UNIVERSITÉ PARIS XI
U.E.R. MATHÉMATIQUE
91-ORSAY (FRANCE)

N° 27

séminaire

d'algèbre non commutative

(1973)

(Publications mathématiques d'Orsay)

SEMINAIRE D'ALGEBRE NON COMMUTATIVE

Année 1972/1973

-:-:- 1ère PARTIE -:-:-

-:-:-:-

TABLE DES MATIERES

-:-:-:-:-:-:-:-:-:-

UNIVERSITE PARIS-SUD XI

CENTRE D'ORSAY

SEMINAIRE D'ALGEBRE NON COMMUTATIVE

Conférence n° 1 du 6 Novembre 1972

-:-:-:-:-:-:-:-

SUR LES ANNEAUX ARITHMETIQUES

par Habib ACHKAR
(boursier du CNRS libanais)

-:-:-:-

INTRODUCTION.

Les anneaux arithmétiques furent introduits par Fuchs [IV] en 1949. Jensen [V, VI, VII] a étudié en détail les cas commutatifs et commutatifs intègres. Behrens [II] a traité récemment les anneaux arithmétiques comme cas particulier de la théorie des anneaux distributifs. Dans cet exposé, nous rappelons les principaux résultats de ces différentes études, et nous démontrons certains résultats personnels, en particulier l'équivalence, dans le cas commutatif intègre, entre les anneaux arithmétiques et les anneaux de Prüfer.

§ 1. DEFINITIONS. NOTATIONS. GENERALITES.

Dans tout l'exposé les anneaux considérés sont supposés unitaires. A désigne un anneau non nécessairement commutatif. L'ensemble des idéaux à gauche (resp. à droite, resp. bilatères) de A ordonné par la relation d'inclusion $\subseteq$ des ensembles, est un treillis qu'on notera $\mathfrak{J}_g(A)$ (resp. $\mathfrak{J}_d(A)$, resp. $\mathfrak{J}(A)$) ; en effet la borne inférieure de deux idéaux à gauche est leur intersection qui est aussi idéal à gauche ; et la borne supérieure de deux idéaux à gauche est leur somme. Il en est de même des idéaux à droite ou des idéaux bilatères.

$\mathfrak{I}_g(A)$[resp. $\mathfrak{I}_d(A)$, resp. $\mathfrak{I}(A)$] est un *treillis complet* ;son plus petit élément est (o) et le plus grand est A lui-même.

Rappelons qu'un treillis T est dit *modulaire* si quelque soient les éléments x,y et z dans T on a :

$$x \leqslant y \Longrightarrow x \vee (y \wedge z) = y \wedge (x \vee z) .$$

T est dit *distributif* s'il vérifie une des deux propriétés équivalentes :

$$(D_1)\ \forall x, \forall y, \forall z \in T\ ,\ x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$$

$$(D_2)\ \forall x, \forall t, \forall z \in T\ ,\ x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z) .$$

T est dit *brouwerien* ou *relativement pseudo-complémenté* si pour tout couple d'éléments a et b dans T , l'ensemble des éléments x de T tels que $a \wedge x \leqslant b$ contient un plus grand élément noté $a * b$.

1.1. PROPOSITION : Tout treillis brouwerien est distributif.

Pour la démonstration cf. [I].

Si nous considérons $\mathfrak{I}_g(A)$ [resp. $\mathfrak{I}_d(A)$,resp $\mathfrak{I}(A)$] , nous avons la propriété suivante facile à prouver :

1.2. PROPOSITION : $\mathfrak{I}_g(A)$ [resp. $\mathfrak{I}_d(A)$, resp $\mathfrak{I}(A)$] est un treillis modulaire. Mais $\mathfrak{I}_g(A)$ [resp. $\mathfrak{I}_d(A)$, resp. $\mathfrak{I}(A)$] n'est pas toujours distributif.

En effet :

Si $A = R[x,y]$, anneau des polynômes à deux indéterminées et à coefficients dans le corps des réels R ; A est commutatif, considérons alors les trois idéaux principaux $I = (x-y)$, $J = (x)$ et $K = (y)$; on prouvera facilement que $I \cap (J+K)$ est différent de $(I \cap J)+(I \cap K)$.

1.3. DEFINITION : Un anneau A *est dit arithmétique (resp. arithmétique à gauche, resp. arithmétique à droite) si et seulement si $\mathfrak{I}(A)$[resp. $\mathfrak{I}_g(A)$, resp. $\mathfrak{I}_d(A)$] est distributif.*

D'après cette définition un anneau arithmétique d'un côté est arithmétique. Mais la réciproque n'est pas vraie, en effet un anneau simple non commutatif est toujours arithmétique mais non nécessairement arithmétique à gauche ou à droite.

D'après la même définition, si I, J et K sont des idéaux à gauche (resp. à droite, resp. bilatères) d'un anneau arithmétique à gauche (resp. à droite, resp. arithmétique), on a :

$$I \cap (J+K) = (I \cap J)+(I \cap K)$$

et

$$I+(J \cap K) = (I+J) \cap (I+K) .$$

Nous pouvons démontrer par récurrence, à partir des deux dernières propriétés, les propriétés de la <u>distributivité finie</u> :

$$I \cap \left(\sum_{i=1}^{n} J_i \right) = \sum_{i=1}^{n} (I \cap J_i)$$

et

$$I+\left(\bigcap_{i=1}^{n} J_i \right) = \bigcap_{i=1}^{n} (I+J_i) .$$

D'après la définition de $\left(\sum_{\alpha} J_\alpha\right)$ somme infinie d'idéaux, nous pouvons d'après ce qui précède, prouver la <u>distributivité infinie</u> :

$$I \cap \left(\sum_{\alpha} J_\alpha\right) = \sum_{\alpha} (I \cap J_\alpha) .$$

<u>1.4. THEOREME</u> : <u>Les trois assertions suivantes sont équivalentes</u> :

(i) A <u>est un anneau arithmétique à gauche.</u>

(ii) <u>Quelque soient les idéaux à gauche de type fini</u> I, J <u>et</u> K :

$$I \cap (J+K) = (I \cap J)+(I \cap K) .$$

(iii) <u>Quelque soient les idéaux à gauche</u> Aa, Ab, Ac, <u>principaux</u> :

$$Aa \cap (Ab+Ac) = (Aa \cap Ab)+(Aa \cap Ac) .$$

Démonstration :

(i) $\Longrightarrow$ (ii) $\Longrightarrow$ (iii) : évident.

(iii) $\Longrightarrow$ (i) : en effet; soient I, J et K trois idéaux à gauche quelconque ; on a toujours $I \cap (J+K) \supseteq (I \cap J)+(I \cap K)$.

Soit maintenant x dans $I \cap (J+K)$; $x = a = b+c$, où $a \in I$, $b \in J$ et $c \in K$. D'après (iii) on a :

$$Aa \cap (Ab+Ac) = (Aa \cap Ab)+(Aa \cap Ac)$$

x étant dans le premier membre est donc dans le second ;

$x \in (Aa \cap Ab)+(Aa \cap Ac) \subseteq (I \cap J)+(I \cap K)$, parce que $Aa \subseteq I$, $Ac \subseteq J$ et $Ac \subseteq K$. Donc $I \cap (J+K) \subseteq (I \cap J)+(I \cap K)$; par suite nous avons l'égalité, et alors $\mathfrak{I}_g(A)$ est distributif.

§ 2. ANNEAUX ARITHMETIQUES. CAS GENERAL.

Dans ce paragraphe A désigne un anneau non nécessairement commutatif ni intègre. Les différentes propriétés que nous établissons pour les anneaux arithmétiques à gauche peuvent être énoncées d'une manière semblable pour les anneaux arithmétiques ou arithmétiques à droite.

2.1. THEOREME CHINOIS. : Soit un système fini de congruences dans un anneau A :

$$a \equiv a_i \pmod{I_i} \quad i = 1,\dots,n ,$$

où $\forall i \in (1,\dots,n)$, $I_i \in \mathfrak{I}_g(A)$. Une condition nécessaire pour que ce système ait une solution dans A est : $a_i \equiv a_j \pmod{I_i+I_j}$ pour $i \neq j$; cette condition exprime en effet la compatibilité du système. Si pour tout système fini, cette condition est suffisante pour l'existence d'une solution, nous dirons que l'anneau A vérifie le théorème chinois. Nous avons prouvé dans [1] que cette propriété caractérise les anneaux arithmétiques à gauche :

A est arithmétique à gauche si et seulement si il vérifie le théorème chinois.

2.2. PROPOSITION : Si A est un anneau arithmétique à gauche, tout anneau quotient de A par un idéal bilatère I est arithmétique à gauche.

En effet, $\mathcal{T}_g(A/_I)$ est isomorphe au sous-treillis distributif des idéaux de A contenant I.

2.3. PROPOSITION : Si quelque soient les idéaux à gauche I et J, $IJ = I \cap J$, alors A est arithmétique à gauche.

En effet, nous aurons alors $I \cap (J+K) = I(J+K) = IJ+IK = (I \cap J)+(I \cap K)$.

2.4. PROPOSITION : Si A est arithmétique à gauche, $\mathcal{T}_g(A)$ est relativement pseudo-complémenté.

Pour la démonstration cf [1].

Or, d'après la proposition 1.1. la réciproque est vraie, donc :

A est arithmétique à gauche $\Longleftrightarrow$ $\mathcal{T}_g(A)$ est relativement pseudo-complémenté.

Rappelons aussi le résultat suivant : [I] :

2.5. THEOREME : A est arithmétique à gauche si et seulement si les idéaux à gauche $\cap$-irréductibles de A sont fortement $\cap$-irréductibles.

2.6. Exemples et cas particuliers.

2.6.1. THEOREME : Un anneau primitif et arithmétique à gauche est un corps.

Ce théorème démontré dans [I] entraîne comme corollaire :

2.6.2. COROLLAIRE : Un anneau semi-simple et arithmétique à gauche est isomorphe à une somme sous-directe de corps.

En effet, un anneau semi-simple et arithmétique à gauche est isomorphe à une somme sous-directe d'anneaux primitifs, chacun étant arithmétique à gauche (prop. 2.2.).

2.6.3. PROPOSITION : Tout anneau *régulier* est arithmétique.

En effet dans un anneau A régulier, si I et J sont deux idéaux bilatères, $IJ = I \cap J$; parce que si a est dans $I \cap J$, il existe x dans A tel que $a = axa$. Comme xa est dans J, $a \in IJ$. Par suite $I \cap J \subseteq IJ$; comme l'inclusion inverse est toujours vraie nous déduisons l'égalité. La proposition 2.3. permettra alors de conclure.

2.6.4. COROLLAIRE : Tout anneau *f-régulier* (*faiblement régulier, bi-régulier*) est arithmétique.

2.6.5. Remarques : a) un anneau arithmétique n'est pas nécessairement régulier. En effet $\mathbb{Z}$ est arithmétique mais n'est pas régulier.

b) Un anneau *régulier réduit* est arithmétique, arithmétique à gauche et à droite ; en effet tout idéal d'un côté dans un anneau régulier réduit est bilatère.

2.6.6. PROPOSITION : Si $\mathfrak{I}(A)$ [resp. $\mathfrak{I}_g(A)$, resp. $\mathfrak{I}_d(A)$] est totalement ordonné, alors A est arithmétique (arithmétique à gauche, arithmétique à droite).

2.6.7. THEOREME : A étant un anneau *local*, les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) A est arithmétique à gauche.

(ii) Tout idéal à gauche de type fini de A est principal.

(iii) Tout idéal à gauche engendré par deux éléments est principal.

(iv) $\mathfrak{I}_g(A)$ est totalement ordonné par inclusion.

(v) L'ensemble des idéaux à gauche principaux est totalement ordonné.

Démonstration :

Dans tout anneau local les quatre dernières propriétés sont équivalentes [I]. Elles entraînent certainement que A est arithmétique à gauche.

Réciproquement, si A est local et arithmétique à gauche nous avons :

$$\forall a, \forall b \in A \qquad Aa = Aa \cap [Ab+A(a-b)] = (Aa \cap Ab)+[Aa \cap A(a-b)]$$

d'où : $\quad a = t+c(a-b)$ où $t \in Aa \cap Ab$ et $cb \in Aa$.

Si c est inversible, b appartient à Aa et alors $Ab \subset Aa$.

Si c est non inversible, $1-c$ est nécessairement inversible parce que A est local. Donc $(1-c)a = t-cb \in Ab$ entraîne que a est dans Ab ; donc $Aa \subset Ab$. Par suite (v) est vérifié.

Lafon [IX] appelle anneau local arithmétique à gauche (resp. à droite) un anneau qui vérifie une des propriétés équivalentes du théorème ci-dessus. Cette définition est compatible avec celle plus générale que nous donnons des anneaux arithmétiques à gauche.

2.6.8. Remarques :

a) Un anneau régulier n'est pas nécessairement arithmétique à gauche ou à droite.

b) Un anneau à idéaux à gauche principaux n'est pas nécessairement arithmétique à gauche.

En effet, l'anneau des matrices carrées $M_2(K)$ à éléments dans un anneau de division, et d'ordre 2, est régulier ; en plus, tous ses idéaux à gauche sont principaux ; mais $M_2(K)$ n'est pas arithmétique à gauche parce que s'il l'était, $M_2(K)$ serait corps d'après 2.6.1. Ce qui n'est pas vrai.

§ 3. ANNEAUX ARITHMETIQUES COMMUTATIFS.

Dans tout le paragraphe A désigne un anneau unitaire commutatif non nécessairement intègre. Nous notons $\mathfrak{I}(A)$ le treillis des idéaux de A .

Rappelons que si S est un système multiplicatif de A , ne contenant pas 0 , et contenant 1 , A_S désigne l'anneau des fractions de A relativement à S . Si P est un idéal premier ou maximal de A , on notera A_P l'anneau de des fractions de A relativement à $A-P$ qui est un système multiplicatif. Dans ce cas nous noterons IA_P l'extension d'un idéal I de A à l'anneau A_P. Rappelons que A_P est local, et qu'il existe une bijection entre les idéaux premier (resp. primaires) de A contenus dans P et les idéaux premiers (resp. primaires de A_P. PA_P est l'unique idéal maximal de A_P. [cf. X].

D'autre part si quelque soit l'idéal maximal M de A, $IA_M = JA_M$ alors $I = J$. Ce qui revient à dire qu'un idéal de A est déterminé de manière unique par ses composants locaux (IA_M) où M parcourt l'ensemble des idéaux maximaux.

3.1. PROPOSITION : Si A est arithmétique, pour tout système multiplicatif S, A_S est arithmétique.

3.2. THEOREME : Un anneau A est arithmétique si et seulement si pour tout idéal maximal M de A, $\mathfrak{I}(A_M)$ est totalement ordonné.

Démonstration : A_M est local et arithmétique si A est arithmétique (proposition 3.1.). D'après 2.6.7. $\mathfrak{I}(A_M)$ est totalement ordonné.

Réciproquement si $\mathfrak{I}(A_M)$ est totalement ordonné alors il est distributif. Ceci permettra de démontrer la distributivité de $\mathfrak{I}(A)$ parce que l'homomorphisme de A dans A_M conserve la somme et l'intersection des idéaux, et qu'en plus un idéal de A est déterminé uniquement par ses composants locaux.

Ce théorème fondamental caractérisant les anneaux arithmétiques permet d'établir les propriétés caractéristiques suivantes de ces anneaux. Elles se démontrent toutes à partir des propriétés de A_M et de l'homomorphisme canonique de A dans A_M qui respecte la somme, l'intersection des idéaux et le quotient par un idéal de type fini [I].

3.3. PROPRIETES CARACTERISTIQUES :

A est un anneau, les propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) A est arithmétique.

(ii) $\forall I,J,K \in \mathfrak{I}(A)$, K de type fini, $(I+J):K = I:K+J:K$.

(iii) $\forall I,J,K \in \mathfrak{I}(A)$, I et J de type fini: $K:(I \cap J) = K:I+K:J$.

(iv) $\forall I,J \in \mathfrak{I}(A)$, $I \subseteq J$, J de type fini $\Longrightarrow \exists K$ idéal tel que $I = JK$.

Le même théorème permet aussi d'établir certaines propriétés non nécessairement caractéristiques des anneaux arithmétiques.

3.4. THEOREME : Si A est arithmétique, I,J,K des idéaux de A , alors :

(i) $I(J \cap K) = IJ \cap IK$.

(ii) $(I+J)(I \cap J) = IJ$.

La propriété (ii) est une conséquence de (i) parce que si (i) est vérifié : $(I+J)(I \cap J) = (I+J)I \cap (I+J)J \supset IJ$; comme l'inclusion inverse est vraie dans tout anneau commutatif, nous déduisons l'égalité (ii).

Comme les idéaux premiers de A_M sont en correspondance biunivoque avec les idéaux premiers de A contenus dans M , le théorème fondamental 3.2. entraîne que dans un anneau arithmétique ces derniers idéaux sont totalement ordonnés. D'où :

3.5. COROLLAIRE : Si A est un anneau arithmétique, P_1 et P_2 deux idéaux premiers de A non comparables, alors P_1 et P_2 sont comaximaux ou étrangers.

En effet sinon, P_1 et P_2 sont contenus dans un idéal maximal et sont donc nécessairement comparables.

Remarquons que dans les deux cas $P_1+P_2 = A$.

Cette propriété permet d'énoncer :

3.6. PROPOSITION : Dans un anneau arithmétique A , deux éléments premiers a et b qui ne divisent pas l'un l'autre sont premiers entre eux ; c'est-à-dire, il existe λ et μ dans A tels que $\lambda a+\mu b = 1$.

3.7. EXEMPLES : Le théorème fondamental 3.2. et les propriétés caractéristiques permettent de déduire :

3.7.1. PROPOSITION :

(i) Un anneau régulier est arithmétique.

(ii) Un anneau semi-héréditaire est arithmétique.

(iii) Un anneau de multiplication est arithmétique.

En effet, si A est régulier, A_M est un corps, d'où (i).
Si A est semi-héréditaire, d'après le théorème d'Endo [III] A_M est un anneau de valuation, quelque soit M ; par suite $\mathfrak{I}(A_M)$ est totalement ordonné ; d'où (ii) . Quant à (iii) c'est une conséquence immédiate de la propriété (iv) de la proposition 3.3.

D'autre part, nous pouvons à partir de la définition, énoncer :

3.7.2. PROPOSITION :

(i) Un anneau quasi-bezoutien (tout idéal de type fini est principal) est arithmétique.

(ii) Un anneau quasi-principal (tout idéal est principal) est arithmétique.

(iii) Un anneau où tout idéal est produit fini d'idéaux premiers est arithmétique.

On peut démontrer directement que (i) entraîne A est arithmétique : Soient trois idéaux principaux Aa, Ab et Ac de A ; nous avons toujours :

$$Aa \cap (Ab+Ac) \supset (Aa \cap Ab)+(Aa \cap Ac) .$$

D'autre part si A est quasi-bézoutien (resp. quasi-principal) $Ab+Ac = Ad$;

soit $d = \lambda b+\mu c \quad b = \lambda_1 d \quad c = \mu_1 d$; où $\lambda, \mu, \lambda_1, \mu_1 \in A$.

Soit $x \in Aa \cap Ad$, donc $x = ya = zd$, y et z dans A. D'où $x = z\lambda b+z\mu c$ $z\lambda b = z\lambda\lambda_1 d = \lambda\lambda_1 zd = \lambda\lambda_1 ya$, donc $z\lambda b \in Aa \cap Ab$; de même $z\mu c \in Aa \cap Ac$; et donc $x \in (Aa \cap Ab)+(Aa \cap Ac)$; et par suite $Aa \cap (Ab+Ac) = (Aa \cap Ab)+(Aa \cap Ac)$. D'après le théorème 1.4. $\mathfrak{I}(A)$ est distributif. A est donc arithmétique.

Quant à (iii) la démonstration est simple, voir Samuel-Zariski [X].

§ 4. ANNEAUX ARITHMETIQUES COMMUTATIFS ET INTEGRES.

A désigne un anneau unitaire commutatif et intègre et T son corps des fractions. Rappelons qu'un <u>idéal fractionnaire de A</u> est un sous-A-module F de T tel que $dF \subseteq A$ pour un élément $d \neq 0$ de A. La somme et l'intersection de deux idéaux fractionnaires F_1 et F_2 sont aussi des idéaux fractionnaires. Il en est de même du quotient $[F_1:F_2]$, ensemble des éléments x de T tels que $xF_2 \subseteq F_1$. Pour les distinguer, les idéaux dans A, c'est-à-dire de $\mathfrak{I}(A)$, seront dits <u>idéaux entiers de A</u>. Un idéal fractionnaire F est <u>inversible</u> si et seulement si il existe F' tel que $FF' = A$; alors F' est un idéal fractionnaire et $F' = [A:F]$. <u>Si F est inversible il est de type fini.</u>

Rappelons qu'un anneau <u>de Prüfer</u> est un anneau commutatif intègre où tout idéal non nul de type fini est inversible.- (il est équivalent de dire : tout idéal entier non nul est inversible ou tout idéal fractionnaire non nul est inversible). Kaplansky [VIII] montre que A est de Prüfer si et seulement si, quelque soit M idéal maximal de A, A_M est un anneau <u>de valuation</u>. D'où :

<u>4.1.</u> <u>THEOREME</u> : <u>A est arithmétique si et seulement si A est de Prüfer.</u>

En effet, le théorème 3.2. appliqué au cas intègre permet de conclure, parce que un anneau de valuation est un anneau intègre à idéaux comparables.

4.2. REMARQUE : Sans faire appel au théorème de Kaplansky, on peut prouver le théorème précédent. En effet si A est arithmétique intègre, et I un idéal non nul de type fini de A, et a dans I ; alors $(a) \subset I$; d'après 3.3.(iv), il existe un idéal J de A tel que $(a) = IJ$; d'où $A = (a)(a^{-1}) = IJ(a^{-1}) = II'$; I est donc inversible.

Réciproquement, si A est de Prüfer et $I \subset J$ où I et J sont des idéaux de A et J de type fini, alors $I = JJ^{-1}I = J(J^{-1}I) = JK$: et A est arithmétique.

4.3. Démonstration directe de l'équivalence entre "A est arithmétique" et "A est de Prüfer".

A) A est un anneau commutatif intègre arithmétique, alors :

PROPRIETE 1 : Quelque soient Aa, Ab et Ac idéaux principaux de A :

$$Aa.(Ab \cap Ac) = (Aa.Ab) \cap (Aa.Ac) .$$

En effet dans un sens l'inclusion est toujours vraie. Soit maintenant x dans le second membre, $x = \lambda ab = \mu ac$; d'où $\lambda b = \mu c$; donc $\lambda b \in Ab \cap Ac$ et par suite $x = a.\lambda b \in Aa(Ab \cap Ac)$; d'où l'égalité ci-dessus.

PROPRIETE 2 : $\forall a,b \in A$, $Aab \subseteq Aa^2+Ab^2$.

En effet, d'après 2.6.7., quelque soient a,b d'un anneau arithmétique a s'écrit : $a = t+c(a-b)$ où $t \in Aa \cap Ab$ et $cb \in Aa$.

Par suite, $ab = tb+cb(a-b) = (tb-cb^2)+cba$; où $tb-cb^2 \in Ab^2$ et $cba \in Aa^2$. Par suite $Aab \subseteq Aa^2+Ab^2$.

PROPRIETE 3 : $\forall a,b$ dans A : $(Aa+Ab)(Aa \cap Ab) = Aab$.

En effet $(Aa+Ab)(Aa \cap Ab) = Aa(Aa \cap Ab)+Ab(Aa \cap Ab) = (Aa^2 \cap Aab)+(Ab^2 \cap Aab)$ d'après la propriété 1; et donc $(Aa+Ab)(Aa \cap Ab) = Aab \cap (Aa^2+Ab^2)$ parce que A est arithmétique. D'après la propriété 2, on déduit la propriété 3.

PROPRIETE 4 : Tout idéal engendré par deux éléments est inversible.

En effet, d'après la propriété 3 $(Aa+Ab)(Aa \cap Ab)Aa^{-1}b^{-1} = A$; par suite :

$\underline{(Aa+Ab)^{-1}} = (Aa \cap Ab)Aa^{-1}b^{-1} = \underline{Aa^{-1} \cap Ab^{-1}}$ d'après la propriété 1.

Par suite tout idéal de type fini non nul est inversible ; la démonstration de cette propriété se fait par récurrence [I, lemme IV.2.2.]. Et alors A est un anneau de Prüfer.

B) A est un anneau de Prüfer, alors :

PROPRIETE 1 : Quelque soient I,J,K idéaux de type fini de A,

$I(J \cap K) = IJ \cap IK$.

En effet, on a toujours $I(J \cap K) \subset IJ \cap IK$. Si, réciproquement, $x \in IJ \cap IK$ alors $x \in IJ$ et $x \in IK$; xI^{-1} est donc inclus dans J et dans K, et par suite dans $J \cap K$; en conclusion $x \in I(J \cap K)$. D'où la propriété 1.

PROPRIETE 2 : Quelque soient I et J idéaux de type fini $(I+J)(I \cap J) = IJ$.

Dans un sens l'inclusion est toujours vraie.

Dans l'autre $(I+J)(I \cap J) = I(I \cap J)+J(I \cap J) = (I^2 \cap IJ)+(JI \cap J^2) \supset IJ$.

PROPRIETE 3 : Si I,J,K sont trois idéaux tels que $IJ = IK$; I de type fini $\Longrightarrow J = K$.

En effet, I est inversible, par suite $I^{-1}IJ = I^{-1}IK$, d'où $J = AJ = AK = K$.

PROPRIETE 4 : Quelque soient Aa, Ab, Ac idéaux principaux de A :

$$Aa \cap (Ab+Ac) = (Aa \cap Ab)+(Aa \cap Ac).$$

En effet, si nous posons $I = Aa+Ab+Ac$, I est de type fini, donc inversible. Soit : $I[Aa \cap (Ab+Ac)] = Aa.(Ab+Ac) = Aa.Ab+Aa.Ac = Aab+Aac$.

D'autre part :

$$I[(Aa \cap Ab)+(Aa \cap Ac)] = I(Aa \cap Ab)+I(Aa \cap Ac) = (Aa+Ab)(Aa \cap Ab)$$
$$+Ac(Aa \cap Ab)+(Aa+Ac)(Aa \cap Ac)+Ab(Aa \cap Ac) = Aab+Aac$$
$$+Ac(Aa \cap Ab)+Ab(Aa \cap Ac) \text{ ; or } Ac(Aa \cap Ab) = Aac \cap Abc \subset Aac \text{ ;}$$

et $Ab(Aa \cap Ac) \subset Aab$. Et par suite,

$$I[(Aa \cap Ab)+(Aa \cap Ac)] = Aab+Aac = I[Aa \cap (Ab+Ac)] \text{ .}$$

La propriété 3 permet de conclure.

Par suite $\mathfrak{J}(A)$ est distributif (théorème 1.4.), et A est arithmétique.

4.4. EXEMPLES : D'après les propriétés ci-dessus et celles du paragraphe précé précédent, nous avons :

(i) Un anneau de valuation est arithmétique.

(ii) Un anneau de Bezout est arithmétique.

(iii) Un anneau principal est arithmétique.

(iv) Un anneau de Dedekind est arithmétique.

(i) est vraie et sa réciproque est valable dans le cas d'un anneau local (2.6.7.).

(ii) est vraie et sa réciproque est valable dans le cas d'un anneau semi-local [I] .

(iii) est vraie et sa réciproque est valable dans le cas d'un anneau à factorisation unique [I] .

(iv) est vraie et sa réciproque est valable dans le cas d'un anneau noethérien parce que un anneau de Dedekind est caractérisé par le fait que tout idéal y est inversible. De même on a :

(v) <u>Un anneau intègre est semi-héréditaire si et seulement si il est arithmétique.</u>

BIBLIOGRAPHIE

[I] ACHKAR, Thèse de 3ème Cycle. Orsay, 1972.

[II] BEHRENS, Ring Theory, 1972.

[III] ENDO, On semi-hereditary rings (J. Math. Soc. Japan. 13(1961), pp. 109-114).

[IV] FUCHS, Über die Ideale arithmetischer ringe (Comment. Math. Helv. 23(1949), pp. 330-339).

[V] JENSEN, On characterization of Prüfer rings (Proc. Amer. Math. Scand. 13(1963), pp. 90-98).

[VI] JENSEN, A remark on arithmetical rings (Proc. Amer. Math. Soc. 15(1964), pp. 951-954).

[VII] JENSEN, Arithmetical rings(Acta. Math. Acad. Sci. Hungar, 17(1966), pp. 115-123).

[VIII] KAPLANSKY, Commutative rings. Boston, Allyn and Bacon, 1970.

[IX] LAFON, Anneaux locaux commutatifs sur lesquels tout module de type fini est somme directe de modules monogènes (J. Algebra, 17(1971),575).

[X] SAMUEL-ZARISKI, Commutative Algebra, tome 1. London 58.

-:-:-:-:-:-:-

UNIVERSITE DE PARIS-SUD

CENTRE D'ORSAY

SEMINAIRE D'ALGEBRE NON COMMUTATIVE

Conférence n° 2 du Lundi 13.11.72

UN THEOREME DE JORDAN-HÖLDER POUR LES MODULES DE DEVIATION ENTIERE.

par Benoît LEMONNIER(1)

-:-:-:-:-:-

On démontre un théorème de Jordan-Hölder pour les modules de déviation entière n dont les sous-modules D_n-fermés vérifient la condition maximale. On précise quand il est possible de trouver une suite de n-composition dont les types se présentent dans un ordre donné à l'avance ; cette situation est celle des anneaux commutatifs de déviation n.

Soient L une sous-catégorie localisante ([1]) et p un entier. On notera $T_p(M)$ ou T_p (resp. T_L) l'ensemble, ordonné par inclusion, des sous-modules D_p-fermés ([3]) (resp. L-fermés) du module M, et par $X^{(p)}$ (resp. $\bar{X}$) la D_p-fermeture (resp. la L-fermeture) de X dans M.

LEMME 1. T_L est un treillis complet et modulaire.

Soient $X, Y, Z \in T_L$ avec $X \subseteq Y$. L'exactitude de la suite $0 \to Y \cap (\overline{X+Z})/Y \cap (X+Z) \to \overline{X+Z}/X+Z$ montre que $Y \cap (\overline{X+Z}) = \overline{X+Y \cap Z}$; T_L est donc modulaire.

PROPOSITION 2. Si M est un module de déviation entière n et p un entier $\leqslant n$, alors $\text{dév}\, T_p = n-p$.

(1) Il s'agit d'un exposé présentant les résultats et les démonstrations d'une note parue aux C.R. de l'Acad. Sci. Paris (fin 1972).

T_n est artinien, donc dév $T_n = 0$. Supposons $p < n$. D'après ([4], C. 13') M possède une suite strictement décroissante de sous-modules (X_α), $\alpha \in [0,\omega(n)[$. Soit Δ_{n-p} l'ensemble des $\alpha \in [0,\omega(n)[$ qui s'écrivent sous la forme $\alpha = k_{n-1}\omega(n-1) + \ldots + k_{p+1}\omega(p+1) + k_p\omega(p)$ ([4], P. 12). On définit une bijection croissante θ de Δ_{n-p} sur $[0,\omega(n-p)[$ en posant :

$$\theta(\alpha) = k_{n-1}\omega(n-p-1) + \ldots + k_{p+1}\omega(1) + k_p .$$

Si $\alpha, \beta \in \Delta_{n-p}$ et $\alpha < \beta$, alors dév$(X_\alpha/X_\beta) \geqslant p$, donc $X_\beta^{(p)} \neq X_\alpha^{(p)}$ ([2], P. 9). L'application $\alpha \in \Delta_{n-p} \to X_\alpha^{(p)} \in T_p$ est donc strictement décroissante, d'où dév $T_p \geqslant n-p$.

Montrons que dév $T_p \leqslant n-p$. Sinon il existerait une suite strictement décroissante (Y_α), $\alpha \in [0,\omega(n-p-1[$, de sous-modules D_p-fermés de M. Puisque dév $Y_\alpha/Y_{\alpha+1} \geqslant p$, $]Y_{\alpha+1}, Y_\alpha[$ contient une suite strictement décroissante $(Z_{\alpha,\beta})$, $\beta \in [0,\omega(p)[$. Par construction $Z_{\alpha',\beta'} \subset Z_{\alpha,\beta}$ équivaut à $\alpha < \alpha'$ ou $\alpha = \alpha'$ et $\beta < \beta'$. L'ensemble E des $Y_{\alpha,\beta}$ ordonné par inclusion, est donc isomorphe au produit lexicographique $[0,\omega(n-p+1)[^\circ \times [0,\omega(p)[^\circ$, d'où dév $E = n+1$ ([4], P. 8) ce qui contredit dév $M = n$.

Si M est un module de déviation n, le treillis $T_n(M)$ est artinien ; il possède donc une chaîne maximale de longueur finie si et seulement s'il est noethérien ; ces chaînes ont alors toutes même longueur ([5], P. 88).

<u>DEFINITION 1.</u> On appelle <u>suite de n-composition</u> d'un module M toute chaîne maximale de longueur finie de $T_n(M)$; la longueur de ces chaînes est appelée <u>n-longueur</u> de M (notée n-long M).

<u>PROPOSITION 3.</u> <u>Soit</u> (X_i), $0 \leqslant i \leqslant h$, <u>une suite strictement croissante de sous-modules d'un module</u> M <u>de déviation définie. Les conditions suivantes sont équivalentes</u> :

a) (X_i), $0 \leqslant i \leqslant h$, <u>est une suite de n-composition de M</u> ;

b) 1) $X_h = M$; 2) dév $X_o < n$ <u>ou</u> $X_o = 0$; 3) X_{i+1}/X_i <u>est n-notable</u> ([2]) <u>pour</u> $0 \leqslant i \leqslant h-1$.

a) $\Longrightarrow$ b). Nécessairement $X_h = M$, $X_o = D_n(M)$ d'où dév $X_o < n$ ([2], P.9.). Pour $X_i \subset Z \subset X_{i+1}$, $Z^{(n)} = X_{i+1}$ puisque (X_i) est une chaîne maximale de $T_n(M)$ donc X_{i+1}/X_i est n-notable, $0 \leqslant i \leqslant h-1$.

b) $\Longrightarrow$ a). X_i est D_n-fermé dans X_{i+1} , X_i est donc D_n-fermé dans $X_n = M$; $]X_i, X_{i+1}[= \emptyset$ dans $T_n(M)$ et 1) montre que $X_o = D_n(M)$.

Signalons que ([3], P.7) est erronée et doit être remplacée par la

<u>PROPOSITION 4.</u> <u>Soit</u> A <u>un anneau commutatif de déviation</u> n $(n \in \mathbb{N})$. <u>L'anneau</u> B <u>localisé de</u> A <u>par rapport à</u> D_n <u>(au sens de</u> [1]) <u>coïncide avec l'anneau de fractions de</u> A <u>par rapport au semi-groupe multiplicatif</u> $S = \{s \in A \mid \text{dév } A/As < n\}$. B <u>est artinien</u>.

Il s'ensuit que $T_n(A)$ est noethérien, d'où la

<u>PROPOSITION 5.</u> <u>Tout anneau commutatif de déviation entière</u> n <u>possède une suite de n-composition.</u>

On note $E(X)$ une enveloppe injective du module X .

<u>DEFINITION 2.</u> Si (X_i), $0 \leqslant i \leqslant h$, et (Y_j), $0 \leqslant j \leqslant k$, sont deux suites de n-composition de deux modules M et N , elles seront dites <u>équivalentes</u> si $h = k$ et s'il existe une permutation θ de $[0, h-1]$ telle que $E(Y_{i+1}/Y_i)$ soit isomorphe à $E(X_{\theta(i)+1}/X_{\theta(i)})$.

Le théorème qui suit donne, quand $n = 0$, le théorème de Jordan-Hölder pour les modules.

<u>THEOREME 6.</u> <u>Soit</u> M <u>un module de déviation</u> n $(n \in \mathbb{N})$ <u>dont l'ensemble des sous-modules</u> D_n<u>-fermés est noethérien. Alors deux suites de n-composition de M sont équivalentes.</u>

Soient (X_i) et (Y_i), $0 \leqslant i \leqslant h$, deux suites de n-composition de M. On raisonne par récurrence sur h. Posons $U_i = (Y_{i+1} \cap X_{h-1})/(Y_i \cap X_{h-1})$. Puisque n-long $X_{h-1} = h-1$, il existe un entier q unique tel que $U_q = 0$ ($U_i \neq 0 \Longrightarrow U_i$ n-notable). Par hypothèse il existe une bijection $\theta' : [0, h-1] \setminus \{q\} \to [0, h-2]$ telle que $E(U_j) \approx E(X_{\theta'(j)+1}/X_{\theta'(j)})$. L'exactitude de $0 \to U_j \to Y_{j+1}/Y_j$ montre que $E(U_j) \approx E(Y_{j+1}/Y_j)$. Enfin $(Y_{q+1}+Y_{h-1})/(Y_q+X_{h-1})$, étant isomorphe à Y_{q+1}/Y_q, a pour déviation n, ce qui exige $Y_q+Y_{h-1} = X_{h-1}$; d'où $E(Y_{q+1}/Y_q) \approx E(X_h/X_{h-1})$. Il suffit de poser $\theta(i) = \theta'(i)$ pour $i \neq q$ et $\theta(q) = h-1$.

<u>LEMME 7.</u> <u>Si</u> M <u>est un module de déviation définie avec</u> $D_n(M) = 0$ ($n \in \mathbb{N}$) <u>et si</u> Z <u>est un sous-module</u> α-<u>notable de</u> M (α <u>est un ordinal</u> $\geqslant n$), <u>alors</u> $Z^{(n)}$ <u>est une extension essentielle de</u> Z <u>qui est encore</u> α-<u>notable</u>.

Soit $0 \neq X \subset Z^{(n)}$. Alors $X \cap Z \neq 0$ (sinon X est plongeable dans $Z^{(n)}/Z$ ce qui contredit $D_n(M) = 0$). Donc dév$(Z/Z \cap X) < \alpha$. Comme dév $Z^{(n)}/Z < n$ on obtient dév $Z^{(n)} = \alpha$ et dév $Z^{(n)}/X < \alpha$; ainsi $Z^{(n)}$ est α-notable et, par suite, coirréductible.

<u>LEMME 8.</u> <u>Soient</u> M <u>un module de déviation définie,</u> $0 \subset N_1 \subseteq N \subseteq M$ <u>où</u> 0 <u>est</u> D_n-<u>fermé dans</u> N <u>et</u> N_1 n-<u>notable. Alors</u> $N_1^{(n)}/0^{(n)}$ <u>est n-notable et</u> $E(N_1^{(n)}/0^{(n)}) \approx E(N_1)$.

Il est clair que $N_1^{(n)} = [N_1+0^{(n)}]^{(n)}$. 0 étant D_n-fermé dans N, $N \cap 0^{(n)} = 0$; donc $N_1 \approx (N_1+0^{(n)})/0^{(n)}$. Le lemme 7 conclut.

<u>PROPOSITION 9.</u> <u>Etant donné une suite exacte</u> $0 \to N \to M/N \to 0$ <u>où</u> M <u>est un module de déviation entière</u> n, <u>la relation</u> n-long M = n-long N + n-long M/N <u>a lieu dès que l'un de ses membres est défini.</u>

Soit p (resp. q) la n-longueur de N (resp. M/N). On obtient $0 \subseteq N_o \subset \dots \subset N_p = N \subseteq M_o \subset \dots \subset M_q = M$ où (N_i), $0 \leqslant i \leqslant p$, (resp. (M_j/N), $0 \leqslant j \leqslant q$) est une suite de n-composition de N (resp. de M/N). L.8. et P.3. montrent que $N_o^{(n)} \subset \dots \subset N_p^{(n)} = M_o \subset \dots \subset M_q = M$ est une suite de n-composition de M.

Dans toute la suite M est un module de déviation n qui admet une suite de n-composition (X_i), $0 \leqslant i \leqslant h$ $(h \geqslant 1)$. On note $t(X)$ le type de $E(X)$ où X est n-notable. On pose $t_i = t(X_{i+1}/X_i)$ et $t(M) = \{t(X_{i+1}/X_i) \mid 0 \leqslant i \leqslant h-1\}$ Quand dév $N < n$ ou $N = 0$, on pose $t(N) = \emptyset$. M est dit u-typique quand $t_i = u$ pour $0 \leqslant i \leqslant h-1$.

Du lemme 8 on déduit aussi la

PROPOSITION 10. Si N est un sous-module de M, $t(M) = t(N) \cup t(M/N)$.

La proposition 10 montre que

PROPOSITION 11. Si M contient un sous-module u-typique, M contient un sous-module, noté $M(u)$, maximum pour la propriété : être D_n-fermé et u-typique.

LEMME 12. Si $D_n(M) = 0$ et si X et Y sont deux sous-modules non nuls de M tels que $t(X) \cap t(Y) = \emptyset$, alors $X \cap Y = 0$.

Sinon X Y contient Z n-notable et $t(Z) \in t(X) \cap t(Y)$.

P. 13 répond à la question de savoir quand il est possible de trouver une suite de composition n-notable telle que ses types figurent dans un ordre donné à l'avance. On note $u_1, \dots, u_s$ les différents types appartenant à $t(M)$, $h_1, \dots, h_s$ leurs ordres de multiplicité respectifs $(h = h_1 + \dots + h_s)$. Alors

PROPOSITION 13. Les conditions suivantes sont équivalentes :

1) Pour toute permutation θ de $[0, h-1]$ il existe une suite de composition n-notable (Y_i), $0 \leqslant i \leqslant h$, de M, telle que $t(Y_{i+1}/Y_i) = t_{\theta(i)}$;

2) Dév $M/N < n$ où $N = \sum_{j=1}^{s} M(u_j)$ (voir P.11.) ;

3) Pour $j \in [1, s]$, n-long $M(u_j) = h_j$.

1) $\Longrightarrow$ 2). L'hypothèse montre que, pour $1 \leqslant j \leqslant s$, n-long $M(u_j) = h_j$. D'après le lemme 12, dans $\bar{M} = M/D_n(M)$ la somme des $\overline{M(u_j)}$ est directe donc (P.9.) n-long $N = h_1+\ldots+h_s$ = n-long M, d'où dév $M/N < n$. Enfin 3) $\Longleftrightarrow$ 2) $\Longrightarrow$ 1) se démontre facilement.

DEFINITION 3. On dira que les suites de n-composition de M sont libres quand les conditions de P.13 sont satisfaites.

LEMME 14. Soit A un anneau commutatif de déviation $n (n \in \mathbb{N})$ avec $D_n(A) = 0$; pour tout module n-notable X, A contient un idéal N tel que $t(N) = t(X)$.

Soit $\{P_1, \ldots, P_r\}$ l'ensemble des idéaux premiers P de A tels que dév $A/P = n$. Avec les notations de P.4., $B = S^{-1}A$ où $S = A \setminus \bigcup_1^r P_i$. B est un anneau artinien d'idéaux maximaux $R_i = S^{-1}P_i$. Soit $P_{i_o} = 0 :_A X$; $0 :_B R_{i_o} \neq 0$ donc l'annulateur I de P_{i_o} dans A n'est pas nul ; I contient un idéal n-notable N ([2], L.2, 1)), N répond à la question.

COROLLAIRE 15. Si A est un anneau commutatif de déviation entière n, les suites de n-composition de A sont libres.

BIBLIOGRAPHIE

[1] P. GABRIEL, Bull. Soc. Math. Fr. Vol. 90, 1962, pp. 323-448.

[2] B. LEMONNIER, Comptes rendus 274, Série A, 1972, p. 1688.

[3] B. LEMONNIER, Comptes rendus 275, Série A, 1972, p. 357.

[4] B. LEMONNIER, Bull. Sc. Math. 2e série, 96, 1972 (à paraître).

[5] M.L. DUBREIL-JACOTIN, L. LESIEUR et R. CROISOT, "Leçons sur la théorie des treillis...", Gauthier-Villars, PARIS, 1953.

-:-:-:-:-:-

UNIVERSITE PARIS-SUD XI

CENTRE D'ORSAY

SEMINAIRE D'ALGEBRE NON COMMUTATIVE

Conférence n° 3 du 27.11.72

-:-:-:-:-:-

PROPRIETES ALGEBRIQUES DES SERIES RATIONNELLES NON COMMUTATIVES.

par Michel FLIESS

-:-:-:-:-:-

INTRODUCTION.

Les séries formelles rationnelles en indéterminées associatives non commutatives ont été introduites, il y a treize ans, par M.P. SCHÜTZENBERGER en liaison avec la théorie des automates et des langages. Cependant, tant par leur problématique que par leurs résultats, elles se sont révélées un instrument naturel dans diverses autres branches, développements tayloriens des fonctions rationnelles et algébriques, processus aléatoires, et, bien entendu, algèbre non commutative (cf. [4]).

C'est à ce dernier aspect qu'est dévolu le présent exposé et ce, en liaison avec le récent livre de P.M. COHN [2]. Après quelques rappels de définitions et résultats généraux, nous étudions les propriétés de factorisation, les commutants, le plongement dans un corps gauche et, en appendice, les liens entre groupes libres et séries formelles.

I. RAPPELS.

Soient K un corps commutatif, X un ensemble fini non vide d'indéterminées. On note X^* le monoïde libre engendré par X , 1 son élément neutre, $K\langle X\rangle$ et $K\langle\langle X\rangle\rangle$ les anneaux des polynômes et des séries formelles en les indéterminées associatives non commutatives $x \in X(K\langle X\rangle$ est la K-algèbre associative libre engendrée par X). Un élément $s \in K\langle\langle X\rangle\rangle$ est noté :

$$s = \Sigma\{(s,f)f \mid f \in X^*\} .$$

s est inversible, si et seulement si son terme constant $(s,1)$ est non nul. Un sous-anneau $R \subset K\langle\langle X\rangle\rangle$ est dit rationnellement clos, si et seulement si l'inverse de tout élément inversible de R appartient encore à R.

L'anneau $K\langle(X)\rangle$ des séries rationnelles est le plus petit sous-anneau de $K\langle\langle X\rangle\rangle$, qui contienne $K\langle X\rangle$ et qui soit rationnellement clos.

Soit $K^{N_1 \times N_2}$ l'ensemble des matrices à N_1 lignes et N_2 colonnes et à coefficients dans K. Une représentation $\mu : X^* \to K^{N\times N}$ est un homomorphisme de X^* dans le monoïde multiplicatif formé par les matrices carrées de $K^{N\times N}$. On doit à SCHÜTZENBERGER le résultat fondamental suivant :

PROPOSITION 1.1. : Pour qu'une série $r \in K\langle\langle X\rangle\rangle$ soit rationnelle, il faut et il suffit qu'il existe un entier $N \geqslant 1$, une représentation $\mu : X^* \to K^{N\times N}$, des matrices ligne $\lambda \in K^{1\times N}$ et colonne $\gamma \in K^{N\times 1}$ tels que :

$$v = \Sigma\{(\lambda\mu f\gamma)f \mid f \in X^*\} .$$

Le produit d'Hadamard de deux séries $s_1, s_2 \in K\langle\langle X\rangle\rangle$ est la série :

$$s_1 \odot s_2 = \Sigma\{(s_1,f)(s_2,f)f \mid f \in X^*\} .$$

SCHÜTZENBERGER a montré :

PROPOSITION 1.2. : Le produit d'Hadamard de deux séries rationnelles est une série rationnelle.

Pour des compléments, voir [4].

II. FACTORISATION.

Un anneau unitaire intègre A, non nécessairement commutatif, est dit factoriel rigide (en anglais, rigid unique factorization domain, cf. Cohn ([2], p. 143)), si et seulement si tout élément non nul et non inversible $a \in A$ peut être mis sous la forme d'un produit $a = p_1, \dots, p_k$ d'éléments irréductibles appelés atomes et si, étant donnée une deuxième factorisation en atomes $a = p'_1, \dots, p'_{k'}$, il vient $k = k'$, $p_i = u^{-1}_{i-1} p'_i u_i$ $(i = 1, \dots, k)$ où $u_0, \dots, u_k$ sont des unités de A $(u_0 = u_k = 1)$. Cohn ([2], p. 130) a montré que $K\langle\langle X\rangle\rangle$

est factoriel rigide (voir aussi Johnson [6]) . Pour les propriétés de factorisation de $K\langle X\rangle$, voir Cohn ([2], chap. 3).

Un sous-anneau B de A est dit 1-<u>inerte</u> dans A (Cohn [1], p. 61), si $b \in B$, $b = a'a''$, $a', a'' \in A$ impliquent l'existence d'une unité $u \in A$ telle que $a'u$ et $u^{-1}a''$ appartiennent à B . Bergman et Tarassov (cf. Cohn ([2], p. 103)), ont prouvé que $K\langle X\rangle$ est 1-inerte dans $K\langle\langle X\rangle\rangle$ (en fait, on peut définir la notion d'inertie totale et prouver que $K\langle X\rangle$ est totalement inerte dans $K\langle\langle X\rangle\rangle$, cf. Cohn ([2], pp. 61 et 103)).

<u>LEMME 2.1.</u> : <u>Soient trois séries</u> r, r', r'' <u>de</u> $K\langle\langle X\rangle\rangle$ <u>liées par la relation</u> $r = r'r''$ <u>et dont deux sont rationnelles, alors, il en est de même de la troisième.</u>

<u>Preuve</u> : Il suffit de considérer le cas où r et r' sont rationnelles. Soit $f_o \in X^*$ un mot de longueur minimal tel que $(r', f_o) \neq 0$. A tout mot $w \in X^*$ faisons correspondre

$$\tau_{f_o} w = \begin{cases} w' & \text{si } w = f_o w' \\ 0 & \text{si } w \notin f_o X^* \end{cases}$$

τ_{f_o} se prolonge par linéarité en une application K-linéaire de $K\langle\langle X\rangle\rangle$ dans lui-même, qui est une <u>transduction polynômiale rationnelle</u> au sens de [4]. On en déduit que l'image par τ_{f_o} d'une série rationnelle est encore une série rationnelle. Appliquons τ_{f_o} aux deux membres de $r = r'r''$. D'après la propriété de minimalité f_o , on obtient l'égalité $r_1 = r_1'r''$, où $r_1 = \tau_{f_o} r$ et $r_1' = \tau_{f_o} r'$ sont rationnelles. r_1' étant inversible, $r'' = r r_1'^{-1}$ est rationnelle.

<u>PROPOSITION 2.2.</u> : $K\langle(X)\rangle$ <u>est 1-inerte dans</u> $K\langle\langle X\rangle\rangle$.

<u>Preuve</u> : Soit $r \in K\langle(X)\rangle$ telle que $r = ss'$ où $s, s' \in K\langle\langle X\rangle\rangle$. Soient $\sigma \in X^*$ de longueur minimale tel que $(s,\sigma) \neq 0$ et τ_σ la transduction polynômiale rationnelle définie comme précédemment. Appliquons τ_σ aux deux membres de $r = ss'$. Il vient $r_1 = s_1 s'$, où $r_1 = \tau_\sigma r$ et $s_1 = \tau_\sigma s$. Comme s_1 est inversible et $s_1 s' = r_1 = \tau_\sigma r$ est rationnelle, en vertu du lemme 5.1.1., ss_1^{-1} est rationnelle, puisque $r = (ss_1^{-1})(s_1 s')$.

PROPOSITION 2.3. : $K\langle(X)\rangle$ est factoriel rigide.

Preuve : Elle découle immédiatement du fait que $K\langle(X)\rangle$ est 1-inerte dans $K\langle\langle X\rangle\rangle$, qui est factoriel rigide.

On en déduit que $K\langle(X)\rangle$ est un 2-fir, mais l'on peut montrer davantage.

PROPOSITION 2.4.(1) : $K\langle(X)\rangle$ est un semi-fir.

Preuve : Soit une relation de la forme :

$$r_1r'_1+\ldots+r_nr'_n = 0$$

où $r_1,r'_1,\ldots,r'_n \in K\langle(X)\rangle$. Soit f_o un mot de longueur minimale tel qu'il existe un indice $i \in \{1,\ldots,n\}$ vérifiant $(r_i,f_o) \neq 0$. Appliquons τ_{f_o} aux deux membres de la relation ; de même que dans la preuve du lemme 2.1., on en déduit :

$$r'_i = \sum_{j\neq i} r_jr''_j$$

où $r''_j \in K\langle(X)\rangle$. La relation peut donc être trivialisée au sens de Cohn ([1], Chap. 1, § 1), ce qui prouve l'assertion.

III. COMMUTANT.

Les commutants, ou centralisateurs, c'est-à-dire les ensembles d'éléments qui commutent avec un élément donné, ont été étudiés, pour $K\langle\langle X\rangle\rangle$, par Cohn ([2], p. 244) et, pour $K\langle X\rangle$ par Bergman [1] (voir aussi Cohn ([2], p. 246)) : le commutant d'un élément de $K\langle\langle X\rangle\rangle$ (resp. $K\langle X\rangle$) est isomorphe à un anneau de séries formelles (resp. polynômes formels) en une indéterminée, à coefficients dans K.

On obtient un résultat analogue pour $K\langle(X)\rangle$ dans le cas particulier des séries d'images commutatives non scalaires, c'est-à-dire telle que, si α désigne l'épimorphisme canonique de $K\langle\langle X\rangle\rangle$ sur $K[[X]]$, les images par α ne soient pas réduites à des éléments de K.

L'auteur ne sait pas résoudre le problème dans le cas général.

PROPOSITION 3.1. : Le commutant d'une série de $K\langle(X)\rangle$ d'image commutative non scalaire est isomorphe à un anneau de séries formelles rationnelles en une indéterminée à coefficients dans K.

(1) Communication personnelle de P.M. COHN.

Preuve : Soient $r \in K\langle(X)\rangle$ non scalaire et C son commutant. C étant un sous-anneau du commutant de r dans $K\langle\langle X\rangle\rangle$ est commutatif. Soient deux séries $s, s' \in K\langle\langle X\rangle\rangle$ du commutant de r dans $K\langle\langle X\rangle\rangle$, telles que l'ordre de s soit supérieur à celui de s', on sait alors (Cohn ([2], p. 243)) qu'il existe s'' appartenant au commutant de r dans $K\langle\langle X\rangle\rangle$, telle que $s = s's''$. En vertu du lemme , s'' est rationnelle et appartient ainsi à C, qui est, par conséquent, un anneau principal.

Soit $r_o \in C$ une série quasi-inversible d'ordre minimal. Supposons qu'il existe $r' \in C$ dont l'ordre, nécessairement supérieur ou égal à celui de r_o, est choisi minimal en tant que non multiple de celui de r_o. Comme il vient $r' = r_o r''$, où $r'' \in C$ est d'ordre inférieur à celui de r', et est non multiple de celui de r_o, il y a impossibilité. Les ordres des séries de C sont donc multiples de celui de r_o.

L'algorithme inverse faible (en anglais weak inverse algorithm, cf. (Cohn [2], Chap. 2, § 8)) permet d'exprimer tout élément de C en une série, non nécessairement rationnelle, en l'indéterminée r_o et à coefficients dans K. Si r est d'image commutative non scalaire, il en est alors de même de r_o, et, plus généralement, de tout élément non scalaire de C. On peut déterminer des constantes $c_x \in K$ $(x \in X)$, telles que l'image de αr_o par l'épimorphisme $\varphi : K[(X)] \to K[(t)]$(2) défini par $\varphi x = c_x t$ $(x \in X)$, où t est une nouvelle indéterminée, soit non réduite à un scalaire.

Soit $\psi : C \to K[(t)]$ la restriction de $\varphi\alpha$ à C. ψ est injective, sinon il existerait $r_1, r_2 \in C$ telles que $r_1 \neq r_2$ et $\psi(r_1 - r_2) = 0$, ce qui impliquerait que $\alpha(r_1 - r_2) = 0$ ou $\varphi\alpha(r_1 - r_2) = 0$, donc, en définitive, $\alpha r_o = 0$ ou $\varphi\alpha r_o = 0$, ce qui est impossible. $D = \psi C$ est donc un sous-anneau de $K[(t)]$, isomorphe à C. D'après le théorème de Lüroth, le corps de fractions F de D est de la forme $F = K(u)$, où $u \in K(t)$. Choisissant soit u, soit u^{-1}, il est loisible de supposer u régulier à l'origine, donc appartenant à $K[(t)]$. Otant à u son terme constant $u(0)$, il est aussi loisible de supposer celui-ci nul. Montrons que $D = K[(u)]$, c'est-à-dire que $u \in D$. Il existe deux éléments $d_1, d_2 \in D$ tels que $d_2 = d_1 u$. Soient $c_1, c_2 \in C$ tels que $\psi c_i = d_i$ $(i = 1,2)$. L'ordre de c_2 étant supérieur à celui de c_1, il existe $c_o \in C$ tel que $c_2 = c_1 c_o$;

(2) $K[(X)]$ et $K[(t)]$ désignent les sous-anneaux des séries rationnelles (c'est-à-dire des développements de Taylor de fonctions rationnelles régulières à l'origine) de $K[[X]]$ et $K[[t]]$.

donc $\psi c_o = u$ qui appartient bien à D . Par conséquent, C est de la forme $C = K[(c_o)]$.

IV. PLONGEMENT DE $K\langle(X)\rangle$ DANS UN CORPS GAUCHE.

Soient $K\{X\}$ et $K\{\{X\}\}$ les corps universels de fractions de $K\langle X\rangle$ et $K\langle\langle X\rangle\rangle$ (Cohn ([2], chap. 7)). Il est loisible de plonger $K\{X\}$ dans $K\{\{X\}\}$ (Cohn ([2], chap. 7, § 6, p. 286, exercice n° 4)). De plus, $K\langle(X)\rangle$, étant un semi-fir (proposition 2.4.) admet aussi un corps universel de fractions (Cohn ([2], chap. 7)) et l'on peut énoncer :

PROPOSITION 4.1. : $K\langle X\rangle$ et $K\langle(X)\rangle$ admettent même corps universel de fractions $K\{X\}$.

Soit $X^{\underline{G}}$ le groupe libre engendré par X : il est évidemment loisible d'y plonger X^* . On sait (cf. Fuchs ([5], p. 49)) pouvoir munir $X^{\underline{G}}$ d'un ordre total σ compatible avec la structure de groupe. Alors, l'ensemble des séries formelles

$$s = \Sigma\{(s,w)w \mid w \in X^{\underline{G}}\} \text{ , où } (s,w) \in K \text{ ,}$$

dont le support supp(s) , défini par :

$$\mathrm{supp}(s) = \{w \mid (s,w) \neq 0\} \text{ ,}$$

est une partie bien ordonnée de $X^{\underline{G}}$, forme un corps gauche (cf. Fuchs ([5], p.137)) noté $K\{\{X\}\}_\sigma$, qui, bien entendu, contient $K\langle X\rangle$. On peut montrer (voir § IV du chapitre) qu'il est possible de choisir un ordre Ω de sorte que $K\langle\langle X\rangle\rangle$ puisse être plongé dans $K\{\{X\}\}_\Omega$.

Le corps $K\{(X)\}_\sigma$ des séries rationnelles est le plus petit sous-corps de $K\{\{X\}\}_\sigma$ contenant $K\langle X\rangle$. Tout élément de $K\{(X)\}_\sigma$ s'obtient donc à partir d'un nombre fini d'éléments de $K\langle X\rangle$, par un nombre fini d'additions, de produits et d'inversions.

Soit $\bar{X} = \{\bar{x} \mid x \in X\}$ un ensemble disjoint de X , tel qu'il existe une bijection de X sur $\bar{X}$ qui, à tout $x \in X$, associe $\bar{x}$. Posons $Y = X \cup \bar{X}$. A tout mot $x_{i_1}^{\alpha_1} x_{j_1}^{-\bar{\alpha}_1} \dots x_{i_k}^{\alpha_k} x_{j_k}^{-\bar{\alpha}_k} \in X^{\underline{G}}$ $(\alpha_1, \bar{\alpha}_1, \dots, \bar{\alpha}_k > 0)$ présenté sous forme réduite, associons le mot $x_{i_1}^{\alpha_1} \bar{x}_{j_1}^{\bar{\alpha}_1} \dots x_{i_k}^{\alpha_k} \bar{x}_{j_k}^{\bar{\alpha}_k} \in Y^*$. Par linéarité, on obtient un monomorphisme k-linéaire $g : K\{\{X\}\}_\sigma \to K\langle\langle Y\rangle\rangle$.

<u>LEMME 4.2.</u> : <u>La restriction de</u> g <u>à</u> $K\{(X)\}_\sigma$ <u>est un monomorphisme k-linéaire de</u> $K\{(X)\}_\sigma$ <u>dans</u> $K\langle(Y)\rangle$.

<u>Preuve</u> : Soit $r \in K\{(X)\}_\sigma$ que l'on obtient à partir d'éléments de $K\langle X\rangle$ par additions, produits et inversions. Soit $s \in K\langle\langle Y\rangle\rangle$ une série non nulle telle que $g^{-1}s$ soit un élément bien défini de $K\{\{X\}\}_\sigma$. Soit $f_o \in Y^*$ tel que $g^{-1}f_o \in X^{\underline{G}}$ soit le mot minimal du support de $g^{-1}s$. Posons $f'_o = g(g^{-1}f_o)^{-1}$. Associons à s la série :

$$s' = (s,f_o)+\Sigma\{(s,f)f'_of \mid f \in XX^*\setminus\{f_o\}\} .$$

s' étant inversible dans $K\langle\langle Y\rangle\rangle$, posons $s'' = s'^{-1}f'_o$. On a $s'' = s^{-1}$, si et seulement si $f_o = 1$. s'' est dit <u>pseudo-inverse</u> de s . Remplaçons les inversions qui permettent d'engendrer r , à partir de $K\langle X\rangle$, par des pseudo-inversions : on obtient un élément $r' \in K\langle(Y)\rangle$.

Soit $\rho : Y^* \to Y^*$ l'application définie par récurrence sur la longueur, par :

$$\rho 1 = 1$$

$$\rho(fx) = \begin{cases} (\rho f)x & \text{si } f \notin Y^*\bar{x} \\ \rho f' & \text{si } f = f'\bar{x} \end{cases}$$

$$\rho(f\bar{x}) = \begin{cases} (\rho f)\bar{x} & \text{si } f \notin Y^*x \\ \rho f' & \text{si } f = f'x \end{cases} .$$

Par linéarité, ρ peut être prolongée en une transduction polynômiale de $K\langle\langle Y\rangle\rangle$ dans $K\langle\langle Y\rangle\rangle$, notée encore ρ et étudiée par Fliess [3] , où il est montré qu'elle préserve la rationnalité. Comme, par définition, même, $\rho r' = gr$, on en déduit que gr est une série rationnelle.

<u>Remarque</u> : Le produit d'Hadamard de deux séries $s_1, s_2 \in K\{\{X\}\}_\sigma$ est défini par

$$s_1 \odot s_2 = \Sigma\{(s_1,w)(s_2,w)w \mid w \in X^{\underline{G}}\} .$$

Le lemme 4.2. permet d'énoncer :

<u>COROLLAIRE</u> : <u>Le produit d'Hadamard de deux séries de</u> $K\{(X)\}_\sigma$ <u>est une série de</u> $K\{(X)\}_\sigma$

Pour un ordre Ω de $X^{\underline{G}}$ tel que $K\langle\langle X\rangle\rangle$ et donc $K\{\{X\}\}$ puissent être plongés dans $K\{\{X\}\}_\Omega$, le lemme 5.3.1. permet d'écrire $K\langle(X)\rangle = K\langle\langle X\rangle\rangle \cap K\{(X)\}_\Omega$. On peut donc énoncer :

PROPOSITION 4.3. : *L'intersection de* $K\langle\langle X\rangle\rangle$ *et de* $K\{X\}$ *n'est autre que* $K\langle(X)\rangle$.

V. APPENDICE : ORDRES SUR UN GROUPE LIBRE ET SERIES FORMELLES.

On reprend les notations du paragraphe précédent.

PROPOSITION 5.1. : *On peut déterminer un ordre total* Ω *du groupe libre* $X^{\underline{G}}$ *tel que le monoïde libre* X^* *en soit une partie bien ordonnée. Alors* $K\langle\langle X\rangle\rangle$ *peut être considéré comme un sous-anneau de* $K\{\{X\}\}_\Omega$.

Preuve : Soit :

$$X^{\underline{G}} = G_o \supset G_1 \supset \dots \supset G_i \supset \dots \supset \{1\} .$$

la série centrale descendante de $X^{\underline{G}}$. On sait (cf. Fuchs ([5], p. 49)) pouvoir ordonner totalement $X^{\underline{G}}$ en ordonnant totalement chacun des groupes commutatifs libres G_i/G_{i+1} : $w \in X^{\underline{G}} \setminus \{1\}$ est positif si et seulement si, j désignant l'indice tel que $w \in G_j \setminus G_{j+1}$, l'image canonique de wG_{j+1} de w dans G_j/G_{j+1} est positive. Soit Ω un ordre de $X^{\underline{G}}$ obtenu en ordonnant lexicographiquement G_o/G_1 , qui est isomorphe au groupe commutatif libre engendré par X , de la manière suivante : un élément $x_{\lambda_1}^{k_1} \dots x_{\lambda_n}^{k_n}$, où $x_1 < \dots < x_n$ et $k_1,\dots,k_n \neq 0$, est positif si et seulement si k_n l'est. Il est alors aisé de prouver que le plongement canonique dans G_o/G_1 du monoïde commutatif libre engendré par X est une partie bien ordonnée. Soient $P \subset X^*$ et $\alpha : X^{\underline{G}} \to G_o/G_1$ l'épimorphisme canonique. Comme $P \subset G_o \setminus G_1 \cup \{1\}$, il existe un plus petit élément de P , qui n'est autre que le plus petit élément de la partie finie $\alpha^{-1}v_o$, où v_o est le plus petit élément de αP .

X^* étant une partie bien ordonnée de $X^{\underline{G}}$, l'assertion concernant le plongement de $K\langle\langle X\rangle\rangle$ dans $K\{\{X\}\}_\Omega$ se déduit alors des définitions.

Remarque : Lorsque X est infini, la proposition 5.4.1. reste valide à condition d'ordonner lexicographiquement le groupe commutatif libre G_o/G_1 en munissant X d'un bon ordre.

PROPOSITION 5.2. : X *étant un ensemble comptant au moins deux éléments, pour un ordre* Ω *de* $X^{\underline{G}}$ *tel qu'il a été défini dans la proposition 5.4.1., le corps universel de fractions* $K\{\{X\}\}$ *de* $K\langle\langle X\rangle\rangle$ *peut être plongé strictement dans*

$K\{\{X\}\}_\Omega$ (3) .

<u>Preuve</u> : Il est clair que l'on peut plonger canoniquement $K\{\{X\}\}$ dans $K\{\{X\}\}_\Omega$ Soient $x, y \in X$ tels que $x < y$. Notons encore Ω la restriction de Ω à $\{x,y\}^{\underline{G}}$. Montrons que la série de $K\{\{x,y\}\}_\Omega$

$$s = \sum_{n \geqslant 0} x^{-2^n} y^n$$

n'appartient pas à $K\{\{x,y\}\}$. Sinon, en effet, il existerait un système de la forme :

$$(1) \qquad A \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

en les inconnues $\xi_1, \dots, \xi_n$, où $A \in (K\langle\langle x,y\rangle\rangle)^{n \times n}$ et $b_i \in K\langle\langle x,y\rangle\rangle$ $(i = 1, \dots, n)$, dont la première composante du n-uple solution serait s (cf. Cohn [1], chap. 7). Plongeons K dans le corps de fractions rationnelles $K(t)$, où t est une nouvelle indéterminée commutant avec tout $x \in X$, et considérons s comme appartenant à $K(t)\{\{x,y\}\}$. En substituant $t^N y$ à y dans s , où s est un entier suffisamment grand et en multipliant la série obtenue par une puissance suffisante de t , il est aisé de constater en résolvant, par exemple, le système (1) par éliminations successives que l'on obtient une série telle que pour tout $n \geqslant 0$, le coefficient $u_n t^{l_n}$ $(u_n \in K$, $l_n \in \mathbb{N})$ de $x^{-2^n} y^n$ vérifierait $l_n > 2^n$, ce qui est évidemment impossible.

<u>Remarques</u> : (i) Dans le cas d'une seule indéterminée x , $K\{\{x\}\}$ et $K\{\{x\}\}_\Omega$ sont évidemment confondus avec le corps commutatif $K((x))$ des séries formelles méromorphes (ou de Laurent), qui sont de la forme $\sum_{n \geqslant n_0} a_n x^n$ $(a_n \in K, n_0 \in \mathbb{Z})$.

(ii) Dans le cas d'indéterminées commutatives $x \in X$, il est clair que l'on peut, en utilisant le groupe commutatif libre, énoncer des résultats analogues à ceux des propositions 5.4.1. et 5.4.2.

(3) On entend par là qu'il existe au moins un élément de $K\{\{X\}\}_\Omega$ n'appartenant pas à $K\{\{X\}\}$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] BERGMAN (G.M.). Centralizers in free associative algebras, Trans. Amer. Math. Soc., 137, 1969, pp. 327-344.

[2] COHN (P.M.). Free rings and their relations, London and New York, Academic Press, 1971.

[3] FLIESS (M.). Deux applications de la représentation matricielle d'une série rationnelle non commutative, J. Algebra, 19, 1971, pp. 344-353.

[4] FLIESS (M.). Sur certaines familles de séries formelles, Thèse Sc. Math., Univ. Paris VII, 1972.

[5] FUCHS (L.). Partially ordered algebraic systems, Oxford, Pergamon Press , 1963.

[6] JOHNSON (R.E.). Unique factorization monoids and domains, Proc. Amer. Math. Soc., 28, 1971, pp. 397-404.

-:-:-:-:-:-:-

UNIVERSITE DE PARIS-SUD XI

CENTRE D'ORSAY

SEMINAIRE D'ALGEBRE NON COMMUTATIVE

Conférence n° 4 du 4 Décembre 1972

SUR LES T-ANNEAUX

PAR L. LESIEUR

-:-:-:-:-

1. RESUME.

Nous donnons diverses propriétés caractéristiques des anneaux noethériens à gauche R dans lesquels la correspondance canonique entre les classes d'isomorphismes des modules injectifs indécomposables et les idéaux premiers de l'anneau est biunivoque. Certaines sont plus ou moins connues, par exemple la propriété 1 qui est une comparaison des notions d'idéal à gauche tertiaire et d'idéal à gauche isotypique (L.LESIEUR), la propriété 2 qui fait appel à la théorie de la $\mathcal{P}$-torsion (J. LAMBEK et G. MICHLER), la propriété 3 qui est la condition récente de KRAUSE, pour laquelle nous indiquons une démonstration différente. De là on déduit une variante avec la condition de ORE forte modulo un idéal premier bilatère $\mathcal{P}$ de l'anneau R (propriété 4). La propriété 5 fait appel à la notion d'idéal à gauche $\cap$-irréductible et premier, ou à celle d'idéal à gauche critique et premier. La propriété 6 a pour point de départ la condition (H) de Gabriel qui est seulement suffisante, mais que nous précisons sous le nom de condition de GABRIEL faible pour la rendre nécessaire et suffisante. La propriété 7 s'exprime au moyen du coeur d'un module, défini et étudié antérieurement par L. LESIEUR et R. CROISOT. Enfin, nous terminons par une condition portant sur l'anneau quotient de R par le radical nilpotent N de l'anneau, qui ramène au cas d'un anneau noethérien à gauche semi-premier et qui nous paraît intéressante pour la construction et l'étude de certains anneaux noethériens à gauche par application des procédés exposés dans [6]

L'énoncé des résultats a paru sans démonstration dans une Note aux C.R. de l'Académie des Sciences de Paris en Janvier 1973. Les autres références bibliographiques figurent à la fin et elles sont mentionnées dans le texte.

2. CORRESPONDANCE ENTRE IDEAUX PREMIERS ET MODULES INJECTIFS INDECOMPOSABLES.

R étant un anneau unitaire noethérien à gauche, à tout R-module à gauche injectif indécomposable E , on peut faire correspondre l'idéal premier $\mathfrak{P} =$ Ass E qui est l'annulateur maximum des sous-modules non nuls de E . Si deux modules injectifs indécomposables E et E' sont isomorphes, il leur correspond le même idéal $\mathfrak{P}$. On a donc la correspondance :

$$f : \Pi \mapsto \mathfrak{P} = \text{Ass } E , \quad E \in \text{Classe } \Pi$$

entre les classes Π d'injectifs indécomposables isomorphes et les idéaux premiers $\mathfrak{P}$ de R . Cette application f est <u>surjective</u>, car on a : $E(R/\mathfrak{P}) = E_1 \oplus \ldots \oplus E_n$, où les E_i sont des modules injectifs indécomposables isomorphes tels que $\mathfrak{P} = \text{Ass } E_i$, et où $E(R/\mathfrak{P})$ désigne l'enveloppe injective du R-module à gauche $R/\mathfrak{P}$. Ceci exprime d'ailleurs que l'idéal $\mathfrak{P}$ est <u>isotypique</u> dans A .

Mais, on sait que f n'est pas injective en général, donc n'est pas biunivoque.

<u>DEFINITION 1. Nous appellerons T-anneau, un anneau unitaire</u> R <u>noethérien à gauche pour lequel</u> f <u>est biunivoque</u>.

Nous donnons dans les paragraphes suivants diverses propriétés <u>caractéristiques</u> d'un T-anneau dans la classe des anneaux unitaires noethériens à gauche.

3. CARACTERISATION PAR LES IDEAUX A GAUCHE TERTIAIRES.

<u>PROPRIETE 1. Tout</u> R-module <u>tertiaire de type fini est isotypique</u>.

Pour les définitions, voir [4].

<u>Preuve</u> : a) Soit R un T-anneau, M un R-module tertiaire de type fini. On a donc : $0 = Q_1 \cap \ldots \cap Q_n$, où les Q_i sont des sous-modules $\cap$-irréductibles dans M , non superflus, qui admettent le même idéal premier $\mathfrak{P}$ associé. Il en résulte : $E(M) = E(M/Q_1) \oplus \ldots \oplus E(M/Q_n)$, somme des n injectifs indécomposables $E_i = E(M/Q_i)$ admettant $\mathfrak{P}$ pour idéal premier associé. R étant un T-anneau, les E_i sont isomorphes et 0 est isotypique dans M , c'est-à-dire M est isotypique.

b) Réciproquement, soit R un anneau unitaire noethérien à gauche tel que tout module à gauche tertiaire de type fini soit isotypique. Démontrons que R est un T-anneau. Soient E_1 et E_2 deux modules injectifs indécomposables tels que $\mathfrak{P} = \operatorname{Ass} E_1 = \operatorname{Ass} E_2$. On a donc $E_1 = E(Rx_1)$ où $x_1 \neq 0$, $x_1 \in E_1$; de même $E_2 = E(Rx_2)$, avec $0 \neq x_2 \in E_2$. Alors le module $M = Rx_1 \oplus Rx_2$ est de type fini et $\mathfrak{P}$-tertiaire. Il est donc isotypique par hypothèse, ce qui entraîne $E_1 \simeq E_2$.

Remarque : (Communiquée par G.RENAULT). L'hypothèse que tout idéal à gauche tertiaire dans R est isotypique, est nécessaire, mais non suffisante, pour que R soit un T-anneau. Elle revient à supposer que tout R-module monogène tertiaire est isotypique. Elle est vérifiée dans un exemple dû à COZZENS (cf. G. RENAULT, Séminaire d'Algèbre non commutative, Orsay, 1969.1970, pp. 20.1., 20.9.) d'un anneau intègre principal dans lequel tout idéal à gauche est isotypique, qui est quasi-simple, et qui ne vérifie donc pas la condition de Krause d'un T-anneau que nous verrons au § 5. Si elle est vérifiée et si $\mathfrak{P}$ est un idéal premier de R tel qu'il existe deux modules injectifs indécomposables non isomorphes E_1 et E_2 avec $\operatorname{Ass} E_1 = \operatorname{Ass} E_2 = \mathfrak{P}$, on peut démontrer que $\mathfrak{P}$ est complétement premier et que l'un des injectifs est du type $E(R/\mathfrak{P})$. Il en résulte alors qu'il n'y a que deux types d'injectifs indécomposables.

On sait que, dans R, tout idéal à gauche isotypique est tertiaire, et que la réciproque n'est pas vraie en général. Donc, dans un T-anneau, les deux notions de tertiaire et d'isotypique coïncident. De plus, si M est un module à gauche noethérien sur un T-anneau, les notions de sous-modules tertiaire et isotypique dans M coïncident.

4. CARACTERISATION AU MOYEN DE LA $\mathcal{P}$-TORSION.

PROPRIETE 2. : Si $\mathcal{P}$ un idéal bilatère premier, I un injectif indécomposable tel que $\mathcal{P} = \operatorname{Ass} I$, I est sans $\mathcal{P}$-torsion.

Nous renvoyons à J. LAMBEK et G. MICHLER [2] pour la démonstration. Rappelons seulement que le sous-module de $\mathcal{P}$-torsion de I est l'ensemble des éléments $x \in I$ tels que $0 \cdot\!\!. \; x = \operatorname{Ann} x \in \mathcal{F}_{\mathcal{P}}$, où $\mathcal{F}_{\mathcal{P}}$ est le filtre des idéaux à gauche F de R tels que :

$$\forall a \in R \; , \; (F \cdot\!\!. \; a) \cap \mathcal{C}(\mathcal{P}) \neq \emptyset \; ,$$

avec $F \cdot\!\!. \; a = \{b \in R \mid ba \in F\}$; $\mathcal{C}(\mathcal{P}) = \{c \in R \mid c$ est régulier modulo $\mathcal{P}\}$.

Les propriétés 1 et 2 sont des formulations assez voisines de la définition. La suivante est en apparence plus éloignée et se révèle assez maniable.

5. CONDITION DE KRAUSE.

PROPRIETE 3. : Soit $\mathcal{P}$ un idéal bilatère premier, $c \in \mathcal{C}(\mathcal{P})$ un élément de R régulier modulo $\mathcal{P}$. Alors il existe un idéal bilatère J tel que $\mathcal{P} \underset{\neq}{\subset} J \subseteq Rc + \mathcal{P}$.

Ou encore : dans l'anneau $R/\mathcal{P}$, tout idéal à gauche essentiel contient un idéal bilatère non nul.

Pour la démonstration, voir [3], ou [7], et, en ce qui concerne la condition suffisante [2]. Voici une démonstration nouvelle pour la condition nécessaire, dont le début nous servira plus loin.

Soit $\mathcal{P}$ premier, $L \supseteq \mathcal{P}$ un idéal à gauche essentiel modulo $\mathcal{P}$, et ne contenant pas d'idéal bilatère non nul (mod $\mathcal{P}$). On suppose L maximal pour cette propriété. On a donc $L \cdot\!\!. \; R = \{a \in R \mid aR \subset L\} = \mathcal{P}$.

<u>L est $\cap$-irréductible</u> car $L = L_1 \cap L_2$, avec $L_1 \neq L$, $L_2 \neq L$, implique $L_1 \cdot\!\!. \; R \underset{\neq}{\supset} \mathcal{P}$, $L_2 \cdot\!\!. \; R \underset{\neq}{\supset} \mathcal{P}$, d'où : $\mathcal{P} = L \cdot\!\!. \; R = (L_1 \cdot\!\!. \; R) \cap (L_2 \cdot\!\!. \; R)$, ce qui est impossible puisque $\mathcal{P}$ est premier.

<u>L admet $\mathcal{P}$ comme idéal premier associé</u> : Supposons en effet $K \underset{\neq}{\supset} L$. On a

$$(L \cdot\!\!. K).(K \cdot\!\!. R) \subseteq L \cdot\!\!. R = \mathcal{P} ,$$

car $$(L \cdot\!\!. K).(K \cdot\!\!. R)R \subseteq (L \cdot\!\!. K).K \subseteq L .$$

On en déduit, comme $\mathcal{P}$ est premier et $K \cdot\!\!. R \underset{\neq}{\subset} \mathcal{P}$ (à cause du choix de L maximal) : $L \cdot\!\!. K \subseteq \mathcal{P}$. Mais on a aussi : $L \cdot\!\!. K \supseteq L \cdot\!\!. R = \mathcal{P}$, donc :

$$\mathcal{P} = L \cdot\!\!. K = \mathrm{Ass}\ L .$$

On peut alors appliquer un lemme qui résulte de diverses propriétés de J. LAMBEK et G. MICHLER [2] :

<u>LEMME</u> : <u>Soit L un idéal à gauche de R, contenant l'idéal premier $\mathcal{P}$, et supposé $\cap$-irréductible. Pour que L soit $\mathcal{P}$-critique, il faut et il suffit que l'enveloppe injective</u> $E(R/L)$ <u>soit sans $\mathcal{P}$-torsion.</u>

C'est le cas ici où, par hypothèse, $E(R/L)$ est sans $\mathcal{P}$-torsion (propriété 2). Il en résulte que L est $\mathcal{P}$-critique, et par suite $L \cap \mathcal{C}(\mathcal{P}) = \emptyset$, ce qui est en contradiction avec le fait que L est essentiel modulo $\mathcal{P}$. La condition de Krause est donc nécessaire.

Les anneaux commutatifs, les anneaux avec identité polynomiale, vérifient la condition de Krause et sont donc des T-anneaux.

6. <u>CONDITION DE ORE FORTE.</u>

La condition de ORE usuelle, qui résulte du théorème de Goldie pour l'existence de l'anneau de fractions de l'anneau noethérien à gauche premier $R/\mathcal{P}$ est la suivante :

$$\forall a \in R,\ c \in \mathcal{C}(\mathcal{P}),\ \exists a' \in R,\ c' \in \mathcal{C}(\mathcal{P}) \text{ avec } c'a = a'c (\mathrm{mod.}\ \mathcal{P}).$$

Un T-anneau va être caractérisé par la propriété suivante qui est un renforcement de la condition de ORE.

<u>PROPRIETE 4.</u> : <u>Soit $\mathcal{P}$ un idéal premier,</u> $c \in \mathcal{C}(\mathcal{P})$ <u>un élément de R régulier mod. $\mathcal{P}$. Il existe</u> $c' \in \mathcal{C}(\mathcal{P})$ <u>tel que</u> :

$$\forall a \in R,\ \exists a' \in R \ \underline{\text{avec}}\ c'a = a'c (\mathrm{mod.}\ \mathcal{P}).$$

<u>Preuve</u> : 1) Soit R un T-anneau, $\mathcal{P}$ premier, $c \in \mathcal{C}(\mathcal{P})$. L'idéal à gauche $Rc+\mathcal{P}$ contient un idéal bilatère $J \underset{\neq}{\supset} \mathcal{P}$ d'après la condition de Krause. Dans $R/_{\mathcal{P}}$, l'idéal bilatère non nul $\bar{J}$ est essentiel et il contient un élément régulier $\overline{c'}$, de sorte que J contient l'élément $c' \in \mathcal{C}(\mathcal{P})$. On a donc pour tout $a \in R$: $c'a \in J \subset Rc+\mathcal{P}$, d'où :

$$c'a = a'c (\text{mod. } \mathcal{P}).$$

2) Réciproquement, si la condition de ORE forte est vérifiée, l'idéal à gauche $Rc+\mathcal{P}$ contient l'idéal bilatère $J = (c')+\mathcal{P}$ engendré par $c'(\text{mod. } \mathcal{P})$, et celui-ci ne peut être égal à $\mathcal{P}$. La condition de Krause est donc vérifiée.

Il serait utile d'étudier les anneaux noethériens premiers vérifiant cette condition de Ore forte.

La propriété suivante fait appel à la notion d'<u>idéal à gauche premier</u> A défini comme suit :

$$aRb \subseteq A \Longrightarrow a \in A \text{ ou } b \in A.$$

7. <u>CARACTERISATION AU MOYEN DES IDEAUX A GAUCHE PREMIERS.</u>

<u>PROPRIETE 5.</u> : <u>Soit A un idéal à gauche $\cap$-irréductible et premier, $\mathcal{P}$ = Ass A. Alors A ne contient aucun élément c régulier mod. $\mathcal{P}$</u> : $A \cap \mathcal{C}(\mathcal{P}) \neq \emptyset$.

<u>Preuve</u> : 1) Soit R un T-anneau. Soit A un idéal à gauche $\cap$-irréductible et premier, $\mathcal{P}$ = Ass A. On a donc $\mathcal{P} = A^{\cdot}\cdot R$ qui est le plus grand idéal bilatère contenu dans A. Il en résulte d'après la condition de Krause que A ne peut contenir aucun élément c régulier mod.

2) Réciproquement, soit $\mathcal{P} \subset A$, où A est un idéal à gauche contenant un élément régulier c mod. $\mathcal{P}$. Si la condition de Krause n'était pas vérifiée, on choisirait comme au § 5 un idéal à gauche maximal L ne la vérifiant pas. Comme on l'a vu alors, L serait $\cap$-irréductible, premier, avec $\mathcal{P} = A^{\cdot}\cdot R$ comme idéal premier associé. L'hypothèse de la propriété 5 entraîne alors $A \cap \mathcal{C}(\mathcal{P}) = \emptyset$ et on arrive à une contradiction. La condition de Krause est donc vérifiée.

COROLLAIRE : Dans un T-anneau, tout idéal à gauche $\cap$-irréductible et $\mathcal{P}$-premier est $\mathcal{P}$-critique et premier.

En effet, si A est $\cap$-irréductible et premier, on a $\mathcal{P} = A \cdot\!. R = \text{Ass}\, A$, d'où $\mathcal{P} \subseteq A$ avec $A \cap \mathcal{C}(\mathcal{P}) = \emptyset$ et A $\cap$-irréductible. Il en résulte que A est $\mathcal{P}$-critique d'après une propriété caractéristique de J. LAMBEK et G. MICHLER [2].

Réciproquement si tout idéal $\cap$-irréductible et $\mathcal{P}$-premier A est $\mathcal{P}$-critique, on a évidemment $A \cap \mathcal{C}(\mathcal{P}) = \emptyset$. L'anneau R est donc un T-anneau d'après la propriété 5, et la propriété du corollaire est encore caractéristique d'un T-anneau.

Dans un anneau R, on sait que tout idéal à gauche critique est $\cap$-irréductible. Dans un T-anneau il y a donc coïncidence des deux notions $\cap$-irréductible et $\mathcal{P}$-premier d'une part, et $\mathcal{P}$-critique et premier d'autre part, cette propriété étant caractéristique d'un T-anneau.

8. CONDITION DE GABRIEL FAIBLE.

Une condition suffisante(1) pour un T-anneau a été donnée par GABRIEL [1] sous le nom de condition (H) :

$$Q \cdot\!. R = \bigcap_{\text{finie}} (Q \cdot\!. a_i), \quad a_i \in R$$

Q idéal à gauche quelconque de R, $Q \cdot\!. R = \{x \in R \mid xR \subseteq Q\}$, $Q \cdot\!. a_i = \{x \in R \mid xa_i \in Q\}$. La propriété suivante est un affaiblissement de la condition de Gabriel, qui devient ainsi nécessaire et suffisante.

PROPRIETE 6. : Pour tout idéal à gauche $\cap$-irréductible et premier Q, on a la condition :

$$(H) \qquad Q \cdot\!. R = \bigcap_{\text{finie}} (Q \cdot\!. a_i), \quad a_i \in R .$$

Preuve : 1) Soit $\mathcal{P} = Q \cdot\!. R$, où Q est un idéal à gauche $\cap$-irréductible et premier. Dans un T-anneau Q est donc $\mathcal{P}$-critique (Corollaire) ainsi que $Q \cdot\!. a$ pour tout $a \notin Q$. L'intersection $\bigcap (Q \cdot\!. a)$ est alors égale à une intersection finie d'idéaux $\mathcal{P}$-fermés (cf. par exemple : L. LESIEUR et R. CROISOT, Sur les anneaux premiers noethériens à gauche, Ann. Sc. de l'ENS, t.76, 1959, pp. 161-183).

(1) Encore conviendrait-il de donner un exemple de T-anneau où cette condition n'est pas vérifiée.

2) Réciproquement, supposons la condition (H). Soit I un injectif indécomposable. Il peut être défini par $I = E(R/Q)$, où Q est un idéal à gauche $\cap$-irréductible et premier (et même critique(1)) [2]. On a alors si $\mathfrak{P} = \text{Ass } Q$:

$$\mathfrak{P} = Q \cdot\!\!. R = \bigcap_{\text{finie}} (Q \cdot\!\!. a_i) \ , \ a_i \notin Q \ .$$

Les idéaux $Q \cdot\!\!. a_i$ ont le type de Q, et on a en ne gardant que des composants non superflus :

$$E(R/\mathfrak{P}) = \bigoplus_{\text{finie}} E(R/Q \cdot\!\!. a_i)$$

ce qui prouve que ce type est celui des composantes injectives indécomposables de $E(R/\mathfrak{P})$. Donc Q est de ce type aussi.

On voit que la démonstration prouve également la propriété caractéristique suivante d'un T-anneau :

<u>PROPRIETE 6'.</u> : <u>Tout idéal à gauche critique et premier Q vérifie la condition</u> :

$$(H) \quad Q \cdot\!\!. R = \bigcap_{\text{finie}} Q \cdot\!\!. a_i \ .$$

Les anneaux vérifiant la condition de Gabriel sont donc des T-anneaux particuliers. Ils comprennent déjà la classe des anneaux artiniens.

9. <u>CONDITION PORTANT SUR LE COEUR</u> $C(E)$.

La propriété suivante fait intervenir de façon assez curieuse la notion de coeur $C(E)$ d'un module injectif indécomposable E introduite dans [5]. Rappelons que $C(E)$ est le sous-module de E constitué par $\{0\}$ et par les éléments $x \neq 0$, $x \in I$, tels que $\text{Ann } x = 0 \cdot\!\!. x$ soit maximal parmi les annulateurs de cette forme(2). $C(E)$ est alors un espace vectoriel à droite sur le corps $k = S(I)$ associé au module I(3). La loi externe est définie par :

$$x \in C(E), \ \bar{\beta} \in k \ , \ x\bar{\beta} = x\beta \in C(E), \ \beta \in \text{End } I \ .$$

---

(1) Mais pas nécessairement $\mathfrak{P}$-critique si $\mathfrak{P} = \text{Ass } I$.

(2) Si $\alpha \in \text{Hom}_A(I,I) = \text{End}_A E$, on a $\mathcal{C}(E) = \bigcap_{\text{Ker } \alpha \neq 0} \text{Ker } \alpha$.

(3) Les éléments $\alpha \in \text{End } E$ tels que $\text{Ker } \alpha \neq 0$ forment un idéal bilatère J et $\text{End } E/J = k$ est un corps.

PROPRIETE 7. : Soit E un module injectif indécomposable, $\mathcal{P} = \mathrm{Ass}\, I$ son idéal premier associé. Posons $0.\cdot \mathcal{P} = \{x \in I | \mathcal{P}x = o\}$. Alors :

(i) $0 .\cdot \mathcal{P} \subset C(E)$

(ii) $0 .\cdot \mathcal{P}$ est un sous-espace vectoriel du coeur $C(E)$ de dimension finie sur $k = S(E)$ (égale à la dimension de Goldie de $R/_{\mathcal{P}}$).

Preuve : 1) Démontrons (i) et (ii) dans un T-anneau.

(i) $0.\cdot \mathcal{P} \subseteq C(E)$. Soit $x \in 0 .\cdot \mathcal{P}$, $x \neq o$, donc $\mathcal{P}x = o$. Démontrons que $0 \cdot . x$ est maximal parmi les annulateurs des éléments non nuls de I. C'est un idéal à gauche $\cap$-irréductible et $\mathcal{P}$-premier ; il est donc critique (Corollaire de la propriété 5) et par suite maximal parmi les annulateurs des éléments non nuls de E (d'après une propriété caractéristique des idéaux à gauche critique [2]).

(ii) $0 .\cdot \mathcal{P}$ est un sous-espace vectoriel du coeur $C(E)$ de dimension finie sur le corps $k = S(E)$, égale à $\dim(R_{/\mathcal{P}})$. Soit $x \in 0 .\cdot \mathcal{P}$, $x \neq o$. L'idéal à gauche $0 \cdot . x$ est $\cap$-irréductible et premier. On a donc d'après la condition (H) :

$$\mathcal{P} = (0 \cdot . x) \cdot . R = \bigcap_{\text{finie}} (0 \cdot . x) \cdot . \lambda_i = \bigcap_{\text{finie}} (0 \cdot . \lambda_i x) ,$$

d'où :

$$\mathcal{P} = \cap (0 \cdot . x_i) ,$$ intersection finie et sans éléments superflus, en nombre égal à la dimension d de Goldie de $R_{/\mathcal{P}}$. On en déduit d'après un raisonnement classique par récurrence sur p que :

$$0 .\cdot [(0 \cdot . x_1) \cap \ldots \cap (0 \cdot . x_p)] = x_1 k + \ldots + x_p k$$

c'est-à-dire : l'ensemble des éléments $x \in C(E)$ tels que $ux_i = 0$ $(i = 1,\ldots,p)$, $u \in R \Longrightarrow ux = 0$ est le sous-espace vectoriel à droite engendré par $x_1,\ldots,x_p$. En particulier, pour $p = d$, on a : $x \in x_1 k + \ldots + x_d k$, ce qui prouve que $0 .\cdot \mathcal{P}$ est engendré par $x_1,\ldots,x_d$. Ces éléments forment une base car la relation $x_1 = x_2\alpha_1 + \ldots + x_d\alpha_d$ impliquerait $0 \cdot . x_1 \supseteq (0 \cdot . x_2) \cap \ldots \cap (0 \cdot . x_d)$ et $0 \cdot . x_1$ serait superflu dans la représentation $\mathcal{P} = \bigcap_{i=1}^{i=d} (0 \cdot . x_i)$.

2) Réciproque. Soit (i) et (ii). On a donc :

$$0 .\cdot \mathcal{P} = x_1 k + \ldots + x_d k .$$

Il en résulte :

$$0 \cdot . (0 .\cdot \mathcal{P}) = \mathcal{P} = (0 \cdot . x_1) \cap \ldots \cap (0 \cdot . x_d) .$$

On en déduit, du fait que $x_1,\dots,x_d$ forment une base de $0 \cdot\!\!\cdot\, \mathfrak{P}$ sur k, que cette représentation de $\mathfrak{P}$ est une intersection d'idéaux $\cap$-irréductibles non superflus. Cela suffit à démontrer que le type de E est celui des composantes indécomposables de $E(R/\mathfrak{P})$. L'anneau R est donc un T-anneau.

La propriété 7 est donc caractéristique d'un T-anneau. Dans le cas commutatif on a l'égalité $C(E) = 0 \cdot\!\!\cdot\, \mathfrak{P}$ qui est alors de dimension 1 sur k. Dans le cas non commutatif, le coeur $C(E)$ peut être de dimension infinie dans le cas noethérien général (cf. [5]). La propriété 7 donne donc un résultat de finitude pour un T-anneau qui s'approche dans une certaine mesure du résultat du cas commutatif.

Remarquons en outre que la condition (i) de la propriété 7 est équivalente à la suivante :

<u>PROPOSITION</u> : <u>Pour que, dans un anneau R unitaire noethérien à gauche, tout idéal $\cap$-irréductible premier soit critique</u>(1)<u>, il faut et il suffit que l'on ait la condition (i) de la propriété 7.</u>

La condition est nécessaire comme on l'a vu dans la démonstration 1), (i) de la propriété 7. Démontrons qu'elle est suffisante. Soit Q un idéal à gauche $\cap$-irréductible et premier ; posons $\mathfrak{P} = \mathrm{Ass}\, Q = Q \cdot\!\!\cdot\, R$. Soit $E = E(R/Q)$; c'est un injectif indécomposable admettant $\mathfrak{P}$ pour idéal premier associé. On a $Q = \mathrm{Ann}\, \bar{1} = 0 \cdot\!\!\cdot\, x$, avec $x = \bar{1} \in R/Q \subseteq E$. De plus $\mathfrak{P}.\bar{1} = 0$ puisque $\mathfrak{P} \subseteq Q$. L'hypothèse de la proposition implique donc $\bar{1} \in C(E)$, d'où $Q = 0 \cdot\!\!\cdot\, \bar{1}$ est critique d'après la définition du coeur.

10. <u>CONDITION PORTANT SUR L'ANNEAU SEMI-PREMIER</u> R/N.

<u>PROPRIETE 8.</u> : <u>Si N est le radical nilpotent de R, l'anneau quotient R/N est un T-anneau semi-premier.</u>

<u>Preuve</u> : Soit R un T-anneau. Nous allons démontrer que R/N est un T-anneau en vérifiant la condition de Krause. Soit $\bar{\mathfrak{P}}$ un idéal premier de R/N ;

(1) Ne pas confondre avec le contenu du corollaire de la propriété 5, où l'on supposait que l'idéal à gauche A $\cap$-irréductible et $\mathfrak{P}$-premier, était $\mathfrak{P}$-critique. Ici A est critique, sans plus.

il est la classe modulo N de l'idéal premier $\wp$ de R contenant N. Si $\bar{c}$ est un élément de $R/_N$ régulier modulo $\bar{\wp}$, il est la classe modulo N de l'élément $c \in R$ régulier mod. $\wp$. La condition de Krause appliquée à R et $\wp$ donne un idéal bilatère J tel que $\wp \underset{\neq}{\subset} J \subset Rc + \wp$. On en déduit $\bar{\wp} \underset{\neq}{\subset} \bar{J} \subseteq R\bar{c} + \bar{\wp}$, ce qui est la condition de Krause dans $R/_N$.

Réciproquement, si la condition de Krause est vérifiée dans $R/_N$ on la vérifie dans R en remarquant que, si $\wp$ est un idéal premier de R, on a $\wp \supseteq N$ (1), d'où : $N \subset \wp \subset Rc + \wp$ dans R, et $\bar{\wp} \subset R\bar{c} + \bar{\wp}$ dans $R/_N$. Il en résulte $\bar{J}$ bilatère tel que $\bar{\wp} \underset{\neq}{\subset} \bar{J} \subseteq R\bar{c} + \bar{\wp}$ d'où J bilatère dans R tel que $\wp \underset{\neq}{\subset} J \subset Rc + \wp$.

L'intérêt de la propriété 8 réside dans la construction d'un anneau noethérien à gauche quelconque (d'exposant 2) donnée dans [6] au moyen d'un bi-module M sur un anneau noethérien à gauche <u>semi-premier</u> K. L'anneau obtenu R est alors un T-anneau si et seulement si K en est un lui-même. En particulier, les exemples provenant d'un anneau K commutatif donnent donc des exemples d'anneaux R non commutatifs qui sont des T-anneaux.

En conclusion, on peut ranger les T-anneaux dans une classe d'anneaux raisonnables intermédiaires entre les anneaux commutatifs (un peu trop particuliers) et les anneaux non commutatifs quelconques (un peu trop généraux).

(1) N est l'intersection des idéaux premiers de R.

BIBLIOGRAPHIE

[1] P. GABRIEL, Des catégories abéliennes, Bull. Soc. Math. France, t. 90, 1962.

[2] J. LAMBEK and G. MICHLER, The torsion theory at a prime ideal of a right noetherian ring. (J. Algebra, à paraître).

[3] G. KRAUSE, On fully left bounded left noetherian rings (Journal of Algebra, vol. 23, 1, (1972), pp. 88-89).

[4] L. LESIEUR et R. CROISOT, Algèbre noethérienne non commutative (Mémor. Sci. Math. fasc. 154, Paris, 1963).

[5] L. LESIEUR et R. CROISOT, Coeur d'un module (J. Math. Pures et Appliquées, 9e série, 42, (1963), pp. 367-407).

[6] L. LESIEUR, Structure des anneaux noethériens à gauche d'exposant deux (Istituto nazionale di alta Matematica, Symposia Matematica, Roma 8, 1972, pp. 193-203).

[7] G. RENAULT, Idéaux premiers et injectifs indécomposables (Séminaire d'Algèbre non commutative, Orsay, 1971.

-:-:-:-:-

SEMINAIRE D'ALGEBRE NON COMMUTATIVE

CENTRE D'ORSAY

-:-:-:-:-:-

Conférence n° 5 du 11 Décembre 1972

-:-:-:-:-

GROUPES ABELIENS QUASI-INJECTIFS

SUR LEUR ANNEAU D'ENDOMORPHISME,

par J.M. GOURSAUD

-:-:-:-:-:-

\- Non rédigé -

UNIVERSITE DE PARIS SUD XI

CENTRE D'ORSAY

SEMINAIRE D'ALGEBRE NON COMMUTATIVE

Conférence n° 6 du 18 Décembre 1972

ANNEAUX DE GROUPES SEMI-PARFAITS(1)

par J. VALETTE

-:-:-:-

Soient K un corps commutatif non dénombrable et KG un anneau de groupe semi-parfait ; alors le groupe G est de torsion. Si de plus K est de caractéristique p et algébriquement clos G est extension finie d'un p-groupe.

I. DEFINITIONS ET PROPRIETES PRELIMINAIRES.

1) Un A module M est dit local s'il possède un plus grand sous-module propre.

2) Pour un anneau A de radical de Jacobson $R(A)$ les assertions suivantes sont équivalentes :

a) A est semi-parfait.

b) $A/_{R(A)}$ est semi-simple et les idempotents de $A/_{R(A)}$ se relèvent en des idempotents de A.

c) $A = \bigoplus_{i=1}^{N} Ae_i$ où les Ae_i sont des A modules projectifs locaux [1], [2].

3) Soit D une K-algèbre telle que $\dim_K D < \operatorname{card} K$. Si D est de plus un corps, alors D est algébrique sur K [3].

4) Soit K un corps commutatif. Tout sous-groupe de torsion de $GL(n,K)$ est localement fini [4].

(1) Exposé oral développant une Note de M. J.VALETTE parue aux C.R. Acad. Sci. Paris, 1972.

5) Soit A une K-algèbre algébrique sur le corps commutatif et non dénombrable K ; alors $M_n(A)$ est algébrique sur K [5] .

On désignera par $(e_i)_{1 \leqslant i \leqslant N}$ <u>une famille d'idempotents primitifs et orthogonaux de KG de somme 1.</u>

<u>PROPOSITION 1.</u> <u>Soit</u> KG <u>un anneau de groupe semi-parfait où</u> K <u>est un corps commutatif non dénombrable. Alors</u> KG <u>est algébrique sur</u> K <u>et</u> G <u>est un groupe de torsion.</u>

Soit x un élément de KG . Nous allons montrer que x est algébrique sur K . Soit H le sous-groupe de G engendré par le support de x et les supports des idempotents $(e_i)_{i,\ \text{de } 1 \text{ à } N}$. Il résulte de [6] que KH est semi-parfait. $KH/_{R(KH)}$ étant semi-simple est un produit d'anneaux de matrices $M_n(D)$ où D est le corps commutant d'un KH module simple S . H étant de type fini, D est de dimension au plus dénombrable sur K . Il résulte alors de 3) et 5) que $KH/_{R(KH)}$ est une K-algèbre algébrique sur K . Comme $R(KH)$ est un nilidéal [7] KH est algébrique sur K et donc x est algébrique sur K . Comme KG est algébrique G est un groupe de torsion.

<u>COROLLAIRE 1.</u> <u>Soit</u> K <u>un corps commutatif non dénombrable. Les assertions suivantes sont équivalentes</u> :

a) KG <u>est semi-parfait.</u>

b) <u>Pour tout sous-groupe</u> H <u>de</u> G , KH <u>est semi-parfait.</u>

Comme $R(KH)$ est un nilidéal et que les idempotents se relèvent modulo un nilidéal, il suffit de montrer que $KH/_{R(KH)}$ est un anneau semi-simple. KG étant semi-parfait, il existe au plus dans KH et par suite dans $KH/_{R(KH)}$ N idempotents orthogonaux et l'ensemble des idéaux à gauche de $KH/_{R(KH)}$ engendrés par un idempotent vérifie la condition de chaîne descendante. $KH/_{R(KH)}$ étant de plus algébrique et semi-primitif, est un anneau de Zorn semi-primitif [8, p. 210] et par suite est semi-simple.

<u>COROLLAIRE 2. Soient K un corps commutatif non dénombrable de caractéristique p et KG un anneau de groupe semi-parfait. Tout sous-groupe H de G qui ne contient pas de p-éléments est fini.</u>

Soit H un sous-groupe de G n'ayant pas de p-éléments. Comme $R(KH)$ doit être un nilidéal il résulte de [9] que $R(KH)$ est nul. KH est un anneau semi-simple. H est donc fini.

<u>PROPOSITION 2. Soient K un corps commutatif de caractéristique p, non dénombrable algébriquement clos et KG un anneau de groupe semi-parfait. Alors G est extension finie d'un p-groupe.</u>

D'après la proposition précédente G est un groupe de torsion. Soit $H = \{g \in G,\ 1-g \in R(KG)\}$. H est un sous-groupe distingué de G. L'anneau de groupe KH est alors local et donc H est un p-groupe. [11]. Nous allons montrer que le groupe $G/_H$ est fini. En considérant le groupe quotient $G/_H$ on se ramène à un anneau de groupe KG semi-parfait tel que

$$1-g \in R(KG) \Longrightarrow g = 1 .$$

L'assertion résultera du lemme suivant.

<u>LEMME. Dans les conditions précédentes le groupe G est fini.</u>

Soit H_1 un sous-groupe de type fini de G contenant le support des $(e_i)_{i=1 \text{ à } N}$. On a les propriétés suivantes :

- KH_1 est semi-parfait.
- $KH_1/R(KH_1) = \prod_{i=1}^{n} M_{n_i}(K)$.
- $1-h \in R(KH_1) \Longrightarrow h = 1$ car $R(KG) \cap KH_1 = R(KH_1)$ [6].
- H_1 est un groupe de torsion et de type fini.

L'application $\varphi : KH_1 \to KH_1/R(KH_1)$ restreinte à H_1 est un monomorphisme. Par suite le groupe $\varphi(H_1)$ est inclus dans un produit de groupes de matrices, de type fini et de torsion. Il résulte de 4) que H_1 est fini. Le groupe G qui est alors localement fini est extension finie d'un p-groupe H_2.

Des relations :

$$R(KG) \cap KH_2 = R(KH_2) \quad [10]$$

$R(KH_2) = \omega_{KH_2}(H_2)$ [où $\omega_{KH_2}(H_2)$ est l'idéal engendré dans KH_2 par les éléments $1-h$, $h \in H_2$], il résulte que $\omega(H_2)$ est inclus dans $R(KG)$. Or ceci entraîne que H_2 est réduit à l'élément $\{1\}$. G est donc fini.

Remarque : Soient K un corps commutatif non dénombrable de caractéristique 0 et KG un anneau de groupe semi-parfait. Alors G est fini : en effet KG est semi-simple [7] [12].

PROPOSITION 3. Soient K un corps de caractéristique p et KG un anneau semi-parfait avec $KG = \bigoplus_{i=1}^{N} KGe_i$ où les KGe_i sont des KG modules projectifs locaux. Si H est le sous-groupe de G engendré par le support des idempotents $(e_i)_{i \text{ de } 1 \text{ à } N}$, alors pour tout sous-groupe distingué L de G tel que $L \cap H = \{1\}$ $\omega(L)$ est inclus dans R(KG) et L est un p-groupe.

On peut écrire :

$$\omega(L) = \bigoplus_{i=1}^{N} \omega(L)e_i \qquad \omega(L)e_i \subseteq KGe_i .$$

Pour démontrer l'assertion il suffit de montrer que l'on a $\omega(L)e_i \neq KGe_i$ car KGe_i est un module local. S'il y a égalité alors e_i appartient à $\omega(L)$. On a d'autre part $G = \bigcup_{j \in J} y_j LH$ où $(y_j)_{j \in J}$ est un système de représentants des classes à gauche modulo LH. Les éléments $(y_j h)_{j \in J, h \in H}$ (resp. $(ly_j)_{l \in L, j \in J}$) constituent un système de représentants de classes à droite (resp. à gauche) modulo L (resp. H). Par suite :

$$e_i = \Sigma\, a_{l,j,h}\, (1-h) y_j h .$$

Comme e_i appartient à KH, on a :

$$\sum_h a_{l,j,h} h = 0 \qquad \forall j \neq 1$$

$$\sum_h a_{l,j,h} h = 0 \qquad \forall l,\ \forall j .$$

Par suite quels que soient l,j,h $a_{l,j,h}$ est nul et $e_i = 0$.
D'où la contradiction.

REFERENCES

[1] H. BASS, Trans. Am. Math. Soc. 95 (1960).

[2] J.Y. CHAMARD, Anneaux semi-parfaits et presque frobénusiens. C.R. Aca. Sc. 269 (1969), pp. 556-559.

[3] AMITSUR, Proc. Am. Math. Soc. 7 (1956) pp. 35-48 (Corol. 2).

[4] I. KAPLANSKY, Fields and Rings, Chicago lectures in Mathematics (Th G, p. 105).

[5] N. JACOBSON, Structures of Rings, Am. Math. Soc. Colloq. Vol. XXXVII (Th 2, p. 247).

[6] J.M. GOURSAUD, Anneaux semi-parfaits (à paraître).

[7] AMITSUR, Pro. Am. Math. Soc. 7, 1956, pp. 35-48 (Corol. 4).

[8] N. JACOBSON, structures of rings Am. Math. Soc. Colloq. (Prop. 1, p. 210).

[9] D.S. PASSMAN, Infinite group rings, Marcel Dekker Inc. N.Y 1971 (Th 3.7).

[10] D.S. PASSMAN, Infinite group rings, Marcel Dekker Inc. N.Y. 1971 (Th 16.6).

[12] D.S. PASSMAN, Infinite group rings, Marcel Dekker Inc. N.Y. 1971 (Th 18.5).

[11] G. RENAULT, Sur les anneaux de groupes, C.R. Aca. Sc. 273 (1971) pp. 84-87.

-:-:-:-:-:-:-:-

SEMINAIRE D'ALGEBRE NON COMMUTATIVE

UNIVERSITE DE PARIS XI

Centre d'ORSAY

Conférence n° 7 des lundis 8 et 15 Janvier 1973

MORPHISMES DE DESCENTE

par D. LAZARD.

Nous savons, grâce à OLIVIER [4] , que les morphismes de descente sont exactement, en algèbre commutative, les morphismes purs (i.e. universellement injectifs). Nous nous proposons ici de généraliser ce résultat au cas non commutatif. Notre démonstration étant purement formelle, elle se généralise sans difficulté à la théorie des catégories. Nous avons toutefois préféré ne pas faire ici cette généralisation, trouvant plus utile de faire un exposé complet de la théorie de la descente dans le cadre de la théorie des modules, exposé qui n'existe pas à notre connaissance et dont la nécessité se fait souvent sentir.

1. DONNEES DE DESCENTE.

Soit $f: A \to B$ un homomorphisme d'anneaux unitaires. Si N est un B-module à gauche, nous désignerons par p_N le morphisme canonique $B \otimes_A N \to N$. Nous noterons systématiquement $X \otimes Y$ au lieu de $X \otimes_A Y$.

DEFINITION 1. 1) Une donnée de descente de B vers A est un couple (N,u) où N est un B-module à gauche et où u est une application B-linéaire de N dans $B \otimes N$ telle que :

a) $p_N \circ u = id(N)$.

b) $(B \otimes u) \circ u = (B \otimes f \otimes N) \circ u$.

2) Un morphisme de données de descente de (N,u) dans (N',u') est une application B-linéaire $\psi: N \to N'$ telle que $u' \circ \psi = (B \otimes \psi) \circ u$.

Par des notations telles que $B \otimes u$, il faut évidemment entendre $id(B) \otimes u$. Nous ferons beaucoup usage de cet allègement de notation. Nous identifierons systématiquement $X \otimes_A A$ et X .

Il est clair que les données de descentes forment une catégorie que nous noterons $\mathfrak{D}$. L' "oubli" de u définit un foncteur G de $\mathfrak{D}$ dans la catégorie des B-modules à gauche Mod B. Montrons qu'il y a aussi un foncteur canonique F de Mod A dans $\mathfrak{D}$.

Si M est un A-module, il est immédiat que $(B \otimes M, B \otimes f \otimes M)$ est une donnée de descente. Si $\varphi : M \to M'$ est une application A-linéaire, il est également clair que $B \otimes \varphi$ est un morphisme de données de descente.

PROPOSITION 1. Le foncteur "extension des scalaires" de Mod A dans Mod B est égal à $G \circ F$.

Le problème de la descente que nous allons résoudre consiste à caractériser les morphismes $f : A \to B$ pour lesquels F est une équivalence de catégorie.

2. REMONTEE.

Avant d'aborder la descente, il nous faut construire un foncteur de $\mathfrak{D}$ dans la catégorie des objets simpliciaux, et donc dans celle des complexes. C'est cette construction qui assure le lien entre la définition 1 et les définitions antérieures.

Pour alléger les notations, appelons B^n la n-ième puissance tensorielle de B, i.e. $B^0 = A$ et $B^n = B \otimes B^{n-1}$ pour $n \geqslant 1$; en particulier, $B^1 = B$ compte tenu de l'identification mentionnée ci-dessus.

A toute donnée de descente (N,u) nous pouvons associer les applications suivantes :

1) Si $n > 0$ $\quad u_0^n = B^{n-1} \otimes u$, et si

$1 \leqslant i \leqslant n \quad u_i^n = B^{n-i} \otimes f \otimes B^{i-1} \otimes N$;

ce sont des applications de $B^{n-1} \otimes N$ dans $B^n \otimes N$.

2) Si $n \geqslant 0$ $\quad v_0^n = B^n \otimes p_N$ et si

$1 \leqslant i \leqslant n \quad v_i^n = B^{n-i} \otimes p_B \otimes B^{i-1} \otimes N$;

ce sont des applications de $B^{n+1} \otimes N$ dans $B^n \otimes N$. On a donc $u = u_0^1$ et $p_N = v_0^0$.

LEMME 1. Les relations suivantes sont vérifiées :

a) $v_0^0 \circ u_0^1 = id(N)$.

b) $u_0^2 \circ u_0^1 = u_1^2 \circ u_0^1$.

c) $u \circ p_N = (p_B \otimes N) \circ (B \otimes u)$.

d) $p_B \circ (p_B \otimes B) = p_B \circ (B \otimes p_B)$.

e) $p_N \circ (p_B \otimes N) = p_N \circ (B \otimes p_N)$.

f) $p_B \circ (f \otimes B) = p_B \circ (B \otimes f) = id(B)$.

Les deux premières relations résultent de la définition d'une donnée de descente, c) traduit la B-linéarité de u ; les relations d) et e) traduisent des propriétés du produit, et f) est évidente.

Un calcul simple, mais fastidieux et que nous omettrons donc, permet de déduire le théorème suivant du lemme 1.

THEOREME 1. 1) Les $B^n \otimes N$, les u_i^n et les v_i^n forment un objet simplicial c'est-à-dire que l'on a les relations

$$u_j^{n+1} \circ u_i^n = u_i^{n+1} \circ u_{j-1}^n \quad \text{pour } i < j .$$
$$v_j^n \circ v_i^{n+1} = v_i^n \circ v_{j+1}^{n+1} \quad \text{pour } i \leqslant j .$$
$$v_j^{n-1} \circ u_i^n = u_i^{n-1} \circ v_{j-1}^{n-2} \quad \text{pour } i < j .$$
$$v_i^{n-1} \circ u_i^n = v_i^{n-1} \circ u_{i+1}^n = id(B^{n-1} \otimes N) .$$
$$v_j^{n-1} \circ u_i^n = u_{i-1}^{n-1} \circ v_j^{n-2} \quad \text{pour } i > j+1 .$$

2) Si $\psi : (N,u) \to (N',u')$ est un morphisme de $\mathfrak{D}$, les $\psi^n = B^n \otimes \psi$ définissent un morphisme d'objets simpliciaux, c'est-à-dire que

$$\psi^n \circ u_i^n = u'^n_i \circ \psi^{n-1} \quad \text{et}$$
$$\psi^n \circ v_i^n = v'^n_i \circ \psi^{n+1} .$$

Conséquences :

a) Etant donné la donnée de descente $D = (N,u)$ considérée ci-dessus. Posons $d_n = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i u_i^n$. La suite $0 \to N \xrightarrow{d_1} B \otimes N \xrightarrow{d_2} B \otimes B \otimes N \to \ldots\ldots$ est un complexe, le complexe d'Amitsur de D , que nous noterons $\mathcal{C}(D)$.

b) Si $D = F(M)$, l'application canonique de M dans $N = B \otimes M$ définit une augmentation de $\mathcal{C}(D)$. Nous noterons $\mathcal{C}'(M)$ le complexe augmenté ainsi défini.

c) Posons $\mathcal{A} = \mathcal{C}'(A)$; c'est le complexe $0 \to A \xrightarrow{d_o} B \xrightarrow{d_1} B^2 \to \dots$ avec $d_o = f$ et $d_n = \sum_{i=o}^{n} (-1)^i B^i \otimes f \otimes B^{n-i}$.

On a $\mathcal{C}'(M) = \mathcal{A} \otimes M$.

PROPOSITION 2. La suite obtenue à partir de $D = (N,u)$:

$$0 \to N \xrightarrow{u} B \otimes N \xrightarrow{B \otimes d_1} B^2 \otimes N \to \dots \to B^n \otimes N \xrightarrow{B \otimes d_n} B^{n+1} \otimes N \to \dots$$

est un complexe homotopiquement trivial que nous noterons $\mathcal{C}^*(D)$.

Il est clair que $(B \otimes d_1) \circ u = 0$, et donc que u est une augmentation de $B \otimes \mathcal{C}(D)$. Il suffit donc de montrer que $h_o = p_N$ et $h_n = (-1)^n p_B \otimes B^{n-1} \otimes N$ vérifient les relations $h_o \circ u = id(N)$

$$[u \circ h_o] + [h_1 \circ (B \otimes d_1)] = id(B \otimes N)$$

et, pour $n \geqslant 1$, $$[(B \otimes d_n) \circ h_n] + [h_{n+1} \circ (B \otimes d_{n+1})] = id(B^n \otimes N) ;$$

ce calcul est aisé.

3. DESCENTE DES FLECHES-PURETE.

Rappelons qu'un homomorphisme de A-modules (à gauche) est dit pur (à gauche) s'il est injectif, et s'il reste injectif par toute A-tensorisation. Le but de ce paragraphe est de démontrer le théorème suivant :

THEOREME 2. Les conditions suivantes sont équivalentes :

a) $A \xrightarrow{f} B$ est un morphisme pur de A-modules à droite.

b) le foncteur F est fidèle.

c) le foncteur F est pleinement fidèle.

d) $\mathcal{A}$ est universellement acyclique à droite (i.e. $\mathcal{A}$ est acyclique, et le reste par toute A-tensorisation à droite).

En outre, ces conditions entraînent :

e) pour toute donnée de descente D , $\mathcal{C}(D)$ est acyclique en degré $\neq 1$ (on suppose que si $D = (N,u)$, on a posé $\mathcal{C}^1(D) = N$).

a) $\Longleftrightarrow$ d). On peut remarquer que a) n'est autre que l'acyclicité universelle de $\mathcal{A}$ en degré 0 ; donc d) $\Longrightarrow$ a). La réciproque se déduit immédiatement de la suite exacte d'homologie de la suite de foncteurs

$$0 \to \mathcal{A} \otimes M \to B \otimes \mathcal{A} \otimes M \to B/_A \otimes \mathcal{A} \otimes M \to 0$$

qui est exacte par a) et dont le terme central est homotopiquement trivial (proposition 2 appliquée à $\mathcal{C}^*(F(A))$). La démonstration de a) $\Longrightarrow$ e) ci-dessous permet de donner une démonstration plus élémentaire de a) $\Longrightarrow$ d).

a) $\Longrightarrow$ e). Considérons le diagramme :

$$\begin{tikzcd}
B^{n-1}\otimes N \arrow[r, "d_n"] \arrow[d, "f\otimes B^{n-1}\otimes N"'] & B^n\otimes N \arrow[r, "q"] \arrow[d, "f\otimes B^n\otimes N"'] & \mathrm{Coker}(d_n) \arrow[r] \arrow[d, "f\otimes \mathrm{Coker}(d_n)"'] & 0 \\
B^n\otimes N \arrow[r, "B\otimes d_n"] & B^{n+1}\otimes N \arrow[r, "B\otimes q"] & B\otimes \mathrm{Coker}(d_n) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Ses lignes sont exactes, et il est commutatif. Ses colonnes sont injectives par a).

Comme $d_{n+1} = f\otimes B^n\otimes N - B\otimes d_n$, si $d_{n+1}(x) = 0$, on a

$$((B\otimes q)\circ(f\otimes B^n\otimes N))(x) = ((f\otimes \mathrm{Coker}(d_n))\circ q)(x) = 0$$

et donc $q(x) = 0$, i.e. $x \in \mathrm{Im}(d_n)$, C.Q.F.D.

d) $\Longrightarrow$ c). Considérons le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & M \arrow[r, "f\otimes M"] & B\otimes M \arrow[r, "d_1"] \arrow[d, "\psi"] & B^2\otimes M \arrow[d, "B\otimes\psi"] \\
0 \arrow[r] & M' \arrow[r, "f\otimes M'"] & B\otimes M' \arrow[r, "d_1"] & B^2\otimes M'
\end{tikzcd}$$

défini par le morphisme de donnée de descente $\psi : F(M) \to F(M')$. Si $\mathcal{B}\otimes M$ et $\mathcal{B}\otimes N$ sont acycliques, i.e. si les lignes sont exactes, il est clair qu'il existe une flèche $\varphi : M \to M'$ et une seule qui rende le diagramme commutatif, telle que $\psi = B\otimes\varphi$.

b) $\Longrightarrow$ a). Soit K le noyau de $f\otimes M : M \to B\otimes M$, et $i : K \to M$ l'injection canonique. Il est immédiat que $B\otimes i = 0$, et donc que $i = 0$ si F est fidèle. Donc $f\otimes M$ est une injection.

4. DESCENTE DES OBJETS.

Le but de ce paragraphe est de chercher à quelle condition F est une équivalence de catégories. D'après ce qui précède, il est nécessaire que f soit pur à droite.

Supposons donc que F soit une équivalence, et soit $D = (N,u)$ une donnée de descente. Si $D = F(M)$, le théorème 2 implique que la suite

$$0 \longrightarrow M \longrightarrow N \xrightarrow{d_1} B \otimes N$$

est exacte. On a donc $M = \ker d_1$.

<u>PROPOSITION 3. Si f est pur à droite et si, pour toute donnée de descente (N,u) , la suite</u>

$$0 \longrightarrow B \otimes \ker d_1 \longrightarrow B \otimes N \xrightarrow{B \otimes d_1} B^2 \otimes N$$

<u>est exacte, alors F est une équivalence.</u>

Soit M le noyau de $d_1 = f \otimes N - u$, et $i : M \to N$ l'injection canonique. Appelons $i^* : B \otimes M \to N$ l'application déduite de i . Un calcul simple utilisant la B-linéarité de u montre que :

$$u \circ i^* = B \otimes i \ .$$

L'hypothèse et la proposition 2 montrent que i^* est un isomorphisme entre deux noyaux de $B \otimes d_1$. Il reste à montrer que i^* définit un isomorphisme de données de descentes de $F(M)$ dans (N,u), i.e. que le diagramme suivant commute

$$\begin{array}{ccc} B \otimes M & \xrightarrow{B \otimes f \otimes N} & B \otimes B \otimes M \\ \downarrow{\scriptstyle i^*} & & \downarrow{\scriptstyle B \otimes i^*} \\ N & \xrightarrow{\quad u \quad} & B \otimes N \ . \end{array}$$

On a $u \circ i^*(b \otimes m) = u(bi(m)) = b(u \circ i)(m)$

$$((B \otimes i^*) \circ (B \otimes f \otimes M))(b \otimes m) = b \otimes i(m) = b((f \otimes N) \circ i)(m) \ .$$

Il y a bien égalité, car, par définition de i , on a $d_1 \circ i = 0$.

<u>PROPOSITION 4. Pour que f soit fidèlement plat, il faut et il suffit qu'il soit pur et plat. Si ces conditions sont remplies F est une équivalence.</u>

Il est bien connu que si F est fidèlement plat il est pur. Le théorème 2 montre réciproquement que si f est pur et plat, l'extension des scalaires est un foncteur fidèle, et donc f est fidèlement plat.

La dernière assertion est une conséquence immédiate de la proposition 3.

THEOREME 3. Supposons que f soit pur et vérifie la condition suivante : Pour toute suite exacte $0 \longrightarrow E \xrightarrow{j} F \xrightarrow{k} G \longrightarrow 0$ de A-modules telle que $B \otimes k$ admette une section, l'homomorphisme $B \otimes j$ est injectif. Alors F est une équivalence.

Considérons une donnée de descente (N,u). On peut appliquer la condition du théorème à :

$$0 \longrightarrow \mathrm{Im}\, d_1 \longrightarrow B \otimes N \longrightarrow \mathrm{Coker}\, d_1 \longrightarrow 0$$

car $\mathrm{Coker}(B \otimes d_1) = B \otimes \mathrm{Coker}(d_1)$ et car $\mathcal{C}^*(N,u)$ est homotopiquement trivial. On en déduit que :

$$B \otimes \mathrm{Im}\, d_1 = \mathrm{Im}(B \otimes d_1) .$$

On peut donc appliquer l'hypothèse du théorème à :

$$0 \longrightarrow \ker d_1 \longrightarrow N \longrightarrow \mathrm{Im}\, d_1 \longrightarrow 0$$

pour en déduire que la suite

$$0 \longrightarrow B \otimes \ker d_1 \longrightarrow B \otimes N \longrightarrow \mathrm{Im}(B \otimes d_1) \longrightarrow 0$$

est exacte, ce qui permet d'appliquer la proposition 3.

THEOREME 4. F est une équivalence dans chacun des cas suivants :

1) f est bi-pur (voir ci-dessous).

2) f est pur à droite, A est commutatif et $f(A)$ est contenu dans le centre de B.

3) f est fidèlement plat à droite.

Nous avons déjà démontré le 3). Nous verrons au paragraphe suivant que 2) est un cas particulier de 1), et que l'hypothèse du théorème 3 est vérifiée si f est bi-pur.

Remarque : Dans [4] , Olivier semble démontrer que F est une équivalence si A est commutatif et f pur à droite. Mais sa démonstration est erronée.

5. BI-PURETE. DEMONSTRATION DU THEOREME 4.

Soit C un sous-anneau du centre de A contenu dans l'image réciproque par $f: A \to B$ du centre de B. On peut considérer f comme un homomorphisme de $A^\circ \otimes_C A$-modules à droite, la multiplication d'un élément x de A (resp. B) par un élément $a \otimes a'$ de $A^\circ \otimes_C A$ étant définie par $x(a \otimes a') = axa'$.

PROPOSITION 5 et DEFINITION : Les conditions suivantes sont équivalentes :

i) f est $A^\circ \otimes_C A$-pur ;

ii) f est $A^\circ \otimes_{\mathbf{Z}} A$-pur ;

Si ces conditions sont remplies, nous dirons que f est bi-pur.

Si f est bi-pur, il est pur à droite et pur à gauche.

Cela résulte immédiatement du lemme suivant appliqué aux homomorphismes $A \longrightarrow A^\circ \otimes_{\mathbf{Z}} A$, $A^\circ \longrightarrow A^\circ \otimes_{\mathbf{Z}} A$ et $A^\circ \otimes_C A \longrightarrow A^\circ \otimes_{\mathbf{Z}} A$.

LEMME 2. : Soit $u: E \to F$ un homomorphisme de S-modules et $\theta: R \to S$ un homomorphisme d'anneaux.

i) Si u est S-pur, il est R-pur (par restriction des scalaires) ;

ii) Si θ est un épimorphisme, et si u est R-pur, il est S-pur.

Si X est un S-module à gauche et Y un R-module à droite, l'isomorphisme $Y \otimes_R X \simeq (Y \otimes_R S) \otimes_S X$ montre i). Si X est un S-module à gauche et Y un S-module à droite, on déduit ii) de l'isomorphisme :

$$Y \otimes_S X \simeq Y \otimes_S S \otimes_S X \simeq Y \otimes_S S \otimes_R S \otimes_S X \simeq Y \otimes_R X .$$

COROLLAIRE : Si A est commutatif et si $f(A)$ est contenu dans le centre de B, la bi-pureté de f coïncide avec la pureté de f.

Il suffit de remarquer que si $C = A$, on a $A^\circ \otimes_C A = A$.

PROPOSITION 6. Soient $\theta: C \to R$ et $\theta': C \to S$ deux homomorphismes d'anneaux tels que C soit commutatif et que $\theta(C)$ et $\theta'(C)$ soient contenus dans les centres de R et de S. Soient $u: M \to N$ un homomorphisme pur de $R^\circ \otimes_C S$-modules à droite et $p: X \to Y$ un homomorphisme surjectif de S-modules à gauche. Si $\ker(N \otimes_S p) \to N \otimes_S X$ est R-pur à gauche, il en est de même de

$\ker(M \otimes_S p) \to M \otimes_S X$.

Il est connu et facile que le foncteur $T = \mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}}(\cdot, \mathbf{Q}/\mathbf{Z})$ est exact et fidèle de $\mathrm{Mod}(R)$ dans $\mathrm{Mod}(R^o)$ et, pour qu'une injection R-linéaire v soit pure, il faut et il suffit que $T(v)$ admette une section R^o-linéaire. Soit donc u' une section $R \otimes_C S^o = (R^o \otimes_C S)^o$-linéaire de $T(u)$. On peut écrire le diagramme commutatif de R-modules à gauche suivant :

$$\begin{array}{ccc}
T(M \otimes_S Y) = \mathrm{Hom}_S(Y, T(M)) & \xrightarrow{\mathrm{Hom}_S(Y,u')} & T(N \otimes_S Y) = \mathrm{Hom}_S(Y, T(N)) \\
\Big\downarrow {\scriptstyle T(M \otimes_S p)} & & \Big\downarrow {\scriptstyle T(N \otimes_S p)} \\
T(M \otimes_S X) = \mathrm{Hom}_S(X, T(M)) & \xrightarrow{\mathrm{Hom}_S(X,u')} & T(N \otimes_S X) = \mathrm{Hom}_S(X, T(N))
\end{array}$$

Les hypothèses nous disent que toutes les flèches sont injectives, et que la deuxième colonne et la première ligne admettent des rétractions R-linéaires. Il en est donc de même de $T(M \otimes_S p)$, ce qui démontre la proposition.

Nous pouvons maintenant démontrer le théorème 4 : L'assertion 2 se déduit de l'assertion 1 grâce au problème de la proposition 5. L'assertion 1 s'obtient ainsi : Si, avec les notations du théorème 3, $B \otimes k$ admet une section, l'homomorphisme $\ker(B \otimes k) \to B \otimes F$ est A-pur. En appliquant la proposition 6 avec $R = S = M = A$, $N = B$, $u = f$, $X = F$, $Y = G$, $p = k$, on voit que j est pur, et donc que $B \otimes j$ est injectif.

6. EXEMPLES.

Le but de ce paragraphe est de montrer que les différentes notions que nous avons introduites pour les morphismes d'anneaux sont bien distinctes, et en particulier de construire

1) Un morphisme d'anneaux fidèlement plat à gauche et à droite, scindé en tant que morphisme de modules à gauche (resp. à droite). Cet exemple montrera l'existence de morphismes de descentes qui ne sont pas bipurs.

2) Un morphisme scindé en tant que modules à gauche et en tant que modules à droite, mais ni bipur, ni plat à gauche, ni plat à droite.

3) Des exemples montrant que les propriétés "à gauche" considérées, sont complètement indépendantes des propriétés "à droite".

Pour construire ces exemples, nous partons de deux anneaux R et S ; à tout R-S-bimodule ($R \otimes S^o$-module à gauche) E, nous associons l'anneau

$\bar{\bar{E}} = \begin{pmatrix} R & E \\ 0 & S \end{pmatrix}$ des matrices $\begin{pmatrix} r & e \\ o & s \end{pmatrix}$ telles que $r \in R$, $s \in S$ et $e \in E$, muni de la multiplication habituelle des matrices. Si f est une application R-S-linéaire de E dans F, on en déduit clairement une application $\bar{\bar{f}}$ de $\bar{\bar{E}}$ dans $\bar{\bar{F}}$ qui est un homomorphisme d'anneau.

LEMME 3. f injectif (resp. surjectif) équivaut à $\bar{\bar{f}}$ injectif (resp. surjectif).

LEMME 4. $\bar{\bar{E}}^o = \begin{pmatrix} S^o & E^o \\ 0 & R^o \end{pmatrix}$, en désignant par A^o l'anneau opposé à l'anneau A et par E^o le S^o-R^o-bimodule déduit de E.

C'est clair ; le lemme 4 va nous permettre de ne pas considérer les propriétés "à droite" qui se déduisent immédiatement des propriétés "à gauche".

PROPOSITION 7. $\bar{\bar{f}}$ fidèlement plat à gauche équivaut à f injectif et coker f plat sur R.

Soit $f : E \to F$ et $G = \operatorname{coker} f$. Il faut montrer que la platitude de G sur R équivaut à la platitude à gauche de $\operatorname{coker} \bar{\bar{f}} = \begin{pmatrix} 0 & G \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ sur $\bar{\bar{E}}$.

$\begin{pmatrix} 0 & G \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ est annulé à gauche par $\begin{pmatrix} 0 & E \\ 0 & S \end{pmatrix}$. C'est donc un $R = \bar{\bar{E}}/\begin{pmatrix} 0 & E \\ 0 & S \end{pmatrix}$-module à gauche, ce qui permet d'identifier G et $\begin{pmatrix} 0 & G \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Si G est $\bar{\bar{E}}$ plat, il est aussi R-plat, car ce qui précède montre que $X \otimes_R G = X \otimes_{\bar{\bar{E}}} G$ pour tout R-module à droite X (qui est un $\bar{\bar{E}}$-module par restriction des scalaires).

Réciproquement, pour tout $\bar{\bar{E}}$-module à droite Y, on a $Y \otimes_{\bar{\bar{E}}} G = Y \otimes_{\bar{\bar{E}}} R \otimes_R G$. Pour montrer que G est $\bar{\bar{E}}$-plat quand G est R-plat, il suffit de montrer que R est $\bar{\bar{E}}$-projectif à gauche ; ceci est immédiat car $\bar{\bar{E}} = \begin{pmatrix} R & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 0 & E \\ 0 & S \end{pmatrix}$ en tant que $\bar{\bar{E}}$-modules à gauche.

LEMME 5. Soient X et Y des $\bar{E}$-$\bar{E}$-bimodules. Posons $e_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ (e_1 et e_2 appartiennent à $\bar{E}$).

1) X est somme directe des 4 sous-groupes $X_{ij} = e_i X e_j$, ce qui permet de considérer les éléments de X comme des matrices 2×2.

2) $X_{ej} = X_{1,j} \oplus X_{2,j}$ (resp. $e_j X = X_{j1} \oplus X_{j2}$) est un sous-module à gauche (resp. à droite) de X.

3) Une application linéaire à gauche (resp. à droite) de X dans Y envoie $e_j X$ dans $e_j Y$ (resp. Xe_j dans Ye_j).

4) Une application linéaire à gauche et à droite de X dans Y envoie X_{ij} dans Y_{ij}.

Toutes les assertions sont triviales.

LEMME 6. Avec les notations du lemme précédent, soit f une application de X dans Y linéaire à gauche et à droite. Si f admet une rétraction (resp. une section) linéaire à gauche (resp. à droite), on peut choisir cette rétraction (resp. cette section) g de manière que $g(Y_{ij}) \subset X_{ij}$.

Soit g' une section (resp. rétraction) linéaire à gauche quelconque. On peut écrire $g' = g_{11}+g_{12}+g_{21}+g_{22}$, en désignant par g_{ij} l'application composée de la projection de Y sur Ye_j, d'une application linéaire à gauche de Ye_j dans Xe_i, et de l'injection de Xe_i dans X. Posons $g = g_{11}+g_{22}$. En raison du choix de g et de l'assertion 3 du lemme précédent, on a $g(Y_{ij}) \subset X_{ij}$. En raison de l'assertion 4 du même lemme, si g' est une rétraction (resp. une section) de f, il en est de même de g.

PROPOSITION 8. Soit $f : E \to F$ un morphisme injectif le R-S-bimodules

1) Pour que $\bar{f}$ admette une rétraction $\bar{E}$-linéaire à gauche (resp. à droite, à gauche et à droite), il faut et il suffit que f admette une rétraction R-linéaire (resp. S-linéaire, $R \otimes S^o$-linéaire).

2) Pour que $\bar{f}$ soit pur à gauche (resp. à droite, bipur), il faut et il suffit que f soit R-pur (resp. S-pur, $R \otimes S^o$-pur).

1) Il faut d'abord remarquer que si $g:F \to E$ est une rétraction de $f:E \to F$, l'application $\bar{g}:\bar{F} \to \bar{E}$ est une rétraction de $\bar{f}$ linéaire si et seulement si g l'est aussi ; en effet :

$$\begin{pmatrix} r & e \\ o & s \end{pmatrix} \bar{g} \begin{pmatrix} r' & x \\ o & s' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} rr' & rg(x)+es' \\ o & ss' \end{pmatrix}$$

et
$$\bar{g}\left(\begin{pmatrix} r & e \\ o & s \end{pmatrix}\begin{pmatrix} r' & x \\ o & s' \end{pmatrix}\right) = \bar{g}\begin{pmatrix} rr' & rx+f(e)s' \\ o & ss' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} rr' & g(rx)+es' \\ o & ss' \end{pmatrix}.$$

Réciproquement, si g' est une rétraction de $\bar{f}$, en raison du lemme 5, 4) ou du lemme 6, on peut supposer que $g'\begin{pmatrix} 0 & F \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \subset \begin{pmatrix} 0 & E \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, et donc que $g' = \bar{g}$, pour un certain g.

2) Posons $X^* = \mathrm{Hom}(X, \mathbb{Q}/_{\mathbb{Z}})$ pour tout X. On a vu qu'un morphisme f est pur si et seulement si f^* admet une section. La deuxième assertion se démontre en décomposant E^* et F^* comme dans le lemme 5, et en effectuant un calcul analogue à celui de la première assertion.

Nous sommes maintenant en mesure d'énoncer nos exemples.

<u>EXEMPLE 1.</u> Un morphisme d'anneaux fidèlement plat à gauche et à droite, scindé en tant que morphisme de modules à gauche (resp. à droite), mais non bipur.

Soit C un corps commutatif, posons $R = C[X]$, $S = C[Y]$, $T = R \otimes_C S^o = C[X,Y]$. Prenons pour F le T-module $T/(X^2-XY, Y^2-XY)$, et pour E le sous-T-module de F engendré par l'image de $X+Y$. Il est clair que $F = E \oplus R$ en tant que R-modules à gauche et que $F = E \oplus S$ en tant que S-modules à droite. D'autre part, si i désigne l'injection canonique de E dans F, l'application $(R/XR) \otimes_R i \otimes_S (S/YS)$ est nulle, sans être injective puisque $(R/XR) \otimes_R E \otimes_S (S/YS) \simeq T/(X,Y)$ est non nul. Ceci montre que i n'est pas T-pur.

Posons $A = \bar{E}$, $B = \bar{F}$, $f = \bar{i}$; l'étude qui précède montre que f admet une rétraction A-linéaire à gauche et une rétraction A-linéaire à droite, que B est fidèlement plat à gauche et à droite, mais que f n'est pas bipur.

REMARQUE : On voit aisément que $i = A/\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & S \end{pmatrix} \otimes f \otimes A/\begin{pmatrix} R & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Posons $M = (R/XR) \otimes_R (A/\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & S \end{pmatrix})$ et $N = (A/\begin{pmatrix} R & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}) \otimes_S (S/YS)$. Ce qui précède montre que f est pur à droite et à gauche, mais que $M \otimes_A f \otimes_A N$ n'est pas une injection, contrairement à ce que l'on aurait pu attendre.

EXEMPLE 2. Un morphisme d'anneau scindé (et donc pur) à gauche et à droite, mais ni bipur ni fidèlement à gauche ou à droite.

Il suffit, dans l'exemple précédent de remplacer F par $T/(X^2,XY,Y^2)$ et de prendre pour E le sous-module engendré par l'image de $X+Y$. Comme $F/E \simeq C$, ce module n'est ni R-plat, ni S-plat. On obtient l'exemple cherché en procédant comme dans l'exemple précédent.

REMARQUE : Nous ignorons si le morphisme obtenu est un morphisme de descente (cf. ci-dessous).

Pour montrer que les notions "à gauche" et "à droite" considérées sont indépendantes, il suffit de remplacer R ou S par T dans les exemples précédents.

7. DICTIONNAIRE.

Comme nous avons fixé le morphisme f une fois pour toute, nous n'avons pas eu besoin de la terminologie habituelle que nous rappelons ici.

a) Si F est fidèle, on dit que f descend l'égalité des flèches, ou que f est un morphisme de 0-descente.

b) Si F est pleinement fidèle, on dit que f descend les flèches, ou que f est un morphisme de 1-descente.

c) Si F est génériquement surjectif, on dit que f descend les objets.

d) Si F est une équivalence, on dit que f est un morphisme de descente ou un morphisme de 2-descente, ou encore un morphisme de descente effective universelle, si, en algèbre commutative, on veut exprimer que f reste un morphisme de descente par toute extension des scalaires.

BIBLIOGRAPHIE

[1] BENABOU, Monades et descente. C.R. Acad. Sc. Paris,t. 270, pp. 96.98 (12 Janvier 1970).

[2] GROTHENDIECK, Catégories fibrées et descente. Séminaire Bourbaki, 1959.

[3] GRUSON-RAYNAUD, Critères de platitude et de projectivité. Inventiones Math., 13, pp. 1-89 (1971).

[4] OLIVIER, Encore une variation sur le théorème de Beck (Notes multigraphiées à l'Université de Montpellier).

-:-:-:-:-:-

PROPOSITION 2.3. : $K\langle(X)\rangle$ est factoriel rigide.

Preuve : Elle découle immédiatement du fait que $K\langle(X)\rangle$ est 1-inerte dans $K\langle\langle X\rangle\rangle$, qui est factoriel rigide.

On en déduit que $K\langle(X)\rangle$ est un 2-fir, mais l'on peut montrer davantage.

PROPOSITION 2.4.(1) : $K\langle(X)\rangle$ est un semi-fir.

Preuve : Soit une relation de la forme :

$$r_1 r'_1 + \ldots + r_n r'_n = 0$$

où $r_1, r'_1, \ldots, r'_n \in K\langle(X)\rangle$. Soit f_o un mot de longueur minimale tel qu'il existe un indice $i \in \{1, \ldots, n\}$ vérifiant $(r_i, f_o) \neq 0$. Appliquons τ_{f_o} aux deux membres de la relation ; de même que dans la preuve du lemme 2.1., on en déduit :

$$r'_i = \sum_{j \neq i} r_j r''_j$$

où $r''_j \in K\langle(X)\rangle$. La relation peut donc être trivialisée au sens de Cohn ([1], Chap. 1, § 1), ce qui prouve l'assertion.

III. COMMUTANT.

Les commutants, ou centralisateurs, c'est-à-dire les ensembles d'éléments qui commutent avec un élément donné, ont été étudiés, pour $K\langle\langle X\rangle\rangle$, par Cohn ([2], p. 244) et, pour $K\langle X\rangle$ par Bergman [1] (voir aussi Cohn ([2], p. 246)) : le commutant d'un élément de $K\langle\langle X\rangle\rangle$ (resp. $K\langle X\rangle$) est isomorphe à un anneau de séries formelles (resp. polynômes formels) en une indéterminée, à coefficients dans K.

On obtient un résultat analogue pour $K\langle(X)\rangle$ dans le cas particulier des séries d'images commutatives non scalaires, c'est-à-dire telle que, si α désigne l'épimorphisme canonique de $K\langle\langle X\rangle\rangle$ sur $K[[X]]$, les images par α ne soient pas réduites à des éléments de K.

L'auteur ne sait pas résoudre le problème dans le cas général.

PROPOSITION 3.1. : Le commutant d'une série de $K\langle(X)\rangle$ d'image commutative non scalaire est isomorphe à un anneau de séries formelles rationnelles en une indéterminée à coefficients dans K.

(1) Communication personnelle de P.M. COHN.