour que le couple $(Q_\sigma(R), \psi_R)$ soit universel est que pour tout morphisme d'anneau $\varphi : R \to X$ vérifiant la propriété (T) on ait un isomorphisme de R-modules à gauche $X \otimes_R Q_\sigma(R) = Q_\sigma(R) \otimes_R X)$.

Il n'y a pas de caractérisation "interne" des localisations qui vérifient la propriété (T) , mais notons que, d'après ce qui est dit plus haut, si U est un idéal tel que $Q_\sigma(R).\psi_R(U) = Q_\sigma(R)$, on a nécessairement $U \in F(\sigma)$, de sorte qu'une condition nécessaire pour que σ vérifie (T) est que

(T.F.) Pour tout $U \in F(\sigma)$, il existe $V \subset U$, $V \in F(\sigma)$, et V est de type fini.

Un système F vérifiant cette propriété sera dit <u>localement de type fini.</u> On peut donner des caractérisations "externes" des localisations qui vérifient la propriété (T) , et, bien que nous ne nous en servions pas, nous allons énoncer ces résultats car il s'agit des résultats fondamentaux de la théorie de la localisation.

2.2. Epimorphismes plats et localisations :

Soit $\varphi : R \to S$ un épimorphisme d'anneaux tel que le R-module <u>à droite</u> S soit plat. On lui associe alors un foncteur noyau σ défini pour tout module M par :

$$\sigma(M) = \ker(\varphi \otimes_R M : M \to S \otimes_R M) .$$

On montre alors ([1], [6]) que le foncteur Q_σ est tel que pour tout M , l'homomorphisme

$$\psi_M : M \to Q_\sigma(M)$$

s'identifie canoniquement à :

$$\varphi \otimes_R M : M \to S \otimes_R M .$$

En particulier, S s'identifie en tant qu'anneau à $Q_\sigma(R) = Q$, et $Q_\sigma(M) \cong Q \otimes_R M$.

De plus, le système topologisant $F(\sigma)$ est exactement l'ensemble des idéaux U tels que $S.\varphi(U) = S$: la localisation σ vérifie donc la propriété(T).

Les localisations vérifiant (T) apparaissent donc comme une généralisation de la notion d'épimorphisme plat à droite. Inversement on a le théorème suivant :

<u>THEOREME 1.</u> : (Gabriel-Silver). <u>Soit</u> σ <u>une localisation à gauche sur</u> R <u>et soit</u> Q_σ <u>le foncteur module des quotients qui lui est associé. Les assertions suivantes sont équivalentes</u> :

i) $\psi_R : R \to Q_\sigma(R) = Q$ <u>fait de</u> Q <u>un R-module à droite plat.</u>

ibis) $\psi_R : R \to Q$ <u>est un épimorphisme d'anneaux et</u> Q <u>est plat à droite sur</u> R .

ii) <u>Pour tout</u> $U \in F(\sigma)$ <u>on a</u> $Q.\psi_R(U) = Q$.

iii) <u>Pour tout module</u> M <u>on a</u> $Q_\sigma(M) = Q \otimes_R M$.

iv) <u>Le foncteur</u> Q_σ <u>est exact et commute aux sommes directes.</u>

v) <u>Tout Q-module à gauche est</u> σ<u>-libre.</u>

vi) <u>Tout Q-module à gauche est fidèlement</u> σ<u>-injectif.</u>

Nous dirons avec Goldman qu'une telle localisation <u>vérifie la propriété (T)</u>. On dit aussi que c'est une localisation exacte ([1]) ou parfaite ([7]).

L'assertion vi) du théorème introduit une terminologie que nous allons définir immédiatement :

2.3. <u>Construction du module des quotients</u> :

On se donne un foncteur noyau σ et on pose $F = F(\sigma)$.

<u>DEFINITION</u> : On dit qu'un R-module E est <u>σ-injectif</u> si les conditions équivalentes ([2]) suivantes sont vérifiées :

i) pour toute injection $M' \hookrightarrow M$ telle que M/M' est de σ-torsion, tout isomorphisme $f : M' \to E$ se prolonge à M .

ii) pour tout $U \in F$ et tout $f : U \to E$, il existe $e \in E$ tel que $f(u) = ue \ \forall u \in U$.

Un module injectif au sens classique est évidemment σ-injectif. Toutes les propriétés de la notion de σ-injectivité s'appuient directement sur cette définition et le lemme (facile) suivant :

<u>LEMME</u> : Soit $0 \to M' \to M \to M'' \to 0$ une suite exacte de modules ;
On a les propriétés suivantes :

a) Si M est σ-injectif et si M'' est σ-libre, alors M' est σ-injectif.

b) Si M' est σ-injectif et si M'' est de σ-torsion, alors $M \cong M' \oplus M''$ (et $\sigma(M) \cong \sigma(M') \oplus M''$).

c) Si M' est σ-injectif et si M est σ-libre, alors M'' est σ-libre.

<u>DEFINITION</u> : On dit qu'un R-module E est <u>fidèlement σ-injectif</u> ([2]) ou <u>σ-fermé</u> ([1] et [5]) si les conditions équivalentes suivantes sont vérifiées :

i) E est σ-libre et σ-injectif.

ii) Pour toute injection $M' \hookrightarrow M$ telle que M/M' est de σ-torsion tout homomorphisme $f : M' \to E$ admet un et un seul prolongement à M.

iii) Pour tout homomorphisme $g : M' \to M$ tel que $\ker(g)$ et $\operatorname{co}\ker(g)$ sont de σ-torsion, l'application :

$$\mathrm{Hom}_R(g,E) : \mathrm{Hom}_R(M,E) \to \mathrm{Hom}_R(M',E) \quad (f \mapsto f \circ g)$$

est un isomorphisme.

<u>THEOREME 2.</u> : <u>Soient σ un foncteur noyau et M un module.</u>

a) <u>il existe à isomorphisme unique près au plus un seul homomorphisme $\psi : M \to F$ tel que</u>

1) <u>F est fidèlement σ-injectif,</u>

2) <u>$\ker(\psi)$ et $\operatorname{co}\ker(\psi)$ sont des modules de σ-torsion</u>(*).

b) <u>Posant $\bar{M} = M/\sigma(M)$, soit $E(\bar{M})$ l'enveloppe injective (classique) de $\bar{M}$, et soit F, $\bar{M} \subset F \subset E(\bar{M})$ le R-module défini par</u> $F/\bar{M} = \sigma(E(\bar{M})/\bar{M})$.

(*) Il découle de 1) et 2) (F est σ-libre et $\ker(\psi)$ est de σ-torsion) que l'on a exactement $\ker(\psi) = \sigma(M)$.

Alors l'homomorphisme naturel $\psi : M \to M/\sigma(M) = \bar{M} \hookrightarrow F$ vérifie les conditions 1) et 2) ci-dessus.

<u>Par définition</u>, pour tout module M, le module des quotients $Q_\sigma(M)$ et l'homomorphisme $\psi_M : M \to Q_\sigma(M)$ seront le module et l'homomorphisme définis en b).

On voit d'après ce qui précède que $Q_\sigma(M)$ est l'ensemble des $x \in E(\bar{M})$ tels que $(\bar{M}:x) = \{r \in R/rx \in \bar{M}\} \in F(\sigma)$. Cette construction est donc bien celle de Lambek ([3], [4]).

On peut montrer que $Q_\sigma(M)$ est canoniquement isomorphe à :

$$\varinjlim_{U \in F} \mathrm{Hom}_R(U, M/\sigma(M)) ,$$

la limite inductive étant prise suivant le filtre des idéaux appartenant à F. Nous n'utiliserons pas cette description explicite, bien que cela soit celle qui permette en général le mieux de "calculer" $Q_\sigma(M)$.

<u>Remarque</u> : Il est intéressant de considérer la sous-catégorie pleine $\mathcal{D}_\sigma$ de R <u>Mod</u> dont les objets sont les modules fidèlement σ-injectifs. C'est une catégorie abélienne qui possède de nombreuses belles propriétés et en particulier est équivalente à la "catégorie quotient" construite par Gabriel ([1]).

Notons simplement que tout objet de $\mathcal{D}_\sigma$, c'est-à-dire tout module fidèlement σ-injectif est canoniquement muni d'une structure de $Q_\sigma(R)$-module à gauche et que tout homomorphisme de modules fidèlement σ-injectifs est aussi un $Q_\sigma(R)$-homomorphisme, de sorte que $\mathcal{D}_\sigma$ apparait comme sous-catégorie pleine de R <u>Mod</u> et aussi de $Q_\sigma(R)$<u>Mod</u>. L'assertion vi) du théorème 1 exprime simplement que σ vérifie la propriété (T) si et seulement si $\mathcal{D}_\sigma = Q_\sigma(R)\underline{\mathrm{Mod}}$.

II. <u>MODULES DE DEFINITION ET MODULE PORTEUR.</u>

Nous allons introduire deux notions qui sont plus ou moins classiques et qui seront essentielles par la suite.

1. <u>Foncteur noyau associé à un module et module de définition</u> :

1.1. Considérées sous l'aspect des systèmes topologisants d'idéaux, on voit que l'on peut parler de l'ensemble des localisations sur R. Cet ensemble est muni d'une relation d'ordre : si σ et σ' sont deux localisations, on dira que $\sigma \subset \sigma'$ si l'on a l'une des propriétés équivalentes :

- $\sigma(M) \subset \sigma'(M)$ pour tout module M ,
- $F(\sigma) \subset F(\sigma')$ (en tant que parties de $\mathcal{P}(R)$) ,
- $T_\sigma \subset T_{\sigma'}$ (en tant que sous-catégories de R Mod) ,
- $L_\sigma \supset L_{\sigma'}$ (en tant que sous-catégories de R Mod) .

Toute famille $\{\sigma_i\}_{i\in I}$ de localisations, possède alors une borne inférieure notée $\bigcap\limits_{i\in I} \sigma_i$ et définie par :

$$(\bigcap_{i\in I} \sigma_i)(M) = \bigcap_{i\in I} \sigma_i(M) \quad \text{pour tout module } M$$

ou par

$$F(\bigcap_{i\in I} \sigma_i) = \bigcap_{i\in I} F(\sigma_i) .$$

1.2. Etant donné un module D , on peut rechercher s'il existe un foncteur noyau σ qui est maximum pour la propriété $\sigma(D) = 0$. L'enveloppe injective $E(D)$ de D étant une extension essentielle de ce dernier, on voit immédiatement (I.1.3.a) que $\sigma(D) = 0$ équivaut à $\sigma(E(D)) = 0$, de sorte que ce maximum, s'il existe, sera le même pour D et $E(D)$.

Pour tout module M , on est conduit à définir un sous-module $\tau_D(M) \subset M$ en posant :

$$\tau_D(M) = \{m \in M / \forall f: M \to E(D) , f(m) = 0\} = \bigcap_{f: M \to E(D)} \ker(f) .$$

On a alors la proposition suivante :

<u>PROPOSITION 1</u> ([2]) :

a) <u>la collection des</u> $\tau_D(M)$ <u>définit un foncteur noyau</u> τ_D .

b) <u>si</u> σ <u>est un foncteur noyau, alors</u> $\sigma(D) = 0$ <u>équivaut à</u> $\sigma \subset \tau_D$.

c) $F(\tau_D) = \{U \subset R / \mathrm{Hom}_R(R/U, E(D)) = 0\} = \{U \in R / \forall x \in E(D)$ <u>on a</u> $U \not\subset \mathrm{Ann}(x)\}$.

d) $\tau_D = \tau_{E(D)}$ <u>et si</u> $\{D_i\}_{i\in I}$ <u>est une famille de modules, on a</u> $\tau_{\bigoplus\limits_i D_i} = \bigcap\limits_i \tau_{D_i}$.

On dira que τ_D est le foncteur noyau associé à D (ou la localisation associée à D). Si un foncteur noyau σ est égal à τ_D pour un certain module D, on dit que D est un module de définition de σ.

On peut montrer que tout foncteur noyau σ admet un module de définition (à savoir le module somme directe de tous les R/V qui sont σ-libres ([2])). Un foncteur noyau admet en général de nombreux modules de définition (D, E(D) et les sommes directes de ceux-ci, par exemple).

1.3. Interprétons la notion de module de définition en termes des catégories $\underline{L}_\sigma$ et $\underline{\mathfrak{D}}_\sigma$:

On voit facilement sur la définition de τ_D que E(D) est en fait un cogénérateur injectif (*) de $\underline{L}_{\tau_D}$. Inversement, si σ est un foncteur noyau et si D est un cogénérateur injectif de $\underline{L}_\sigma$, on a $\sigma = \tau_D$: en effet, on a alors $\underline{L}_\sigma \subset \underline{L}_{\tau_D}$ (car D est cogénérateur injectif donc $\sigma \supset \tau_D$ et on a aussi $\sigma \subset \tau_D$ (d'après la propriété de maximalité de τ_D).

En fait, le raisonnement que l'on vient de faire avec la catégorie $\underline{L}_\sigma$ peut se reprendre de façon identique avec la catégorie $\underline{\mathfrak{D}}_\sigma$ des objets fidèlement σ-injectifs : si D est un module de définition de σ, alors E(D) est un cogénérateur injectif de $\underline{\mathfrak{D}}_\sigma$. Inversement, tout cogénérateur injectif de $\underline{\mathfrak{D}}_\sigma$ est un module de définition de σ.

1.4. Dans le cas particulier où $D = R/I$, I idéal de R, on notera τ_I au lieu de $\tau_{R/I}$ et F(I) au lieu de $F(\tau_{R/I})$, bien que ces notations peuvent en principe prêter à confusion. Le système F(I) est bien connu :

PROPOSITION 2. ([5]) : soit $I \subset R$ un idéal. Les conditions suivantes sont équivalentes :

(*) On dit qu'un objet E d'une catégorie abélienne $\underline{C}$ est un cogénérateur de $\underline{C}$ si pour tout objet X de $\underline{C}$ on a $\bigcap_{f:X\to E} (\ker(f)) = 0$. Si l'on suppose de plus que E est un objet injectif de $\underline{C}$, il suffit que pour tout objet X on ait $\mathrm{Hom}_{\underline{C}}(X,E) \neq 0$ pour que E soit un cogénérateur.

i) $U \in F(I)$.

ii) $\mathrm{Hom}_R(R/U, E(R/I)) = 0$.

iii) $\forall x \in E(R/I)$, $U \not\subset \mathrm{Ann}(x)$.

iv) $\forall x_1 \in R$, $\forall x_2 \in R-I$, $\exists y \in R$ <u>tel que</u> $yx_2 \notin I$ <u>et</u> $yx_1 \in U$.

Les équivalences i) $\Longleftrightarrow$ ii) $\Longleftrightarrow$ iii) sont une reprise de la proposition 1 et sont d'ailleurs triviales.

Supposons qu'il existe un homomorphisme non nul $f : R/U \to E(R/I)$. $E(R/I)$ étant une extension essentielle de R/I , on a alors $F(R/U) \cap R/I \neq 0$; il existe donc $x_1 \in R-U$ et $x_2 \in R-I$ tels que $f(\bar{x}_1) = \bar{x}_2$ ($\bar{x}$ désigne la classe de x modulo I ou U). Alors si $yx_1 \in U$, on a $f(y\bar{x}_1) = 0 = y\bar{x}_2$ et donc $yx_2 \in I$.

Inversement, supposons la propriété iv) non vérifiée, c'est-à-dire que l'on peut trouver $x_1 \in R$ et $x_2 \in R-I$ tels que $yx_1 \in U$ implique $yx_2 \in I$, i.e. tels que $(U:x_1) \subset (I:x_2)$. On a alors un homomorphisme non nul

$$\begin{tikzcd}
\bar{1} \arrow[dd, mapsto] & R/(U:x_1) \arrow[r, two heads, "p"] & R/(I:x_2) \arrow[r, hook] & R/I \arrow[r, hook] & E(R/I) \\
 & & (\bar{1} \longmapsto \bar{x}_2) & & \\
\bar{x}_1 & R/U \arrow[uu, hook] \arrow[uurrr, dashed, "f"'] & & &
\end{tikzcd}$$

qui se prolonge en un homomorphisme évidemment non nul $f : R/U \longrightarrow E(R/I)$.

<u>COROLLAIRE</u> : Si R est commutatif et si I est un idéal de R ,

$$F(I) = \{U \subset R / Ux \subset I \Longrightarrow x \in I\} .$$

En particulier, si $\mathfrak{p} \subset R$ est un idéal premier, $F(\mathfrak{p}) = \{U \subset R / U \not\subset \mathfrak{p}\}$.

Soit $U \in F(I)$ et $x = x_2 \in R-I$. Prenant $x_1 = 1$, il existe $y \in R$ tel que $yx \notin I$ et $y.1 \in U$ et donc $Ux \not\subset I$. Notons que cet argument est valable sans hypothèse de commutativité et exprime simplement que $\tau_I(R/I) = 0$, i.e. $\forall x \notin I$, $(I:x) \notin F(I)$.

Inversement, si $U \notin F(I)$, on peut trouver $x_1 \in R$ et $x_2 \in R-I$ tels que $(U:x_1) \subset (I:x_2)$. Mais R étant commutatif, on a aussi $U \subset (U:x_1)$, et donc $Ux_2 \subset I$, bien que x_2 n'appartienne pas à I .

2. Module porteur :

2.1. Soit σ un foncteur noyau. On dit qu'un module P est porteur de σ si

a) $P \neq 0$,

b) $\sigma(P) = 0$,

c) $\forall M \subset P$, $M \neq 0$, P/M est de σ-torsion.

Un foncteur noyau n'admet pas en général de module porteur. Cependant, nous verrons que si σ vérifie la propriété (T), alors σ admet un module porteur, et cela est encore vrai si $F(\sigma)$ est localement de type fini (cf. IV.2). Par ailleurs, s'il existe un module porteur, il en existe plusieurs.

PROPOSITION 3. : Soient σ un foncteur et P un module porteur de σ. Alors :

1) P est extension essentielle de tous ses sous-modules non nuls (cela équivaut au fait que $E(P)$ est un injectif indécomposable).

2) Tout sous-module non nul de P est encore un module porteur de σ.

3) Si P' contient P et est tel que $\sigma(P') = 0$ et $\sigma(P'/P) = P'/P$, alors P' est encore un module porteur de σ.

4) P est aussi un module porteur de τ_P.

La démonstration s'appuie sur le lemme suivant :

LEMME : Soit σ un foncteur noyau et P un module σ-libre. Si M est un sous-module de P tel que P/M est de σ-torsion, alors P est extension essentielle de M.

Soit $M' \subset P$ tel que $M \cap M' = 0$. Alors le morphisme composé naturel

$$M' \hookrightarrow P \twoheadrightarrow P/M$$

est injectif, et P/M étant de torsion, il en est de même de son "sous-module" M'. Mais M' étant un sous-module de P, est aussi σ-libre et donc on a nécessairement $M' = 0$.

L'assertion 1) de la proposition 3 découle directement du lemme. L'assertion 2) est immédiate. Montrons 3) : d'après le lemme, P' est une extension essentielle de P et donc P' est σ-libre (sinon $\sigma(P) = \sigma(P') \cap P \neq 0$).

Soit M' un sous-module non nul de P', et posons $M = M' \cap P$. Alors M est non nul et on a la suite exacte :

$$0 \longrightarrow P/M \longrightarrow P'/M \longrightarrow P'/P \longrightarrow 0 .$$

Les deux termes extrêmes étant de σ-torsion, il en est de même du terme central (I.1.2.a.), et on en déduit que P'/M', qui est quotient de P'/M, est aussi de σ-torsion.

Enfin, l'assertion 4) résulte trivialement de ce que $\tau_P \supset \sigma$ (prop.1).

<u>COROLLAIRE</u> : Si P est un module porteur de σ, il en est de même de $Q_\sigma(P)$.

D'après la définition de $Q_\sigma(P)$, l'assertion 3) s'applique à $Q_\sigma(P)$ (qui contient P).

<u>PROPOSITION 4.</u> : <u>Soient</u> P <u>un module porteur d'un foncteur noyau</u> σ, E <u>un module</u> σ<u>-libre et</u> $f:P \to E$ <u>un homomorphisme. Alors</u> f <u>est soit nul, soit injectif. En particulier,</u> $\mathrm{End}_R(P)$ <u>est un anneau intègre.</u>

Le module $P/\ker(f)$, se plongeant dans E, est σ-libre. On a donc nécessairement $\ker(f) = 0$ ou $\ker(f) = P$.

2.2. Interprétons la notion de module porteur en termes de la catégorie $\mathcal{D}_\sigma$ des modules fidèlement σ-injectifs.

On a vu que si P est module porteur de σ, il en est de même de $Q_\sigma(P)$ qui est un objet de $\mathcal{D}_\sigma$. Or, rapprochant la définition d'un module porteur de l'assertion I.2.3.c.), on voit que $Q_\sigma(P)$ ne contient pas d'autre sous-module σ-injectif que 0 et lui-même. En d'autres termes, $Q_\sigma(P)$ est un objet simple dans la catégorie $\mathcal{D}_\sigma$.

Inversement, soit P un objet simple de $\mathcal{D}_\sigma$. P est non nul et il est évidemment σ-libre. Pour prouver que P est un module porteur de σ, il reste à montrer que si $M \subset P$ est non nul, alors P/M est de σ-torsion. Soit N, $M \subset N \subset P$ le sous-module tel que $N/M = \sigma(P/M)$; on a $\sigma(P/N) \cong (P/M)(N/M)$ $\cong (P/M)/\sigma(P/M) = 0$, et il découle alors de I.2.3.a.) que N est σ-injectif. Comme N est évidemment σ-libre, N appartient donc à $\mathcal{D}_\sigma$ et est un sous-objet non nul (car $M \subset N$) de l'objet simple P ; on en déduit que $N = P$, c'est-à-dire $\sigma(P/M) = P/M$.

2.3. On voit donc qu'une condition nécessaire et suffisante pour que σ possède un module porteur est que $\mathcal{D}_\sigma$ contienne au moins un objet simple. Cette dernière condition est satisfaite en particulier si σ vérifie la propriété (T) car $\mathcal{D}_\sigma$ est alors équivalente à la catégorie des $Q_\sigma(R)$-modules (c.f. remarque à la fin du § I.2.3.).

III. PREMIERS A GAUCHE ET IDEAUX CRITIQUES.

1. PREMIERS A GAUCHE.

DEFINITION ([2]) : On dit qu'un foncteur noyau (ou une localisation (à gauche)) π est un premier (à gauche) de R s'il existe un module D qui est à la fois un module de définition de π et un module porteur de π.

Exemples :

1) Si P est un module porteur d'un foncteur noyau σ, alors τ_P est un premier (II.2.1.4.).

2) Si M est un module simple, τ_M est un premier. Un tel premier est appelé premier maximal de R.

On voit sur ce dernier exemple que tout anneau R possède des premiers. Au chapitre précédent, (II. 1.3. et II. 2.2.), nous avons donné une interprétation des notions de module de définition et de module porteur en termes de la catégorie $\mathcal{D}_\sigma$. On voit immédiatement que l'on a le résultat suivant, qui est d'ailleurs la définition de premier selon Popescu ([5]) :

PROPOSITION 5. : Soit σ un foncteur noyau. Les assertions suivantes sont équivalentes :

i) σ est un premier.

ii) La catégorie $\mathcal{D}_\sigma$ des modules fidèlement σ-injectifs possède un objet simple D dont l'enveloppe injective E(D) est un cogénérateur de $\mathcal{D}_\sigma$.

Il découle de cette dernière propriété que $\mathcal{D}_\sigma$ possède un seul type d'objet simple. En effet, si P est un autre objet simple de $\mathcal{D}_\sigma$, il existe un homomorphisme non nul de P dans E(D), car E(D) est un cogénérateur injectif. P étant simple, un tel homomorphisme est nécessairement injectif et identifie donc P à un sous-module de E(D). Alors $D \cap P \neq 0$ et $D \cap P = P$,

$D \cap P = D$ car P et D sont simples.

Cette démonstration s'appuyant sur des résultats non démontrés (l'abélianité de $\mathfrak{D}_\sigma$ et le fait que le plongement $\mathfrak{D}_\sigma \to R\ \underline{\mathrm{Mod}}$ commute aux limites projectives) nous allons en donner une autre démonstration directe, qui s'interprète comme suit :

<u>THEOREME 3.</u> : <u>Soit π un premier de R. Alors, à isomorphisme près, (non unique), π possède un seul module porteur qui soit aussi π-injectif.</u>

Soit D un module à la fois porteur et de définition de π. On sait que $Q_\pi(D)$ est alors un module porteur π-injectif de π. Soit P un autre module porteur π-injectif de π. Par définition de $\pi = \tau_D$, il existe un homomorphisme non nul de P dans $E(D)$, et un tel homomorphisme est nécessairement injectif (prop. 4), de sorte que l'on peut identifier P à un sous-module de $E(D)$. Soient alors $M = P \cap D$ et $i : M \hookrightarrow P$, $j : M \hookrightarrow D$ les plongements canoniques. Comme P/M (resp. D/M est de π-torsion car P (resp. D) est porteur, il existe un homomorphisme $j' : P \to D$ qui prolonge j (resp. $i' : D \to P$ qui prolonge i) car D (resp. P) est π-injectif.

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[dr, hook] \arrow[d, bend right, "j'"'] & \\ M \arrow[ur, hook, "i"] \arrow[dr, hook, "j"'] & D \arrow[u, bend right, "i'"'] \arrow[r, hook] & E(D) \end{tikzcd}$$

On a alors $i'j'i = i$ et $j'i'j = j$, mais D et P étant fidèlement π-injectifs, il y a unicité du prolongement et donc $i'j = \mathrm{Id}$, $j'i' = \mathrm{Id}$.

On notera K_π ce module porteur et π-injectif défini à isomorphisme près.

<u>COROLLAIRE 1.</u> : <u>Si π est un premier, les modules porteurs de π sont exactement les modules isomorphes à un sous-module non nul de K_π.</u>

<u>COROLLAIRE 2.</u> : <u>Si π est premier, tout module porteur de π est aussi un module de définition de π.</u>

Puisque K_π est extension essentielle de tous ses sous-modules non nuls (prop. 3), pour tout $P \subset K$ non nul, on a $\tau_P = \tau_K$. Or, parmi ces sous-modules il en est un qui vérifie $\tau_P = \pi$.

<u>COROLLAIRE 3.</u> : <u>On a une application naturelle de l'ensemble des premiers de R dans les types d'injectifs indécomposables de R Mod, qui à π associe E(P) , P étant un module porteur de</u> π .

Nous reviendrons au § 3 sur cette question.

2. <u>IDEAUX CRITIQUES.</u>

On reprend ici la terminologie de [4] qui semble plus adéquate.

<u>DEFINITION.</u> : On dit qu'un idéal $I \subset R$ est <u>un idéal (à gauche) critique</u> (ou "idéal super-premier" ([5]) ou encore "idéal premier de Goldman" ([8])) si R/I est un module porteur pour un certain foncteur noyau.

Alors R/I est un porteur de τ_I (prop. 3) et τ_I est donc premier. Si R/I est module porteur d'un premier π , on dira que I est <u>π-critique.</u>

<u>PROPOSITION 6.</u> : <u>Soit</u> $I \underset{\neq}{\subset} R$ <u>un idéal. Les assertions suivantes sont équivalentes</u> :

i) I <u>est critique.</u>

ii) <u>Pour tout idéal</u> $U \underset{\neq}{\supset} I$, $U \in F(I)$.

iii) $\forall x_1 \in R$, $\forall x_2, x_3 \in R-I$, $\exists y \in R$ <u>tel que</u> $yx_2 \in I$ <u>et</u> $yx_1 \in I+Rx_3$.

iv) I <u>est irréductible et est maximal parmi les idéaux irréductibles qui lui sont liés</u>(*).

v) I <u>est maximal parmi les annulateurs des éléments d'un module injectif (quelconque).</u>

vi) <u>Il existe une localisation</u> σ <u>telle que</u> I <u>est maximal parmi les idéaux qui n'appartiennent pas à</u> $F(\sigma)$.

i) $\Longrightarrow$ ii) : Comme R/I est porteur et de définition du premier τ_I , pour tout $U \underset{\neq}{\supset} I$, $R/U \cong (R/I)/(U/I)$ est de τ_I-torsion, c'est-à-dire $U \in F(I)$.

(*) On rappelle (cf. [4]) que l'on dit que J est lié à l'idéal irréductible I si J est égal à Ann(x), pour $\underbrace{\text{un } x}_{\text{non nul}}$ appartenant à l'injectif (indécomposable) E(R/I) .

ii) $\Longleftrightarrow$ iii) : il suffit d'appliquer la proposition 2.

ii) $\Longrightarrow$ iv) : toujours d'après la proposition 2, si $U \supsetneq I$, pour tout $x \in (R/I)$, on a $U \not\subset \mathrm{Ann}(x)$; c'est précisèment dire que I est maximal parmi les annulateurs des $x \in E(R/I)$. Par ailleurs, si $U \supsetneq I$ et $V \supsetneq I$, c'est-à-dire appartiennent à $P(I)$, alors $U \cap V \in F(I)$ et n'est donc pas contenu dans I : I est irréductible.

iv) $\Longrightarrow$ v) .

v) $\Longrightarrow$ vi) : soit E un injectif tel que I soit maximal parmi les annulateurs des $x \in E$, et soit $F = F(\tau_E)$. On a évidemment $I \notin F$ car R/I se plonge dans E . Si $U \supsetneq I$, d'après l'hypothèse de maximalité, on a $U \not\subset \mathrm{Ann}(x)$ $\forall x \in E$, et d'après la proposition 1, il en résulte que $U \in F$.

vi) $\Longrightarrow$ i) : nous allons montrer que R/I <u>est porteur de</u> σ . Soit $U \supsetneq I$; on a alors $U \in F(\sigma)$ et donc $R/U \cong (R/I)/(U/I)$ est de σ-torsion. Or tous les sous-modules non nuls de R/I sont de cette forme U/I . Montrons que R/I est σ-libre : puisque $I \notin F(\sigma)$, R/I n'est pas de σ-torsion, i.e. $\sigma(R/I) \neq R/I$; mais $(R/I)/\sigma(R/I)$ est σ-libre et il résulte de ce qui précède que cela n'est possible que si $\sigma(R/I) = 0$. cqfd.

<u>Remarque</u> : On a vu que si deux idéaux U et V appartiennent à un système topologique F , alors $UV \in F$. Si I est critique, on en déduit que si $U \supsetneq I$ et $V \supsetneq I$, alors $UV \not\subset I$. La réciproque est fausse, même dans le cas où I est un idéal bilatère :

<u>COROLLAIRE :</u> <u>Un idéal bilatère I est critique si et seulement si R/I est un domaine de Ore à gauche.</u>

Comme R/I est porteur, $\mathrm{End}(R/I)$ est intègre (prop. 4) ; mais I étant bilatère, R/I s'identifie à l'anneau opposé de $\mathrm{End}(R/I)$. (Il est évidemment aussi possible de vérifier directement que I est complètement premier).

Montrons que R/I est un domaine de Ore. D'après la caractérisation iii), si $x_1 \in R$ et $x_3 \in R-I$, on peut (faisant $x_2 = 1$) trouver $y \in R-I$ tel que $yx_1 \in I+Rx_3$, i.e. $yx_1-zx_3 \in I$ pour un certain $z \in R$.

Inversement, supposons que R/I est un domaine de Ore, et soient $x_1 \in R$, $x_2,x_3 \in R-I$. D'après la condition de Ore, on peut trouver $y \in R-I$

et $z \in R$ tels que $yx_1 - zx_3 \in I$, et donc $yx_1 \in I + Rx_3$. De plus on a alors aussi $yx_2 \notin I$ car I est supposé complètement premier. Le critère iii) est donc vérifié.

3. CORRESPONDANCES ENTRE PREMIERS, IDEAUX CRITIQUES ET MODULES INJECTIFS.

PROPOSITION 7. : Soit π un premier, et soit K_π l'unique porteur π-injectif de π. Alors :

1) pour tout $x \in K_\pi$, $\mathrm{Ann}(x)$ est π-critique.

2) tout idéal π-critique est l'annulateur d'un élément x de K_π.

3) si $\mathrm{Ann}(x)$, $x \in E(K_\pi)$, est critique, $\mathrm{Ann}(x)$ est π-critique.

Cela résulte directement du corollaire 1 au théorème 3 et pour l'assertion 3 de la démonstration v) $\Longrightarrow$ vi) $\Longrightarrow$ i) de la proposition 6, remarquant que $\pi = \tau(E(K_\pi)) = \tau(R/\mathrm{Ann}(x))$ car $E(K_\pi)$ est extension essentielle de ses sous-modules non nuls.

COROLLAIRE 1. : Si π est premier, K_π n'est autre que le coeur(*) de l'injectif indécomposable $E(K_\pi)$.

COROLLAIRE 2. : Soient I un idéal π-critique et I' un idéal π'-critique. Les assertions suivantes sont équivalentes :

i) $\pi = \pi'$.

ii) I et I' sont des idéaux irréductibles liés.

iii) $E(R/I)$ et $E(R/I')$ sont isomorphes.

Enfin, nous avons besoin du résultat suivant :

LEMME. : Soit E un injectif indécomposable. Le foncteur τ_E est premier si et seulement si le coeur $C(E)$ de E est non nul.

Si $C(E) = 0$, soit $x \in C(E)$, $x \neq 0$. D'après la proposition 6, $\mathrm{Ann}(x)$ est un idéal critique. Comme E est une extension essentielle de $R/\mathrm{Ann}(x)$ (car E est indécomposable), on a $\tau_E = \tau_{\mathrm{Ann}(x)}$ et donc τ_E est un premier.

(*) On appelle coeur d'un module injectif indécomposable M, et on note $C(M)$ l'ensemble réunion de $\{o\}$ et des éléments non nuls de M dont l'annulateur est maximal parmi l'ensemble de tous les $\mathrm{Ann}(x)$, $x \in M$, $x \neq 0$. S'il n'existe pas d'élément maximal, on pose $C(M) = 0$. On montre que le coeur $C(M)$ de M est un sous-module de M et que si R est noethérien à gauche, $M \neq 0$ implique $C(M) \neq 0$.

Inversement, supposons τ_E premier, et soit I un idéal τ_E-critique. Comme R/I est porteur, il résulte de la proposition 4 que R/I se plonge dans E, de sorte que $E \cong E(R/I)$ (car E est indécomposable) et le coeur de E s'identifie à $K_{\tau_E} \neq 0$.

Rassemblons tous ces résultats :

THEOREME 4. : Soit R un anneau. Alors

1) Les correspondances $\pi \longmapsto E(K_\pi)$ et $E \longmapsto \tau_E$ entre premiers et injectifs indécomposables dont le coeur est non nul sont inverses l'une de l'autre.

2) L'ensemble des classes d'équivalence d'idéaux critiques (pour la relation d'équivalence $I \sim I'$ si I et I' sont liés) est isomorphe à l'ensemble des premiers à gauche de R.

IV. APPLICATIONS ET EXEMPLES.

1. CAS OU R EST COMMUTATIF.

Il résulte du corollaire à la proposition 6 qu'un idéal I est alors critique si et seulement si I est un idéal premier. Par ailleurs, il est aisé de vérifier que deux idéaux critiques (premiers) sont alors liés si et seulement si ils sont égaux. Il y a donc correspondance bijective entre les premiers (localisations) et les idéaux premiers de R. Cette correspondance peut s'écrire comme suit :

- A l'idéal premier I on associe le premier τ_I. F(I) est alors formé des idéaux U qui ne sont pas contenus dans I (corollaire de la prop. 2).
- Au premier π on associe l'idéal premier $Ann(K_\pi)$ (qui est égal à $Ann(x)$ pour tout $x \in K_\pi$).

On peut, à titre d'exercice, vérifier que K_π s'identifie au corps des fractions rationnelles de R/I (pour $\pi = \tau_I$) : nous reviendrons là-dessus au § 5.

Notons enfin que la relation d'ordre définie par l'inclusion des idéaux premiers de R est la relation inverse de celle qui est induite sur les premiers par la relation d'ordre sur les localisations.

A ce détail près, on pourra vérifier que, dans les développements et constructions des § qui suivent, on retrouve, si R est supposé commutatif, des propriétés bien connues (et élémentaires) des idéaux premiers.

2. FAMILLE TOPOLOGISANTE ET PREMIERS.

Soit σ un foncteur noyau. On note $\Omega(\sigma)$ l'ensemble des idéaux I qui sont maximaux pour la propriété de ne pas appartenir à $F(\sigma)$.

Si $I \in \Omega(\sigma)$, on a vu (prop. 6, implication vi) $\Longrightarrow$ i)) que R/I est alors un module porteur de σ , de sorte que I est critique et que de plus $\sigma \subset \tau_I$.

Par ailleurs, si P est un module porteur de σ et si $0 \neq x \in P$, alors $\mathrm{Ann}(x) \in \Omega(\sigma)$. En effet $R/\mathrm{Ann}(x)$, se plongeant dans P , est aussi module porteur de σ , et si $U \underset{\neq}{\supset} \mathrm{Ann}(x)$ on a $U \in F(\sigma)$ car R/U , qui s'identifie à un quotient de $R/\mathrm{Ann}(x)$ par un sous-module non nul, est de σ-torsion.

Si $F(\sigma)$ est localement de type fini (cf. I.2.1.), et si $V \notin F(\sigma)$, alors l'ensemble des idéaux I qui n'appartiennent pas à $F(\sigma)$ et qui contiennent V est inductif non vide, de sorte qu'il existe d'après Zorn un idéal $I \in \Omega(\sigma)$ et qui contient V .

Montrons qu'il en résulte que l'on a $F(\sigma) \supset \bigcap_{I \in \Omega(\sigma)} F(I)$: si $V \notin F(\sigma)$, il existe $I \in \Omega(\sigma)$ avec $I \supset V$ et donc $V \notin F(I)$ (sinon R/I serait de torsion !). Par ailleurs, l'inclusion inverse est aussi vérifiée puisque l'on a vu plus haut que si $I \in \Omega(\sigma)$, alors $F(\sigma) \subset F(I)$. On a donc l'énoncé suivant :

<u>PROPOSITION 8.</u> : <u>Soient</u> σ <u>un foncteur noyau et</u> $\Omega(\sigma)$ <u>comme ci-dessus.</u>

1) $\Omega(\sigma)$ <u>est égal à l'ensemble des annulateurs des éléments des modules porteurs de</u> σ . <u>Et donc</u> $\Omega(\sigma) \neq \emptyset$ <u>équivaut à dire que</u> σ <u>admet un module porteur.</u>

2) <u>Si</u> $I \in \Omega(\sigma)$, <u>alors</u> I <u>est critique et</u> $F(\sigma) \subset F(I)$ (i.e. $\sigma \subset \tau_I$).

3) <u>Si</u> $F(\sigma)$ <u>est localement de type fini (et en particulier si</u> σ <u>vérifie la propriété</u> (T)), <u>pour tout</u> $V \notin F(\sigma)$, <u>il existe</u> $I \in \Omega(\sigma)$, $I \supset V$.

De plus, on a alors :

$$F(\sigma) = \bigcap_{I \in \Omega(\sigma)} F(I) .$$

En particulier, σ est l'intersection des premiers qui le contiennent.

[Il faut faire une mention spéciale du cas où $0 \in F(\sigma)$, i.e. $F(\sigma)$ est formée de tous les idéaux ; alors 3) est encore vrai, avec $\Omega(\sigma) = \emptyset$] .

3. PREMIERS MAXIMAUX.

On rappelle qu'un premier π est dit maximal s'il possède un module porteur qui est un module simple.

La proposition qui suit généralise une propriété bien connue dans le cas commutatif : si M est un module, alors l'intersection des noyaux des localisations $M \to M_m$, pour tous les idéaux maximaux m de R , est nulle.

PROPOSITION 9. ([2]) : L'intersection de tous les premiers maximaux de R est égale au foncteur noyau 0 (défini par $0(M) = 0$ pour tout M).

Cela résulte directement de la proposition 8, car $F(0)$ est formé du seul "idéal" R et est donc évidemment localement de type fini.

LEMME. : Soient π un premier et P un module porteur de π . Si M est un module simple, M est π-libre si et seulement si M se plonge dans P .

On en déduit que si $\pi(M) \neq M$, on a $\pi = \tau_M$ maximal, et que, si π n'est pas maximal, tout idéal (à gauche) maximal appartient à $F(\pi)$.

En effet, si $\pi(M) \neq M$ (i.e. $\pi(M) = 0$) , il existe un $f: M \to E(P)$ non nul (car $\pi = \tau_P$) , donc injectif. On a alors $f(M) \cap P \neq 0$ et donc $M \cong f(M) = (f(M) \cap P) \subset P$.

PROPOSITION 10. ([2]) :

1) Les premiers maximaux sont en correspondance bijective avec les types de R-modules simples.

2) Le foncteur noyau 0 est premier si et seulement si tous les modules simples sont isomorphes (et 0 est alors le seul premier maximal).

Notons que si 0 est premier, alors R possède un seul idéal primitif, et n'a donc qu'un seul idéal bilatère maximal. La réciproque est vraie dans le cas commutatif : si R est local et commutatif, alors 0 est un foncteur premier.

1) L'application $M \longmapsto \tau_M$ étant par définition une surjection des types de modules simples sur les premiers maximaux, il reste à montrer que si M et M' sont deux modules simples tels que $\tau_M = \tau_{M'}$ alors M et M' sont isomorphes. D'après le lemme on a $M \subset M'$ (car $\tau_{M'}(M) = 0$) et donc $M \cong M'$.

2) D'après la proposition 9, il suffit de prouver que si 0 est premier, tous les modules simples sont isomorphes. Soit P un module porteur de 0 (on peut d'ailleurs voir directement qu'un tel module porteur est nécessairement simple). D'après le lemme, tout module simple se plonge dans P. Comme P est extension essentielle de tous ses sous-modules on en déduit le résultat.

4. <u>LE SPECTRE A GAUCHE.</u>

Suivant [5], on appelle <u>spectre à gauche de R</u>, et on note $\mathrm{Speg}(R)$, l'ensemble des premiers (à gauche) de R.

Pour tout idéal $U \subset R$, on pose :

$$V(U) = \{\pi \in \mathrm{Speg}(R) / U \in F(\pi)\} .$$

On vérifie immédiatement que $V(0) = \emptyset$, $V(R) = \mathrm{Speg}(R)$, $V(U) \cap V(U') = V(U \cap U')$, de sorte que les $V(U)$ forment une base d'ouverts pour une topologie sur $\mathrm{Speg}(R)$.

Dire que π appartient à l'adhérence de π' équivaut à dire que $F(\pi) \subset F(\pi')$, c'est-à-dire $\pi \subset \pi'$ (notons que la relation d'ordre est l'opposée de celle que l'on a l'habitude de considérer dans le cas commutatif). Il en découle que $\mathrm{Speg}(R)$ est un espace de Kolmogoroff.

Cette notion de spectre possède malheureusement un mauvais comportement fonctoriel en R : si $f : R \to S$ est un homomorphisme d'anneaux, je ne sais pas en général (mais je n'ai peut-être pas assez bien regardé) définir d'application (continue) $\mathrm{Speg}(S) \to \mathrm{Speg}(R)$.

Cela est cependant vrai si f est un épimorphisme plat : si f fait de S un R-module plat à droite, et si σ est une localisation sur S, alors la collection des

$$\sigma'(M) = \ker\{M \xrightarrow{f \otimes M} S \otimes M \longrightarrow S \otimes M/\sigma(S \otimes M)\} ,$$

pour tous les R-modules M, définit une localisation σ' sur R. Si de plus f est un épimorphisme d'anneaux, on montre alors que σ premier implique σ' premier et que l'on a le résultat suivant :

<u>PROPOSITION 11.</u>([8]) : <u>Soit $f:R \to S$ un épimorphisme plat à droite et soit σ la localisation (qui vérifie (T)) qui lui est associée</u> (cf. I.2.2.). <u>Alors on a une application</u> $\mathrm{Speg}(S) \to \mathrm{Speg}(R)$ <u>qui à π associe le premier π' défini par</u>

$$\pi'(M) = \ker\{M \xrightarrow{f\otimes M} S \otimes M \longrightarrow S \otimes M/\pi(S \otimes M)\}$$

<u>pour tout</u> $M \in R\,\underline{\mathrm{Mod}}$.

Cette application est un homéomorphisme de $\mathrm{Speg}(S)$ sur la partie localement fermée de $\mathrm{Speg}(R)$ qui est formée des premiers de R qui contiennent σ .

De plus, dans cette bijection, les premiers maximaux de S correspondent exactement aux premiers de R qui sont définis par un idéal critique $I \in \Omega(\sigma)$.

5. <u>LE CORPS RESIDUEL.</u>

Soit π un premier de R et soit K_π le porteur π-injectif de π . On sait bien, $E(K_\pi)$ étant un injectif indécomposable, que $\mathrm{End}_R(E(K_\pi))$ est un anneau local dont l'idéal maximal est formé des endomorphismes f dont le noyau $\ker(f)$ est non nul.

<u>PROPOSITION 12.</u> : <u>Soit π un premier. L'anneau $k_\pi = \mathrm{End}(K_\pi)$ des endomorphismes de K_π est un corps canoniquement isomorphe au corps résiduel de l'anneau local $\mathrm{End}(E(K_\pi))$</u> . <u>Pour tout module porteur P de π</u> , $\mathrm{End}(P)$ <u>est un anneau intègre qui se plonge dans le corps k_π</u> . On appellera <u>corps résiduel en</u> π le corps <u>opposé</u> (pour des raisons qui apparaîtront plus loin) à k_π .

Si $f \in \mathrm{End}(E(K_\pi))$, on a $f(K_\pi) \subset K_\pi$ car K_π est le coeur de $E(K_\pi)$. On définit donc un homomorphisme d'anneaux:

$$p : \mathrm{End}(E(K_\pi)) \longrightarrow k_\pi = \mathrm{End}(K_\pi)$$

en prenant pour $p(f)$ la restriction de f à K_π . Cet homomorphisme est surjectif car $E(K_\pi)$ est un module injectif. Il reste donc à prouver que le noyau de p contient l'idéal maximal de $\mathrm{End}(E(K_\pi))$. Si $\ker(f) \neq 0$, on a aussi $\ker(f) \cap K \neq 0$ et on en déduit que $\ker(f) \supset K_\pi$ (i.e. $p(f) = 0$ car, K_π étant porteur, $\mathrm{End}(K_\pi)$ ne contient que des morphismes injectifs ou nuls (prop. 4).

Soit maintenant P un module porteur de π. $\mathrm{End}(P)$ est un anneau intègre (prop. 4). De plus, P s'identifie à un sous-module non nul de K_π (cor. 1 du Th. 3). Notons $i: P \hookrightarrow K_\pi$ un plongement de P dans K_π ; si $f \in \mathrm{End}(P)$, if admet un unique prolongement à K_π car K_π/P est de π-torsion et K_π est fidèlement π-injectif. On définit ainsi un homomorphisme d'anneaux qui est injectif. Cet homomorphisme dépend du choix de i.

<u>Remarque</u> : Contrairement à ce qu'affirme Popescu ([5]), k_π n'est en général pas le corps des fractions à droite (ni à gauche) de $\mathrm{End}(P)$ lorsque P est un module porteur de π. Nous construirons au § 7 un contre-exemple où $\mathrm{End}(P)$ est un corps commutatif mais où $\mathrm{End}(K_\pi) = k_\pi$ est une extension (commutative) transcendante pure de $\mathrm{End}(P)$.

Par contre, il est possible (conjecture) que $\mathrm{End}(P)$ soit toujours un domaine de Ore à droite.

On a cependant le résultat suivant :

<u>PROPOSITION 13. : Si π est un premier qui possède un idéal π-critique bilatère I (et alors I est le seul idéal π-critique), alors $\mathrm{End}(R/I)$ – qui s'identifie à l'anneau opposé de R/I – est un domaine de Ore à droite, et k_π s'identifie au corps des fractions à droite de $\mathrm{End}(R/I)$. De plus, $K_\pi = Q_\pi(R/I)$ est muni d'une unique structure d'anneau pour laquelle le plongement canonique $\psi: R/I \to Q_\pi(R/I)$ soit un homomorphisme d'anneaux, et $K_\pi = Q_\pi(R/I)$ s'identifie alors à l'opposé de k_π (de sorte que $\psi: R/I \to Q_\pi(R/I)$ identifie ce dernier au corps des fractions à gauche de R/I).</u>

Si I est un idéal π-critique bilatère, il est facile de voir que I est alors le seul idéal π-critique (prop. 7) et que l'homomorphisme $f \mapsto f(I)$ identifie $\mathrm{End}(R/I)$ à $(R/I)^\circ$, l'anneau opposé à R/I.

Par ailleurs, de façon générale si π est premier, l'opération $(f,x) \mapsto f(x)$ fait de K_π un k_π-module à gauche. Un k_π-sous-module de dimension 1 de K_π est formé de l'ensemble des x tels que $\mathrm{Ann}(x)$ est égal à un idéal π-critique donné (auquel il faut ajouter l'élément $x = 0$). En effet, on a $\mathrm{Ann}(x) = \mathrm{Ann}(f(x))$ pour tout $x \in K_\pi$ et tout $f \neq 0$, $f \in k_\pi$, car K_π est égal à son coeur. Réciproquement, si $\mathrm{Ann}(x) = \mathrm{Ann}(y)$, on construit immédiatement un $f \in \mathrm{End}(E(K_\pi))$ tel que $f(x) = y$.

Si π possède un idéal critique bilatère I , on déduit de ce qui précède que K_π est un k_π-module de dimension 1 (la réciproque étant d'ailleurs vraie) et que, si l'on note $\psi: R/I \to Q_\pi(R/I) = K_\pi$ le plongement canonique, l'application $k_\pi = \mathrm{End}(K_\pi) \to K_\pi$ qui à f associe $f(\psi(1))$ est une bijection. Considérant K_π comme l'anneau opposé à k_π, $\psi: R/I \to K_\pi$ est alors un homomorphisme d'anneaux dont on peut vérifier qu'il possède les propriétés désirées.

Nous retiendrons de tout ceci que $K_\pi \cong (k_\pi)^o$ est un corps qui est extension essentielle de R/I .

Mais R/I est un domaine de Ore à gauche (cor. de la prop. 6) et, notant Q_g le corps des fractions à gauche de R/I , on a une factorisation (dans la catégorie des anneaux)

$$\begin{tikzcd} R/I \arrow[r, hook] \arrow[dr, "\psi"'] & Q_g \arrow[d] \\ & K \end{tikzcd}$$

qui, faisant de K_π un Q_g-module (nécessairement libre), implique que $Q_g \cong K_\pi$ car K_π est une extension essentielle de R/I.

c.q.f.d.

6. EXEMPLE.

Soient A un anneau, Z son centre, A^o son anneau opposé. On considère alors l'anneau $R = A \otimes_Z A^o$. A est canoniquement muni d'une structure de R-module à gauche (i.e. de A-module bilatère) grâce à l'opération $((a \otimes a'), b) \longmapsto aba'$. On a un homomorphisme naturel de R-modules à gauche $p: R \to A$, défini par $p(a \otimes a') = aa'$, qui identifie A à R/C où C est l'idéal à gauche de R qui est engendré par les éléments $a \otimes 1 - 1 \otimes a$, $a \in A$. Il est souvent agréable de considérer un R-module à gauche comme un A-module bilatère, nous utiliserons parfois cette facilité.

Nous allons nous intéresser aux premiers π de R qui possèdent un idéal π-critique qui contient C .

PROPOSITION 14. : *Si $I \subset R$ est un idéal à gauche contenant C et tel que l'idéal bilatère $\mathfrak{p} = I/C \subset A$ est premier (au sens habituel), alors I est critique. De plus, si B est un idéal bilatère de A (i.e. un sous-R-module de A), A/B est de τ_I-torsion (i.e. $p^{-1}(B) \in F(I)$) si et seulement si $B \not\subset \mathfrak{p} = I/C$.*

Ce résultat, qui est à rapprocher du corollaire de la proposition 2, découle de cette même proposition 2 appliquée avec soin.

COROLLAIRE : *Si π est un premier pour lequel il existe un idéal bilatère premier $\mathfrak{p} \subset A$ tel que $p^{-1}(\mathfrak{p})$ soit π-critique, alors $p^{-1}(\pi)$ est le seul idéal π-critique contenant C.*

On a une application injective (cf. prop. 7) de l'ensemble des idéaux premiers bilatères de A dans l'ensemble des premiers à gauche de $R = A \otimes_Z A^o$. Malheureusement, il existe des idéaux critiques $I \subset R$ contenant C et tels que I/C ne soit pas premier. Par exemple, on peut vérifier que si A est l'anneau des matrices triangulaires de rang 2 sur un corps commutatif, l'idéal C est critique bien que $0 \subset A$ ne soit pas premier.

Si I est un idéal critique contenant C, alors $\mathrm{End}(R/I)$ est un anneau intègre et commutatif : intègre car R/I est porteur, commutatif car R/I s'identifiant à l'anneau $A/(I/C)$, on vérifie que $\mathrm{End}_R(A/(I/C))$ s'identifie au centre de cet anneau.

Je ne sais pas si l'on peut en déduire de manière générale que le corps résiduel k_{τ_I} est commutatif. Nous verrons que cela est vrai dans le cas particulier où $I = p^{-1}(\mathfrak{p})$, $\mathfrak{p} \subset A$ premier.

Si M est un R-module à gauche, on désigne par $Z_A(M)$ l'ensemble des $m \in M$ tels que $\mathrm{Ann}(m) \supset C$, i.e. $am = ma \; \forall a \in A$. Un homomorphisme $f : M \to M'$ envoie $Z_A(M)$ dans $Z_A(M')$.

Les considérations faites lors de la démonstration de la proposition 13 montraient que si π est un premier, $k_\pi = \mathrm{End}(K_\pi)$ s'identifiait à l'ensemble des $x \in K_\pi$ tels que $\mathrm{Ann}(x)$ est un idéal π-critique donné. Joint au corollaire de la proposition 14, cela donne l'énoncé suivant :

PROPOSITION 15. : *Soient $\mathfrak{p} \subset A$ un idéal bilatère premier et $\pi = \tau_{p^{-1}(\mathfrak{p})}$ le premier associé. Alors k_π s'identifie à $Z_A(K_\pi)$. De plus, k_π est un corps commutatif.*

La seule chose que nous n'avons pas démontrée est la commutativité de k_π. On pourra d'ailleurs se passer de cette démonstration directe (qui est assez technique, bien que naturelle) puisque nous allons donner une description explicite de k_π dans ce cas particulier, la commutativité de k_π ressortant immédiatement de celle-ci. Donnons quelques indications sur la manière d'établir cette description.

On note $A' = A/\mathfrak{p}$ et on se donne un plongement de A' dans K_π. Si $f \in K_\pi$, soit $B' \subset A'$ l'idéal bilatère de A' (sous-R-module à gauche de A') défini par $B' = A' \cap f^{-1}(A')$. B' est non nul. L'homomorphisme f induit par restriction un homomorphisme de R-module à gauche

$$f' : B' \to A'.$$

Inversement, si B' est un idéal non nul de A' et si f' est un R-homomorphisme comme ci-dessus, f' se prolonge de manière unique en un endomorphisme de K_π :

$$\begin{tikzcd} B' \arrow[r, hook] \arrow[d, "f'"'] & A' \arrow[r, hook] & K \arrow[d, dashed, "f"] \\ A' \arrow[rr] & & K \end{tikzcd}$$

avec K_π/B' de π-torsion,

avec K_π fidèlement π-injectif.

On vérifie que deux homomorphismes f_1' et f_2' comme ci-dessus définissent le même élément de K_π si et seulement si il existe B', $0 \neq B' \subset (B_1' \cap B_2')$ tel que f_1' et f_2' aient même restriction à B'. Considérant alors en particulier les "germes" d'homomorphismes sur des idéaux bilatères principaux de A', on obtient alors l'énoncé suivant :

<u>PROPOSITION 16.</u> : <u>Soient</u> A <u>un anneau,</u> $\mathfrak{p}$ <u>un idéal premier de</u> A <u>et</u> $\pi = \tau_{p^{-1}(\mathfrak{p})}$ <u>le premier associé. Alors le corps résiduel</u> k_π <u>s'identifie au corps commutatif</u> L <u>construit comme suit :</u>

<u>Posons</u> $A' = A/\mathfrak{p}$, <u>et soit</u> $E \subset A' \times A'$ <u>l'ensemble des couples</u> (a,b) <u>tels que</u> $b \neq 0$ <u>et</u> $axb = bxa$ <u>pour tout</u> $x \in A'$.

<u>On définit une relation d'équivalences sur</u> E <u>en posant</u> $(a,b) \sim (a',b')$ <u>si et seulement si on a l'une des propriétés (équivalentes) suivantes :</u>

$$\forall x \in A', \ axb' = bxa' \quad \underline{\text{ou}} \quad \forall x \in A', \ a'xb = b'xa .$$

Soit L le quotient de E par cette relation d'équivalence, et soit a/b la classe de (a,b) dans L. Sur L on définit une multiplication et une addition ayant les propriétés suivantes :

$$a/b+a'/b' = \frac{axb'+bxa'}{bxb'} = \frac{a'x'b+b'x'a}{b'x'b} ,$$

$$(a/b)(a'/b') = \frac{axa'}{bxb'} = \frac{a'x'a}{b'x'b} ,$$

où x et x' sont des éléments quelconques de A' tels que bxb' et $b'x'b$ soient non nuls.

L'isomorphisme $L \to k_\pi$ associe à l'élément a/b l'unique prolongement à K_π de l'homomorphisme

$$f' : (b) \longrightarrow A' = A/\mathfrak{p} \hookrightarrow K_\pi ,$$

où (b) désigne l'idéal bilatère engendré par b dans A', et où f' est défini par $f(b) = a$ (cet homomorphisme bilatère est bien défini si et seulement si $axb = bxa \ \forall x \in A'$).

7. UN CONTRE-EXEMPLE.

Comme nous l'avons annoncé, nous allons donner un contre-exemple à l'assertion de Popescu. Nous allons construire ce contre-exemple dans un cas où la proposition 16 s'applique : la description explicite que l'on y donne renforce en effet l'impression que k_π est le corps des fractions de $\mathrm{End}(A/\mathfrak{p})$, et cette proposition serait vide s'il en était bien ainsi.

Soit h un corps commutatif quelconque. Nous allons construire un anneau A possèdant les propriétés suivantes :

- A est une h-algèbre de centre h.
- A est intègre.
- Si $\pi = \tau_C$ désigne le premier à gauche de $R = A \otimes_h A^o$ associé à l'idéal premier $0 \subset A$, alors k_π est un corps commutatif extension transcendante non triviale du corps $h = \mathrm{End}_R(A)$ des endomorphismes du module porteur A.

7.1. Construction :

Nous allons, de façon à atteindre notre but sans utiliser la proposition 16, construire non pas un mais deux anneaux A et B.

Soit G un sous-groupe additif de $\mathbb{R}$, pour lequel nous supposerons qu'il contient $\mathbb{Z}$: $\mathbb{Z} \subset G \subset \mathbb{R}$.

Soient $F \subset E \subset \mathbb{N}\times\mathbb{N}\times G$ les ensemble définis comme suit :

$$E = \{(t,n,g),\ t \in \mathbb{N},\ n \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant n \leqslant t,\ g \in G\}$$

$$F = \{(t,n,g),\ t \in \mathbb{N},\ n \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant n \leqslant t,\ g \in G,\ \frac{n(n+1)}{2} \leqslant g \leqslant \frac{n(2t-n+1)}{2}\}.$$

On munit E d'uns structure de monoïde unitaire en posant

$$(t,n,g).(t',n',g') = (t+t',n+n',g+g'+tn')$$

et on vérifie alors que F est un sous-monoïde unitaire de E.

On munit E d'une relation d'ordre total compatible avec sa structure de monoïde en posant

$$(t,n,g) \leqslant (t',n',g') \Longleftrightarrow \begin{cases} \text{soit } t < t' \\ \text{soit } t=t' \text{ et } n<n' \\ \text{soit } t=t',\ n=n' \text{ et } g\leqslant g'. \end{cases}$$

Pour $e, e', e'' \in E$ on a alors les équivalences

$$e' \leqslant e'' \Longleftrightarrow e.e' \leqslant e.e'' \Longleftrightarrow e'.e \leqslant e''.e .$$

Si h est un corps commutatif, soit $A = h[F]$ (resp. $B = h[E]$ la h-algèbre du monoïde F (resp. E), c'est-à-dire l'ensemble des sommes finies

$x = \sum_e x_e.e$, $e \in F$ (resp. E), $x_e \in h$, $x_e = 0$ sauf pour un nombre fini d'entre eux.

Si $x \in A$ (resp. $x \in B$) est non nul, on appelle degré de x l'élément de F (resp. E) qui est maximal pour la propriété $x_e \neq 0$.

7.2. Etude des anneaux A et B :

A et B sont des anneaux intègres. En effet, si $x \neq 0$ et $y \neq 0$ appartiennent à A (resp. B), leur produit xy est non nul de degré égal à $\deg(x).\deg(y)$ (pour la loi de composition de E).

Si $x \in B$ commute avec les deux éléments $(1,0,0)$ et $(1,1,1)$ (ces deux éléments sont des monômes de A(*)), alors son degré est nécessairement de la forme $(0,0,g)$, ce qui implique que $x \in h[G]$ (qui se plonge dans B

(*) dans le cas où $G = \mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$, on peut vérifier que ces deux éléments engendrent la h-algèbre A.

grâce à l'injection naturelle $G \subset E$). Inversement, si $x \in h[G] \subset B$, on vérifie que x est alors dans le centre de B.

Si l'on considère l'homomorphisme $A \hookrightarrow B$ défini par le plongement $F \subset E$, et si l'on pose $Z_A(B) = \{x \in B / xa=ax \ \forall a \in A\}$, on a donc démontré que $Z_A(B)$ est égal au centre de B, ce centre étant $h[G]$. Le centre de A n'est alors autre que $Z_A(A) = Z_A(B) \cap A = h[G] \cap A = h$.

Montrons que $Z_A(B)$ engendre B tout entier en tant que A-module à gauche (ou, ce qui revient au même, en tant que R-module à gauche). Pour tout monôme (t,n,g) de B on peut en effet écrire :

$$(t,n,g) = (t,n,\frac{n(n+1)}{2}).(0,0,g-\frac{n(n+1)}{2})$$

où le premier monôme appartient à A et le second appartient à $h[G] = Z_A(B)$.

Montrons enfin que B est une R-extension essentielle de A. Les monômes $(t,1,1)$ et $(t,1,t)$ appartiennent à A pour tout entier $t \neq 0$, et si (t',n',g') est un monôme quelconque de B, on vérifie que

$$(t,1,1).(t',n',g').(t,1,t)$$

appartient à A si t est supérieur à un entier qui ne dépende que de t', n' et g'. On en déduit que, si $x \in B$ est un polynôme quelconque, on peut trouver un entier t suffisamment grand pour que

$$(t,1,1).x.(t,1,t)$$

appartienne à A. Ce dernier étant non nul si $x \neq 0$ car B est intègre, on en conclut que B est une extension essentielle de A en tant que R-module.

7.3. Conclusion :

Les notations étant toujours celles du § 6, l'idéal premier 0 de A définit un premier π pour lequel $R/C = A$ est un module porteur.

Comme B est une extension R-essentielle de A, on a $B \subset E_R(A)$. Comme C est critique et que, par définition, $\mathrm{Ann}_R(x) \supset C$ pour tout $x \in Z_A(B)$, on en déduit que $Z_A(B)$ est contenu dans le coeur K_π de $E(A)$. Comme le R-module engendré par $Z_A(B)$ est B tout entier, on en conclut que B est contenu dans K_π et est donc, comme A, un module porteur de π.

On a $\mathrm{End}_R(A) = h$ = centre de A , $\mathrm{End}_R(B) = h[G] = Z_A(B)$. Il est clair que les endomorphimes de A ne sont autres que les multiplications par un scalaire, et donc que ceux-ci se prolongent en des endomorphismes de B , de sorte que l'on a les inclusions naturelles

$$\mathrm{End}(A) = h \hookrightarrow \mathrm{End}(B) = h[G] \hookrightarrow \mathrm{End}(K) = k_\pi .$$

k_π contient donc nécessairement le corps des fractions de $h[G]$. Par exemple, si G est un sous-groupe libre de rang α de R (et il existe de tels sous-groupes pour tout cardinal α inférieur à la puissance du continu), le corps des fractions de $h[G]$ est une extension transcendante pure de degré α de h . Si G est quelconque, ce corps des fractions est une extension transcendante quelconque de h .

On pourra vérifier, en s'appuyant sur la proposition 16, que k_π est exactement le corps des fractions de $h[G]$.

Notons qu'avec de tels exemples formels (i.e. ne faisant pas intervenir la nature du corps h) on n'a aucune chance de trouver de contre-exemple où k_π soit une extension algébrique (non triviale) de h . La chasse à de tels contre-exemples reste ouverte.

BIBLIOGRAPHIE

[1] P. GABRIEL, Des catégories abéliennes, Bull. Soc. Math. France. t. 90 (1962).

[2] O. GOLDMAN, Rings and Modules of quotients, J. of Algebra 13 (1969).

[3] J. LAMBEK, Torsion théories, Additive Semantics and Rings of Quotients, Springer Lec. Notes 177(1971).

[4] L.LESIEUR, Séminaire d'Algèbre non commutative, exposé 3(1971) (à paraître).

[5] N. POPESCU, Le spectre à gauche d'un anneau, J. of Algebra 18(1971).

[6] L. SILVER, Noncommutative Localizations and Applications, J. of Algebra 7(1967).

[7] B. STENSTROM, Rings and Modules of Quotients, Springer Lec. Notes 237(1971).

[8] A. HUDRY, Notes aux C.R.A.S., série A, t. 270, pp. 925-928 (1970) et t. 271, pp. 1214-1217(1970).

-:-:-:-:-:-

UNIVERSITE PARIS-SUD XI

Centre d'ORSAY

-:-:-:-:-

SEMINAIRE D'ALGEBRE NON COMMUTATIVE

Conférence n° 7 du 15 décembre 1971.

-:-:-:-:-

TRAVAUX DE G. KRAUSE

par G. RENAULT.

-:-:-:-:-

I. UNE CARACTERISATION DES ANNEAUX NOETHERIENS A GAUCHE ESSENTIELLEMENT BORNES A GAUCHE.

LEMME 1. Soit A un anneau dont tous les idéaux premiers sont des idéaux à gauche de type fini.

a) tout idéal I de A contient un produit fini d'idéaux premiers contenant I.

b) les idéaux premiers de A vérifient la condition maximale.

a) Sinon, considérons l'ensemble E des idéaux ne possédant pas cette propriété. E qui est un ensemble inductif (car les idéaux premiers sont de type fini) admet un élément maximal I. I contient un produit de deux idéaux I_1 et I_2, $I_1 \supsetneq I$, $I_2 \supsetneq I$, donc $I \notin E$, d'où la contradiction.

b) Soient $(P_i)_{i \in \mathbb{N}}$ une suite croissante d'idéaux premiers de A, $P = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} P_i$; d'après a), il existe des idéaux premiers Q_i, $1 \leqslant i \leqslant p$ contenant P tels que $S = \prod_i Q_i$ soit inclus dans P. Il existe n tel que l'on ait $S \subset P_n$; il en résulte facilement $P_n = P$.

DEFINITION 2. On dit qu'un anneau A est essentiellement borné à gauche s'il vérifie la condition suivante :

Pour $P \in \mathrm{Spec}(A)$, tout idéal à gauche essentiel dans l'anneau A/P contient un idéal bilatère non nul.

PROPOSITION 3. Un anneau A qui vérifie les conditions suivantes :

a) tout idéal premier est un idéal à gauche de type fini.

b) A est essentiellement borné à gauche

est un anneau noethérien à gauche.

D'après le lemme 1, il existe des idéaux premiers P_i, $1 \leqslant i \leqslant n$ tels que $(0) = P_1 \dots P_n$. La considération de la suite :

$$(0) = P_1 \dots P_n \subset \dots \subset P_i \, P_{i+1} \dots P_n \subset P_{i+1} \dots P_n \subset \dots \subset A$$

où les modules facteurs sont de type fini, permet de se limiter au cas où A est premier. D'après le lemme 1, il existe un idéal premier P, maximal pour la propriété : A/P n'est pas noethérien à gauche. Dans l'anneau $B = A/P$, si J est idéal à gauche essentiel, il est facile de montrer que A/J est un module noethérien et B est noethérien à gauche ce qui contredit l'hypothèse faite sur P.

II. IDEAUX PREMIERS ET INJECTIFS INDECOMPOSABLES.

DEFINITION 4. On dit qu'un anneau A est un anneau de Goldie à gauche s'il vérifie les conditions suivantes :

a) A_S est de dimension de Goldie finie.(*)

b) les annulateurs des sous-ensembles de A vérifient la condition maximale.

On rappelle que si A est un anneau de Goldie à gauche semi-premier, A admet un anneau total de fractions semi-simple Q qui est l'enveloppe injective de A_S ; si A est premier Q est un A-module injectif isotypique.

Soit A un anneau ; on considère la condition suivante :

(*) Si E_1 et E_2 sont deux injectifs indécomposables non isomorphes, alors $\mathrm{Ass}(E_1) \neq \mathrm{Ass}(E_2)$.

LEMME 5. Soit I un idéal d'un anneau A qui vérifie (*). Alors l'anneau $B = A/I$ vérifie (*).

Soient F_1, F_2 deux B-modules injectifs indécomposables, E_1, E_2 les A-enveloppes injectives (indécomposables) respectives de F_1 et F_2.

(*) A_S désigne l'anneau A considéré comme A-module à gauche sur lui-même.

On a : $F_1 = \{x \in E_1 \ ; \ Ix = 0\}$

$F_2 = \{x \in E_2 \ ; \ Ix = 0\}$

$Ass(E_1) = Ass(F_1)$; $Ass(E_2) = Ass(F_2)$ la conclusion résulte trivialement de ce qui précède.

PROPOSITION 6. Soit A un anneau satisfaisant les conditions suivantes :

a) Les idéaux premiers sont des idéaux à gauche de type fini.

b) A/P est un anneau de Goldie à gauche, pour $P \in Spec(A)$.

c) A vérifie (*).

Alors A est un anneau noethérien à gauche, essentiellement borné à gauche.

Il suffit (prop. 3) de montrer que A est essentiellement borné à gauche et de supposer A premier (lemme 5). Soit I un idéal à gauche essentiel de A qui ne contient pas d'idéal bilatère $\neq 0$ (donc qui ne contient pas un produit fini d'idéaux premiers), maximal pour cette propriété. Alors I est $\cap$-irréductible et l'on a $\ell(A_S/I) = 0$, de plus pour tout idéal à gauche J vérifiant $A \supset J \supsetneq I$ on a :

$$[\ell(A_S/J) \cap \ell(J/I)]^2 \subseteq \ell(A/I) = 0 \ .$$

Comme A est premier, la relation $\ell(A_S/J) \neq 0$ implique $\ell(J/I) = (0)$. Ce qui prouve que $Ass\ E_1 = (0)$ où $E_1 = E(A_S/I)$, E_1 est donc isomorphe à un facteur direct indécomposable de l'enveloppe injective $E(A)$, qui est à sous-module singulier nul, ce qui contredit l'hypothèse I essentiel.

THEOREME 7. Soit A un anneau noethérien à gauche. Les conditions suivantes sont équivalentes.

a) A est essentiellement borné à gauche.

b) L'application $E \to Ass(E)$ est une bijection de l'ensemble des classes d'isomorphismes des modules injectifs et indécomposables sur $Spec\ A$.

a) $\Longrightarrow$ b) Soient E_1 , E_2 deux injectifs indécomposables tels que

$Ass\ E_1 = Ass\ E_2 = \{P\}$. On pose :

$F_1 = \{x \in E_1/Px = 0\}$

$F_2 = \{x \in E_2/Py = 0\}$.

F_1 et F_2 sont deux A/P-modules injectifs et indécomposables tels que $\text{Ass } F_1 = \text{Ass } F_2 = (0)$. Il suffit donc de considérer le cas $P = (0)$.

Pour tout $x \in E_1$ (resp. E_2), $x \neq 0$, $\ell(x)$ n'est pas un idéal à gauche essentiel, car $\ell(Ax) = (0)$; on en déduit que E_1 (resp. E_2) est un module à sous-module singulier nul, E_1 et E_2 sont donc isomorphes à des facteurs directs indécomposables de l'enveloppe injective $E(A)$, comme $E(A)$ est isotypique E_1 et E_2 sont isomorphes.

b) $\Longrightarrow$ a). Cela résulte de la proposition 6. Nous allons en donner une démonstration plus directe. Rappelons le résultat suivant :

PROPOSITION 8. Soit M un module de type fini $M \neq 0$, sur un anneau noethérien à gauche A. Il existe une suite de composition

$$(0) \subset M_1 \subset \ldots \subset M_i \subset M_{i+1} \subset \ldots \subset M_n = M,$$

telle que

1) M_{i+1}/M_i est monogène pour $i = 1, \ldots, n-1$

2) Il existe un idéal premier $\mathcal{P}_i$ qui est l'annulateur de tout sous-module $\neq 0$ de M_{i+1}/M_i.

Soit J un idéal à gauche essentiel d'un anneau premier noethérien à gauche A qui vérifie la propriété b).

On pose $M = A_S/J$ et on désigne par (M_i) une suite de composition de A_S/J décrite par la proposition 8. Quel que soit $x \in M_{i+1}/M_i$, Ann x est un idéal à gauche essentiel et la propriété b) implique alors $P_i \neq 0$; l'idéal $b = \prod_i P_i$ est un idéal différent de 0 (car A est premier) qui est inclus dans J.   C.Q.F.D.

PROPOSITION 9. Soit A un anneau noethérien à gauche à idéal singulier à gauche nul.

a) si J est un idéal à gauche essentiel et $\cap$-irréductible, alors $\text{Ass}(A/J) = \{P\}$, où P est un idéal à gauche essentiel.

b) tout idéal à gauche essentiel I, contient un idéal bilatère différent de zéro.

a) si P n'est pas essentiel, il existe un idéal à gauche $X \neq 0$ de A, tel que : $P \cap X = (0)$; $\mathrm{Ass}(X) = \{P_1\}$; $P_1 = \mathrm{Ann}\,(X)$. On en déduit $P \subseteq P_1$. La relation $P_1 X = 0$ implique $P_1 \subseteq P$, où $X \subseteq P$. Comme J est essentiel, on a $P \neq P_1$ (théorème 7) et par suite on a $X \subseteq P$, d'où $X = (0)$ contradiction.

b) C'est une conséquence immédiate de la proposition 8 appliquée en A-module A/I (on a $\prod_i P_i \subset I$) et de la propriété a).

<u>DEFINITION 10.</u> On appelle <u>anneau de Matlis</u> un anneau noethérien à gauche, tel que tout injectif indécomposable $\neq 0$ soit de la forme $E(A/P)$ où P est un idéal premier de A.

<u>COROLLAIRE</u> : <u>Pour un anneau noethérien à gauche, les conditions suivantes sont équivalentes</u> :

a) A <u>est un anneau de Matlis.</u>

b) <u>Pour</u> $P \in \mathrm{Spec}\,A$ <u>tout idéal à gauche</u> $\neq 0$ <u>de</u> A/P <u>contient un idéal bilatère</u> $\neq (0)$.

<u>Exemples</u> : (P. Gabriel) A est un anneau noethérien à gauche essentiellement borné sous les hypothèses suivantes :

pour tout idéal à gauche I de A, il existe n éléments $x_1, \ldots, x_n$ de A/I tels que

$$\mathrm{Ann}(A/I) = \bigcap_{i=1}^{n} \mathrm{Ann}(x_i) .$$

Cette condition est vérifiée pour un anneau A tel que :

a) le centre $Z(A)$ est noethérien.

b) A est un $Z(A)$-module de type fini.

<u>Problèmes</u> :

1) Soit A un anneau tel que les idéaux premiers soient des idéaux à gauche de type fini. Les idéaux bilatères de A vérifient-ils la condition maximale ?

2) Soit $A[G]$ un anneau de groupe noethérien à gauche. Sous quelles hypothèses $A[G]$ est-il essentiellement borné ?

-:-:-:-:-:-:-

G. KRAUSE : On fully left bounded left noetherian rings. J.Algebra (à paraître).