UNIVERSITÉ PARIS XI
U.E.R. MATHÉMATIQUE
91405 ORSAY FRANCE

N^{os} 154 - 7543

SEMINAIRE D'ALGEBRE NON COMMUTATIVE

1975

(Publications mathématiques d'Orsay)

SEMINAIRE D'ALGEBRE NON COMMUTATIVE

Année 1974-1975

-:-:-:-:-:-:-

TABLE DES MATIERES

-:-:-:-:-:-

UNIVERSITE DE PARIS-SUD

CENTRE D'ORSAY

SEMINAIRE D'ALGEBRE NON COMMUTATIVE

Conférence n° 1 du 4 Novembre 1974

THEOREME DE GRUSON ET APPLICATIONS

par J.M. GOURSAUD

- non rédigée -

UNIVERSITE DE PARIS SUD

CENTRE D'ORSAY

-:-:-:-

SEMINAIRE D'ALGEBRE NON COMMUTATIVE

Conférence n° 2 du 25 Novembre 1974

TRAVAUX SUR UNE CONJECTURE DE JACOBSON

par G. CAUCHON

-:-:-:-

INTRODUCTION.

Dans ce travail, nous améliorons les résultats relatifs à la conjecture de Jacobson [6] :

"Si A est un anneau Noethérien, de radical de Jacobson J, alors $\bigcap_{n=1}^{+\infty} J^n = 0$", que nous avons publiés dans [4] et [5].

Nous présentons également les travaux relatifs à cette même conjecture, dus à Jategaonkar [8], Schelter [10] et Boratynski [1]. Ceux-ci n'étaient pas connus de l'auteur lors de la rédaction de [4] et [5]. Nous comparons nos résultats et nos méthodes à ceux de ces divers algébristes.

I. GENERALITES.

Tous les anneaux considérés dans cet exposé sont unitaires, de même que tous les modules qui, sauf mention expresse du contraire, sont considérés à gauche.

Etant donné un anneau A et un A-module M, on note $\underline{\mathbb{P}(M)}$ l'ensemble des annulateurs premiers des sous-modules de M :

$$\mathbb{P}(M) = \{ \mathfrak{P} \text{ idéal premier de } A \mid \exists N \subseteq M \text{ tel que } \mathfrak{P} = (0 \cdot. N)\}.$$

On dit qu'un A-module P est premier s'il est non nul et si, pour tout sous-module non nul N de P, on a :

$$(0 \cdot. N) = (0 \cdot. P).$$

Il est immédiat que, pour tout module premier P, l'idéal bilatère $\mathfrak{P} = (0 \cdot. P)$ est premier.

On désigne alors, pour tout A-module M, par $\underline{\mathrm{Ass}(M)}$, l'ensemble des annulateurs des sous-modules premiers de M.

On a, évidemment, pour tout module M :

$$\mathrm{Ass}(M) \subseteq \mathbb{P}(M).$$

Rappelons (voir [9]) qu'un anneau A est un T-anneau à gauche si :

1) A est Noethérien à gauche.

2) Si nous désignons par $\mathrm{Spec}(A)$ l'ensemble des types de A-modules à gauche injectifs indécomposables, et par $\mathrm{Spep}(A)$ l'ensemble des idéaux premiers de A ; l'application canonique $\mathrm{Spec}(A) \to \mathrm{Spep}(A)$ qui au type de l'injectif indécomposable E associe l'unique idéal de $\mathrm{Ass}(E)$, est bijective.

Cette application étant toujours surjective, il revient au même de dire qu'elle est injective, c'est-à-dire que, étant donnés deux injectifs indécomposables E_1 et E_2 , on a :

$$(\mathrm{Ass}(E_1) = \mathrm{Ass}(E_2)) \Longrightarrow (E_1 \simeq E_2).$$

On définit symétriquement la notion de T-anneau à droite.

Les T-anneaux à gauche forment une très vaste classe d'anneaux Noethériens à gauche comprenant en particulier les anneaux commutatifs Noethériens, et les anneaux à identité polynômiale, Noethériens à gauche.

Ils possèdent d'intéressantes propriétés, et en particulier la suivante ([3] proposition 1) :

PROPOSITION I 1 : Soit A un T-anneau à gauche et soit M un A-module de type fini.

Alors $\mathbb{P}(M) = \mathrm{Ass}(M)$.

Remarquons d'ailleurs qu'on ne connait pas d'anneau A Noethérien à gauche, tel qu'on puisse trouver un A-module M de type fini, avec $\mathbb{P}(M) \supsetneq \mathrm{Ass}(M)$.

Parlons maintenant de la conjecture de Jacobson qui a motivé ce travail.

Jacobson a posé dans [6] le problème suivant :

Soit A un anneau Noethérien à gauche, de radical de Jacobson J. A-t-on

$$\bigcap_{n=1}^{+\infty} J^n = 0 \ ?$$

On sait grâce à un contre-exemple de Herstein [9], que la réponse est négative. Il s'agit du contre-exemple suivant :

Soit p un nombre premier, soit $\mathbb{Z}_p$ le localisé de $\mathbb{Z}$ par rapport à p et soit $\mathbb{Q}$ le corps des rationnels.

L'anneau $A_H = \begin{pmatrix} \mathbb{Z}_p & \mathbb{Q} \\ 0 & \mathbb{Q} \end{pmatrix}$ est Noethérien à gauche, de radical de Jacobson $J = \begin{pmatrix} P\mathbb{Z}_p & \mathbb{Q} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $\bigcap_{n=1}^{+\infty} J^n = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{Q} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq 0$. On constate que l'anneau A_H n'est pas Noethérien à droite et que l'idéal $J^\omega = \bigcap_{n=1}^{+\infty} J^n$ est nilpotent.

Ces phénomènes ont conduit Herstein à poser les questions suivantes :

<u>Question 1</u> : Si A est un anneau Noethérien des deux côtés, de radical de Jacobson J, a-t-on $\bigcap_{n=1}^{+\infty} J^n = 0$?

<u>Question 2</u> : Si A est un anneau Noethérien à gauche, de radical de Jacobson J, l'idéal $J^\omega = \bigcap_{n=1}^{+\infty} J^n$ est-il nilpotent ?

On sait que la réponse à cette seconde question est encore négative. Jategaonkar a, en effet, construit dans [7] un anneau A_J, intègre, dans lequel tout idéal à gauche est à la fois bilatère et principal. Cependant, si J désigne le radical de Jacobson de cet anneau, l'idéal $J^\omega = \bigcap_{n=1}^{+\infty} J^n$ n'est pas nilpotent.

Jategaonkar ne signale pas si l'anneau A_J qu'il a ainsi construit est Noethérien à droite. On sait aujourd'hui, compte tenu des résultats de [4], qu'il n'en est rien. De sorte que la question 1 reste un problème ouvert.

Par ailleurs l'anneau A_J ne vérifie aucune identité polynômiale (tout idéal bilatère propre de A_J ne contient aucun élément central), et la question 2 reste un problème ouvert dans le cas des anneaux à identité polynômiale.

En conclusion, les problèmes suivants demeurent. Ce sont actuellement des problèmes ouverts :

<u>Problème 1.</u> (Conjecture de Jacobson-Herstein) :

Si A est un anneau Noethérien des deux côtés, de radical de Jacobson J, a-t-on $\bigcap_{n=1}^{+\infty} J^n = 0$?

*Problème 2.

Si A est un anneau Noethérien à gauche, à identité polynômiale, de radical de Jacobson J, l'idéal $J^{\omega} = \bigcap_{n=1}^{+\infty} J^n$ est-il nilpotent ?

Et, en particulier :

*Problème 3 :

Si A est un anneau Noethérien à gauche, à identité polynômiale, premier, de radical de Jacobson J, a-t-on $\bigcap_{n=1}^{+\infty} J^n = 0$?

Remarque : Les anneaux A_J et A_H de Jacobson et Herstein sont des T-anneaux à gauche. Il résulte de [4] que le problème 1 est résolu par l'affirmative dans le cas où A est un T-anneau à gauche.

II. RESULTATS DE L'AUTEUR.

Nous avons établi dans [4] et [5], le résultat suivant :

THEOREME II 1 : Soit A un anneau Noethérien des deux côtés, de radical de Jacobson J. Une condition suffisante pour que $\bigcap_{n=1}^{+\infty} J^n = 0$ est que A soit un T-anneau à gauche.

Rappelons que la démonstration de ce théorème est très courte, moyennant la connaissance des deux résultats suivants :

*L'auteur a résolu récemment, et par l'affirmative, les problèmes 2 et 3 (en Décembre 1974), grâce à l'établissement du résultat suivant :

Tout anneau semi-premier, à identité polynômiale et Noethérien bilatère, est Noethérien des deux côtés.

THEOREME II 2 : ([2] et [3]) : Tout T-anneau à gauche A satisfait à la condition (H) de Gabriel suivante :

Pour tout A-module de type fini M, il existe une partie finie $\{m_1, \dots, m_n\}$ de M telle que :

$$(0^{\cdot}.M) = (0^{\cdot}.m_1) \cap \dots \cap (0^{\cdot}.m_n).$$

LEMME II 3 : [4] : Si A est un anneau Noethérien des deux côtés et si a est un élément de son radical de Jacobson, alors

$$\bigcap_{n=1}^{+\infty} Aa^n = 0.$$

En fait, on peut améliorer le théorème II 1 et approcher plus fortement la conjecture de Jacobson-Herstein :

THEOREME II 4 : Soit A un anneau Noethérien des deux côtés, de radical de Jacobson J.

On fait deux hypothèses à gauche :

H_1 : Pour tout idéal primitif à gauche $\mathfrak{P}$ de A, le quotient $A/\mathfrak{P}$ est un anneau simple.

H_2 : Pour tout A-module à gauche M de type fini, extension essentielle d'un sous-module simple, on a $\mathbb{P}(M) = \mathrm{Ass}(M)$.

Alors : $\bigcap_{n=1}^{+\infty} J^n = 0.$

Remarques : Nous avons vu dans les généralités que l'hypothèse H_2 est satisfaite si A est un T-anneau à gauche et même qu'on ne connait pas d'anneau Noethérien à gauche qui n'y satisfait pas.

Le lecteur vérifiera aisément que l'hypothèse H_1 est équivalente à la suivante :

H_1' : Tout idéal primitif à gauche $\mathfrak{P}$ de A est associé à un seul type d'injectivité indécomposable, c'est-à-dire :

quels que soient E_1 et E_2 injectifs indécomposables,

$$\mathrm{Ass}(E_1) = \mathrm{Ass}(E_2) = \{\mathfrak{P}\} \Longrightarrow E_1 \simeq E_2 .$$

Il est clair qu'il est moins restrictif de faire cette hypothèse que de supposer que A est un T-anneau à gauche ; puisque A est un T-anneau à gauche si et seulement si l'hypothèse H_1' est satisfaite pour tous les idéaux premiers de A (et pas seulement pour les idéaux primitifs à gauche).

Démonstration du théorème II 4 :

Soit $\mathfrak{B}$ un idéal bilatère de A, complètement $\cap$-irréductible en tant qu'idéal bilatère, c'est-à-dire tel que, pour toute famille $(\mathfrak{B}_i)_{i \in I}$ d'idéaux bilatères de A, on ait :

$$[(\forall i \in I)(\mathfrak{B}_i \underset{\neq}{\supset} \mathfrak{B})] \Longrightarrow [\bigcap_{i \in I} \mathfrak{B}_i \underset{\neq}{\supset} \mathfrak{B}].$$

Montrons que l'anneau quotient $A/\mathfrak{B}$ est extension essentielle à gauche de son socle à gauche.

Considérons, pour ceci, un idéal à gauche I de A, maximal pour la propriété suivante :

$\mathfrak{B}$ est le plus grand idéal bilatère contenu dans I.

Il est clair que I est complètement $\cap$-irréductible en tant qu'idéal à gauche ; de sorte que $M = A/I$ est extension essentielle d'un sous-module simple.

Soit $\mathfrak{P} \in \mathrm{Ass}(A/\mathfrak{B})$. Il existe un idéal bilatère $\mathfrak{B}' \underset{\neq}{\supset} \mathfrak{B}$ tel que :

$$\mathfrak{P} = (\mathfrak{B} \cdot\!. \mathfrak{B}') = [(I \cdot\!. A) \cdot\!. \mathfrak{B}'] = (I \cdot\!. \mathfrak{B}') = [0 \cdot\!. (\mathfrak{B}'+I/I)].$$

Donc $\mathfrak{P} \in \mathbb{P}(M)$.

Or, compte tenu de H_2, $\mathbb{P}(M) = \mathrm{Ass}(M)$ est réduit à un seul idéal qui est primitif. Il en est donc de même pour $\mathrm{Ass}(A/\mathfrak{B})$ qui coïncide alors avec $\mathrm{Ass}(M)$.

Donc le A-module à gauche $X = A/\mathfrak{B}$ est $\mathfrak{P}$-tertiaire, où $\mathfrak{P}$ est un idéal primitif à gauche de A.

X est de type fini, donc $X' = (0 \cdot\!. \mathfrak{P})_X$ est essentiel dans X. (voir [11] pour la théorie de la décomposition tertiaire). L'anneau quotient $A/\mathfrak{P}$ est simple d'après H_1 et, par suite, le module X' est semi-simple.

Donc $A/\mathfrak{B} = X$ est bien extension essentielle à gauche de son socle à gauche.

On en déduit facilement, en appliquant le lemme II 3 et le théorème de Levitzki à l'anneau quotient $A/\mathfrak{B}$, que $\mathfrak{B}$ contient une puissance de J.

Comme l'intersection de tous les idéaux bilatères, complètement $\cap$-irréductibles de A est réduit à 0, on a bien : $\bigcap_{n=1}^{+\infty} J^n = 0$.

Remarques : Contrairement à la démonstration du théorème II 1, on n'utilise pas ici la condition (H) de Gabriel. Cependant, on retrouve les techniques qui nous ont permis de démontrer cette condition. En fait, on peut démontrer, grâce à ces techniques, le résultat suivant qui étend la portée de la condition (H) de Gabriel :

PROPOSITION II 5 : Soit A un anneau Noethérien à gauche et soit M un A-module co-irréductible tel que $\mathbb{P}(M) = \mathrm{Ass}(M) = \{\mathfrak{P}\}$.

On suppose que l'idéal premier $\mathfrak{P}$ est associé à un seul type d'injectif indécomposable.

Alors il existe un sous-ensemble fini $\{m_1, \ldots, m_n\}$ de M, tel que

$$(0 \cdot . M) = (0 \cdot . m_1) \cap \ldots \cap (0 \cdot . m_n).$$

(On a même le résultat plus fort suivant : les annulateurs des sous-ensembles de M satisfont à la condition de chaîne descendante).

La connaissance de ce dernier résultat et du lemme II 3, nous permet de donner une démonstration beaucoup plus agréable du théorème II 4, calquée sur celle du théorème II 1 :

Soit I un idéal à gauche complètement $\cap$-irréductible de A, et soit $\mathfrak{B}$ le plus grand idéal bilatère contenu dans I. Nous avons $\mathfrak{B} = (0 \cdot . A/I)$.

Par application de la proposition II 5 au module $M = A/I$, on voit que $A/\mathfrak{B}$, considéré comme un A-module à gauche, se plonge dans une somme directe de copies de A/I. Chaque A/I étant extension essentielle d'un module simple, on en déduit que l'anneau quotient $A/\mathfrak{B}$ est extension essentielle à gauche de son socle à gauche.

On voit alors, par application du lemme II 3 et du théorème de Levitzki que $\mathfrak{B}$, et par suite I, contient une puissance de J. Comme l'intersection de tous les idéaux à gauche, complètement $\cap$-irréductibles de A est réduite à 0, on a bien $\bigcap_{n=1}^{+\infty} J^n = 0$.

III. LES TRAVAUX DE JATEGAONKAR.

A.V. Jategaonkar a établi dans [8] le résultat suivant :

THEOREME III 1 : Si A est un T-anneau des deux côtés, de radical de Jacobson J, alors $\bigcap_{n=1}^{+\infty} J^n = 0$.

Ce résultat est évidemment moins fort que les théorèmes II 1 et II 4. Il est cependant intéressant de se pencher sur la démonstration qu'en donne Jategaonkar car elle utilise à fond les techniques de la théorie de la déviation.

Compte tenu du théorème II 5 de [8], on peut rapporter d'une manière lisible, en en restreignant un peu le contenu, les théorèmes 3.1 et 3.4 de [8] - qui sont les résultats essentiels de l'article de Jategaonkar - sous la forme suivante :

THEOREME III 2 : Soit A un T-anneau des deux côtés, et soit M un A-module de type fini. Posons $Ass(M) = \{\mathcal{P}_1, \ldots, \mathcal{P}_k\}$.

Alors il existe une chaîne de sous-modules de M :

$$0 = B_o \underset{\neq}{\subset} B_1 \underset{\neq}{\subset} \ldots \underset{\neq}{\subset} B_n = M \text{ telle que :}$$

1) Pour tout $i \in \{1,\ldots,n\}$, le quotient B_i/B_{i-1} est co-irréductible.

2) On a l'égalité des deux ensembles d'ordinaux suivants :

$$\{dev(B_1), dev(B_2/B_1), \ldots, dev(B_n/B_{n-1})\} = \{dev(A/\mathcal{P}_1), dev(A/\mathcal{P}_2), \ldots, dev(A/\mathcal{P}_k)\}.$$

Jategaonkar en déduit le résultat suivant ([8] - corollaire 3.6).

THEOREME III 3 : Soit A un T-anneau des deux côtés et soit M un A-module de type fini.

Si M est extension essentielle d'un sous-module artinien, il est lui-même artinien.

Démonstration : Rappelons qu'un A-module X est artinien si et seulement si $dev(X) = 0$.

M étant, par hypothèse, extension essentielle d'un sous-module artinien N, on a :

$Ass(M) = Ass(N) = \{\mathcal{P}_1, \ldots, \mathcal{P}_k\}$ où chaque $\mathcal{P}_i$ est un idéal primitif à gauche de A ; de sorte que :

$$\{dev(A/\mathcal{P}_1), \ldots, dev(A/\mathcal{P}_k)\} = \{0\}.$$

Par suite, d'après le théorème III 2, il existe une chaîne de sous-modules de M :

$$0 = B_o \underset{\neq}{\subset} B_1 \underset{\neq}{\subset} \ldots \underset{\neq}{\subset} B_n = M$$

telle que chaque quotient B_i/B_{i-1} soit artinien (pour $1 \leqslant i \leqslant n$).

Il en résulte aussitôt que M est artinien.

Démonstration du théorème III 1 : Soit I un idéal à gauche complètement $\cap$-irréductible de A. Le module $M = A/I$ est de type fini, extension essentielle d'un sous-module simple. Donc M est artinien d'après le théorème III 3. Il résulte alors du lemme de Nakayama qu'il existe un entier $n > o$ tel que $J^n M = 0$, et donc tel que $J^n \subseteq I$. Comme l'intersection de tous les idéaux à gauche complètement $\cap$-irréductibles de A est réduite à zéro, on en déduit :

$$\bigcap_{n=1}^{+\infty} J^n = 0.$$

Remarque : Nous avons appris par une lettre de Jategaonkar que celui-ci a initialement démontré le théorème III 3 sans utiliser la théorie de la déviation. Cette démonstration n'a pas été publiée mais on peut penser qu'elle est analogue à celle du théorème IV 2 qui figure au paragraphe suivant. Jategaonkar nous a également indiqué qu'il avait ensuite généralisé ce résultat et obtenu ses théorèmes sur la déviation (que nous avons rapportés sous la forme du théorème III 2), dans le but d'obtenir des résultats nouveaux sur la structure des A-modules injectifs indécomposables ([8] théorème V 3). Le lecteur vérifiera qu'on déduit très facilement de [8] - théorème 5.3, le résultat suivant que Jategaonkar ne signale pas :

THEOREME III 4 : Soit A un T-anneau des deux côtés. Supposons que A soit tertiaire à gauche.

Alors A admet un anneau total de fractions à gauche et à droite Q qui est artinien des deux côtés.

Il serait intéressant de donner une démonstration du théorème III 4 qui n'utilise pas les théorèmes 3.1 et 3.4 de [8]. L'auteur en connait une qui est relativement courte, mais qui utilise quelques résultats (très classiques) de la théorie de la déviation.

Le lecteur vérifiera également que, par application de la condition (H) de Gabriel, on peut déduire du théorème III 4 le résultat suivant :

THEOREME III 5 : Tout anneau A qui est un T-anneau des deux côtés, se plonge dans un anneau artinien des deux côtés.

Rappelons que Small a établi ce résultat dans [13] pour tout anneau A qui est une algèbre finie sur un anneau commutatif Noethérien. (On sait qu'un tel anneau est un cas particulier de T-anneau des deux côtés).

IV. LES TRAVAUX DE SCHELTER.

Toujours à propos de la conjecture de Jacobson-Herstein, Schelter a établi dans [12] le résultat suivant :

<u>THEOREME IV 1 : Soit A un anneau Noethérien des deux côtés. On fait les hypothèses suivantes :</u>

<u>A gauche</u> : A est un T-anneau à gauche.

<u>A droite</u> : Pour tout idéal $\mathfrak{P}$ primitif à droite, l'anneau quotient $A/\mathfrak{P}$ est simple.

Alors, J désignant le radical de Jacobson de A, on a :

$$\bigcap_{n=1}^{+\infty} J^n = 0.$$

Pour établir ce résultat, Schelter, comme Jategaonkar, passe par l'intermédiaire du résultat suivant :

<u>THEOREME IV 2 : Soit A un anneau satisfaisant aux hypothèses du théorème IV 1 et soit M un A-module de type fini. Si M est extension essentielle d'un sous-module artinien N, il est lui-même artinien.</u>

La démonstration de ce théorème utilise les résultats préliminaires suivants :

<u>LEMME IV 3 : Soit A un T-anneau à gauche et M un A-module à gauche fidèle, de type fini.</u>

Alors M n'est pas singulier.

<u>Démonstration</u> : C'est une conséquence immédiate de la condition (H) de Gabriel. Si on suppose que A est premier, on peut établir le lemme sans utiliser cette condition (que Schelter ne connaissait pas au moment où il a rédigé son article), en utilisant la propriété suivante, maintenant bien connue :

Condition de Krause : Tout idéal à gauche de A, essentiel dans A, contient un idéal bilatère non nul de A.

Nous laissons au lecteur le soin de terminer lui-même la démonstration (ou de se reporter à [12]).

<u>LEMME IV 4</u> : Soit A un anneau quelconque et M un A-module à droite de type fini. Alors il existe un idéal $\mathfrak{P}$ primitif à droite tel que $M\mathfrak{P} \subsetneq M$.

<u>Démonstration</u> : On établit aisément, en utilisant le théorème de Zorn, que M contient un sous-module maximal propre, soit N.

$\mathfrak{P} = (N \cdot M)$ est alors un idéal primitif à droite tel que $M\mathfrak{P} \subseteq N \underset{\neq}{\subset} M$.

<u>Démonstration du théorème IV 2</u> : Raisonnons par l'absurde, et supposons que M ne soit pas artinien. N est alors un sous-module propre de M, et nous pouvons supposer que N est maximal parmi les sous-modules artiniens de M.

Posons $\mathfrak{a} = (0 \cdot N)$.

Je dis que l'anneau $A/\mathfrak{a}$ est artinien à gauche.

En effet, on déduit immédiatement de la condition (H) de Gabriel que $A/\mathfrak{a}$ est contenu (en tant que module à gauche) dans une somme directe finie Σ de copies de N. Σ étant artinien, il en sera de même pour $A/\mathfrak{a}$. Nous laissons au lecteur le soin de redémontrer ce résultat sans utiliser la condition (H) de Gabriel.

Soit $\mathfrak{P} \in \mathrm{Ass}(M/N)$.

Il existe un sous-module X de M tel que :

$$N \underset{\neq}{\subset} X \subseteq M \text{ et, pour tout sous-module } Y \text{ de } M :$$

$$N \underset{\neq}{\subset} Y \subseteq X \Longrightarrow \mathfrak{P} = (N \cdot Y) = (N \cdot X).$$

$\mathfrak{P}$ n'est pas primitif à droite, sinon $A/\mathfrak{P}$ serait un anneau simple et X/N serait un module artinien et, par suite X serait artinien, ce qui est contraire à la maximalité de N.

$\mathfrak{B} = (0 \cdot X)$ est un idéal bilatère de A contenu dans $\mathfrak{P}$ et on a clairement $\mathfrak{a}\mathfrak{P} \subseteq \mathfrak{B}$, de sorte que $\mathfrak{P}/\mathfrak{B}$ est un $A/\mathfrak{a}$-module à gauche de type fini. Donc $\mathfrak{P}/\mathfrak{B}$, considéré comme un A-module à gauche, est artinien et, en particulier, toute chaîne descendante d'idéaux bilatères contenus dans $\mathfrak{P}$ et contenant $\mathfrak{B}$ est stationnaire.

Nous en déduisons, par application du lemme IV 4, qu'il existe un nombre fini $\mathfrak{P}_1, \ldots, \mathfrak{P}_n$ d'idéaux primitifs à droite, tels que $\mathfrak{P}\mathfrak{P}_1 \ldots \mathfrak{P}_n \subseteq \mathfrak{B}$, c'est-à-dire tels que $\mathfrak{P}\mathfrak{P}_1 \ldots \mathfrak{P}_n X = 0$.

Posons $Z = \mathfrak{P}_1 \ldots \mathfrak{P}_n X$.

<u>$Z \nsubseteq N$</u>, sinon on aurait $\mathfrak{P}_1 \ldots \mathfrak{P}_n \subseteq \mathfrak{P}$, donc $\mathfrak{P}$ serait égal à l'un des $\mathfrak{P}_i$, ce qui est impossible puisque $\mathfrak{P}$ n'est pas primitif à droite.

Donc $N \underset{\neq}{\subset} Z+N \subseteq X$ et

$$\mathfrak{P} = (0 \cdot Z+N/N) = (0 \cdot Z/N \cap Z).$$

Par ailleurs, $\wp \subseteq (0 \cdot . Z) \subseteq (0 \cdot . Z/N \cap Z)$ et nous aboutissons au résultat suivant :

Il existe un module Z et un sous-module essentiel $T = N \cap Z$ tel que $\wp = (0 \cdot . Z) = (0 \cdot . Z/T)$.

Donc Z et Z/T sont deux $A/\wp$ -modules fidèles.

Par ailleurs, puisque T est essentiel dans Z, le module Z/T est singulier. Ceci contredit le lemme IV 3, et nécessairement, le module M est artinien.

Le théorème IV 1 se démontre alors comme le théorème III 1.

Remarque : Les techniques que nous avons utilisées dans le paragraphe II sont complètement différentes de celles utilisées par Jategaonkar et Schelter. En particulier, nous ne passons pas par l'intermédiaire d'un théorème analogue au théorème III 3. On peut d'ailleurs poser la question suivante :

Question : Soit A un anneau satisfaisant aux hypothèses du théorème II 4 (ou même aux hypothèses plus larges du théorème II 1) et soit M un A-module à gauche de type fini. Si M est extension essentielle d'un sous-module artinien, est-il lui-même artinien ?

Nous savons répondre affirmativement à cette question sous les hypothèses suivantes (plus fortes que celles du théorème II 4, mais plus faibles que celles du théorème IV 2).

L'anneau A satisfait aux hypothèses du théorème II 4 et, pour tout idéal primitif à droite $\wp$ de A, l'anneau quotient $A/\wp$ est simple.

V. LES TRAVAUX DE BORATYNSKI.

Le résultat essentiel de [1] dû à M. Boratynski, est le suivant :

THEOREME V 1 : Soit A un anneau Noethérien des deux côtés, J son radical de Jacobson, et soit $J^{\omega} = \bigcap_{n=1}^{+\infty} J^n$.

Si tout idéal à gauche de l'anneau quotient A/J^{ω} est bilatère, alors $J^{\omega} = 0$.

Il en résulte en particulier que, étant donné un anneau A Noethérien des deux côtés, de radical de Jacobson J, une condition suffisante pour que $\bigcap_{n=1}^{+\infty} J^n = 0$ est que tout idéal à gauche de A soit bilatère.

Ceci est clairement un cas particulier du théorème II 1 puisqu'on sait qu'un anneau A, Noethérien à gauche, dont tout idéal à gauche est bilatère, est un T-anneau à gauche. Par contre, ce résultat se différencie sensiblement des résultats de Jategaonkar et de Schelter puisque Boratynski ne fait pas d'autre hypothèse à droite que l'hypothèse Noethérienne.

BIBLIOGRAPHIE

[1] M. BORATYNSKI, On the intersection of powers of the Jacobson radical in Noetherian rings (A paraître).

[2] G. CAUCHON, Les T-anneaux et la condition de Gabriel. C.R. Acad. Sc. (1973) t. 277, pp. 1153-1156.

[3] G. CAUCHON, Les T-anneaux et la condition (H) de Gabriel. Séminaire d'Algèbre non commutative, n° 2 (1974). Publications mathématiques d'Orsay.

[4] G. CAUCHON, Sur l'intersection des puissances du radical d'un T-anneau Noethérien. C.R. Acad. Sc. (1974) t. 279, pp. 91-93.

[5] G. CAUCHON, Sur l'intersection des puissances du radical d'un T-anneau Noethérien. Séminaire d'Algèbre non commutative, n° (1974). Publications mathématiques d'Orsay.

[6] N. JACOBSON, Structure of rings, Amer. Math. Soc. Colloq. Publ. 37 revised (1964).

[7] A.V. JATEGAONKAR, Left principal ideal domains. J. of Algebra 8, (1968), pp. 148-155.

[8] A.V. JATEGAONKAR, Jacobson's conjecture and modules over fully bounded Noetherian rings. J. of Algebra 30 (1974), pp. 103-121.

[9] I.N. HERSTEIN, A counter-example in Noetherian rings, Proc. Nat. Acad. Sci. 54 (1965), pp. 1036-1037.

[10] L. LESIEUR, Sur les T-anneaux. C.R. Acad. Sc. (1973) t. 276, pp. 435-438.

[11] L. LESIEUR et R. CROISOT, Algèbre Noethérienne non commutative. Mem. des Sc. mathématiques. Fasc. 154, Paris 1963.

[12] W. SCHELTER, Intersections of powers of the radical (A paraître).

[13] L.W. SMALL, Orders in Artinian rings. J. of Algebra 4 (1966), pp. 13-41.

-:-:-:-:-:-:-:-:-:-

UNIVERSITE DE PARIS - SUD
CENTRE D'ORSAY

SEMINAIRE D'ALGEBRE NON COMMUTATIVE

Conférence n° 3 du 2 Décembre 1974

ANNEAUX NOETHERIENS A IDENTITE POLYNOMIALE
(d'après E. Formanek [1])

par G. RENAULT

-:-:-:-:-

I. RAPPELS.

Soit A un anneau premier à I.P. de centre C. On pose $S = C-\{0\}$, $F = S^{-1}C$, F est le corps des fractions de C et on désigne par Q l'anneau des quotients de A (th. de Posner).

THEOREME 1.1 [4] : $S^{-1}A$ est un anneau simple de dimension finie sur son centre qui est F. $S^{-1}A$ est l'anneau total des fractions de A.

THEOREME 1.2 [4] : Soient A un anneau semi-premier à identité polynômiale fidèle, $I \neq (0)$ un idéal bilatère de A, C le centre de A. Alors $I \cap C \neq (0)$.

On note S l'ensemble des non-diviseurs de zéro de C.

COROLLAIRE 1.3 (avec les hypothèses du th. 1.2) : Si C est un anneau de Goldie, les éléments de S sont non-diviseurs de zéro dans A et l'on a :

1) $S^{-1}C = F_1 \oplus \dots \oplus F_k$, où les F_i sont des corps.

2) $S^{-1}A = Q_1 \oplus \dots \oplus Q_k$, où les Q_i sont des algèbres simples de rang fini sur leur centre F_i. En particulier A est un anneau de Goldie.

La propriété 1) est le théorème de Goldie dans le cas commutatif. Soit $s \in S$ et soit $a \in A$ tel que $sa = 0$. La relation $s(AaA \cap C) = (0)$, implique d'après le th. 1.2 $a = 0$. La propriété 2) résulte facilement du th. 1.2.

On rappelle également le résultat suivant [3] :

PROPOSITION 1.4 : Soit D un corps de rang fini m^2 sur son centre F. Alors D admet un sous-corps commutatif maximal K, extension séparable de F et l'on a $D \otimes_F K \simeq M_m(K)$.

II. ANNEAUX PREMIERS A IDENTITE POLYNOMIALE.

Les notations sont celles du paragraphe I.

THEOREME 2.1 :

a) Soit $(a_1,\dots,a_{n^2})$ une base de Q sur F. Alors il existe $c \neq 0$, $c \in C$ tel que :

$$cA \subseteq \bigoplus_{i=1}^{n^2} Ca_i \ .$$

b) Si les a_i appartiennent à A alors

$$A[\tfrac{1}{c}] = \bigoplus_{i=1}^{n^2} C[\tfrac{1}{c}]a_i \ .$$

1) $Q \simeq M_n(F)$.

Soit (e_{ij}) un système de matrices unités de Q. On a donc $\sum_{i=1}^{n} e_{ii} = 1$, $e_{ij}e_{kl} = \delta_{jk}e_{il}$ (1). D'après le th. 1.1 on a $e_{ij} = f_{ij}|c$, $f_{ij} \in A$, $c \in C$.

Soit $a = \sum_{i,j} a_{ij}e_{ij}$, $a_{ij} \in F$, un élément de A. Les relations (1) impliquent : $a_{ij} = \sum_t e_{ti}ae_{jt}$, $c^2a_{ij} = \sum_t f_{ti}af_{jt}$. On en déduit que $c^2a_{ij} \in F \cap A = C$, on a donc $c^2A \subset \bigoplus_{i,j} Ce_{ij}$. Soit $(a_1,\dots,a_{n^2})$ une base de Q sur F. Il existe $c' \in C-\{0\}$ tel que :

$$c'e_{ij} \subseteq \bigoplus_{k=1}^{n^2} Ca_k \ , \quad 1 \leqslant i, \ j \leqslant n^2$$

ce qui implique $c'c^2A \subset \bigoplus_{k=1}^{n^2} Ca_k$, ce qui démontre la propriété 1 dans ce cas particulier.

2) Cas général.

Q est isomorphe à $M_k(D)$, où D est un corps de rang fini m^2 sur F, avec $n = km$. D'après la prop. 1.4, il existe un sous-corps commutatif maximal K de D, qui est une extension séparable de F. On a $K = F[b]$ et l'on peut prendre b entier sur C. Sous cette condition $C[b]$ est un C-module libre de base $1, b, \ldots, b^{m-1}$. On a les propriétés suivantes :

a) $Q \otimes_F F[b] \simeq Q \otimes_F K \simeq Q \otimes_C F[b] \simeq Q \otimes_C C[b]$.

En effet, $Q \otimes_C F[b] \simeq Q \otimes_C (C[b] \otimes_C F)$ et comme $Q \otimes_C F$ est isomorphe à Q les propriétés résultent de l'associativité du produit tensoriel.

b) $Q \otimes_F K \simeq M_k (D \otimes_F K) \simeq M_{km}(K)$ (prop. 1.4).

c) $C \otimes_C C[b]$ est le centre de $A \otimes_C C[b]$.

Car $1 \otimes 1, \ldots, 1 \otimes b^{m-1}$ est une base de $A \otimes_C C[b]$.

On identifie Q, A, C à des sous-anneaux de $Q \otimes K$ au moyen de l'application $x \to x \otimes 1$.

d) $S^{-1}(A \otimes_C C[b]) \simeq Q \otimes K$.

$(A \otimes_C C[b]) \otimes_C F \simeq (A \otimes_C F) \otimes_C C[b]$. D'après le th. 1.1 $A \otimes_C F$ est isomorphe à Q, la relation résulte alors de la propriété a).

Soit $(a_1, \ldots, a_{n^2})$ une base de Q sur $F(a_1 \otimes 1, \ldots, a_{n^2} \otimes 1)$ est une base de $Q \otimes_F K \simeq M_n(K)$. D'après la première partie de la démonstration et la propriété d), il existe $c \in C \simeq C \otimes 1$ tel que :

$$(c \otimes 1)(A \otimes C[b]) \subset \bigoplus_{i=1}^{n^2} (C \otimes C[b])(a_i \otimes 1)$$

ce qui implique $CA \subset \bigoplus_{i=1}^{n^2} Ca_i$, ce qui achève la démonstration de la première partie du théorème.

Si les éléments a_i appartiennent à A on a :

$$\bigoplus_{i=1}^{n^2} C[\tfrac{1}{c}]a_i \subset A[\tfrac{1}{c}]$$

si $x \in A[\frac{1}{c}]x = ac^{-s}$, $a \in A$, $ca = \sum_{i=1}^{n} c_i a_i$. Par suite $c^{-s}a$ appartient à $\bigoplus_{i=1}^{n^2} c[\frac{1}{c}]a_i$, d'où l'égalité.

COROLLAIRE 2.2 : Si A est Noétherien à droite, il existe $c \neq 0$, $c \in C$ tel que :

1) $C[\frac{1}{c}]$ soit noethérien.

2) $A[\frac{1}{c}]$ soit noethérien à gauche et à droite.

Reprenons les notations du th. 2.1. On a $A[\frac{1}{c}] = \bigoplus_{i=1}^{n^2} C[\frac{1}{c}]a_i$. Soit I un idéal de $C[\frac{1}{c}]$; $\bigoplus_{i=1}^{n^2} Ia_i$ est un idéal de A, engendré par un nombre fini d'éléments $(x_1,\dots,x_p)$. Les composants des x_j dans la base $(a_1,\dots,a_{n^2})$ engendrent I.

Remarque : Le corollaire 2.2 reste vrai, si on suppose seulement que les idéaux bilatères de A vérifient la condition maximale.

COROLLAIRE 2.3 :

a) Soit A un anneau premier à I.P. Il existe $c \neq 0$, $c \in C$ tel que $A[\frac{1}{c}]$ soit entier sur $C[\frac{1}{c}]$.

b) Si C est noethérien, A est noethérien à droite et à gauche.

Cela résulte du th. 2.1. Pour la théorie des anneaux entiers sur leur centre cf [1].

III. LE CAS SEMI-PREMIER.

THEOREME 3.1 : Soit A un anneau semi-premier à identité polynômiale et de centre C. Si C est noethérien, A est un C-module de type fini, c'est donc un anneau noethérien à gauche et à droite.

Nous reprenons les notations du corollaire 1.3 et Q désigne l'anneau total des fractions de A. On a $Q = Q_1 \oplus \dots \oplus Q_K$ et si e_i désigne l'élément unité de Q_i, $e_i = c_i/c$, $c_i \in C$, $c \in S$. Soit C_i le centre de Ae_i, on a :

$$A \subset \bigoplus_{i=1}^{k} Ae_i \ , \qquad c(\bigoplus_{i=1}^{k} C_i) \subset C \qquad (1).$$

D'après le théorème 2.1, il existe un entier n_i tel que Ae_i se plonge dans C^{n_i}. Si $n = \sup_i n_i$, A se plonge dans le C-module $(C_1 \oplus \dots \oplus C_k)^n$ d'après (1), dans C^n, car c est non diviseur de zéro (corrollaire 1.3).

PROPOSITION 3.2 : *Si A est un anneau semi-premier, noethérien à droite à identité polynômiale, il existe $c' \in S$ tel que :*

1) $C[\frac{1}{c'}]$ *soit noethérien.*

2) $A[\frac{1}{c'}]$ *soit noethérien à gauche et à droite.*

Avec les notations de la démonstration du théorème 3.1, on a :

$$A[\tfrac{1}{c}] = \bigoplus_{i=1}^{k} A[\tfrac{1}{c}]e_i \ .$$

Donc $A[\frac{1}{c}]$ est donc un produit fini d'anneaux noethériens à droite et premiers. Les résultats du paragraphe II permettent de conclure facilement.

IV. QUELQUES EXEMPLES.

1) L. Small a construit un anneau intégre noethérien à gauche et à droite à I.P. dont le centre n'est pas noethérien.

Soit B un anneau commutatif noethérien intègre muni d'une involution σ tel que l'anneau des invariants B^σ ne soit pas noethérien. Alors l'anneau des polynômes $B[X,\sigma]$ est un anneau noethérien à gauche et à droite de centre $B^\sigma[X^2]$ et comme $B[X,\sigma]$ est un $B^\sigma[X^2]$-module de type fini, $B[X,\sigma]$ est à identité polynômiale.

2) PROPOSITION (G. Cauchon) : *Il existe un anneau premier A, noethérien à gauche et à droite, à identité polynômiale, de centre C tel que :*

1) C *n'est pas un anneau noethérien.*

2) A *n'est pas entier sur* C.

Soit k un corps commutatif et soit $k[X,Y]$ l'anneau des polynômes à 2 indéterminées.

$$A = \left\{ M \in M_2\,(k[X,Y]) / M = \begin{pmatrix} P+XQ, & \frac{\partial P}{\partial Y}+XR \\ & \\ XS & , P+XT \end{pmatrix} \right\}$$

A vérifie les conditions de la proposition, son centre est :

$$C = k[X]+k[X,Y]\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

-:-:-:-:-

BIBLIOGRAPHIE

[1] W.D. BLAIR, Right noetherian rings integral over their centers. J. Algebra 27, 187-198 (1973).

[2] E. FORMANEK, Noetherian P.I. Rings. Communications in Algebra 1 (1), 79-86 (1974).

[3] I.N. HERSTEIN, Non-commutative Rings. Carus Mathematical Monograph 15 (1968).

[4] L. ROWEN, Some results on the center of a ring with polynomial identity. Bull. Amer. Math. Soc. 79, 219-223 (1973).

-:-:-:-:-:-:-

UNIVERSITE DE PARIS SUD

CENTRE D'ORSAY

SEMINAIRE D'ALGEBRE NON COMMUTATIVE

Conférence n° 4 du 9 Décembre 1974

RADICAL DE JACOBSON D'UN ANNEAU DE GROUPE SUR UN GROUPE DE FROBENIUS FINI

par J.L. MARGOT

Dans ce qui suit, A désigne toujours un anneau et G un groupe. Reprenant des résultats de [1] et [2], nous montrons que le calcul du radical de Jacobson, dans le cas particulier que nous envisagerons se ramène au calcul du radical d'un sous-anneau $A[H]$ de l'anneau de groupe $A[G]$, pour un certain sous-groupe H de G.

On note $R(X)$ le radical de Jacobson de l'anneau X.

I. NOTATIONS ET RAPPELS.

Les notations et les principaux résultats sur les anneaux de groupes, utilisés ici, peuvent être trouvés dans [3]. Nous rappelons entre autres :

PROPOSITION I.1 : *Soient A un anneau, G un groupe, N un sous-groupe de G. On suppose N normal dans G et que $|N|$, l'ordre de N, est inversible dans A ; alors :*

1) *ωN est un idéal bilatère de $A[G]$.*

2) *$L(\omega N) = R(\omega N) = A[G](|N|^{-1} \sum\limits_{x \in N} x)$, où $|N|^{-1} \sum\limits_{x\in N} x$ est un idempotent central de $A[G]$.*

($L(I)$ est l'annulateur à gauche de I, $R(I)$ l'annulateur à droite).

3) *$A[G] = \omega N \oplus L(\omega N)$.*

Nous faisons également quelques rappels sur les groupes de Frobenius ([4]).

DEFINITION I.1 : Un groupe de Frobenius G est un groupe de permutations transitif sur un ensemble X, vérifiant :

1) Le sous-groupe H_x des éléments de G fixant un élément x de X est non trivial.

2) Seule l'identité fixe plus d'un élément.

Cette définition est équivalente à la suivante :

DEFINITION I.2 : Un groupe G est un groupe de Frobenius s'il contient un sous-groupe propre H vérifiant :

1) $N_G(H) = H$.

2) L'intersection de H et de tout conjugué H^g de H différent de H est réduite à l'élément neutre.

(G est dit de complément H).

Dans le cas d'un groupe de Frobenius fini, nous avons la proposition suivante :

PROPOSITION I.2 : Soit G un groupe de Frobenius fini de complément H ; alors

1) L'ensemble N des éléments de G n'appartenant à aucun conjugué de H forme avec l'élément neutre de G un sous-groupe normal de G, appelé le noyau de G.

2) $|H|$ divise $|N|-1$.

3) N est nilpotent.

4) H induit un groupe régulier d'automorphismes de N.

II. QUELQUES RESULTATS PRELIMINAIRES.

LEMME II.1 : Si G est un groupe de Frobenius de noyau N, K un sous-groupe de N, normal dans G, et si $g \notin N$, alors :

$$[K,g] = \{x^{-1}g^{-1}xg / x \in K\} = K.$$

Preuve : (résultat démontré par Wallace dans le cas particulier $K = N$).

Soit $x \in K$. K étant normal dans G, on a $x^{-1}g^{-1}xg = x^{-1}(g^{-1}xg) \in K$; et donc $[K,g] \subseteq K$.

Pour démontrer l'inclusion inverse, il suffit de vérifier que l'on a $|[K,g]| = |K|$, c'est-à-dire que l'application $K \to [K,g]$ définie par $x \to [x,g]$ est injective. g n'appartient pas à N, et donc appartient à un conjugué de H et est différent de l'élément neutre ; g induit alors par conjugaison un automorphisme régulier de N (proposition I.2, 4)) et donc :

$$[x,g] = [y,g] \Longrightarrow x^{-1}g^{-1}x = y^{-1}g^{-1}y \Longrightarrow g^{-1}(xy^{-1})g = xy^{-1}$$
$$\Longrightarrow xy^{-1} = e.$$

L'application $x \to [x,g]$ est donc injective.

LEMME II.2 : Soit A un anneau, G un groupe de Frobenius de noyau N tel que $|N|$ est inversible dans A. Soit $e = |N|^{-1} \sum_{x \in N} x$. Si W est un idéal bilatère de $A[G]$ tel que $W \cap A[N] = \{0\}$, alors $W = We$.

Preuve : La démonstration utilise les remarques suivantes :

α) $A[G]$ est un $A[N]$ module libre de base $\{g_i/g_i \in H,\ i = 1,\dots,|H|\}$, les g_i formant un système de représentants des classes de N dans G. On pose $g_1 = 1$. Tout r de $A[G]$ s'écrit donc $r = r_1g_1+\dots+r_{|H|}g_{|H|}$, $r_i \in A[N]$, et $g_i \in H$. On appelle longueur de r sur $A[N]$ (et l'on note $\ell g(r)$) le nombre de r_i non nuls.

β) Soit $r = r_1g_{i_1}+\dots+r_kg_{i_k}$, chaque r_i non nul. Soit l'élément

$$r' = r'_1+r'_2g'_{i_2}+\dots+r'_kg'_{i_k} = rg_{i_k}^{-1}.$$

On a $\ell g(r) = \ell g(r')$, $r'_1 = r_k$, et $r'_i = r_jh_{j(i)}$ pour un certain r_j de la décomposition de r sur $A[N]$ et un $h_{j(i)}$ de H.

γ) Si s est un élément non nul de W, on a alors $\ell g(s) \geqslant 2$, car $W \cap A[N] = \{0\}$.

On suppose $W \cap \omega N \neq \{0\}$. On choisit dans cet ensemble un élément non nul de longueur minimale. D'après la remarque β), cet élément $r = r_1g_{i_1}+\dots+r_ng_{i_n}$, chaque r_i non nul, peut être choisi tel que $g_{i_1} = 1$ (W étant bilatère). Soit $z \in Z(N)$; donc $z \in Z(A[N])$.

$$z^{-1}rz = r^z = r_1+r_2g_{i_2}^z+\dots+r_ng_{i_n}^z$$
$$= r_1+r_2(g_{i_2}^z\,g_{i_2}^{-1})g_{i_2}+\dots+r_n(g_{i_n}^z\,g_{i_n}^{-1})g_{i_n}.$$

On a $(g^z_{i_k} g^{-1}_{i_k}) = z^{-1}(zg^{-1}_{i_k}) \in N$, et donc $r_k(g^z_{i_k} g^{-1}_{i_k}) \in A[N]$.

r^z est élément de $W \cap \omega N$, ainsi donc que $r-r^z$.

$$r-r^z = (r_2-r_2[z,g^{-1}_{j_2}])g_{j_2}+\dots+(r_n-r_n[z,g^{-1}_{j_n}])g_{j_n} .$$

On a donc $\ell g(r-r^z) \leqslant \ell g(r)-1 < \ell g(r)$. Comme r est de longueur minimale parmi les éléments non nuls de $\omega N \cap W$, on en déduit $r-r^z = 0$.

$$\forall k,\ (2 \leqslant k \leqslant n),\ \forall z \in Z(N),\ r_k-r_k[z,g^{-1}_{i_k}] = 0.$$

$Z(N)$ est caractéristique dans N, et N est normal dans G: $Z(N)$ est donc normal dans G. D'après le lemme II.1, on a alors :

$$[Z(N),\ g^{-1}_{j_k}] = Z(N), \quad \text{et donc :}$$

$\forall z \in Z(N),\ \forall k(2 \leqslant k \leqslant n),\ s_k(1-z) = 0.$

Chaque s_k annule l'idéal à droite engendré par $\{1-z/z \in Z(N)\}$, qui, $Z(N)$ étant normal dans G est $\omega Z(N)$.

$$s_k \in L(\omega Z(N)) = R(\omega Z(N)) = A[G]\sum_{g\in Z(N)} g.$$

$|N|$ étant inversible dans A, $|Z(N)|$ l'est également. Posons $f = |Z(N)|^{-1}\sum_{x\in Z(N)} x$. f est idempotent central de $A[G]$.

$$A[G]\sum_{x\in Z(N)} x = A[G]f, \quad \text{et} \quad r_k = r_k f, \quad (k \geqslant 2).$$

Il reste à montrer $r_1 = r_1 f$. r est de longueur supérieure ou égale à 2 (d'après γ)), donc $r = r_1+r_2 g_{j_2}+\dots$ et donc $r' = rg^{-1}_{j_2} = r'_1+\dots+r'_n g_{i_n}$ est d'après β) un élément non nul de $W \cap \omega N$ de même longueur que r, tel que $r'_1 = r_2 \neq 0$, et $r'_u = r_1 h_{j_1}$ pour un $g_u \notin N$.

On refait le raisonnement ci-dessus avec r', d'où :

$$r'_u = r'_u f, \quad \text{d'où} \quad r_1 h_1 = r_1 f h_1, \quad \text{et} \quad r_1 = r_1 f.$$

On a : $r = r_1+\dots+r_n g_{i_n} = r_1 f+\dots+r_n f g_{i_n} = rf$.

. N est nilpotent (proposition I.2 3). Soit $Z_0(N) = \{1\}$, $Z_1(N) = Z(N)$, ... $Z_m(N) = N$ la suite centrale ascendante de N. Pour chaque k, $|Z_k(N)|$ est inversible dans A, et l'on pose :

$$f_k = |Z_k(N)|^{-1}\sum_{g\in Z_k(N)} g, \quad \text{qui est un idempotent central de } A[G].$$

- Si $r \neq 0$ est un élément non nul de longueur minimale de $W \cap \omega N$, alors $r = rf_1$. Supposons que jusqu'à $Z_k(N)$, $(k < m)$, on ait également $r = rf_k$. Montrons qu'alors $r = rf_{k+1}$. Pour cela il suffit de montrer :

$$\forall z \in Z_k(N), \quad z^{-1}(r_i f_k)z = r_i f_k . \qquad (1)$$

$$[Z_{k+1}(N), g] = Z_{k+1}(N) \quad \text{pour tout } g \notin N. \quad (2)$$

(2) est une conséquence immédiate du lemme II.1. Pour (1), plaçons-nous dans $A[\frac{N}{Z_p(N)}]$. $\frac{Z_{p+1}(N)}{Z_p(N)}$ est central dans $A[\frac{N}{Z_p(N)}]$, d'où :

$$\bar{z}^{-1}\bar{r}_i\bar{f}_k\bar{z} = \bar{r}_i\bar{f}_p ,$$

c'est-à-dire : $r_i f_k = z^{-1} r_i f_k z + u$, avec $u \in \omega_{A[N]} Z_p(N)$.

On a : $L_{A[N]}(\omega_{A[N]} Z_k(N)) = A[N]f_k$, et $\omega_{A[N]} Z_p(N) \cap A[N]f_k = \{0\}$, (proposition I.1). Comme : $r_i f_k = r_i f_k^2 = z^{-1}(r_i f_k)z + uf_k$, $uf_k = 0$ car $uf_k \in \omega_{A[N]} Z_k(N) \cap A[N]f_k$.

(1) et (2) étant démontrés, nous pouvons refaire le raisonnement précédent, et l'on aboutit à : $r = rf_{k+1}$.

De proche en proche, on montre ainsi : $r = rf_m = re$, et donc :

$r \in \omega N \cap L(\omega N) = \{0\}$ (proposition I.1), d'où $r = 0$.

Or, on a supposé r non nul. L'hypothèse supposée est donc fausse : il n'existe pas d'élément non nul dans $W \cap \omega N$.

$W \cap \omega N = \{0\}$, et comme $\omega N = A[G]\,(1-e)$, on en déduit : $W = We$.

III. RADICAL DE JACOBSON.

THEOREME III.1 : Soit A un anneau, m un entier tel que $m \in R(A)$, G un groupe de Frobenius de noyau N et de complément H tel que m divise $|H|$, alors $|N|$ est inversible dans A, et si $e = |N|^{-1} \sum_{x \in N} x$, on a :

$$R(A[G]) = R(A[H])e + R(A)(G).$$

Preuve :

. $|H|$ divise $(|N|-1)$, donc m divise $(|N|-1)$, et est premier avec $|N|$. Comme $m \in R(A)$, $|N|$ est donc inversible dans A.

On a alors :

$$A[G] = \omega N \oplus L(\omega N) = \omega N \oplus A[G]e.$$

D'autre part, $A[G]e = A[H]e \simeq A[\frac{G}{N}]$, on en déduit :

$$R(A[G])e = R(A[G]e) = R(A[H]e) = R(A[H])e \subseteq R(A[G]).$$

Comme G est fini, on a aussi : $R(A)(G) \subseteq R(A[G])$ ([3]) et donc :

$$R(A)(G) + R(A[H])e \subseteq R(A[G]).$$

Pour l'inclusion inverse, on se place d'abord dans l'anneau $\bar{A} = \frac{A}{R(A)}$. On a $R(\bar{A}) = \{\bar{0}\}$, et donc $R(\bar{A}[G]) \cap \bar{A}[N] \subseteq R(\bar{A}[N])$ avec $R(\bar{A}[N]) = \{\bar{0}\}$ (d'après [3] et [5]). $R(\bar{A}[G])$ est alors un idéal bilatère de $\bar{A}[G]$ d'intersection nulle avec $\bar{A}[N]$.

D'après le lemme II.2, nous pouvons alors déduire :

$$R(\bar{A}[G]) = R(\bar{A}[H])e.$$

Les inclusions $R(A)(G) \subseteq R(A[G])$ et $R(A)(H) \subset R(A[H])$, G et H étant finis permettent alors de conclure :

$$R(A[H])e + R(A)(G) \subseteq R(A[G]).$$

Nous retrouvons ainsi les résultats de [1] et [2].

<u>COROLLAIRE III.2</u> : <u>Soit</u> A <u>un anneau tel que</u> $p \in R(A)$, G <u>un groupe de Frobenius fini et de complément</u> P <u>un p-groupe, alors :</u>

$$R(A[G]) = R(A[P])e+R(A)(G) = (\omega P)e+R(A)(G),$$

(où p désigne un nombre premier).

<u>Exemple d'application</u> : <u>radical de Jacobson d'une algèbre de groupe sur un CN-groupe résoluble fini.</u>

Dans ce qui suit, K désigne un corps de caractéristique $p \neq 0$.

Un CN-groupe est un groupe tel que le centralisateur de tout élément distinct de l'élément neutre est nilpotent.

Un CN-groupe G résoluble fini est d'un des trois types suivants ([4]) :

1) G <u>est nilpotent</u> : Dans ce cas, si P est l'unique p-sous-espace de Sylow de G, on a : R

$$R(K[G]) = \omega N.$$

2) G <u>est un groupe de Frobenius de noyau</u> N <u>et de complément</u> H <u>où</u> H <u>est un groupe nilpotent.</u>

. <u>Si</u> p <u>divise</u> $|N|$, $R(K[G])$ est engendré dans $K[G]$ par $R(K[N])$.

Soit P l'unique p-sous-groupe de Sylow de N, nilpotent, On a :

$$R(K[N]) = \omega_{K[N]}P, \quad \text{et} \quad R(K[G]) = \omega P.$$

. <u>Si</u> p <u>divise</u> $|H|$, soit S le seul p-sous-groupe de Sylow de H.

On a : $\quad R(K[G]) = (\omega S)e, \quad$ où $\quad e = |N|^{-1}\sum\limits_{x\in N} x.$

3) <u>Il existe un premier</u> q <u>tel que,</u> si $O_q(G)$ est le plus grand q-sous-groupe normal de G, $O_{q,q}(G)$ l'image réciproque du plus grand q'-sous-groupe normal de $\dfrac{G}{O_q(G)}$ (dont l'ordre est premier avec q), etc..., on a :

$$\{e\} \neq O_q(G) \subset O_{q,q'}(G) \subset O_{q,q'q}(G) = G.$$

$O_{q,q'}(G)$ est un groupe de Frobenius de noyau $O_q(G)$, et $\dfrac{G}{O_q(G)}$ un groupe de Frobenius de noyau $\dfrac{O_{q,q'}(G)}{O_q(G)}$.

. <u>Si</u> $q \neq p$, <u>et si</u> p <u>divise</u> $|O_{q,q'}(G)|$, soit H un complément dans $O_{q,q'}(G)$. $\frac{HO_q(G)}{O_q(G)} = \frac{O_{q,q'}(G)}{O_q(G)}$, et H est donc nilpotent. Soit S le p-sous-groupe de Sylow de H. $\frac{G}{O_{q,q'}(G)}$ est un q-groupe, et donc $R(K[G])$ est engendré dans $K[G]$ par $R(K[O_{q,q'}(G)])$ et donc par $(\omega S)e$, où $e = |O_q(G)|^{-1} \sum_{x \in O_q(G)} x$. $R(K[G]) = (\omega S)e$.

. <u>Enfin, si</u> $q = p$, <u>et si</u> S_p est un p-sous-groupe de Sylow de G, et H désignant le même groupe que précédemment, on a :

$$R(K[G]) = \omega O_p(G) + (\omega S_p)e_1 \text{ , où } e_1 = |H|^{-1} \sum_{x \in H} x.$$

(Comme $\omega O_p(G) \subseteq R(K[G])$, on a l'image réciproque de $R(K[\frac{G}{O_p(G)}])$, où $\frac{G}{O_p(G)} = \bar{\bar{H}}\bar{\bar{S}}_p$.

<u>Remarque</u> : l'anneau $K[G]$ est indécomposable.

<u>REFERENCES</u>

[1] D.A.R. WALLACE, Note on the radical of a group algebra, Proc. Cambridge Philos. Soc. 54 (1958), pp. 128-130.

[2] K. MOTOSE, On the radical of a group ring, Math. J. Okayama Univ. 15, pp. 35-36, (1971).

[3] I.G. CONNELL, On the group ring, Canad. J. Math., 15 (1963), pp. 650-685.

[4] D. GORENSTEIN, Finite groups, Harper's Series in Modern Mathematics.

[5] G. RENAULT, Radicaux des anneaux de groupes, Coll. Math. Soc. Janos Bolyai.

-:-:-:-:-

UNIVERSITE DE PARIS SUD

CENTRE D'ORSAY

-:-:-:-:-

SEMINAIRE D'ALGEBRE NON COMMUTATIVE

Conférence n° 5 du 16 Décembre 1974

ANNEAUX AVEC DEVIATION

D'après R. Gordon et J.C. Robson* [1]

par Mme M.A. PLACE

-:-:-:-:-:-:-

La correspondance entre classes d'isomorphismes de modules injectifs indécomposables et idéaux premiers associés pour les anneaux avec déviation.

Tous les anneaux considérés à l'exception des nil-sous-anneaux seront des anneaux unitaires ; tous les modules seront des modules à droite unitaires.

Rappels.

Soit M un R-module. Alors la déviation de M est définie par récurrence transfinie de la manière suivante :

$$\text{dev } M = -1 \quad \text{si} \quad M = \{0\}.$$

Si α est un ordinal, alors $\text{dev } M = \alpha$ si $\text{dev } M \not< \alpha$ et s'il n'y a pas de chaîne strictement décroissante $M = M_0 \supset M_1 \supset \dots \supset M_i \supset \dots$ de sous-modules de M tel que pour tout i, $\text{dev } M_i/M_{i+1} \not< \alpha$.

Nous dirons que M est un module avec déviation s'il existe un ordinal α tel que $\text{dev } M = \alpha$.

Nous dirons que l'anneau R est un anneau avec déviation si le R-module à droite R est un module avec déviation.

Nous dirons que le R-module C est α-notable si : $\text{dev } C = \alpha$ et $\text{dev } C/C' < \alpha$ pour tout sous-module non nul C' de C.

Nous dirons que le R-module C est notable s'il existe un ordinal α tel que C soit un module α-notable.

PROPRIETES.

a. Si M est un module avec déviation et si N est un sous-module de M alors dev $M = \sup\{\text{dev } N, \text{ dev } M/N\}$.

b. Si $M = M_1 \oplus \dots \oplus M_n$, alors dev $M = \sup\{\text{dev } M_i, \ i = 1,\dots,n\}$.

c. Si M est un module avec déviation, alors dev $M \leqslant \sup\{\text{dev } M/E+1$, E sous-module essentiel de $M\}$.

d. Tout module avec déviation contient un sous-module notable non nul.

e. Tout sous-module non nul d'un module α-notable est un sous-module α-notable.

f. Tout module notable est co-irréductible.

g. Un anneau semi-premier avec déviation est un G-anneau à droite ; c'est-à-dire R est de dimension finie et vérifie la condition de chaîne ascendante pour les annulateurs à droite.

On supposera connue en plus la généralisation du théorème de Levitski aux anneaux avec déviation :

h. Tout nil-sous-anneau d'un anneau avec déviation est un sous-anneau nilpotent.

i. Tout module avec déviation est de dimension finie.

I. MODULES NOTABLES SUR DES ANNEAUX SEMI-PREMIERS.

THEOREME 1. Soit R un anneau semi-premier avec déviation. Soit $\{E_i\}_{i\in I}$ l'ensemble de tous les idéaux à droite de R essentiels dans R. Alors : dev $R = \sup\{\text{dev } R/E_i+1, \ i \in I\}$.

On sait déjà que dev $R \leqslant \sup\{\text{dev } R/E_i+1, \ i \in I\}$. Si E est un idéal à droite essentiel de R, posons $\alpha = \text{dev } R/E$. R est alors un G-anneau à droite de telle sorte que E contient un élément régulier x.

Nous aurons donc :

$$\forall n, \ \text{dev}\frac{x^nR}{x^{n+1}R} = \text{dev}\frac{R}{xR} \geqslant \text{dev } \frac{R}{E} = \alpha.$$

La suite $R \supset xR \supset \dots \supset x^nR \supset \dots$ est alors une suite strictement décroissante de sous-modules de R telle que $\forall n, \ \text{dev}\frac{x^nR}{x^{n+1}R} \geqslant \alpha$. On en déduit que dev R $\geqslant \alpha+1$ puis :

$$\text{dev } R \geqslant \sup\{\text{dev } \frac{R}{E_i}+1,\ i \in I\}.$$

LEMME 2. Soit I un idéal à droite d'un anneau semi-premier avec déviation. Alors les propriétés suivantes sont équivalentes :

a) I est co-irréductible.

b) I est notable.

On sait déjà que b $\Longrightarrow$ a.

Supposons que I soit co-irréductible. I contient alors un sous-module notable non nul J.

J n'est pas un nil idéal puisque R est semi-premier. Nous pouvons donc trouver un élément $a \in J$ tel que a ne soit pas nilpotent et tel que $r(a)$ soit maximal parmi les annulateurs à droite des éléments non nilpotents de J.

Si $I \cap r(a) \neq 0$, alors $aR \cap r(a) \neq 0$.

Soit $b \in aR \cap r(a)$, avec $b \neq 0$. Nous pouvons écrire $b = ax \neq 0$ et $a^2x = ab = 0$.

Mais alors $x \in r(a^2) \underset{\neq}{\supset} r(a)$. Ceci est impossible d'après le choix de a.

Ainsi $I \cap r(a) = 0$. L'application $x \to ax$ est alors un homomorphisme injectif de I dans J. I étant isomorphe à un sous-module non nul d'un module notable est notable.

PROPOSITION 3. Soit R un anneau semi-premier avec déviation. Soit $\{C_i,\ i \in I\}$ la famille de tous les idéaux à droite notables de R. Alors dev $R = \sup\{\text{dev } C_i,\ i \in I\}$.

En effet, R étant de dimension finie, nous pouvons trouver une somme directe finie $E = \bigoplus_{i=1}^{n} C_i$, d'idéaux à droite notables de R telle que E soit essentiel dans R.

Alors dev $R/E <$ R d'après le théorème 1.

On en déduit dev R = dev $E = \sup_{i=1,\dots,n} \{\text{dev } C_i\} = \sup\{\text{dev } C_i,\ i \in I\}$.

COROLLAIRE 4. Soit C un idéal à droite notable d'un anneau premier R avec déviation. Alors $\operatorname{dev} C = \operatorname{dev} R$.

R est un G-anneau premier. Tout idéal à droite co-irréductible contient une copie de chacun des autres. Les idéaux à droite notables ont donc tous même déviation. L'égalité est alors une conséquence de la proposition 3.

PROPOSITION 5. Soit R un anneau semi-premier de déviation α. Soit D un R-module α-notable. Alors D contient une copie isomorphe d'un idéal à droite de R.

Soit $E = \bigoplus_{i=1}^{n} C_i$ une somme directe finie d'idéaux à droite notables de R, telle que E soit essentiel dans R.

Si $DE = 0$, alors $\operatorname{Hom}(R/E, D) \neq 0$.

Soit $0 \neq \varphi \in \operatorname{Hom}(R/E, D)$. Alors $\varphi(R/E) \neq 0$ et $\varphi(R/E) \subseteq D$. Ainsi $\alpha = \operatorname{dev} D = \operatorname{dev} \varphi(R/E) < \operatorname{dev} R = \alpha$. Ce n'est pas possible.

Nous aurons donc $DE \neq 0$, de telle qorte qu'il existe C_i tel que $DC_i \neq 0$, puis un homomorphisme $f: C_i \to D$ non nul.

Mais alors : $\operatorname{dev} D = \operatorname{dev} f(C_i) \leqslant \operatorname{dev} C_i \leqslant \operatorname{dev} R = \operatorname{dev} D$. C_i étant α-notable, ce n'est possible que si f est injectif.

II. IDEAUX PREMIERS DANS UN ANNEAU AVEC DEVIATION.

LEMME 1. Soient $P_1 \subset P_2$ deux idéaux premiers d'un anneau R avec déviation. Alors $\operatorname{dev} R/P_2 < \operatorname{dev} R/P_1$.

En effet, P_2/P_1 étant un idéal non nul de l'anneau premier R/P_1 est essentiel dans R/P_1. On en déduit :

$$\operatorname{dev} R/P_2 = \operatorname{dev} (R/P_1)\big/(P_2/P_1) < \operatorname{dev} R/P_1$$

d'après le théorème I.1.

THEOREME 2. Tout anneau avec déviation possède la condition de chaîne ascendante pour les idéaux premiers.

En effet, toute chaîne strictement croissante d'idéaux premiers induit une chaîne strictement décroissante d'ordinaux. Le théorème découle alors des propriétés des ordinaux.

THEOREME 3. Soit R un anneau avec déviation. Alors la famille des idéaux premiers contenant un idéal donné possède un nombre fini d'éléments minimaux. En particulier, tout idéal semi-premier est une intersection finie d'idéaux premiers.

Soit I un idéal de R. Soit S l'intersection de tous les idéaux premiers de R contenant I. R/S est alors un anneau semi-premier avec déviation donc un G-anneau. Il ne contient donc qu'un nombre fini d'idéaux premiers de R/S. On en déduit que S est l'intersection d'un nombre fini d'idéaux premiers de R.

THEOREME 4. Tout idéal d'un anneau avec déviation contient un produit fini d'idéaux premiers.

Soit N le radical premier de R. Alors N est le produit d'un nombre fini d'idéaux premiers de R. Comme N est un nil idéal de R, c'est un nil-sous-anneau de R. N est donc un anneau nilpotent. 0 est donc le produit d'un nombre fini d'idéaux premiers de R.

III. LA CORRESPONDANCE ENTRE CLASSES D'ISOMORPHISME D'INJECTIFS INDECOMPOSABLES ET IDEAUX PREMIERS ASSOCIES.

PROPOSITION III.1. Soit C un K-module notable. Alors la déviation de C est minimale parmi les déviations des sous-modules non nuls de E(C).

Soit $0 \neq A \subseteq E(C)$. Alors $A \cap C \neq 0$ et $\operatorname{dev} C = \operatorname{dev}(A \cap C) \leqslant \operatorname{dev} A$.

THEOREME 2. Soit R un anneau avec déviation. Alors :

(I) Les injectifs indécomposables sont exactement les enveloppes injectives des R-modules notables.

(II) Deux R-modules notables ont des enveloppes injectives isomorphes si et seulement si l'un d'entre eux contient une copie isomorphe d'un sous-module non nul de l'autre.

(I) Tous les R-modules notables étant co-irréductibles, leurs enveloppes injectives sont indécomposables.

Réciproquement : soit E un injectif indécomposable de $\mathrm{Mod}\ R$. Soit $0 \neq x$ un élément de E. xR est un module avec déviation et contient donc un sous-module notable non nul C. Alors $C \subseteq E$ et $E = E(C)$.

La démonstration de (II) est immédiate.

Le théorème 2 présente des analogies avec un théorème de Lambek et Michler établissant une correspondance entre les classes de liaisons d'idéaux critiques et premiers à droite et les classes d'isomorphismes d'injectifs indécomposables.

Les deux théorèmes sont liés pour les anneaux noethériens. En effet I est un idéal à droite critique de R si pour tout idéal à droite A de R contenant strictement I, $\mathrm{Hom}(R/A, E(R/I)) = 0$.

On démontre que cette condition est équivalente à tout homomorphisme non nul d'un sous-module non nul de R/I dans R/I est injectif.

Il est alors immédiat que R/I est notable $\Longrightarrow$ I est un idéal critique de R. La réciproque n'est pas toujours vraie, même si I est un idéal à droite critique et premier à droite.

<u>Exemple</u> : Soit A_1 l'algèbre de Weyl à deux générateurs sur un corps de caractéristique nul. Il est connu que A_1 est un anneau simple et noethérien et il possède un idéal à droite I tel que A_1/I est une extension non scindée d'un module simple par un autre module simple non isomorphe.

(J.C. Mac Connell et J.C. Robson. Homomorphisms and extensions of modules over some differential operator rings. J. Algebra 1973. Vol. 26, pp. 319-340. Corollaire 5.10).

Il est clair que I est critique et que I est premier à droite puisque A_1 est un anneau simple.

Alors $\mathrm{dev}\ A_1/I = 0$ et I n'est pas notable.

Si C est un R-module co-irréductible, soit

$\mathcal{P} = \{x \in R, \ \exists\, 0 \neq N \subseteq C$ tel que $x \in \operatorname{ann} N\}$.

Alors il est immédiat que $\mathcal{P}$ est un idéal bilatère premier de R. Nous dirons que $\mathcal{P}$ est associé à C.

Il est immédiat que tout sous-module non nul de C et toute extension essentielle de C possède le même idéal premier associé que C.

S'il existe un sous-module C' non nul de C tel que $\mathcal{P} = \operatorname{ann} C'$, alors $\mathcal{P}$ est le seul élément de l'assassin de C ; c'est-à-dire de la famille des idéaux premiers de R qui annulent un sous-module premier de C.

On rappelle que $C' \subseteq C$ est un sous-module premier de C si et seulement si $0 \neq C'' \subseteq C' \Longrightarrow \operatorname{ann} C'' = \operatorname{ann} C'$.

<u>THEOREME 3.</u> <u>Soit</u> C <u>un R-module co-irréductible sur un anneau avec déviation. Alors l'assassin de</u> C <u>contient un élément</u> $\mathcal{P}$. <u>Autrement dit, il existe</u> $C' \subseteq C$ <u>tel que</u> $\operatorname{ann} C' = \operatorname{ass} C' = \operatorname{ass} C = \mathcal{P}$.

Nous savons d'après le théorème II.4 que l'annulateur de C contient un produit fini d'idéaux premiers.

La famille $\mathcal{F}$ des idéaux premiers de R annulant un sous-module non nul de C est donc non vide. D'après le théorème II.2, nous pouvons choisir un idéal premier $\mathcal{P}$ maximal dans $\mathcal{F}$.

Alors il existe $0 \neq C' \subseteq C$ tel que $C'\mathcal{P} = 0$. Si $C'' \subseteq C'$ et $C'' \neq 0$ le choix de $\mathcal{P}$ et le théorème II.4 montrent que $\operatorname{ann} R/\mathcal{P}\ C'' = 0$ de telle sorte que $\operatorname{ann} C'' = \mathcal{P}$.

Il est alors aisé d'en déduire que $\mathcal{P}$ appartient à l'assassin de C et que $\mathcal{P}$ est l'idéal premier associé à C.

Si E est un injectif indécomposable, le théorème 2 montre qu'il existe un R-module notable C tel que $E = E(C)$. Le théorème 1 montre que la déviation de C ne dépend que de la classe d'isomorphisme de E. Nous appellerons cet ordinal, la dimension critique de E et nous le noterons $\operatorname{cr\,dim} E$.

$\mathcal{P} = \operatorname{ass} E$ est un idéal premier et il existe $C' \subseteq C$, C' notable tel que $\operatorname{ann} C' = \mathcal{P} = \operatorname{ass} C$. C'est un $R/\mathcal{P}$-module de telle sorte que :

$\operatorname{dev} C' \leqslant \operatorname{dev} R/\mathcal{P}$ soit : $\operatorname{cr\,dim} E \leqslant \operatorname{dev} R/\operatorname{ass} E$.

PROPOSITION 4. *Soit R un anneau premier avec déviation et soit C un R-module notable.*

Alors dev C = dev R si et seulement si R contient une copie isomorphe d'un sous-module non nul de C.

La condition nécessaire découle directement de la proposition I.5.

Réciproquement. Supposons qu'il existe $0 \neq D \subseteq C$ et un homomorphisme injectif de D dans R. Alors dev D = dev C et dev D = dev R d'après le corollaire I.4.

THEOREME 5. *Soit R un anneau avec déviation et soit $\mathfrak{P}$ un idéal premier de R. Alors il existe un injectif indécomposable et un seul à un isomorphisme près tel que :* ass E = $\mathfrak{P}$ *et* dev $R/\mathfrak{P}$ = cr dim E.

Soit C un idéal à droite co-irréductible du C-anneau premier $R/\mathfrak{P}$. Nous pouvons supposer que C est notable. Comme $R/\mathfrak{P}$ est un anneau premier, $\mathrm{ann}_{R/\mathfrak{P}}(C) = \mathrm{ass}_{R/\mathfrak{P}}(C)$. Ainsi $\mathrm{ass}_R(C) = \mathfrak{P}$.

Les propriétés de C comme $R/\mathfrak{P}$-modules permettent de dire que $E_R(C)$ est un R-module injectif indécomposable et que cr dim $E_R(C)$ = dev C = dev $R/\mathfrak{P}$ d'après la proposition 4. De plus ass $E_R(C)$ = ass C = $\mathfrak{P}$.

Soit E un injectif indécomposable tel que ass E = $\mathfrak{P}$ et dev $R/\mathfrak{P}$ = cr dim E. Alors il existe $D \subseteq E$, D notable tel que $E = E(D)$, ann D = $\mathfrak{P}$ et dev D = dev $R/\mathfrak{P}$. D est alors un $R/\mathfrak{P}$ -module non nul. Il contient donc un sous-$R/\mathfrak{P}$ -module notable D' qui se plonge dans $R/\mathfrak{P}$. Comme les idéaux à droite co-irréductibles de $R/\mathfrak{P}$ possèdent des sous-modules non nuls isomorphes, il en résulte que $E = E_R(D) = E_R(D') \simeq E_R(C)$.

Nous rappelons qu'un anneau premier est essentiellement borné à droite si tout idéal à droite essentiel de R contient un idéal bilatère non nul.

Un anneau R vérifie la condition de Krause à droite si tout quotient premier de R est essentiellement borné à droite.

Nous allons maintenant considérer les propriétés suivantes :

- P_1 : l'application $E \to \text{ass } E$ induit une bijection entre les classes d'isomorphismes de R-modules injectifs indécomposables et les idéaux premiers de R.
- P_2 : pour tout R-module injectif indécomposable E, dev R/ass E = cr dim E.
- P_3 : R vérifie la condition de Krause.

THEOREME 8.6 : Soit R un anneau avec déviation.
Alors $P_1 \Longleftrightarrow P_2 \Longleftarrow P_3$.

L'équivalence entre P_1 et P_2 découle directement du théorème 5. Supposons que P_3 soit vrai mais que P_2 ne le soit pas. En considérant éventuellement le quotient de R par un idéal premier $\mathcal{P}$, on peut supposer que R est un anneau premier pour lequel il existe un R-module injectif indécomposable E tel que ass E = 0 et cr dim E < dev R.

E contient un sous-module monogène et notable C tel que E = E(C) et ann C = 0. Il existe alors un idéal à droite non nul A de R tel que $C \simeq R/A$. Comme ann R/A = 0, A n'est pas essentiel dans R. Il existe donc un idéal à droite B de R tel que $A \cap B = 0$. On peut alors plonger B dans C. Cela n'est pas possible d'après la proposition 4 car :

$$\text{cr dim } E = \text{dev } C < \text{dev } R.$$

La réciproque $P_1 \Longrightarrow P_3$ a été établie par Krause pour les anneaux noethériens.

[1] R. GORDON and J.C. ROBSON, Krull dimension. Memoirs of Amer. Math. Soc. t. 133, 1973.

UNIVERSITE DE PARIS SUD

CENTRE D'ORSAY

SEMINAIRE D'ALGEBRE NON COMMUTATIVE

Conference n° 6 du 13 Janvier 1975

QUELQUES CONDITIONS NOETHERIENNES DANS LES ANNEAUX AVEC DEVIATION

par B. LEMONNIER

Notes aux Comptes Rendus de l'Académie des Sciences (1975).

UNIVERSITE DE PARIS SUD

CENTRE D'ORSAY

-:-:-:-

SEMINAIRE D'ALGEBRE NON COMMUTATIVE

Conférence n° 7 des 27.1. et 3.2.75

REPRESENTATIONS INDECOMPOSABLES DES ENSEMBLES ORDONNES FINIS

par Mme Michèle LOUPIAS

-:-:-:-:-:-

Soient I un ensemble ordonné fini et k un corps commutatif. Nous désignerons par $\mathcal{E}$ la catégorie des espaces vectoriels sur k de dimension finie. En considérant la catégorie sous-jacente à l'ensemble ordonné I nous noterons ${}_k\underline{\underline{I}} = \mathrm{Hom}(I, \mathcal{E})$ la catégorie des foncteurs de I dans $\mathcal{E}$. Un objet E de ${}_k\underline{\underline{I}}$ sera donc un diagramme d'espaces vectoriels de dimension finie, sur l'ensemble I. Il sera défini par la donnée d'un ensemble d'espaces vectoriels de dimension finie, $(E(i))_{i\in I}$, et d'un ensemble d'applications linéaires $(E_{ji})_{\substack{(j,i)\in I^2 \\ i\leqslant j}}$ où E_{ji} est une application linéaire de $E(i)$ dans $E(j)$ avec les propriétés :

$$E_{\ell j}E_{ji} = E_{\ell i} \qquad \text{pour } i \leqslant j \leqslant \ell.$$

$$E_{ii} = \mathrm{id}\, E(i)$$

Un objet de ${}_k\underline{\underline{I}}$ sera appelé <u>une représentation de</u> I.

La catégorie ${}_k\underline{\underline{I}}$ est abélienne et tout objet de ${}_k\underline{\underline{I}}$ est de longueur finie. Elle vérifie le théorème de Krull-Remok-Schmidt. En fait elle est équivalente à la catégorie des modules à gauche de longueur finie sur l'anneau A défini comme suit : A est un sous-anneau des matrices $n \times n$, à coefficients dans k, où $n = \mathrm{card}\ I$, avec la propriété $a=(a_{ij}) \in A$ si et seulement si $a_{ij} = 0$ pour $i,j \in I$, $j \not\leqslant i$.

L'ensemble I sera dit de <u>type de représentation finie</u> (en abrégé T.R.F.) si la catégorie ${}_k\underline{\underline{I}}$ a un nombre fini de classes d'isomorphie d'indécomposables.

D'après [1] nous connaissons un certain nombre d'ensemble de T.R.F. qui sont :

$$A_n = a_1 - a_2 - \cdots - a_{n+1}$$

$$D_n = \begin{array}{ccccccccccc} & & c_1 & & & & & & & & \\ & & | & & & & & & & & \\ b_1 & - & a & - & d_1 & - & d_2 & - & \cdots & - & d_n \end{array}$$

$$E_6 = \begin{array}{ccccccccc} & & & & c_1 & & & & \\ & & & & | & & & & \\ b_2 & - & b_1 & - & a & - & d_1 & - & d_2 \end{array} \qquad E_7 = \begin{array}{ccccccccccc} & & & & c_1 & & & & & & \\ & & & & | & & & & & & \\ b_2 & - & b_1 & - & a & - & d_1 & - & d_2 & - & d_3 \end{array}$$

$$E_8 = \begin{array}{ccccccccccccc} & & & & c_1 & & & & & & & & \\ & & & & | & & & & & & & & \\ b_2 & - & b_1 & - & a & - & d_1 & - & d_2 & - & d_3 & - & d_4 \end{array}$$

Le type de représentation de l'ensemble ne dépend pas du sens des flèches, ce qui n'est pas le cas de l'ensemble suivant

$$Z_{n,q} = \begin{tikzcd} & x_1 \arrow[r] & x_2 \arrow[r, dotted] & x_n \arrow[dr] & \\ a \arrow[ur] \arrow[dr] & & & & b \\ & y_1 \arrow[r] & y_2 \arrow[r, dotted] & y_q \arrow[ur] & \end{tikzcd} \qquad \text{(cf. [4]).}$$

Nous connaissons d'ailleurs toutes les représentations indécomposables de ces ensembles.

Soient J_1, J_2, ..., J_s les composantes connexes de I munies de l'ordre induit par celui de I. Nous savons que ${}_k\underline{\underline{I}} \simeq {}_k\underline{\underline{I}}_1 \times {}_k\underline{\underline{I}}_2 \times \cdots \times {}_k\underline{\underline{I}}_s$. Donc I est de T.R.F. si et seulement si I_1, I_2, ..., I_s le sont. Donc <u>nous supposerons désormais que</u> I <u>est connexe.</u>

Nous allons maintenant donner une liste d'ensembles qui ne sont pas de T.R.F. et qui jouent un grand rôle dans la suite de ce travail.

D'après [1] nous connaissons :

$$\tilde{D}_1 = \begin{tikzcd}[arrows=-] & b_1 \arrow[d] & \\ b_3 \arrow[r] & a \arrow[r] \arrow[d] & b_2 \\ & b_4 & \end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}[arrows=-] & & & b_1 \arrow[d] & & & \\ c_3 \arrow[r] & c_2 \arrow[r] & c_1 \arrow[r] & a \arrow[r] & d_1 \arrow[r] & d_2 \arrow[r] & d_3 \end{tikzcd} = \tilde{E}_7$$

$$\begin{tikzcd}[arrows=-] & & b_2 \arrow[d] & & \\ & & b_1 \arrow[d] & & \\ c_2 \arrow[r] & c_1 \arrow[r] & a \arrow[r] & d_1 \arrow[r] & d_2 \end{tikzcd} = \tilde{E}_6
\qquad
\begin{tikzcd}[arrows=-] & & b_1 \arrow[d] & & & & & \\ c_2 \arrow[r] & c_1 \arrow[r] & a \arrow[r] & d_1 \arrow[r] & d_2 \arrow[r] & d_3 \arrow[r] & d_4 \arrow[r] & d_5 \end{tikzcd} = \tilde{E}_8$$

$$\begin{tikzcd} & b & \\ a \arrow[ur] \arrow[dr] & & d \arrow[ul] \arrow[dl] \\ & c & \end{tikzcd} = \tilde{A}_4$$

Nous allons compléter cette liste par les 7 ensembles qui vont être traités dans les propositions 1, 3, 4 et 5.

<u>1. L'ensemble suivant, R_1, n'est pas de T.R.F</u>

$$\begin{tikzcd} & a_1 \arrow[d, dash] & & & & \\ & a & & & & \\ y \arrow[ur] & & b \arrow[ul] \arrow[r, dash] & b_1 \arrow[r, dash] & b_2 \arrow[r, dash] & b_3 \arrow[r, dash] & b_4 \\ & c \arrow[ul] \arrow[ur] & & & & \end{tikzcd}$$

Soit $\mathcal{C}$ la sous-catégorie pleine de ${}_k\underline{\underline{R}}_1$ formée des représentations E de R_1 telles que $\ker E_{yc} \cap \ker E_{bc} = \{o\}$. Elle est équivalente à la catégorie $\mathcal{D}$ des représentations F sur $\tilde{E}_8 =$

$$\begin{tikzcd} & a'_1 \arrow[d, dash] & & & & \\ & a' \arrow[d, dash] & & & & \\ y' \arrow[r] & s & b' \arrow[l] \arrow[r, dash] & b'_1 \arrow[r, dash] & b'_2 \arrow[r, dash] & b'_3 \arrow[r, dash] & b'_4 \end{tikzcd}$$

telles que $\operatorname{Im} F_{sy'} + \operatorname{Im} F_{sb'} = F(s)$.

Décrivons le foncteur de $\mathcal{C}$ dans $\mathcal{D}$ réalisant l'équivalence ; soit F l'image de l'objet E de $\mathcal{C}$.

On pose $F(s)$ = la somme fibrée de $E(y)$ et $E(b)$ au-dessous de $E(c)$ et $\forall i \in I-\{c\}$ on pose $F(i') = E(i)$. Les flèches de la représentation F sont évidents.

Le foncteur réciproque fait correspondre à un objet F de $\mathfrak{D}$ l'objet E de $\mathscr{C}$ défini par :

$E(c)$ = le produit fibré de $F(y')$ et $F(b')$ au-dessus de $F(s)$ et $\forall i \in \tilde{E}_8 - \{s\}$ $\quad E(i) = F(i')$; les flèches de la représentation E sont évidentes.

$\mathfrak{D}$ ayant un nombre infini de représentations indécomposables il en est de même pour $\mathscr{C}$ et donc pour ${}_k\underline{\underline{I}}$.

Une démonstration analogue s'appliquera pour les ensembles

R_2
$$\begin{tikzcd}
 & a_4 \arrow[d, dash] & & \\
 & a_3 \arrow[d, dash] & & \\
 & a_2 \arrow[d, dash] & & \\
 & a_1 \arrow[d, dash] & & \\
 & a & & \\
y \arrow[ur] & & b \arrow[ul] \arrow[r, dash] & b_1 \\
 & c \arrow[ul] \arrow[ur] & &
\end{tikzcd}$$

R_3
$$\begin{tikzcd}
 & & & d & & & \\
a_2 \arrow[r, dash] & a_1 \arrow[r, dash] & a \arrow[ur] & & b \arrow[ul] \arrow[r, dash] & b_1 \arrow[r, dash] & b_2 \\
 & & & c \arrow[ul] \arrow[ur] & & &
\end{tikzcd}$$

R_4
$$\begin{tikzcd}
 & & d & & & & & \\
a_1 \arrow[r, dash] & a \arrow[ur] & & b \arrow[ul] \arrow[r, dash] & b_1 \arrow[r, dash] & b_2 \arrow[r, dash] & b_3 \arrow[r, dash] & b_4 \\
 & & c \arrow[ul] \arrow[ur] & & & & &
\end{tikzcd}$$

qui ne sont pas de T.R.F.

2. <u>LEMME</u> : <u>Soient $\mathscr{C}$ et $\mathfrak{D}$ deux catégories de Krull-Remok-Schmidt et Φ un foncteur additif de $\mathscr{C}$ dans $\mathfrak{D}$ admettant une section Ψ. Si $\mathscr{C}$ a un nombre infini de classes d'isomorphie d'objets indécomposables, il en est de même pour $\mathfrak{D}$.</u>

Soit C un objet indécomposable de $\mathscr{C}$. Nous décomposons $\Phi(C)$ en somme directe d'indécomposables de $\mathfrak{D}$, $\Phi(C) = \bigoplus_i D_i$. Comme $C \simeq \Psi\Phi(C)$ nous voyons que $\Psi(D_i) = 0$ pour tout $i \neq i_0$ pour lequel $\Psi(D_{i_0}) \simeq C$. La classe d'isomorphie de D_{i_0} est parfaitement déterminée par la classe d'isomorphie de C et nous fabriquons ainsi une injection de l'ensemble des classes d'isomorphie des objets indécomposables de $\mathscr{C}$ dans l'ensemble des classes d'isomorphie des objets indécomposables de $\mathfrak{D}$. Le résultat s'ensuit.

3. <u>L'ensemble suivant,</u> R_5 , <u>n'est pas de T.R.F.</u>

$$\begin{tikzcd}
& b & & & & & \\
z_1 \arrow[ur] & & a \arrow[ul] & a_1 \arrow[l] & a_2 \arrow[l] & a_3 \arrow[l] & a_4 \arrow[l] \\
& & y_1 \arrow[u] & & & & \\
& c \arrow[uul] \arrow[ur] & & & & &
\end{tikzcd}$$

Nous savons d'après [2] que la catégorie $\mathcal{S}$ des espaces A fibrés de la manière suivante a une infinité d'objets indécomposables :

$$\begin{tikzcd}
B' \arrow[r] & X \arrow[r] & A & A_1 \arrow[l] & A_2 \arrow[l] & A_3 \arrow[l] & A_4 \arrow[l] \\
& C \arrow[u] \arrow[r] & Y_1 \arrow[u] & & & &
\end{tikzcd}$$

Nous définissons le foncteur Φ de $\mathcal{S}$ dans ${}_k\underline{\underline{R}}_5$ en posant $\Phi(A)$ = le diagramme :

$$\begin{tikzcd}
& A/B' & & & & & \\
X \arrow[ur, "\zeta_1"] & & A \arrow[ul, "\beta"'] & A_1 \arrow[l, "\alpha_1"'] & A_2 \arrow[l, "\alpha_2"'] & A_3 \arrow[l, "\alpha_3"'] & A_4 \arrow[l, "\alpha_4"'] \\
& & Y_1 \arrow[u, "\eta_1"'] & & & & \\
& C \arrow[uul, "\zeta_0"] \arrow[ur, "\eta_0"'] & & & & &
\end{tikzcd}$$

les applications de $\Phi(A)$ étant toutes canoniques.

Le foncteur Φ est additif et admet une section Ψ définie comme suit : si E =

$$\begin{tikzcd}
& B & & & & & \\
Z_1 \arrow[ur, "\zeta_1"] & & A \arrow[ul, "\beta"'] & A_1 \arrow[l, "\alpha_1"'] & A_2 \arrow[l, "\alpha_2"'] & A_3 \arrow[l, "\alpha_3"'] & A_4 \arrow[l, "\alpha_4"'] \\
& & Y_1 \arrow[u, "\eta_1"'] & & & & \\
& C \arrow[uul, "\zeta_0"] \arrow[ur, "\eta_0"'] & & & & &
\end{tikzcd}$$

est une représentation de R_5 nous posons $\Psi(E) =$

$$\begin{tikzcd}
\ker \beta \arrow[r] & \beta^{-1}\mathrm{Im}\,\zeta_1 \arrow[r] & A & \mathrm{Im}\,\alpha_1 \arrow[l] & \mathrm{Im}\,\alpha_1\alpha_2 \arrow[l] & \mathrm{Im}\,\alpha_1\alpha_2\alpha_3 \arrow[l] & \mathrm{Im}\,\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4 \arrow[l] \\
 & \mathrm{Im}\,\eta_1\eta_o \arrow[u] \arrow[r] & \mathrm{Im}\,\eta_1 \arrow[u] & & & &
\end{tikzcd}$$

Le résultat s'ensuit d'après 2.

<u>4. L'ensemble</u> R_6 <u>suivant n'est pas de T.R.F.</u>

$$\begin{tikzcd}
 & & d & & & & \\
a_1 \arrow[r] & a \arrow[ur] & & & & & \\
 & & & b \arrow[uul] & b_1 \arrow[l] & b_2 \arrow[l] & b_3 \arrow[l] \\
 & x_1 \arrow[uu] & & & & & \\
 & & c \arrow[ul] \arrow[uur] & & & &
\end{tikzcd}$$

Soit ${}_k\tilde{\underline{\underline{D}}}_1$ la catégorie des représentations F de l'ensemble

$$\begin{tikzcd}
 & 1 & \\
4 & 0 \arrow[l] \arrow[r] \arrow[u] \arrow[d] & 2 \\
 & 3 &
\end{tikzcd}$$

Nous fabriquons le foncteur Φ de ${}_k\tilde{\underline{\underline{D}}}_1$ dans ${}_k\underline{\underline{R}}_6$ de la manière suivante : si $F =$

$$\begin{tikzcd}
 & F_1 & \\
F_4 & F_o \arrow[l, "\varphi_4"'] \arrow[r, "\varphi_2"] \arrow[u, "\varphi_1"'] \arrow[d, "\varphi_3"] & F_2 \\
 & F_3 &
\end{tikzcd}$$

Alors $\Phi(F) = E =$

$$\begin{tikzcd}
& & F_2\oplus F_3\oplus F_4 & & & & \\
F_2\oplus F_3 \arrow[r, "\alpha_1"] & F_2\oplus F_3\oplus F_3\oplus F_4 \arrow[ur, "\zeta"] & & F_1\oplus F_2\oplus F_3\oplus F_4 \arrow[ul, "\delta"'] & F_2\oplus F_3\oplus F_4 \arrow[l, "\beta_1"'] & F_3\oplus F_4 \arrow[l, "\beta_2"'] & F_4 \arrow[l, "\beta_3"'] \\
& F_2\oplus F_3\oplus F_4 \arrow[u, "\xi_1"] & & & & & \\
& & F_0 \arrow[ul, "\xi_0"] \arrow[uur, "\gamma"'] & & & &
\end{tikzcd}$$

On pose : $\xi_0(x_0) = (\varphi_2(x_0),\ \varphi_3(x_0),\ \varphi_4(x_0))$

$$\xi_1(x_2,x_3,x_4) = (x_2,0,x_3,x_4)$$

$$\zeta(x_2,x_3,y_3,x_4) = (x_2,x_3+y_3,x_4)$$

$$\alpha_1(x_2,x_3) = (x_2,x_3,0,0)$$

$$\gamma(x_0) = (\varphi_1(x_0),\ \varphi_2(x_0),\ \varphi_3(x_0),\ \varphi_4(x_0))$$

$$\delta(x_1,x_2,x_3,x_4) = (x_2,x_3,x_4)$$

β_1,β_2,β_3 sont les injections canoniques.

Le foncteur Φ est additif et admet une section Ψ définie de la manière suivante :

Si E est un objet de ${}_k\underline{\underline{R}}_6$ égal à

$$\begin{tikzcd}
& & D & & & & \\
A_1 \arrow[r, "\alpha_1"] & A \arrow[ur, "\zeta"] & & B \arrow[ul, "\delta"'] & B_1 \arrow[l, "\beta_1"'] & B_2 \arrow[l, "\beta_2"'] & B_3 \arrow[l, "\beta_3"'] \\
& X_1 \arrow[u, "\xi_1"] & & & & & \\
& & C \arrow[ul, "\xi_0"] \arrow[uur, "\gamma"'] & & & &
\end{tikzcd}$$

Nous posons $\Psi(E) = F$ avec

$F_o = C$

$F_1 = {}^{B}/_{\mathrm{Im}\ \beta_1}$ et $\varphi_1 : C \xrightarrow{\gamma} B \xrightarrow{\mathrm{can}} {}^{B}/_{\mathrm{Im}\ \beta_1}$

$F_2 = {}^{D}/_{\mathrm{Im}\ \delta\beta_1\beta_2}$ et $\varphi_2 : C \xrightarrow{\delta\gamma} D \xrightarrow{\mathrm{can}} {}^{D}/_{\mathrm{Im}\ \delta\beta_1\beta_2}$

$F_3 = {}^{D}/_{\zeta(\mathrm{Im}\ \alpha_1 \cap \mathrm{Im}\ \xi_1) + \mathrm{Im}\ \delta\beta_1\beta_2\beta_3}$

et $\varphi_3 : C \xrightarrow{\delta\gamma} D \xrightarrow{\mathrm{can}} {}^{D}/_{\zeta(\mathrm{Im}\ \alpha_1 \cap \mathrm{Im}\ \xi_1)+\mathrm{Im}\ \delta\beta_1\beta_2\beta_3}$

$F_4 = {}^{A}/_{\mathrm{Im}\ \alpha_1 + \ker\ \zeta}$ et $\varphi_4 : C \xrightarrow{\xi_1\xi_o} A \xrightarrow{\mathrm{can}} {}^{A}/_{\mathrm{Im}\ \alpha_1+\ker\ \zeta}$

Le résultat s'ensuit d'après 2.

5. L'ensemble suivant, R_7 n'est pas de T.R.F.

$$\begin{tikzcd}
 & & d & & & \\
 & z_1 \arrow[ur] & & & & \\
a_1 \arrow[r] & a \arrow[u] & & b \arrow[uul] & b_1 \arrow[l] & b_2 \arrow[l] \\
 & x_1 \arrow[u] & & & & \\
 & & c \arrow[ul] \arrow[uur] & & &
\end{tikzcd}$$

Soit Λ le foncteur de $k\ \underline{\underline{R}}_6$ dans $k\ \underline{\underline{R}}_7$ ainsi défini.

Si $E =$

$$\begin{tikzcd}
 & & D & & & & \\
A_1 \arrow[r, "\alpha_1"] & A \arrow[ur, "\zeta"] & & & & & \\
 & X_1 \arrow[u, "\xi_1"] & & B \arrow[uul] & B_1 \arrow[l, "\beta_1"'] & B_2 \arrow[l, "\beta_2"'] & B_3 \arrow[l, "\beta_3"'] \\
 & & C \arrow[ul, "\xi_o"] \arrow[ur, "\gamma"'] & & & &
\end{tikzcd}$$

est un objet de $_k\underline{\underline{R}}_6$ nous posons $\Lambda(E) =$

$$\begin{tikzcd}
 & & D/\mathrm{Im}\ \delta\beta_1\beta_2\beta_3 & & & \\
 & D \arrow[ur, "\mathrm{can}"] & & & & \\
A_1 \arrow[r, "\alpha_1"] & A \arrow[u] & & B/\mathrm{Im}\ \beta_1\beta_2\beta_3 \arrow[uul, "\bar{\delta}"'] & B_1/\mathrm{Im}\ \beta_1\beta_2 \arrow[l, "\overline{\beta_1}"'] & B_2/\mathrm{Im}\ \beta_3 \arrow[l, "\overline{\beta_2}"'] \\
 & X_1 \arrow[u, "\xi_1"] & & & & \\
 & & C \arrow[ul, "\xi_o"] \arrow[uur, "\delta"'] & & &
\end{tikzcd}$$

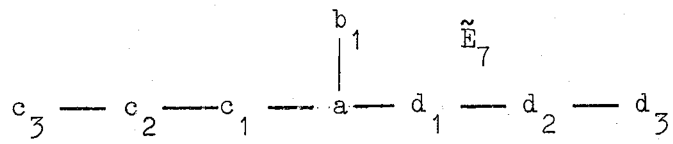
Les applications $\bar{\gamma}, \bar{\delta}, \overline{\beta_1}, \overline{\beta_2}$ sont évidentes. On montre facilement que le foncteur $\Lambda\Phi$ de $_k\tilde{\underline{\underline{D}}}_1$ dans $_k\underline{\underline{R}}_7$ admet une section. Le résultat s'ensuit d'après 2.

<u>6. Nous résumons les résultats précédents dans la liste fondamentale d'ensembles qui ne sont pas de T.R.F.</u>

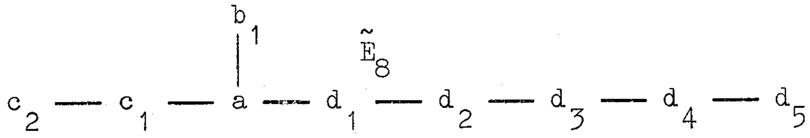
$$\begin{tikzcd}
 & b_1 & \\
b_4 \arrow[r, dash] & a \arrow[u, dash] \arrow[r, dash] \arrow[d, dash] & b_2 \\
 & b_3 &
\end{tikzcd} \qquad \tilde{D}_1$$

$$\begin{tikzcd}
 & & b_2 & & \\
 & & b_1 \arrow[u, dash] & & \\
c_2 \arrow[r, dash] & c_1 \arrow[r, dash] & a \arrow[u, dash] \arrow[r, dash] & d_1 \arrow[r, dash] & d_2
\end{tikzcd} \qquad \tilde{E}_6$$

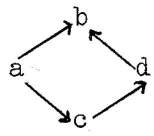
$\tilde{E}_7$



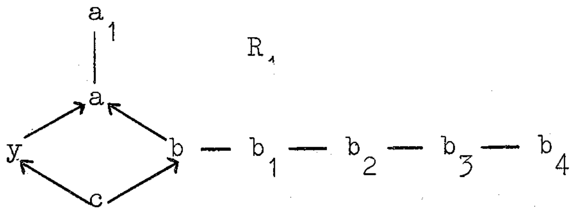
$\tilde{E}_8$



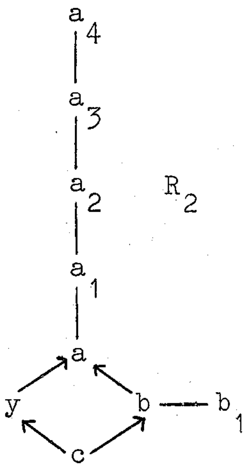
$\tilde{A}_4$



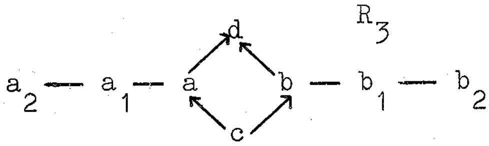
R_1



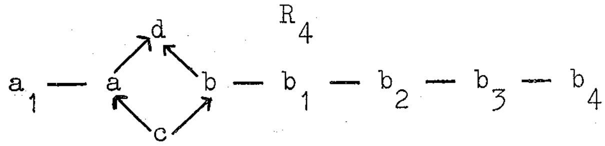
R_2



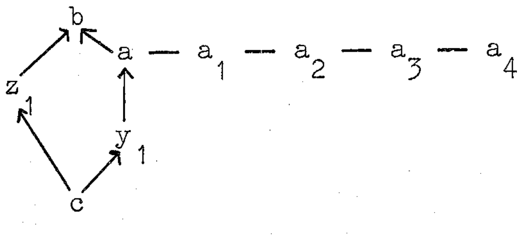
R_3



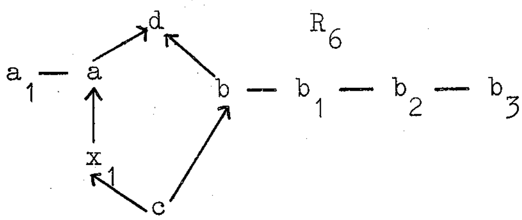
R_4



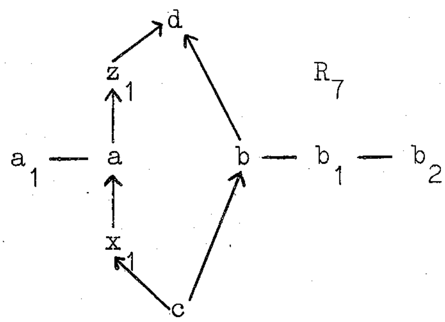
R_5



R_6



R_7



On remarquera que nous n'avons pas orienté un certain nombre de flèches. C'est que le type de représentation de I ne dépend pas de leur sens.

Définition : Etant donné un ensemble ordonné I nous appellerons ensemble opposé à I l'ensemble sous-jacent à I muni de l'ordre opposé à celui de I. Nous le noterons I^{o}. Les catégories ${}_k\underline{\underline{I}}$ et ${}_k\underline{\underline{I}}^{o}$ étant anti-équivalentes par dualité des espaces vectoriels, I est de T.R.F. si et seulement si I^{o} l'est.

7. PROPOSITION : Soit I un ensemble ordonné fini. Si I est de T.R.F., alors tout sous-ensemble de I muni de l'ordre induit est aussi de T.R.F.

Nous utilisons la démonstration du lemme 9.3, p. 234 de [3]. Soit J un sous-ensemble de I et soit α l'injection canonique de J dans I. On sait que α définit le foncteur restriction de ${}_k\underline{\underline{I}}$ dans ${}_k\underline{\underline{J}}$ au moyen de $\alpha(E) = E_o\alpha$, et α possède un adjoint β défini comme suit :

Soit $E' \in {}_k\underline{\underline{J}}$; pour $i \in I$ posons $Y(i) = \{j \in J | j \geqslant i\}$. Nous posons $\beta(E')(i) =$ la limite projective de la restriction de E' à $Y(i)$. Les applications $\beta(E')_{ji}$ se définissent de manière évidente. Nous avons $\alpha\beta = \mathrm{id}\ {}_k\underline{\underline{J}}$.

Il en résulte que si E' est un indécomposable de ${}_k\underline{\underline{J}}$, et si $\beta(E') = E_1 \oplus E_2$ on a $\alpha(E_1)$ ou $\alpha(E_2) = 0$. Mais d'après la définition de $\beta(E')$ ceci implique $E_1 = 0$ ou $E_2 = 0$. Donc $\beta(E')$ est un indécomposable de ${}_k\underline{\underline{I}}$.

Remarquons que α a aussi un co-adjoint γ obtenu en remplaçant les limites projectives par les limites inductives et on a aussi $\alpha\gamma = \mathrm{id}\ {}_k\underline{\underline{J}}$.

8. PROPOSITION : Soient I et J deux ensembles ordonnés finis et f un morphisme d'ensembles ordonnés, surjectif de I sur J. On suppose de plus que pour tout $j \in J$, $f^{-1}(j)$ ordonné par l'ordre induit par I est un sous-ensemble connexe ; alors si I est un ensemble de T.R.F. il en est de même pour J.

En effet f définit un foncteur de ${}_k\underline{\underline{J}}$ dans ${}_k\underline{\underline{I}}$ au moyen de $E \to E\circ f$. Si $F = E\circ f$ on a $F(i) = E(j)$ pour tout $i \in f^{-1}(j)$ et $F_{\ell h} = \mathrm{id}\ E(j)$ pour tout $\ell, h \in f^{-1}(j)$, $h \leqslant \ell$. Il est clair que si E est indécomposable $E\circ f$ l'est aussi.

Remarquons l'importance de la condition "$f^{-1}(j)$ est connexe pour tout $j \in J$" dans la proposition précédente :

Soit $I =$

$$\begin{tikzcd}[column sep=small, row sep=small] & & d & & \\ a_1 \arrow[r] & a \arrow[ur] & & b \arrow[ul] & b_1 \arrow[l] \\ & & c \arrow[ul] \arrow[ur] & & \end{tikzcd}$$

et $J = \tilde{D}_1 = $ $\begin{tikzcd}[column sep=small, row sep=small] & 1 & \\ 2 \arrow[r] & o \arrow[u] & 3 \arrow[l] \\ & {} \arrow[u] & \end{tikzcd}$ et soit f le morphisme d'ensembles ordonnés de I dans J défini par $f(a) = f(b) = 0$, $f(d) = 1$, $f(a_1) = 2$, $f(b_1) = 3$, $f(c) = 4$.

Nous savons que ${}_k\underline{\underline{\tilde{D}_1}}$ n'est pas de T.R.F, mais nous montrons par un argument analogue à celui de 1. que ${}_k\underline{\underline{I}}$ est de T.R.F. Ceci est dû au fait que $f^{-1}(o) = \{a,b\}$ n'est pas connexe.

Puisque J est isomorphe à un quotient de I nous sommes amenés à nous poser le problème suivant :

Etant donnée une relation d'équivalence définie sur I, à quelle condition peut-on ordonner l'ensemble quotient de telle sorte que l'application canonique soit un morphisme d'ensembles ordonnés ?

9. La condition nécessaire et suffisante pour qu'il en soit ainsi est : il n'existe aucune suite finie et non constante de classes d'équivalence $I_o, I_1, \ldots, I_s$ $(s \geqslant 1)$ et des éléments x_i et $y_i \in I_j$, $j = 0,1,\ldots,s$, tels que $y_o \leqslant x_1$, $y_1 \leqslant x_2 \ldots y_{s-1} \leqslant x_s$, $y_s \leqslant x_o$.

10. Définitions et notations.

Une relation d'équivalence sur I vérifiant la condition 9. et telle que chaque classe soit connexe est appelée une relation d'équivalence contractante.

Si I est muni d'une relation d'équivalence contractante, l'ensemble quotient sera dit obtenu à partir de I par contraction ou que c'est un contracté de I.

Un intervalle est un ensemble ordonné ayant un plus grand et un plus petit élément.

Soient a et b $\in$ I avec $a \leqslant b$. Nous noterons $[a,b] = \{x \in I \mid a \leqslant x \leqslant b\}$.

Nous définissons de même $[a,b[\ = \{x \in I \mid a \leqslant x < b\}$, $]a,b]$, $]a,b[$, $]\leftarrow,a]$, etc...

Nous dirons qu'un sous-ensemble J de I est <u>convexe dans</u> I si pour tout $a,b \in J$ avec $a \leqslant b$ on a $[a,b] \subset J$.

Remarquons que les classes d'une relation d'équivalence contractante sur I, sont convexes dans I.

Soit H un sous-ensemble connexe et convexe dans I. Alors la relation d'équivalence sur I dont les classes sont H et les ensembles $\{x\}$ lorsque $x \notin H$, est contractante, on dira que c'est <u>la relation d'équivalence contractante associée à</u> H.

Soient $a,b \in I$. Nous dirons que a et b sont <u>voisins</u> si a et b sont distincts et comparables et s'il n'y a aucun élément compris strictement entre a et b.

On appellera <u>contraction élémentaire</u> une contraction associée à un intervalle $[a,b]$ où a et b sont voisins.

Remarquons que toute contraction est la composée de contractions élémentaires.

11. Exemple de relation d'équivalence contractante.

Soit I =

$$\begin{tikzcd}
 & & a & & \\
b_1 \arrow[r, dash] & b \arrow[ur] & & d \arrow[ul] \arrow[r, dash] & d_1 \\
 & & c \arrow[ul] \arrow[ur] \arrow[d, dash] & & \\
 & & c_1 & &
\end{tikzcd}$$

Considérons la relation d'équivalence contractante associée à $H = \{b,c,d\}$. Alors l'ensemble quotient est :

$$\begin{tikzcd}
 & \{a\} & \\
\{b_1\} \arrow[r, dash] & \{b,c,d\} \arrow[u] \arrow[r, dash] \arrow[d, dash] & \{d_1\} \\
 & \{c_1\} &
\end{tikzcd}$$

et donc I n'est pas de T.R.F.

Définitions : Nous dirons qu'un ensemble ordonné fini I est critique si I n'est pas de T.R.F., mais si tout sous-ensemble propre muni de l'ordre induit est de T.R.F. ainsi que tout ensemble contracté de I par contraction élémentaire.

Nous dirons qu'un ensemble ordonné fini est crucial si c'est un ensemble de la liste 6. ou l'opposé d'un ensemble de la liste 6.

Nous dirons qu'un ensemble ordonné fini est sympathique si aucun de ses sous-ensembles muni de l'ordre induit n'est crucial ou ne se contracte en un ensemble crucial.

Tout ensemble de T.R.F. est sympathique. Tout sous-ensemble et tout contracté d'un ensemble sympathique est sympathique.

Nous donnerons enfin sans les démontrer les énoncés des deux théorèmes suivants :

12. THEOREME : Les ensembles critiques sont identiques aux ensembles cruciaux.

13. THEOREME : Les ensembles de T.R.F. sont identiques aux ensembles sympathiques.

BIBLIOGRAPHIE

[1] P. GABRIEL, Unzerlegbare Darstellungen I.
Manuscripta Math. 6 (1972), pp. 71-103.

[2] P. GABRIEL, Représentations indécomposables des ensembles ordonnés d'après NAZAROVA et ROITER [5], Séminaire DUBREIL, 1972/73, n° 13.

[3] MITCHELL, Theory of catégories.
Pure and applied mathematics, 17.

[4] N. CHAPTAL, Objets indécomposables dans certaines catégories de foncteurs.
C.R. Acad. Sc. Paris 268 (1969), pp. 934-936.

[5] L.A. NAZAROVA, ROITER, Représentations des ensembles ordonnés,
Zapiski naučnykh Seminarov Leningr. - Otd -
Mat. Inst. Steklova, t. 28, (1972), pp. 5-31.

-:-:-:-:-:-

UNIVERSITE DE PARIS SUD

CENTRE D'ORSAY

SEMINAIRE D'ALGEBRE NON COMMUTATIVE

Conférence n° 8 des 24 février et
3 Mars 1975

SUR LA THEORIE DE LA REPRESENTATION, I.

REPRESENTATIONS OF EXTENDEND DYNKIN DIAGRAMS
AND SOME APPLICATIONS, II.

par V. DLAB

- non rédigée -

UNIVERSITE DE PARIS SUD

CENTRE D'ORSAY

SEMINAIRE D'ALGEBRE NON COMMUTATIVE

Conférence n° 9 du 10 Mars 1975

ANNEAUX D'ENDOMORPHISMES A IDENTITES POLYNOMIALES

par J.L. PASCAUD

-non rédigée -

UNIVERSITE DE PARIS SUD

CENTRE D'ORSAY

SEMINAIRE D'ALGEBRE NON COMMUTATIVE

Conférence n° 10 du 17 Mars 1975

THE REPRESENTATION TYPE OF LOCAL ALGEBRAS AND THE INDECOMPOSABLE REPRESENTATIONS OF THE DIHEDRAL 2-GROUPS

par C.M. RINGEL

- non rédigée -

UNIVERSITE DE PARIS-SUD

CENTRE D'ORSAY

SEMINAIRE D'ALGEBRE NON COMMUTATIVE

Conférence n° 11 du 14 Avril 1975

SUR LA CONDITION DE ORE PAR RAPPORT A $C(P)$
d'après G. CAUCHON

par M. DJABALI

-:-:-:-:-:-:-:-

INTRODUCTION.

Initialement, notre but était d'exposer un résultat de G. Michler [7]. Ce résultat est le suivant. Soit A un T-anneau (à gauche) tel que pour tout idéal premier P, la condition de Ore (à gauche) soit vérifiée par rapport à $C(P)$: alors A vérifie la condition d'Artin-Rees (à gauche). Or il se révèle que ce résultat est faux : dans la première partie de l'exposé nous donnerons un contre exemple. La suite de l'exposé sera consacrée à des résultats non publiés de G. Cauchon. Rappelons que des résultats concernant le même domaine ont été exposés par L. Lesieur [5].

Tous les anneaux considérés sont des anneaux unitaires.

(I) SUR LE RESULTAT DE G. MICHLER.

On rappelle que si A est un anneau noethérien (à gauche), la correspondance qui, à tout module injectif indécomposable E, associe l'idéal premier $P = \mathrm{Ass}(E)$ est surjective.

DEFINITION 1.1. Un anneau noethérien (à gauche) est dit T-anneau (à gauche) si la correspondance définie ci-dessus est bijective.

PROPOSITION 1.2. (Krause). Pour qu'un anneau noethérien (à gauche) A soit un T-anneau, il faut et il suffit que, pour tout idéal premier P, l'anneau A/P vérifie la condition suivante : tout idéal à gauche essentiel contient un idéal bilatère non nul.

DEFINITION 1.3. Un anneau A est dit vérifier la condition d'Artin-Rees (à gauche) si, pour tout couple d'idéaux (à gauche) I et J, et pour tout entier naturel n, il existe un entier naturel h tel que : $J^h \cap I \subset J^n I$.

PROPOSITION 1.4. Soit A un anneau noetherien (à gauche) vérifiant la condition d'Artin-Rees et soit R son radical de Jacobson. Alors $\cap R^n = 0$.

Posons $I = \cap R^n$. Il existe un entier h tel que $R^h \cap I \subset RI$. Donc $I \subset RI$ et donc $I = RI$. Le lemme de Nakayama montre que $I = 0$.

Contre-exemple au résultat de Michler. Dans [3] Jategaonkar donne un exemple d'anneau A dans lequel tout idéal à gauche est principal et bilatère. D'après 1.2 A est un T-anneau. Soit P un idéal premier et $C(P)$ l'ensemble des éléments réguliers modulo P. Montrons que la condition de Ore est vérifiée. Si $s \in C(P)$ et $a \in A$, il faut montrer qu'il existe $s' \in C(P)$ et $a' \in A$ tels que : $s'a = a's$. Or l'idéal As étant bilatère, $sa \in As$. Mais dans l'anneau A considéré, $\cap R^n \neq 0$, ce qui montre que A ne peut vérifier la condition d'Artin-Rees.

(II) CONDITION DE ORE PAR RAPPORT A $C(P)$ ET COEUR DE $E(A/P)$.

Nous allons prouver le théorème suivant.

THEOREME 2.1. (G. Cauchon). Soit A un anneau noethérien (à gauche). Soit P un idéal semi-premier de A. Pour que A vérifie la condition de Ore par rapport à $C(P)$, il faut et il suffit que P annule le coeur de E, E étant l'enveloppe injective du A-module à gauche A/P.

Quelques rappels (cf. [1], chap. III).

Soient A un anneau et S un système multiplicatif d'éléments de A. On associe à S un système d'idéaux à gauche F de la manière suivante : Pour que $I \in F$, il faut et il suffit que pour tout $a \in A$, il existe $s \in S$ tel que $sa \in I$.

En posant $I \cdot a = \{\lambda \in A, \lambda a \in I\}$, on écrira de manière équivalente : $(I \cdot a) \cap S \neq \emptyset$.

F est un système topologisant, c'est-à-dire que : (I) si $I \in F$, et si $J \supset I$, alors $J \in F$. (II) si I et $J \in F$ alors $I \cap J \in F$. (III) si $I \in F$, $I \cdot a \in F$ pour tout $a \in A$.

Il est clair que tout idéal de F contient un élément de S. Par contre la réciproque n'est pas toujours vraie.

PROPOSITION 2.2. Pour que les idéaux de F soient tous les idéaux contenant un élément de S, il faut et il suffit que A vérifie la condition de Ore par rapport à S.

Dans toute la suite A sera noethérien à gauche. P sera un idéal semi-premier : F sera le système topologisant associé au système multiplicatif $C(P)$.

PROPOSITION 2.3. Tout idéal (à gauche) contenant P et contenant un élément de $C(P)$ appartient à F.

Ceci découle du fait que la condition de Ore est vérifiée dans A/P (th. de A.W. Goldie [2]).

PROPOSITION 2.4. Pour que A vérifie la condition de Ore par rapport à $C(P)$, il faut et il suffit que si $I \notin F$, alors $I+P \notin F$.

Si la condition de Ore est vérifiée, on a vu que : $I \notin F \Longleftrightarrow I \cap C(P) = \emptyset$. Or il est immédiat que $I \cap C(P) = \emptyset \Longleftrightarrow (I+P) \cap C(P) = \emptyset$.

Réciproquement, soit I tel que $I \cap C(P) \neq \emptyset$. Alors $(I+P) \cap C(P) \neq \emptyset$, et alors $I+P \in F$ (2.3). Donc $I \in F$. La condition de Ore est vérifiée.

DEFINITION 2.5. On appelle idéal à gauche P-critique un idéal maximal pour la propriété de ne pas appartenir à F.

PROPOSITION 2.6. Pour que A vérifie la condition de Ore par rapport à $C(P)$, il faut et il suffit que P soit contenu dans tout idéal P-critique.

Ceci est une conséquence immédiate de (2.4).

Quelques rappels sur le coeur d'un module injectif (cf. [6]).

DEFINITION 2.7. Soit E un A-module injectif. On appelle coeur de E, et on note $C(E)$ le sous-module : $\bigcap \operatorname{Ker} h$, $h \in \operatorname{End}_A E$, $\operatorname{Ker} h$ essentiel dans E.

<u>Notation</u> : On appelle $C^*(E)$ l'ensemble des éléments non nuls x de E, tels que $\mathrm{Ann}\, x$ soit maximal (parmi les annulateurs d'éléments non nuls).

On suppose que $E = E_1 \oplus \dots \oplus E_n$, où les E_i sont des A-modules injectifs indécomposables. On trouvera dans [6] les démonstrations des propositions suivantes.

<u>PROPOSITION 2.8.</u> $C^*(E) \subset C(E)$.

<u>COROLLAIRE</u> : $C(E) \neq 0$ (on rappelle que A est noethérien).

<u>PROPOSITION 2.9.</u> $C(E)$ <u>est constitué par tous les éléments</u> x <u>pouvant s'écrire sous la forme</u> : $x = x_1 + \dots + x_n$, $x_i \in E_i$, $x_i = 0$ <u>ou bien</u> $x_i \in C^*(E)$.

Dans toute la suite, E sera l'enveloppe injective du A-module (à gauche) A/P. Ce module étant de type fini, E est somme directe d'un nombre fini d'injectifs indécomposables.

<u>PROPOSITION 2.10.</u> <u>Pour que</u> $I \in F$, <u>il faut et il suffit que</u> I <u>vérifie l'une des conditions équivalentes suivantes</u> :

(I) $\mathrm{Hom}_A(A/I, E) = 0$.

(II) <u>l'annulateur à droite de</u> I <u>dans</u> E <u>est nul.</u>

L'équivalence de (I) et (II) est claire (on rappelle que A est unitaire). Quant à l'équivalence $I \in F \Longleftrightarrow \mathrm{Hom}(A/I, E) = 0$, elle est démontrée dans [4].

<u>COROLLAIRE</u> : $I \notin F \Longleftrightarrow \exists\, x \neq 0$, $x \in E$ tel que $Ix = 0$.

<u>PROPOSITION 2.11.</u> <u>Les idéaux P-critiques sont tous les idéaux de la forme</u> $\mathrm{Ann}\, x$, $x \in C^*(E)$.

Ceci découle immédiatement du corollaire précédent.

<u>Démonstration du théorème 2.1</u> :

D'après 2.6, la condition de Ore est équivalente à la condition : si I est P-critique, $P \subset I$.

Supposons que la condition de Ore soit vérifiée. $x \in C(E) \Longleftrightarrow x = x_1 + \dots + x_n$, $x_i = 0$ ou bien $x_i \in C^*(E)$. Si $x_i \in C^*(E)$, $\mathrm{Ann}\, x$ est P-critique (2.11) et donc $P \subset \mathrm{Ann}\, x$. Il est donc clair que $Px = 0$, $\forall x \in C(E)$.

Si $P.C(E) = 0$, on a $P.C^*(E) = 0$ (2.8). Donc P est contenu dans tout idéal P-critique (2.11).

Remarque : On peut montrer que la condition de Ore entraîne l'égalité : $P = \mathrm{Ann}\ C(E)$.

(III) ANNEAUX PRINCIPAUX ET CONDITION DE ORE.

Nous allons démontrer le théorème suivant.

THEOREME 3.1. (G. Cauchon). Soit A un anneau principal (à gauche). Alors pour tout idéal semi-premier P, A vérifie la condition de Ore par rapport à $C(P)$.

Dans toute la suite A sera un anneau principal (à gauche).

Notation : L'ensemble des générateurs des idéaux de F sera noté S.

PROPOSITION 3.2. Pour que $s \in S$, il faut et il suffit que l'annulateur à droite de s dans E soit nul.

Cela découle de (2.10).

PROPOSITION 3.3. On a $S \subset C(P)$.

En effet, si $As \in F$, $As \cap C(P) \neq \emptyset$. Mais on sait d'après [2] que dans l'anneau noethérien semi-premier A/P le fait qu'un élément $\bar{s}$ est régulier est équivalent au fait que $(A/P)\bar{s}$ est essentiel dans A/P.

PROPOSITION 3.4. S est un système multiplicatif et A vérifie la condition de Ore par rapport à S.

S est un système multiplicatif d'après (3.2). La condition de Ore est vérifiée parce que F est un système topologisant (2.2).

Rappels : Si M est un A-module à gauche, on peut construire le module de fractions $S^{-1}M$. Pour ceci on considère le sous-module $T(M) = \{x \in M, \exists s \in S, sx = 0\}$. Alors $T(M/T(M)) = 0$. On se ramène donc au cas où $T(M) = 0$. Alors, si $E(M)$ est l'enveloppe injective de M, $S^{-1}M = \{x \in E(M), \exists s \in S, sx \in M\}$.

PROPOSITION 3.5. $T(A/P) = 0$.

Cela résulte de ce que $S \subset C(P)$.

PROPOSITION 3.6. $C(E) \subset S^{-1}(A/P)$.

En fait, d'après la caractérisation de $C(E)$ que nous avons rappelée, il suffit de montrer que $C^*(E) \subset S^{-1}(A/P)$. Soit $x \in C^*(E)$. Posons : $I = \{\lambda \in A, \lambda x \in A/P\}$. I est un idéal à gauche qui contient $\mathrm{Ann}\, x$. Comme E est une extension essentielle de A/P, $Ix \neq 0$. Donc I contient strictement $\mathrm{Ann}\, x$. Comme $\mathrm{Ann}\, x$ est P-critique (2.11), on voit que $I \in F$. Donc I contient un élément de S.

Démonstration du théorème 3.1 :

Il suffit de montrer que $P.C(E) = 0$: il suffit donc de montrer que $PS^{-1}(A/P) = 0$. Soient $p \in P$ et $x \in S^{-1}(A/P)$. $\exists s \in S$ tel que $sx \in A/P$. La condition de Ore est vérifiée par rapport à S. Il existe donc $s' \in S$, $p' \in A$ tels que : $s'p = p's$. Comme $s'p \in P$ et $s \in C(P)$, $p' \in P$. D'autre part, $p'sx = 0$. Donc $s'px = 0$. Alors $px = 0$ (3.2).

Remarque : On peut montrer le résultat suivant : pour que la condition de Ore soit vérifiée, il faut et il suffit que F contienne un système cofinal d'idéaux à gauche principaux.

BIBLIOGRAPHIE

[1] P.GABRIEL. Sur les Catégories Abéliennes, Bull. Soc. Math. France, t. 90 (1962), pp. 323-448.

[2] A.W.GOLDIE. Semi-prime rings with maximum condition, Proc. London Math. Soc., 10 (1960), pp. 201-220.

[3] A.JATEGAONKAR. Left Principal Ideal Domain, J. Algebra, 8 (1968), pp. 148-155.

[4] J.LAMBEK et G.MICHLER. The torsion theory at a prime ideal of a night noetherian ring, J. Algebra, 25 (1973), pp. 364-389.

[5] L.LESIEUR. T-anneaux, Séminaire d'Algèbre non Commutative, Orsay, (1973), exposé n° 4.

[6] L.LESIEUR et R.CROISOT. Coeur d'un module, J. de Math. pures et appliquées, XLII (1963), pp. 367-407.

[7] G.MICHLER. Ein Zusatz zur vorangehenden Arbeit von Alain Hudry, Archiv. der Math., XXV, 4 (1974), pp. 368-370.

-:-:-:-:-:-:-

UNIVERSITE DE PARIS SUD

CENTRE D'ORSAY

-:-:-:-:-:-:-

Conférence n° 12 du 21 AVRIL 1975

APPLICATIONS DU CALCUL PROPOSITIONNEL AUX STRUCTURES ALGEBRIQUES ORDONNEES.

par Thérèse MERLIER

-:-:-:-:-:-

Le calcul propositionnel est une partie "facile" de logique, beaucoup plus simple que le calcul des prédicats ; c'est une approximation grossière du raisonnement mathématique, qui permet cependant de résoudre certains problèmes, comme nous allons le voir. Pour de plus amples détails sur le calcul propositionnel, nous renvoyons au livre de G. Kreisel et J.L. Krivine [3].

§ 1. QUELQUES ELEMENTS DU CALCUL PROPOSITIONNEL.

DEFINITION 1 : On appelle structure propositionnelle un ensemble P infini ou non, dont les éléments sont les variables propositionnelles, auquel on adjoint sept symboles : (,), $\neg$, $\vee$, $\wedge$, $\longleftrightarrow$, $\longrightarrow$.

DEFINITION 2 : On construit sur cette structure des formules propositionnelles qui sont des suites $x_0, x_1, \ldots, x_n$ finies, où les x_i sont soit dans P, soit l'un des sept symboles, et que l'on obtient par application d'un nombre fini de fois des règles suivantes :

1) $p \in P \Longrightarrow p$ est une formule.
2) si F est une formule, $\neg(F)$ est une formule. (souvent écrite $\neg F$).
3) si F et G sont des formules, $(F) \vee (G)$, $(F) \wedge (G)$, $(F) \longrightarrow (G)$, $(F) \longleftrightarrow (G)$ sont des formules.

<u>THEOREME 1</u> : <u>Pour toute formule</u> F, <u>il y a un et un seul des cas suivants</u> :

1) F <u>est une variable propositionnelle,</u>

2) F <u>est de la forme</u> $\neg G$ <u>où</u> G <u>est une formule,</u>

3) F <u>est de la forme</u> $G \vee H$,

4) F <u>est de la forme</u> $G \wedge G$,

5) F <u>est de la forme</u> $G \longrightarrow H$,

6) F <u>est de la forme</u> $G \longleftrightarrow H$,

<u>où</u> G <u>et</u> H <u>sont des formules uniquement déterminées.</u>

<u>Distribution de valeurs de vérités</u> : C'est un procédé qui permet d'associer à chaque formule, la valeur 0 (faux) ou 1 (vrai).

Soit P un ensemble de variables propositionnelles et soit δ une application de P dans $\{0,1\}$. Cette application δ se prolonge à l'ensemble $\mathcal{H}$ des formules propositionnelles grâce

1) aux tableaux de vérité.

Si F et G sont des formules dont on connaît la valeur on déduit que :

si $H = \neg G$ $\quad \delta H = 1-\delta(G)$

si $H = F \vee G$ $\quad \delta H = \sup(\delta F, \delta G)$

si $H = F \wedge G$ $\quad \delta H = \inf(\delta F, \delta G)$.

Si $H = F \longrightarrow G$, on lit δH dans le tableau suivant :

F	G	F ⟶ G
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

Si $H = F \longleftrightarrow G$, on lit δH dans le tableau suivant :

F	G	F ⟷ G
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

2) grâce au théorème 1 et à la règle de formation des formules propositionnelles.

Toute formule F dépend en fait d'un nombre fini de variables propositionnelles de par sa formation.

$F = F(p_1,\dots,p_n)$ et toute application $\delta : P \to \{0,1\}$, détermine une valeur de δF.

Nous dirons qu'<u>une formule</u> F <u>est satisfaisable</u> s'il existe une distribution $\delta : P \to \{0,1\}$, telle que $\delta F = 1$.

Si $\mathcal{F}$ est un ensemble de formules $F_i, {}_{i\in I}$ nous dirons que $\mathcal{F}$ <u>est satisfaisable</u>, s'il existe une distribution $\delta : P \to \{0,1\}$, telle que $\delta F_i = 1$, pour tout F_i de $\mathcal{F}$.

§ 2. APPLICATION DU THEOREME DE TYCHONOFF AU CALCUL PROPOSITIONNEL.

Soit $(E_i)_{i\in I}$ une famille d'espaces topologiques. $\prod_{i\in I} E_i$ est un espace topologique où, par définition, tout ouvert élémentaire est de la forme $\prod_{i\in I} A_i$, où A_i est un ouvert de E_i, pour tout i de I, et où $A_i = E_i$, sauf pour un nombre fini d'indices.

<u>THEOREME DE TYCHONOFF</u> : <u>Si</u> $(K_i)_{i\in I}$ <u>est une famille d'espaces topologiques compacts,</u> $\prod_{i\in I} K_i$ <u>est compact, avec la topologie produit précédemment décrite.</u>

(Pour les démonstrations, nous renvoyons à Bourbaki [2]).

Ainsi, un ouvert élémentaire $\mathcal{U}$ de $\prod_{i\in I} E_i$ est déterminé par la donnée d'une famille finie d'ouverts $U_1,\dots,U_n$ de $E_1,\dots,E_n$ respectivement $U_i \neq E_i$

$$\mathcal{U} = \{x \in \Pi E_i \;,\; x = (x_i)_{i\in I} \;;\; x_i \in U_i \text{ pour } i = 1,2,\dots,n\}.$$

Appliquons ces résultats aux calculs propositionnels : soit P l'ensemble des variables d'une structure propositionnelle ; $\{0,1\}^P$ est, si l'on munit $\{0,1\}$ de la topologie discrète un espace compact. [C'est avec la notation précédente $\prod_{p_i\in P} \{0,1\}_{p_i}$].

Un ouvert élémentaire $\mathcal{U}$ de $\{0,1\}^P$ est déterminé par la donnée d'une famille d'ouverts de $\{0,1\}$, distincts de $\{0,1\}$, donc par la donnée de n nombres $\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n$ avec $\varepsilon_i = 1$ ou 0 et

$$\mathcal{U} = \{\delta \in \{0,1\}^P ; \delta(p_1) = \varepsilon_1,\ldots,\delta(p_n) = \varepsilon_n\}.$$

Soit $F(p_1,\ldots,p_n)$ une formule dépendant exactement des n variables $p_1,\ldots,p_n$. A cette formule F, nous pouvons associer $\hat{F}$ sous-ensemble de $\{0,1\}^P$, à savoir :

$$\hat{F} = \{\delta \in \{0,1\}^P ; \delta F = 1\}. \quad \hat{F} \text{ est un ouvert de } \{0,1\}^P.$$

En effet $\delta_o F = \delta_o F(p_1,\ldots,p_n)$ est déterminé par $\delta_o(p_1),\ldots,\delta_o(p_n)$. Si $\delta_o(F) = 1$, on a nécessairement $\delta_o(p_1) = \varepsilon_1,\ldots,\delta_o(p_n) = \varepsilon_n$ $(\varepsilon_i = 0$ ou $1)$ et toute application δ de $\{0,1\}^P$ telle que $\delta(p_1) = \varepsilon_1,\ldots,\delta(p_n) = \varepsilon_n$, implique nécessairement $\delta(F) = 1$. Donc si δ_o appartient à $\hat{F}$, $\mathcal{U} = \{\delta \in \{0,1\}^P ; \delta(p_1) = \delta_o(p_1),\ldots,\delta(p_n) = \delta_o(p_n)\}$ est ouvert contenu dans $\hat{F}$, contenant δ_o. Donc $\hat{F}$ est ouvert. De même $\hat{F}$ est fermé car $\delta F = 1$ si et seulement si $\delta \neg F = 1$; donc $\complement\hat{F} = \{\delta \in \{0,1\}^P ; \delta F = 0\} = \{\delta \in \{0,1\}^P ; \delta \neg F = 1\} = \widehat{\neg F}$ et $\complement\hat{F}$ est aussi ouvert, donc $\hat{F}$ fermé.

<u>COROLLAIRE 1</u> : <u>Un ensemble $\mathcal{A}$ de formules propositionnelles est satisfaisable, si et seulement si, tout sous-ensemble fini de $\mathcal{A}$ est satisfaisable.</u>

La condition nécessaire étant triviale, il reste à démontrer la condition suffisante. Dire que $\mathcal{A}$ est satisfaisable, c'est par définition dire qu'il existe δ telle que $\delta F = 1$ pour tout F de $\mathcal{A}$, soit encore que $\bigcap_{F\in\mathcal{A}} \hat{F}$ est non vide.

Mais puisque toute partie finie de $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, est satisfaisable $\bigcap_{F\in\mathcal{B}} \hat{F}$ est non vide, pour toute partie finie $\mathcal{B}$ de $\mathcal{A}$; et comme les $\hat{F}$ sont des fermés de $\{0,1\}^P$, compact, $\bigcap_{F\in\mathcal{A}} \hat{F}$ est encore non vide d'après la propriété

caractéristique des espaces compacts, et $\mathcal{A}$ est satisfaisable.
(Ce corollaire 1 est encore appelé <u>théorème de finitude</u>).

<u>Remarque</u> : Le théorème de Tychonoff se démontre moyennant l'axiome de Zorn ; par suite le corollaire 1 en dépend également.

§ 3. <u>APPLICATION AUX STRUCTURES ALGEBRIQUES ORDONNEES.</u>

Soit E un ensemble ; $E \times E = \{(a,b) \ ; \ a \in E, \ b \in E\}$ est un ensemble que l'on peut considérer comme un ensemble de variables propositionnelles. Considérons le système $\mathcal{A}_E$ de formules suivantes :

$$\mathcal{A}_E \begin{cases} 1) & (a,a), \quad \text{pour tout } a \text{ de } E. \\ 2) & (a,b) \vee (b,a), \quad \text{pour tout } a \text{ et tout } b \text{ de } E. \\ 3) & \neg[(a,b) \wedge (b,a)], \quad \text{pour tout } a \text{ et tout } b \text{ distincts de } E. \\ 4) & (a,b) \wedge (b,c) \rightarrow (a,c) \quad \text{pour tout } a, \text{ tout } b, \text{ tout } c \text{ de } E. \end{cases}$$

$\mathcal{A}_E$ constitue bien un système de formules, infini si E est infini.

<u>THEOREME 2</u> : <u>$\mathcal{A}_E$ est satisfaisable, si et seulement si, E est totalement ordonné.</u>

Si δ est application de $E \times E \rightarrow \{0,1\}$ qui satisfait $\mathcal{A}_E$, on pose $a \leqslant b$ si et seulement $\delta(a,b) = 1$. Et inversement, si E est totalement ordonné par $\leqslant$, on posera $\delta(a,b) = 1$ si $a \leqslant b$ et $\delta(a,b) = 0$ si $b \underset{\neq}{<} a$, et l'on aura bien $\delta(F) = 1$ pour toute formule F de $\mathcal{A}_E$.

<u>THEOREME 3</u> : <u>Un groupe</u> [un demi-groupe] <u>peut être totalement ordonné si et seulement si tout sous-groupe</u> [tout sous-demi-groupe] <u>engendré par un nombre fini d'éléments peut l'être.</u>

[Ce théorème est un résultat déjà connu pour les groupes, cf [5] par exemple ; mais c'est la première démonstration qui en est donnée pour les demi-groupes].

Rappelons qu'un groupe [un demi-groupe] G est totalement ordonné si l'on a défini sur G une relation d'ordre total $\leqslant$, isotone, c'est-à-dire telle que :

$a \leqslant b$ implique $ac \leqslant bc$ et $ca \leqslant cb$ pour tout a, b, c de G.

Ainsi, à un groupe G [un demi-groupe], nous pouvons associer l'ensemble $G \times G$ des variables propositionnelles et le système $\mathcal{A}_G$ suivant des formules propositionnelles :

$$\mathcal{A}_G \begin{cases} 1) & (a,a) \text{ pour tout } a \text{ de } G. \\ 2) & (a,b) \vee (b,a) \text{ pour tout } a \text{ et tout } b \text{ de } G. \\ 3) & \neg[(a,b) \wedge (b,a)], \text{ pour tout } a \text{ et tout } b \text{ distincts de } G. \\ 4) & (a,b) \wedge (b,c) \to (a,c), \text{ pour tout } a, \text{ tout } b, \text{ tout } c \text{ de } G. \\ 5) & (a,b) \to (ac,bc) \wedge (ca,cb) \text{ pour tout } a, \text{ tout } b, \text{ tout } c \text{ de } G. \end{cases}$$

Comme précédemment, il est facile de vérifier que G peut être totalement ordonné, si et seulement si le système $\mathcal{A}_G$ est satisfaisable pour une distribution δ. (Il suffit de poser $a \leqslant b$, si $\delta(a,b) = 1$ et réciproquement).

La condition nécessaire du théorème est triviale. Démontrons donc la condition suffisante. Soit $\mathcal{B}$ un sous-ensemble fini de $\mathcal{A}_G$ et soit H l'ensemble des éléments de G intervenant dans les formules de $\mathcal{B}$: par exemple, si la formule $(a,b) \to (ac,bc) \wedge (ca,cb)$ figure dans $\mathcal{B}$, les éléments a,b,ac,bc,ca,cb figurent dans H. H est un sous-ensemble fini de G, engendré par H. Par hypothèse, K est un sous-groupe [sous-demi-groupe] totalement ordonné ; donc le système $\mathcal{A}_K$ de formules propositionnelles construit sur l'ensemble $K \times K$ de variables propositionnelles est satisfaisable. Mais $\mathcal{B}$ est un sous-ensemble de $\mathcal{A}_K$; donc $\mathcal{B}$ est évidemment satisfaisable.

Ainsi tout sous-ensemble fini de $\mathcal{A}_G$ est satisfaisable ; d'après le théorème de finitude (corollaire 1), $\mathcal{A}_G$ est lui-même satisfaisable, donc le groupe G [le demi-groupe G] peut être totalement ordonné.

<u>COROLLAIRE 1</u> : <u>Un groupe abélien peut être totalement ordonné, si et seulement si il est sans torsion.</u>

D'après le théorème 3 précédent, il suffit de démontrer ce théorème pour les groupes abéliens de type fini. Si G est abélien, de type fini, sans torsion, il est isomorphe à $\mathbf{Z}^n$ et $\mathbf{Z}^n$ peut être totalement ordonné par l'ordre lexicographique.

Inversement, si un groupe (abélien ou non) est totalement ordonné et si x est un élément différent de l'élément neutre, e, on a par exemple $e < x$ d'où

$x < x^2$ (car dans un groupe l'isotomie est stricte) et, par suite, x^n est distinct de e pour tout n, et G est sans torsion.

<u>COROLLAIRE 2</u> : <u>Un demi-groupe S idempotent peut être totalement ordonné si et seulement si tout sous-demi-groupe fini de S peut être totalement ordonné.</u>

Dans un demi-groupe idempotent ($x = x^2$ pour tout x), le demi-groupe engendré par un nombre fini d'éléments est fini (la propriété que nous venons d'énoncer est démontrée dans [2]).

On retrouve bien ainsi un résultat de T. Saito. Rappelons en effet que dans [4], nous avions donné une condition nécessaire et suffisante pour qu'un demi-groupe idempotent fini puisse être totalement ordonné. Or dans [6], par des méthodes différentes, T. Saito a donné une condition nécessaire et suffisante dans le cas général. Et il s'avère que ces conditions sont les mêmes, ce qui est immédiat d'après le corollaire 2 !...

BIBLIOGRAPHIE

[1] N. BOURBAKI,

[2] J.A. GREEN and D. REES, On semigroups in which $x^r = x$. Proc. Camb. Phil. 48, 1952, pp. 35-40.

[3] G. KREISEL et J.L. KRIVINE, Eléments de logique mathématique. Théorie des modèles. Dunod. Paris, 1967.

[4] T. Merlier, Sur les σ-bandes finies et les demi-groupes totalement ordonnés σ-simples : Semi-group Forum. Vol. 4, 1972, pp. 124-150.

[5] B.H. NEUMANN, An embedding theorem for algebraic systems. Proc. Lond. Math. Soc. 4. 1954. pp. 138-153.

[6] T. SAITO, The orderability of idempotent semigroups. Semigroup Forum. Vol. 7 (1974), pp. 264-285.

-:-:-:-:-:-:-:-

UNIVERSITE DE PARIS SUD

CENTRE D'ORSAY

SEMINAIRE D'ALGEBRE NON COMMUTATIVE

Conférence n° 13 du 28 Avril 1975

ANNEAUX AUTO-INJECTIFS A DROITE

par J.M. GOURSAUD

- non rédigée -