# PUBLICATIONS

# MATHEMATIQUES

# D'ORSAY

79-07

SEMINAIRE D'ANALYSE HARMONIQUE

1978-1979

Université de Paris-Sud

Département de Mathématique

Bât. 425

91405 **ORSAY** France

Classification AMS (MOS) 1980 : 32M15 ; 28A48 ; 60B10 ; 30C35 ; 10G10.

Mots clefs : positif (type), Riesz (produit de), Calderon (théorème de), Littlewood (conjecture de).

# PUBLICATIONS

# MATHEMATIQUES

# D'ORSAY

79-07

SEMINAIRE D'ANALYSE HARMONIQUE

1978-1979

Université de Paris-Sud

Département de Mathématique

Bât. 425

91405 ORSAY France

# LES ESPACES SYMETRIQUES POUR PIETONS

Carl Herz

O. Soit $\mathbf{F}$ un quelconque des corps $\mathbf{R}$ (réels), $\mathbf{C}$ (complexes), ou $\mathbf{H}$ (quaternions). Alors $\mathbf{F}$ est muni d'une anti-involution $*$ dont le sous-corps constitué par ses points fixes s'identifie à $\mathbf{R}$ et $\lambda\lambda^* = \lambda^*\lambda = |\lambda|^2 > 0$ si $\lambda \neq 0$. (Si $\mathbf{F} = \mathbf{H}$ alors $\mathbf{R}$ est le centre). Si $V$ est un espace vectoriel sur $\mathbf{F}$ on écrit la multiplication scalaire à droite sans avis contraire. Un produit intérieur sur $V$ est une application linéaire $V \otimes_{\mathbf{R}} V \longrightarrow F$ telle que $\langle u\lambda , v\rangle = \langle u , v\rangle\lambda$ et $\langle u,v\rangle^* = \langle v,u\rangle$ On va supposer $\langle v,v\rangle > 0$ si $v \neq 0$. L'espace dual à $V$ est $V^* = \mathrm{HOM}^F(V,\mathbf{F})$. Alors $V^*$ est un espace vectoriel à gauche sur $\mathbf{F}$ où pour $v \in V$, $w \in V^*$, et $\lambda \in \mathbf{F}$ on a $(\lambda w)v = \lambda(wv)$. En termes du produit intérieur il y a un isomorphisme d'espaces vectoriels réels $V \longrightarrow V^*$ donné par $v \longrightarrow v^*$ où $v^*u = \langle u,v\rangle$. Evidemment $(u\lambda)^* = \lambda^* u^*$. Etant donné un élément $S \in \mathrm{HOM}^F(U,V)$ il y a un élément désigné par le même symbole de $\mathrm{HOM}^{\mathbf{F}}(V^*,U^*)$ où pour $u \in U$, $w \in V^*$ on a $w(Su) = (wS)u$. Or, $U$ et $V$ étant de dimension finie, il y a un isomorphisme d'espaces vectoriels réels $\mathrm{HOM}^{\mathbf{F}}(U,V) \longrightarrow \mathrm{HOM}^{\mathbf{F}}(V,U)$ donné par $S \longrightarrow S^*$ où $(S^*v)^*u = v^*Su$.

Le cas $\mathbf{F} = \mathbf{H}$ mérite quelques observations. Soit $V$ un espace hilbertien complexe de dimension $2n$. On écrit indifféremment la multiplication scalaire à gauche ou à droite. Il existe des opérateurs $j \in \mathrm{END}^{\mathbf{R}}(V)$ tels qu'on ait

$$j^2 = -I, \quad j\alpha v = \bar{\alpha} j v \quad \text{pour} \quad \alpha \in \mathbf{C}, \quad v \in V, \quad \text{et}$$

$$\langle ju , jv\rangle = \langle v , u\rangle .$$

Etant donné un tel $j$, on pose $\tilde{\mathbf{H}}$ la sous-algèbre de $\mathrm{END}^{\mathbf{R}}(V)$ engendrée par $1$, $i$ et $j$. Alors $V$ devient un espace vectoriel à gauche sur $\tilde{\mathbf{H}}$ et donc un espace vectoriel à droite sur $\mathbf{H}$ anti-isomorphe à $\tilde{\mathbf{H}}$. Pour $\alpha$, $\beta \in \mathbf{C}$ on pose $(\alpha + \beta j)^* = \bar{\alpha} - \beta j$, règle qui s'accorde avec $\alpha^* = \bar{\alpha}$ car $(\alpha + \beta j)^* = \bar{\alpha} + j^* \bar{\beta} = \bar{\alpha} - \beta j$.

On voit que

$$Q(u\ ,\ v) = \langle u\ ,\ v\rangle - j\langle ju\ ,\ v\rangle$$

donne un produit intérieur à valeurs dans $\tilde{\mathbf{H}}$. Notons $\mathrm{END}^{\mathbf{H}}(V)$ le commutant de $j$ dans $\mathrm{END}^{\mathbf{C}}(V)$ ; autrement dit, $S \in \mathrm{END}^{\mathbf{C}}(V)$ appartient à $\mathrm{END}^{\mathbf{H}}(V)$ si $S = -jSj$. On voit que, pour $S \in \mathrm{END}^{\mathbf{H}}(V)$ l'opérateur $S^*$ est le même pour le produit intérieur quaternionique que pour le produit intérieur complexe. Enfin, remarquons que si $S \in \mathrm{END}^{\mathbf{H}}(V)$ et $(S-\lambda)^k v = 0$ où $\lambda \in \mathbf{C}$ et $v \in V$ alors $(S-\bar{\lambda})^k(jv) = 0$ d'où le fait que les valeurs propres comptées avec leur multiplicité arrivent en couples de conjuguées complexes. En particulier, le déterminant de $S$, vu comme endomorphisme complexe, est un nombre positif.

De façon générale on note $\mathrm{AUT}^{\mathbf{F}}(V)$ le groupe des automorphismes de l'espace vectoriel $V$ considéré avec $\mathbf{F}$ comme corps de base. Le sous-groupe constitué par les éléments qui conserve le produit intérieur, c'est-à-dire les éléments $S$ tels que $SS^* = I$, est désigné par $\mathrm{AUT}^{\mathbf{F}}(V\ ,\ *)$. Il sera commode de garder cette notation concrète mais à isomorphie près ces groupes ne dépendent que du corps $\mathbf{F}$ et de la dimension $n$ de $V$. Le groupe abstrait (avec sa structure analytique) qui correspond à $\mathrm{AUT}^{\mathbf{F}}(V)$ est souvent noté $GL(n,\mathbf{F})$ tandis que la forme abstraite de $\mathrm{AUT}^{\mathbf{F}}(V,*)$ est

$$O(n)\quad ,\quad U(n)\quad ,\quad Sp(n)\quad ,$$

le groupe orthogonal, resp. unitaire, resp. symplectique selon le cas $\mathbf{F} = \mathbf{R}$, resp. $\mathbf{C}$, resp. $\mathbf{H}$. Remarquons que l'algèbre de Lie de $\mathrm{AUT}^{\mathbf{F}}(V)$ est $\mathrm{END}^{\mathbf{F}}(V)$ et le centre de l'algèbre est $\mathbf{R}$ si $\mathbf{F} = \mathbf{R}$ ou $\mathbf{H}$ et $\mathbf{C}$ si $\mathbf{F} = \mathbf{C}$. Il en résulte que $GL(n,\mathbf{C})$ est un groupe complexe ; par contre $GL(n,\mathbf{R})$ et $GL(n,\mathbf{H})$ ne le sont pas. En fait $GL(n,\mathbf{H})$ est une forme réelle de $GL(2n\ ,\ \mathbf{C})$ dont la désignation dans le livre de Helgason est $U^*(2n)$. L'algèbre de Lie $\underline{u}^*(2n)$, c'est-à-dire $\mathrm{END}^{\mathbf{H}}(V)$, s'exprime de la manière suivante. On écrit $V = U \oplus_{\mathbf{C}} jU$, somme directe des espaces vectoriels complexes de dimension $n$ où $j : U \longrightarrow jU$ est un isomorphisme conjugué avec $j^2 = -I$. Si $S \in \mathrm{END}^{\mathbf{H}}(V)$ alors pour $u \in U$ ,

$$Su = Au + Bju\quad ,\quad Sju = \bar{A}ju - \bar{B}u$$

où $A$ , $B \in END^{\mathbb{C}}(V)$. En termes de matrices complexes $2n \times 2n$, on a

$$S = \begin{pmatrix} A & B \\ -\bar{B} & \bar{A} \end{pmatrix}$$

mais en termes d'une base complexe $u_1, \ldots u_n$ de $U$ prolongée en une base quaternionique de $V$ le coefficient $S^r_c$ (rang $r$, colonne $c$) est le quaternion qui correspond à la matrice complexe $2 \times 2$ $\begin{pmatrix} A^r_c & B^r_c \\ -\bar{B}^r_c & \bar{A}^r_c \end{pmatrix}$. Notez que $\begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & a \end{pmatrix}$ correspond au quaternion $a + bj$.

On verra plus loin que de telles décompositions des espaces vectoriels complexes de dimension paire jouent un rôle spécial dans la théorie des espaces symétriques.

Soit $U$ une variété lisse, à savoir $C^{(\infty)}$, métrisable, séparable, localement compacte. On note $T(U) \xrightarrow{\pi} U$ son fibré tangent qui est un foncteur : une application lisse $(C^{(\infty)})$ $U \xrightarrow{f} U$ donne une application lisse $T(U) \xrightarrow{T(t)} T(U)$ avec $\pi_V \circ T(f) = f \circ \pi_u$. Nous identifions les éléments $\xi \in T(U)$ avec les dérivations ponctuelles de $C^{(\infty)}(U)$ : $\xi : C^{(\infty)}(U) \longrightarrow \mathbf{R}$ est une application linéaire telle que

$$\xi(fg) = (\xi f)\, g(p) + f(p)\, \xi g \quad \text{où} \quad p = \pi \xi .$$

Un champ de vecteur $X$ est à la fois une section de $T(U)$, c'est-à-dire une application lisse $X : U \longrightarrow T(U)$ telle que $\pi(X)$ = identité, est un opérateur différentiel linéaire de premier ordre.

Soit maintenant $U$ un ouvert d'un espace vectoriel réel $V$. Alors $T(U) \simeq U \times V$. Etant donné $v \in V$ nous notons $\partial(v)$ le champ de vecteurs qui pour chaque $p \in U$ applique $p$ en $(p,v)$. Autrement dit $\partial(v)$ est la dérivation de $C^{(\infty)}(U)$ uniquement déterminée par le fait que $\partial(v)f = f(v)$ pour chaque $f \in V' = HOM^{R}(V,\mathbf{R})$.

1. Considérons maintenant deux espaces vectoriels $U$ et $V$ sur le corps $\mathbf{F}$ et l'espace vectoriel <u>réel</u> $HOM^{\mathbf{F}}(U,V)$. Alors $HOM^{\mathbf{F}}(U,V)$ est un espace euclidien avec le produit intérieur

(1.1) $$\langle p\ ,\ q\rangle_{\mathbb{R}} = \text{Re trace } q^* p.$$

Remarquons que le groupe $AUT^{\mathbf{F}}(V)$ opère à gauche sur $HOM^{\mathbf{F}}(U,V)$ tandis que $AUT^{\mathbf{F}}(U)$ opère à droite. L'action infinitésimale de l'algèbre de Lie du groupe $AUT(V)$ est décrite de la façon suivante. Pour chaque $M \in END(V)$ le champ de vecteurs $L_M$ répond à la dérivation spécifiée par $(L_M f)(p) = - f(Mp)$ pour chaque fonction linéaire $f$ sur $HOM(U,V)$. On a $[L_M, L_N] = L_{[M,N]}$ où le premier crochet est celui d'opérateurs différentiels et le second celui d'opérateurs. L'action infinitésimale de $AUT(U)$ est donnée par $\alpha \longrightarrow E_\alpha$ où $\alpha \in END(U)$ et $(E_\alpha f)(p) = f(p\alpha)$. $[E_\alpha, E_\beta] = E_{[\alpha,\beta]}$.
Remarquons les régles de commutation

si $M \in END(V)$, $\xi \in HOM(U,V)$, $\alpha \in END(U)$ alors
$[L_M\ ,\ \partial(\xi)] = \partial(M\xi)$ ; $[\partial(\xi), E_\alpha] = \partial(\xi\alpha)$ ;
$[L_M\ ,\ E_\alpha] = 0.$

Dans le cas de $HOM(V,V) = END(V)$ il y a le sous-espace vectoriel

$$HERM = \{H \in END\ V : H = H^*\}.$$

Alors $AUT(V)$ opère sur $HERM$ par

$$\varpi(S)\,H = S\,H\,S^*\ .$$

L'action infinitésimale donne lieu à l'application de $END(V)$ dans les champs de vecteurs sur $HERM$,

(1.2) $$M \longrightarrow L_M - E_{M^*}\ .$$

Cette action n'est pas transitive ; considérons donc l'orbite passant par $I$,

$$POS = \{SS^*\ :\ S \in AUT\ V\}.$$

Alors $POS$ est un ouvert de $HERM$ et son fibré tangent est

$$T(POS) = POS \times HERM.$$

Posons $g$ la métrique définie par

(1.3) $$g(\partial(\xi)\ ,\ \partial(\eta))\big|_P = tr(P^{-1}\,\xi P^{-1}\eta)$$

où $P \in POS$ et $\xi . \eta \in HERM$. On constate que cette métrique est invariante par le groupe. En effet, lorsqu'on regarde $\varpi(S)$ comme une application de $POS$ dans lui-même, on calcule

$$T(\varpi(S))\,\partial(\xi) = \partial(S\ \xi\ S^*) \circ \varpi(S).$$

De plus, on voit que $POS \xrightarrow{\sigma} POS$ où $\sigma(P) = P^{-1}$ est une involution avec un seul point fixe, donc une symétrie autour de $I$, qui est géodésique, c'est-à-dire, elle conserve la métrique. On a

$$T(\sigma)\,(P\ ,\ \xi)\ =\ (P^{-1}\ ,\ -P^{-1}\xi P^{-1}).$$

Si l'on note $X_M = L_M - E_{M^*}$ alors

$$T(\sigma)\,X_M\ =\ -X_{M^*} \circ \sigma\,.$$

Donc la symétrie $\sigma$ répond à l'involution $M \longrightarrow M^*$ de l'algèbre de Lie $END(V)$ du groupe $AUT(V)$ qui opère. Le sous-groupe qui laisse $I$ fixe est $AUT(V\ ,\ *)$, et on voit facilement que

$$POS \simeq AUT(V)/AUT(V\ ,\ *)\ ,$$

l'algèbre de Lie $AUT(V\ ,\ *)$ étant la sous-algèbre de $END(V)$ constituée par les éléments fixes sous l'involution $M \longrightarrow -M^*$.

L'espace $POS$ est réductible en tant qu'espace riemannien symétrique car

$$POS \simeq \mathbb{R} \times POS_1 \quad \text{où}$$

$$POS_1 = \left\{P \in POS : \text{dét } P = 1\right\}.$$

L'isomorphisme est $(r\ ,\ P) \longrightarrow e^r P$. Alors

$$POS_1 \simeq AUT(V)/\mathbb{R} \times AUT(V\ ,\ *)$$

$$\simeq AUT_1(V)/AUT_1(V\ ,\ *)$$

où $AUT_1(V)$ est le noyau d'un certain homomorphisme $\text{dét} : AUT(V) \longrightarrow (\text{centre } \mathbb{F}) \setminus \left\{0\right\}$. Il est un groupe simple, et $POS_1$ est irréductible. En notations classiques où

$$n\ =\ \dim_{\mathbb{F}} V \quad \text{on a}$$

$$POS_1(n,\mathbb{R})\ =\ SL(n,\mathbb{R})/SO(n)\ ,$$

$$POS_1(n,\mathbb{C})\ =\ SL(n,\mathbb{C})/SU(n)\ ,$$

$$POS_1(n,\mathbb{H})\ =\ SU^*(2n)/Sp(n)\ .$$

Pour les dimensions réelles on fait le calcul suivant :

$$\dim HERM = \frac{1}{2}\,n(n-1)\,\delta + n \quad \text{où} \quad \delta = \dim_{\mathbb{R}} F$$

car les éléments surdiagonales d'une matrice hermitienne sont des éléments arbitraires de $\mathbf{F}$ tandis que les éléments sur le diagonal sont réels. Alors

$$\dim POS = \dim HERM \quad \text{et} \quad \dim POS_1 = \dim POS - 1.$$

L'élément de volume invariant sur POS se calcule assez facilement. Soit $\mu$ la N-forme qui donne la mesure de Lebesgue orientée sur l'espace vectoriel $HERM \simeq \mathbf{R}^N$ où $N = \frac{1}{2} n(n-1)\delta + n$. L'image réciproque de $\mu$ par l'application $\varpi(S)$ est

$$\varpi_* (S)\mu = \det_R \varpi(S)\mu .$$

Or, $S \longrightarrow \text{dét}_{\mathbf{R}} \varpi(S)$ est un homomorphisme de $AUT^F(V)$ dans $R \{0\}$ ; il est donc une puissance de $|\text{dét}|$. En regardant l'homogénéité on voit que

$$\text{dét}_{\mathbf{R}} \varpi(S) = |\text{dét } S|^{(n-1)\delta+2} ,$$

et il s'en suit que

(1.4) $$\nu|_P = c(\text{dét } P)^{-\frac{1}{2}(n-1)\delta-1} \mu|_P , \quad c = 2^{\frac{1}{2}n(n-1)\delta-1}$$

est une forme de volume invariante sur POS.

Soit $f \in C^{(\infty)}(POS)$. Alors grad f est le champ de vecteurs défini par

(1.5) $$g(. , \text{grad } f) = df ,$$

où la métrique g est définie par (1.3).

De façon générale on a

(1.6) $$d \log \text{dét } P = \text{tr } P^{-1} dP$$

d'où

(1.7) $$\text{grad(dét)} = (\text{dét})E ,$$

$E = E_1$ étant la dilatation infinitésimale, c'est-à-dire le champ de vecteurs $P \rightarrow P$. Il en résulte que le vecteur unitaire normal aux surfaces dét = constante est $n^{-1/2}E$. Si $C_X$ désigne l'opération de contraction d'une forme différentielle par rapport à un champ de vecteurs X alors

(1.8) $$\nu_1 = n^{-\frac{1}{2}} C_E \nu$$

est une forme invariante fermée de degré $N-1$ sur POS dont la restriction à $POS_1$ donne son volume invariant. Remarquons la formule

$$\nu = n^{\frac{1}{2}} \, d(\log \det) \wedge \nu_1 .$$

Choisissons une base pour l'espace vectoriel $V$ sur le corps $\mathbf{F}$ et posons $\underline{h}$ la sous-algèbre de Lie de $END(V)$ constituée par les matrices diagonales à coefficients réels. Donc $\underline{h} \simeq \mathbf{R}^n$. En termes d'une base ordonnée de $V$ on pose $\underline{h}^+$ le cône dans $\underline{h}$ dont l'élément générique possède la forme

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \lambda_2 & \\ 0 & & \ddots \; \lambda_n \end{pmatrix} \quad \text{où} \quad \lambda_1 > \lambda_2 > \ldots > \lambda_n .$$

Soit $\mathcal{U} = AUT(V,*)/M$ où $M$ désigne le sous-groupe constitué par les éléments diagonaux. (A un ensemble de mesure nulle près, on peut représenter $U$ par les matrices $F$-unitaires positives sur la diagonale). L'application

(1.9) $$\mathcal{U} \times \underline{h}^+ \rightarrow POS, \quad (U,\Lambda) \rightarrow U(\exp 2\Lambda)U^{-1}$$

est un difféomorphisme sur un ouvert dense de POS. Notons $\varkappa$ la mesure normalisée de l'espace homogène compact $\mathcal{U}$.

(1.10) PROPOSITION. La contre-image de la forme invariante $\nu$ donnée par (1.4) est, au signe près,

$$2^{n+\frac{3}{4}n(n-1)\delta} \, aA(\Lambda) d\lambda_1 \wedge \ldots \wedge d\lambda_n \wedge \varkappa$$

où $A(\Lambda) = \prod_{i<j} \sinh^{\delta}(\lambda_i - \lambda_j)$ et $a$ est une constante.

<u>Démonstration</u>. Pour $P = U(\exp 2\Lambda)U^{-1}$ on trouve

(1.11) $$dP = [P,\Omega] + 2U(\exp 2\Lambda)\, d\Lambda\, U^{-1}$$

où $\Omega = U^{-1} dU$ est la matrice de la forme de Maurer-Cartan invariante à gauche sur le groupe $AUT(V,*)$. On a

$$\varkappa = a^{-1} \bigwedge_{i<j} (\Omega_{ij})_\delta$$

où $a$ est la constante de normalisation pour avoir le volume 1 pour le compact $\mathcal{U}$; ici le symbole $(\omega)_\delta$ désigne la forme de degré $\delta$ obtenue en prenant le produit extérieur des composantes sur $\mathbf{R}$ de $\omega$, e. g. $(\omega)_2 = \mathrm{Re}\,\omega \wedge \mathrm{Im}\,\omega$.
Grâce à l'invariance de $\nu$ il suffit de considérer $dP$ en $U = I$, $P = \exp 2\Lambda$.
A ce point, on a

$$dP_{ij} = (e^{2\lambda_i} - e^{2\lambda_j})\,\Omega_{ij} \quad \text{pour} \quad i < j\,,$$

$$dP_{ii} = 2e^{2\lambda_i}\, d\lambda_i\,.$$

Si l'on prend $\mu = \bigwedge_{i=1}^{n} dP_{ii} \wedge \bigwedge_{i<j} (dP_{ij})_\delta$ alors on trouve

$$\mu = 2^n \exp(2\Sigma\lambda_i) d\lambda_1 \wedge \ldots \wedge d\lambda_n \prod_{i<j} (e^{2\lambda_i} - e^{2\lambda_j})^\delta a\varkappa\,.$$

et la formule cherchée découle de (1.4).

La métrique se calcule de (1.11) de façon analogue.

(1.12) PROPOSITION. La contre-image de la longueur d'arc correspondant à (1.3) est

$$ds^2 = 4 \sum_i (d\lambda_i)^2 + 8 \sum_{i<j} \sinh^2(\lambda_i - \lambda_j)\, |\Omega_{ij}|^2.$$

Comme corollaire de (1.12) ou autrement on trouve

(1.13) PROPOSITION. Pour la métrique invariante donnée par (1.3), la distance entre un point variable $P \in POS$ et l'identité est

$$\mathrm{dist}^2(P,I) = \mathrm{tr}(\log P)^2.$$

Les formules (1.11) et (1.12) facilitent le calcul du laplacien d'une fonction symétrique sur POS, c'est-à-dire une fonction $f$ telle que $f(UPU^{-1}) = f(P)$ pour $U \in AUT(V\,,\,*)$. Une telle fonction peut être regardée comme une fonction symétrique de $\lambda_1, \ldots \lambda_n$. On aura

$$\operatorname{grad} f = \frac{1}{4} \Sigma_i \left(\frac{\partial f}{\partial \lambda_i}\right) \frac{\partial}{\partial \lambda_i} .$$

Le laplacien est donné par

$$\operatorname{lap} f = \operatorname{div}_\nu \ \operatorname{grad} f.$$

Donc

(1.14) PROPOSITION. Soit $f$ une fonction symétrique sur POS. Alors

$$4 \operatorname{lap} f = \sum_i \left(\partial^2 f/\partial \lambda_i^2 + \delta \sum_{j \neq i} \coth(\lambda_i - \lambda_j) \partial f/\partial \lambda_i\right).$$

Le laplacien sur $\mathrm{POS}_1$ se calcule facilement en termes du laplacien sur POS. Puisque $n^{-\frac{1}{2}} E$ est le champ de vecteur normal à la surface dét = 1 alors

$$\operatorname{lap}_1 = \operatorname{lap} - n^{-1} E^2 . \tag{1.15}$$

Si l'on définit $w$, $\alpha_1, \ldots \alpha_{n-1}$ par

$$w = n^{-1} \operatorname{tr} \log P$$

$$\alpha_i = \lambda_i - \lambda_{i+1} ,$$

alors une fonction symétrique sur $\mathrm{POS}_1$ est une fonction des <u>racines primitives</u> $\alpha_1, \ldots \alpha_{n-1}$ invariante pour l'action du groupe de Weyl qui n'est autre que le groupe symétrique opérant sur $\lambda_1, \ldots \lambda_n$. On peut calculer $\operatorname{lap}_1$ en utilisant (1.15) avec $E = \partial/\partial w$ et (1.14) avec les $\lambda_i$ exprimés en termes des $\alpha_j$ et $w$.

Nous allons calculer la solution fondamentale de l'équation de la chaleur dans le cas $n = 2$. On a

$$\nu_1 = 2^{(3\delta+1)/2} a_\delta \sinh^\delta \alpha d\alpha, \quad \nu = 2^{\frac{1}{2}} \nu_1 \wedge dw$$

$$\operatorname{lap}_1 = \frac{1}{2} \left[\partial^2/\partial \alpha^2 + \delta \coth \alpha \, \partial/\partial \alpha\right], \ \operatorname{lap} = \operatorname{lap}_1 + \frac{1}{2} \partial^2/\partial w^2 .$$

Si l'on note $P_t(\alpha)$ la solution fondamentale de

$$\frac{1}{2} \operatorname{lap}_1 P_t = \partial P_t/\partial t \quad \text{sur} \quad \mathrm{POS}_1 \tag{1.16}$$

alors la solution fondamentale sur POS est

(1.17) $$(2\pi t)^{-\frac{1}{2}} P_t(\alpha) \exp(-w^2/t).$$

Or, $P_t$ est déterminée par les conditions

(1.18) $$P_t''(\alpha) + \delta \coth \alpha \, P_t'(\alpha) = 4 \, \partial P_t/\partial t, \qquad ' = \partial/\partial\alpha ,$$

(1.19) $$P_t \geq 0 ,$$

(1.20) $$2^{(3\delta+1)/2} a_\delta \int_0^\infty P_t(\alpha) \sinh^\delta \alpha \, d\alpha \equiv 1.$$

(1.21) $$\lim_{t \to 0+} P_t(\alpha) = 0 \quad \text{pour} \quad \alpha \neq 0.$$

Voici le résultat.

(1.22) THEOREME. La solution fondamentale de l'équation de la chaleur (1.16) est

$$P_t(\alpha) = b_\delta^{-1} (\sinh \alpha)^{1-\delta} e^{-\delta^2 t/16} \int_\alpha^\infty \left[H_\delta(-\tfrac{\partial}{\partial u}) W_t(u)\right] \left[2(\cosh u - \cosh \alpha)\right]^{\frac{\delta}{2}-1} du$$

où $W_t(u) = (\pi t)^{-\frac{1}{2}} \exp(-u^2/t)$, $\mathcal{H}_\delta$ est le polynôme

$$\mathcal{H}_1(x) = 2x \; , \; \mathcal{H}_2(x) = 2x^2 \; , \; \mathcal{H}_4(x) = \tfrac{1}{3}(x^4 - x^2) \; ,$$

et $b_1 = 4\pi$, $b_2 = 2^{7/2}\pi$, $b_4 = 2^{5/2}\pi^2$.

Démonstration. Cherchons une solution sous la forme

(1.23) $$P_t(\alpha) = \int_0^\infty Q_t(u) \, \sinh^{\delta-1}\beta \, d\beta \qquad \text{où}$$

$$e^u = \cosh \alpha + \sinh \alpha \cosh \beta .$$

Remarquons que

$$(\partial u/\partial \alpha)^2 = 1 + e^{-2u} \sinh^2 \beta \quad , \quad \partial^2 u/\partial \alpha^2 = -e^{-2n} \sinh^2 \beta .$$

Donc on a

$$P_t''(\alpha) + \delta \coth\alpha \, P_t'(\alpha) = \int_0^\infty \left[Q_t''(u) + \delta \coth\alpha \frac{\partial u}{\partial \alpha} Q_t'(u)\right] \sinh^{\delta-1}\beta \, d\beta$$

$$+ \int_0^\infty \left[Q_t'' - Q_t'\right] e^{-2u} \sinh^{\delta+1}\beta \, d\beta .$$

On voit que

$$\partial/\partial\beta (Q_t' e^{-u} \sinh^\delta \beta) = (Q_t'' - Q_t') e^{-2u} \sinh^{\delta+1}\beta \sinh\alpha$$

$$+ \delta Q_t' e^{-u} \cosh\beta \sinh^{\delta-1}\beta .$$

A condition que $Q_t'$ décroisse assez vite à l'infini et qu'elle soit continue en $0$ on trouve

$$P_t''(\alpha) + \delta \coth\alpha \, P_t'(\alpha) = \int_0^\infty \left[Q_t''(u) + \delta B Q_t'(u)\right] \sinh^{\delta-1}\beta \, d\beta$$

où $B = (\sinh\alpha)^{-1} \left[\cosh\alpha \, \partial u/\partial\alpha - \cosh\beta \, e^{-u}\right] = 1$. Ainsi $P_t$ définie par (1.23) est une solution à (1.18) si $Q_t$ satisfait à

$$Q_t'' + \delta Q_t' = 4 \, \partial Q_t/\partial t$$

dont la solution générale est

$$Q_t(u) = H_t(u) \, W_t(u + \tfrac{1}{4}\delta t)$$

avec $W_t(x) = (\pi t)^{-\frac{1}{2}} \exp(-x^2/t)$ et $H_t$ satisfaisant

$$(H_t W_t)'' = 4 \, \partial/\partial t \, (H_t W_t).$$

Ceci donne

$$P_t(\alpha) = \int_0^\infty W_t(u + \tfrac{1}{4}\delta t) \, H_t(u) \sinh^{\delta-1}\beta \, d\beta ,$$

mais, grâce à l'identité,

$$2(\cosh u - \cosh\alpha) = e^{-u} \sinh^2\alpha \sinh^2\beta$$

on peut effectuer un changement de variables pour avoir

$$P_t(\alpha) = (\sinh\alpha)^{1-\delta} e^{-\delta^2 t/16} \int_\alpha^\infty W_t(u) \, H_t(w) \left[2(\cosh u - \cosh\alpha)\right]^{\frac{3}{2}-1} du .$$

Il en résulte que

$$\int_0^\infty P_t(\alpha)\sinh^\delta\alpha\, d\alpha = 2^\delta\, \delta^{-1}\, e^{-\delta^2 t/16}\int_0^\infty W_t(u)H_t(u)\sinh^\delta \tfrac{1}{2}u\, du.$$

Soit $\mathcal{K}$ un polynôme avec la propriété

$$\mathcal{K}(\partial/\partial u)(2\sinh \tfrac{1}{2}u)^\delta = 2\delta\cosh \tfrac{\delta}{2}u$$

et définissons $H_t$ par la propriété

$$\mathcal{K}(-\partial/\partial x)\, W_t(x) = b\, H_t(x)\, W_t(x),$$

$b$ étant une constante spécifiée dans la suite. En intégrant par parties on trouve

$$\int_0^\infty P_t(\alpha)\sinh^\delta\alpha\, d\alpha = b^{-1}$$

ce qui donne (1.20) si $b = 2^{(3\delta+1)/2}\, a_\delta$.

La condition (1.19) est à vérifier selon les cas en utilisant des intégrations par parties astucieuses. Enfin, on calcule les $a_\delta$ dans le cas $n = 2$.

On peut faire quelques calculs complémentaires. En cas $\delta = 1$ on trouve l'expression asymptotique

$$P_t(\alpha) \sim (2\pi t)^{-1}\, e^{-\alpha^2/t}\, e^{-t/16}(\alpha/\sinh\alpha)^{\frac{1}{2}}\,[1 + 0(t)] \quad \text{lorsque} \quad t \to 0.$$

Pour $\delta = 2$ on a la formule exacte

$$P_t(\alpha) = (2\pi t)^{3/2}\, e^{-\alpha^2/t}\, e^{-t/4}(\alpha/\sinh\alpha).$$

Enfin, le développement asymptotique en cas $\delta = 4$ est

$$P_t(\alpha) = (8/3)(2\pi t)^{-5/2}\, e^{-\alpha^2/t}\, e^{-t}(\alpha/\sinh\alpha)^2\,[1+0(t)], \qquad t \to 0.$$

Rappelons que la distance du point variable à l'identité est $2^{1/2}\alpha$. (Comparer avec S. S. Molchanov, Diffusion Processes and Riemannian Geometry, Uspekhi Mat. Nauk 30 (1975), 3-59 = Russian Math. Surveys 30 (1975), 1-63).

2. L'espace $ISO^{\mathbf{F}}(U,V)$ est l'ouvert de l'espace vectoriel $HOM^{\mathbf{F}}(U,V)$ constitué par les $U \xrightarrow{p} V$ injectifs. Dans la suite on peut toujours supposer $\dim U < \dim V$. Nous supposons $U$ et $V$ munis de produits intérieurs et nous fixons une fois pour toute un isomorphisme unitaire $e_o : U \to V$. Par abus de notation on confondra parfois $U$ et $e_oU$. Soit $U^{\perp}$ le sous-espace vectoriel de $V$ orthogonal et $e_oU$ et posons $\sigma$ l'automorphisme de $V$ qui est $+I$ sur $e_oU$ et $-I$ sur $U^{\perp}$.

Le groupe $AUT^{\mathbf{F}}(U)$ opère à droite sur $ISO^{\mathbf{F}}(U,V)$.

2.1. DEFINITION. La variété de Grassmann est

$$GRASS^{\mathbf{F}}(U,V) = ISO^{\mathbf{F}}(U,V)/AUT^{\mathbf{F}}(U).$$

Ceci veut dire que l'on identifie $p$ et $p\alpha$ où $p \in ISO(U,V)$ et $\alpha = AUT(U)$.

Dans le cas $\mathbf{F} = \mathbf{R}$ il y a un revêtement double de $GRASS^{R}(U,V)$ à savoir

$$GRASS^{+}(U,V) = ISO^{\mathbf{R}}(U,V)/AUT^{+}(U) \quad \text{où}$$
$$AUT^{+}(U) = \left\{\alpha \in AUT^{\mathbf{R}}(U) : \text{dét}\ \alpha > 0\right\}.$$

En tant que variété abstraite $GRASS^{\mathbf{F}}(U,V)$ ne dépend que de $\mathbf{F}$, $m = \dim_F U$, et $n = \dim_F V$. Alors

$$GRASS(m\ ,\ n\ ;\ \mathbf{F}) = GRASS^{\mathbf{F}}(U,V)$$

est l'espace des $m$-plans dans $\mathbf{F}^n$, et $GRASS^{+}(m,n)$ est l'espace des $m$-plans orientés dans $\mathbf{R}^n$.

Notons $P$ la projection $ISO(U,V) \xrightarrow{P} GRASS(U,V)$.

Il y a trois façons de regarder la structure différentielle de $GRASS(U,V)$. D'une part, au voisinage de chaque orbite $p\,AUT(U)$ il existe, comme on verra plus loin, assez de fonctions $C^{(\infty)}$ (mêmes rationnelles) invariantes par $AUT(U)$ pour donner un système de coordonnées au voisinage de $P_p$. On peut alors identifier

(2.2) $$T_{P_p}(GRASS(U,V)) = T_p(ISO(U,V))/\left\{E_\alpha(p) : \alpha \in END(U)\right\}.$$

C'est-à-dire la noyau de l'application $T(P)$ des fibrés tangents est la $C^{(\infty)}(ISO(U,V))$

module des sections engendrées par les $E_\alpha$.

D'une autre part, il est évident que le groupe $AUT(V)$ opère (à gauche) de façon lisse et transitive sur $ISO(U,V)$ : chaque $p \in ISO(U,V)$ s'exprime de la forme $p = Se_o$ avec $S \in AUT(V)$. Posons

(2.3) $$\mathcal{L} = \left\{ S \in AUT(V) : \exists\, \alpha \in AUT(U) \text{ t. q. } Se_o = e_o\alpha \right\},$$

le sous-groupe constitué par les automorphismes $S$ de $V$ qui envoient $e_oU$ dans lui-même. On a l'identification

(2.4) $$AUT\ V/\mathcal{L} \simeq GRASS(U,V)$$

par l'application $S \longrightarrow P(Se_o)$. Il faut vérifier que la structure différentielle de l'espace homogène $AUT\ V/\mathcal{L}$ coïncide avec celle de la projection $P(ISO(U,V))$. Pour cela il convient de décrire comment un élément $M \in END(V)$ opère sur $HOM(U\ ,\ V)$. On peut exprimer $p \in HOM(U,V)$ sous la forme

$$p = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_o \end{pmatrix} \qquad \text{et puis} \qquad M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

où $p_o \in END(U)$, $p_1 \in HOM(U\ ,\ U^-)$, et alors

$$A \in END(U^\perp)\ ,\quad D \in END(U)\ ,\quad B \in HOM(U\ ,\ U^\perp)\ ,\quad C \in HOM(U^\perp\ ,\ U)$$

de sorte que

$$Mp = \begin{pmatrix} Ap_1 & + & Bp_o \\ Cp_1 & + & Dp_o \end{pmatrix}.$$

Notons $\Theta = Pe_o$. On voit que l'algèbre de Lie du groupe $AUT(V)$ a la décomposition vectorielle

$$END(V) \simeq \underline{\ell} + HOM(U\ ,\ U^\perp)$$

où $\underline{\ell}$ désigne l'algèbre de Lie de $\mathcal{L}$. Donc, l'espace tangent en $\Theta$ de $AUT(V)/\mathcal{L}$ s'identifie à $HOM(U\ ,\ U^\perp)$ de même que pour $T_\Theta(GRASS(U,V))$. D'autre part, le foncteur langent $T(S)$ de l'application $S : ISO(U,V) \longrightarrow ISO(U\ ,\ V)$ donnée par $p \longrightarrow S_p$ donne

(2.5) $$T(S)\,\eth(\xi) = \eth(S\xi) \quad \text{pour} \quad \xi \in \mathrm{HOM}(U\,,\,V)$$

(2.6) $$T(S)\,L_M = L_{SMS^{-1}} \quad \text{pour} \quad M \in \mathrm{END}(V)\,.$$

Par cette seconde formule on voit que le groupe $\mathrm{AUT}(V)$ opère de façon lisse sur $\mathrm{GRASS}(U,V)$ d'où l'identité de ce dernier avec $\mathrm{AUT}(V)/\mathscr{L}$ .

Enfin, on peut décrire la variété en utilisant un atlas. Soit $\underline{t} : \mathrm{HOM}(U,U^{\perp}) \to \mathrm{END}(V)$ l'application linéaire définie par

(2.7) $$\underline{t}(q) = \begin{pmatrix} 0 & q \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

On a $\exp \underline{t}(q) = I + \underline{t}(q)$. Soit

$$\varphi : \mathrm{HOM}(U\,,\,U^{\perp}) \longrightarrow \mathrm{GRASS}(U\,,\,V)$$

la carte

(2.8) $$\varphi(q) = P(\exp \underline{t}(q)\, e_o).$$

L'image de $\varphi$ est un ouvert de $\mathrm{GRASS}(U\,,\,V)$ interprété comme l'hyperplan affine du grassmannien où on a enlevé les points à l'infini. Les autres cartes de l'atlas sont les $\varphi_S : \mathrm{HOM}(U,U^{\perp}) \longrightarrow \mathrm{GRASS}(U,V)$ , $S \in \mathrm{AUT}(V)$ où $\varphi_S(q) = P(S \exp \underline{t}(q)\, S^{-1} p)$ et $p = Se_o$.

Si $\varphi(q') = \varphi(Sq)$ où

$$S = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \quad \text{alors}$$

2.9 $$q' = (Aq + B)(Cq + D)^{-1}.$$

On voit que $q \to q'$ est analytique et même holomorphe dans le cas $\mathbf{F} = \mathbf{C}$.

Jusqu'ici le grassmannien n'est pas muni d'une structure Riemannienne. Avant de le faire on a besoin du

2.10. LEMME. Le sous-groupe $\mathrm{AUT}^{\mathbf{F}}(V\,,\,*)$ de $\mathrm{AUT}^{\mathbf{F}}(V)$ opère transitivement sur $\mathrm{GRASS}^{\mathbf{F}}(U,V)$.

Démonstration. Soit $p \in \mathrm{ISO}(U\,,\,V)$ un élément quelconque. Alors $p^*p$ est un élément strictement défini-positif de $\mathrm{AUT}(U)$ et donc $p^*p = \alpha^*\alpha$ où $\alpha \in \mathrm{AUT}(U)$. On sait déjà qu'il existe $S_1 \in AUT(V)$ tel que $p\,\alpha^{-1} = S_1 e_o$. Si $S_1 = \begin{pmatrix} A_1 & B \\ C_1 & D \end{pmatrix}$ alors $p\alpha^{-1} = \begin{pmatrix} B \\ D \end{pmatrix}$ avec $B^*B + D^*D = I_U$. Posons $q = A_1^* B + C_1^* D \in HOM(U, U^{\perp})$. Ensuite on pose

$$A_2 = A_1 - B\,q^* \quad , \quad C_2 = C_1 - D\,q^* .$$

L'opérateur $A_2^* A_2 + C_2^* C_2$ est nécessairement un automorphisme de $U^{\perp}$ ; étant défini-positif il s'exprime sous la forme $\beta^*\beta$ où $\beta \in AUT(U^{\perp})$. Si l'on pose

$$S = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad A = A_2\,\beta^{-1} \; , \; C = C_2\beta^{-1}$$

alors $S^*S = I$ et $Se_o = p\,\alpha^{-1}$.

2.11. THEOREME. L'application $H : ISO^{\mathbf{F}}(U,V) \longrightarrow HERM^{\mathbf{F}}(V)$ définie par

$$(2.12) \qquad H(p) = p(p^*p)^{-1}\,p^*$$

donne lieu à un plongement analytique de $GRASS^{\mathbf{F}}(U,V)$ dans $HERM^{\mathbf{F}}(V)$. De plus, si $S \in AUT(V , *)$ alors

$$H(Sp) = SH(p)\,S^* = SH(p)\,S^{-1}$$

de sorte que $AUT^{\mathbf{F}}(V , *)$ opère par isométrie sur $GRASS^{\mathbf{F}}(U,V)$ pour la métrique Riemannienne induite de celle de $HERM^{\mathbf{F}}(V)$.

Démonstration. On voit que $H(p\alpha) = H(p)$ pour $\alpha \in AUT(U)$ d'où le fait que $H$ est effectivement défini sur $GRASS(U,V)$. Il est évident que $H(Sp) = SH(p)\,S^{-1}$ pour $S \in AUT(V , *)$. Pour démontrer que $GRASS(U,V) \xrightarrow{H} HERM$ est injectif il suffit, par le lemme 2.10, de prouver que $H(Se_o) = H(e_o)$ entraîne $S \in K$ où

$$(2.13) \quad K = \{S \in AUT(V,*) : \exists\, \alpha \in AUT(U , *) \quad \text{t. q.} \quad Se_o = e_o\alpha\}$$
$$= AUT(V , *) \cap \mathcal{L} .$$

Si $S \in AUT(V , *)$ est exprimé $S = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ alors l'équation $Se_oe_o^* = e_oe_o^*$ donne $B = 0$, donc $S \in \mathcal{L}$. Afin de montrer que $H$ est un difféomorphisme, calculons $T(H) : T(ISO(U,V)) \longrightarrow T(HERM)$. On trouve

$$-T(H)\, L_M(p) = (I - H(p))\, MH(p) + H(p)\, M^*(I - H(p))$$

d'où, pour la métrique induite

(2.14) $$g(L_M, L_N)\big|_p = 2 \operatorname{Re} \operatorname{tr}(I - H(p))\, MH(p)\, N^*, \quad \text{où} \quad M,N \in END(V).$$

Il suffit de regarder l'espace tangent de $ISO(U,V)$ en $e_o$. L'équation $T(H)L_M(e_o) = O$ revient à

$$M = \begin{pmatrix} A & O \\ C & D \end{pmatrix}, \quad \text{i.e.} \quad M \in \underline{\ell}, \qquad \text{c.q.f.d.}$$

La composition de 2.12 et 2.8, à savoir $H \quad \varphi$, est un plongement de $HOM(U\,,\, U^{\perp})$ dans $HERM$ pour lequel la métrique induite est donnée par

(2.15) $$\frac{1}{2}\, g(\partial(\xi), \partial(\eta)) = \operatorname{Re} \operatorname{tr}\, \xi(I+q^*q)^{-1}\eta^* - \operatorname{Re} \operatorname{tr}(I + q^*q)^{-1}q^*\, \xi(I + q^*q)^{-1}\, \eta^*.$$

Le théorème 2.11 dit, en effet, que $GRASS(m,n;\mathbf{F})$ s'identifie avec le sous-ensemble de $HERM(n\ ;\ \mathbf{F})$ constitué par les projecteurs orthogonaux de rang $m$.

Soit $\sigma \in AUT^{\mathbf{F}}(V\,,\,*)$ la signature $\sigma = +I$ sur $e_oU$ et $\sigma = -I$ sur $U^{\perp}$. Alors $\sigma^2 = I_V$, et $p \longrightarrow \sigma p$ induit une symétrie autour de $\mathcal{O}$ sur $GRASS^{\mathbf{F}}(U,V)$. Si $M \in END^{\mathbf{F}}(V)$ alors $T(\sigma)\, L_M = L_{\sigma M \sigma}$ et 2.14 montre que cette symétrie est **géodésique**. On a

$$GRASS^{\mathbf{F}}(U,V) \simeq AUT(V.*)/K$$

où $K$ est défini par 2.13. Les éléments de l'algèbre de Lie de $AUT(V,*)$ sont les $M \in END(V)$ tels que $M^* = -M$, c'est à dire

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ -B^* & D \end{pmatrix} \qquad \text{où} \quad A^* = -A, \quad D^* = -D.$$

Alors l'algèbre de Lie $\underline{k}$ de $K$ est constituée par les $M$ tels que $\sigma M \sigma = M$, i. e. $B = 0$.

Soit $\mu$ la forme de Lebesgue sur l'espace vectoriel réel $HOM^{\mathbf{F}}(U,V)$. Alors la forme $\mu_1$ définie

(2.16) $$\mu_1\big|_p = (\text{dét}\ p^*p)^{-n\delta/2}\, \mu\big|_p$$

est invariante par l'action de $AUT^{\mathbf{F}}(U)$ sauf dans le cas $\mathbf{F} = \mathbf{R}$ et $\dim V$ est impaire. Dans ce cas GRASS(m,2k+1 ; $\mathbb{R}$) est non-orientable, et il faut considérer $\mathrm{GRASS}^{+}(U,V)$ pour qu'il existe une forme de volume. Une telle forme est

2.17
$$\nu = C_{E_{\alpha_1}} \cdots C_{E_{\alpha_M}} \mu_1/\eta(E_{\alpha}, \dots E_{\alpha_M})$$

où $\alpha_1, \dots \alpha_M$ $(M = m^2\delta)$ est une base réelle de $\mathrm{END}^{\mathbf{F}}(U)$ et $\eta$ est une forme sur $\mathrm{END}^{\mathbf{F}}(U)$ qui répond à la mesure de Haar sur $\mathrm{AUT}^{\mathbf{F}}(U)$. Donc on a

2.18
$$\mu_1 = \eta \wedge \nu \quad ;$$

si f est une fonction définie sur $\mathrm{ISO}^{\mathbf{F}}(U,V)$ sommable pour la mesure $\mu_1$ alors

$$F(P_p) = \int_G f(p\alpha)\, \eta(\alpha) \quad , \quad G = \mathrm{AUT}^{\mathbf{F}}(U)\ ,$$

existe pour presque tout élément de $\mathrm{GRASS}^{F}(U,V)$ et

$$\int_{\mathrm{GRASS}} F\, \nu = \int_{\mathrm{ISO}} f\, \mu_1 .$$

La mesure correspondante à $\nu$ est toujours invariante par $\mathrm{AUT}^{\mathbf{F}}(V\ ,*)$ ; la forme change de signe sous l'action d'un élément de déterminant $-1$ en cas $\mathbf{F} = \mathbb{R}$ et dim U est impaire.

La variété de Stiefel est intermédiaire entre ISO et GRASS. On définit

2.19
$$\mathrm{STIEF}^{\mathbf{F}}(U,V) = \left\{ p \in \mathrm{ISO}(U,V) : p^* p = I \right\}.$$

La démonstration du lemme 2.10 montre que $\mathrm{AUT}^{F}(V,*)$ opère transitivement sur $\mathrm{STIEF}^{\mathbf{F}}(U,V)$ et le sous-groupe qui laisse $e_o$ fixe peut s'identifier avec $\mathrm{AUT}^{\mathbf{F}}(U^{\perp},*)$. Donc on a

2.20
$$\mathrm{STIEF}^{\mathbf{F}}(U,V) \simeq \mathrm{AUT}^{\mathbf{F}}(V,*)/\mathrm{AUT}^{\mathbf{F}}(U^{\perp},*)$$

2.21
$$\begin{aligned} \mathrm{GRASS}^{\mathbf{F}}(U,V) &\simeq \mathrm{STIEF}^{\mathbf{F}}(U,V)/\mathrm{AUT}^{\mathbf{F}}(U,*) \\ &\simeq \mathrm{AUT}^{\mathbf{F}}(V,*)/K \end{aligned}$$

où le groupe K, déjà défini par 2.13 s'identifie comme

2.22
$$K \simeq \mathrm{AUT}^{\mathbf{F}}(U^{\perp},*) \times \mathrm{AUT}^{\mathbf{F}}(U,*), \quad \text{produit direct.}$$

En basse dimension les variétés GRASS se confondent avec des membres d'autres classes de variétés. En tout cas on a

$$\mathrm{STIEF}(1,n\ ;\ \mathbf{F}) \simeq S^{n\delta-1}, \qquad \text{la sphère}$$

$$\mathrm{GRASS}(1,n\ ;\ \mathbf{F}) \simeq \mathrm{PROJ}^{n-1}(\mathbf{F}), \qquad \text{l'espace projectif.}$$

Ainsi $S^3 = \mathrm{STIEF}(1,2\ ;\ \mathbf{C})$ est un fibré principal de $U(1) \simeq S^1$ au dessus de $\mathrm{PROJ}^1(\mathbf{C}) \simeq S^2$ et $S^7 = \mathrm{STIEF}(1,2\ ;\ \mathbf{H})$ est un fibré principal de $Sp(1) \simeq S^3$ au dessus de $\mathrm{PROJ}^1(\mathbf{H}) \simeq S^4$. On peut noter

$$\mathrm{GRASS}(1,2\ ;\ \mathbf{C}) = \mathrm{GRASS}^+(1,3) \simeq S^2$$

$$\mathrm{GRASS}(1,2\ ;\ \mathbf{H}) = \mathrm{GRASS}^+(1,5) \simeq S^4$$

$$SU(2) \simeq \mathrm{GRASS}^+(1,4) \simeq S^3$$

$$\mathrm{GRASS}(2,4\ ;\ \mathbf{R}) \simeq \mathbf{C}^2$$

$$\mathrm{GRASS}(2,6\ ;\ \mathbf{R}) \simeq \mathrm{GRASS}(2,4\ ;\ \mathbf{C}).$$

Les variétés compactes $\mathrm{GRASS}^{\mathbf{F}}(U,V)$ possède des duales non-compactes qu'on appelle les espaces hyperboliques. Tout dépend de l'utilisation de la signature $\sigma$. Rappelons que $\sigma = \sigma^2$, $\sigma^2 = I$ et $e_o U$ est l'espace propre de $\sigma$ pour la valeur propre $+1$ tandis que $U^\perp$ va avec la valeur propre $-1$. On pose

$$\mathrm{ISO}^{\mathbf{F}}_\sigma(U,V) = \left\{p \in \mathrm{ISO}^{\mathbf{F}}(U,V) : p^*\sigma p > 0\right\}$$

et puis

2.23 $$\mathrm{HYPER}^{\mathbf{F}}(U,V) = \mathrm{ISO}^{\mathbf{F}}_\sigma(U,V)/\mathrm{AUT}^{\mathbf{F}}(U).$$

Ceci donne un ouvert du grassmannien $\mathrm{GRASS}^{\mathbf{F}}(U,V)$. On garde la même structure différentielle mais on va changer la métrique. Tout d'abord, on définit une anti-involution $\tau$ sur $\mathrm{END}^{\mathbf{F}}(V)$ par

2.24 $$S^\tau = \sigma\, S^*\, \sigma\,.$$

Maintenant on pose

2.25 $$\mathrm{AUT}^{\mathbf{F}}(V,*,\sigma) = \left\{S \in \mathrm{AUT}^{\mathbf{F}}(V) : S^\tau S = I\right\}.$$

Il faut remarquer que $\mathrm{AUT}^{\mathbf{F}}(V)$ n'opère plus sur $\mathrm{HYPER}^{\mathbf{F}}(U,V)$ mais en calquant la démonstration du Lemme 10 on démontre le

2.26 LEMME. Le groupe $AUT^{\mathbf{F}}(V, *, \sigma)$ opère transitivement sur $HYPER^{\mathbf{F}}(U,V)$.

Il en résulte que

2.27 $$HYPER^{\mathbf{F}}(U,V) \simeq AUT^{\mathbf{F}}(V, *, \sigma)/K$$

où $K$ est le même groupe que ci-dessus.

Revenons à l'application 2.8. Si l'on pose

2.28 $$\mathcal{B} = \mathcal{B}^{F}(U,U^{\perp}) = \left\{q \in HOM(U,U^{\perp}) : q^{*}q < I_{U}\right\}$$

on trouve

2.29 PROPOSITION. L'application $\varphi : \mathcal{B} \longrightarrow HYPER(U,V)$ est un difféomorphisme analytique (même holomorphe si $\mathbf{F} = \mathbf{C}$).

L'application 2.12 ne convient plus pour les espaces hyperboliques. En effet, on doit munir l'espace vectoriel réel END V du produit intérieur indéfini

$$\langle A , B\rangle_{\sigma} = \text{Re trace } AB^{\tau}.$$

Notons $HERM_{\sigma}(V) = \left\{H \in END(V) : H \quad = H\right\}$. Alors on a

2.30 THEOREME. L'application $H_{\sigma} : ISO_{\sigma}^{\mathbf{F}}(U,V) \rightarrow HERM_{\sigma}^{\mathbf{F}}(V)$ définie par

2.31 $$H_{\sigma}(p) = p(p^{*}\sigma\, p)^{-1}\, p^{*}\sigma$$

donne lieu a un plongement analytique de $HYPER^{\mathbf{F}}(U,V)$ dans $HERM_{\sigma}^{\mathbf{F}}(V)$. De plus, si $S \in AUT(V, *, \sigma)$ alors

$$H_{\sigma}(Sp) = S\, H_{\sigma}(p)\, S^{-1}.$$

La métrique non-Riemannienne de $HERM_{\sigma}^{\mathbf{F}}(V)$ induit une structure Riemannienne sur $HERM_{\sigma}^{\mathbf{F}}(V)$ telle que $AUT(V, *, \sigma)$ opère par isométrie.

# SUR LES FONCTIONS DE TYPE POSITIF ET DE TYPE NEGATIF

Jean-Pierre Kahane

Première partie : sur un problème de Deny-Picinbono et un théorème d'Harzallah, théorèmes 1, 2, 3, p. 22-28.

Deuxième partie : type positif, type négatif, fonctions complètement monotones, fonctions de Bernstein, hélices et processus, p. 28-35.

Troisième partie : hélice cubique, théorème 4 ; p.35.37, interprétation géométrique de la première partie.

Les seuls résultats nouveaux sont les théorèmes 2, 3, 4 ; leur point de départ est la seconde preuve du théorème 1. La deuxième partie ne renferme rien d'original - c'est ce qui en fait l'intérêt.

I

Dans la première partie de cet exposé, une fonction de type positif (sur $\mathbb{R}^m$, sur $\mathbb{Z}$) est la transformée de Fourier d'une mesure positive bornée (sur $\mathbb{R}^m$, sur $\mathbb{T}$). Une fonction complètement monotone est la transformée de Laplace

$$f(x) = \int_0^\infty e^{-xt}\, d\mu(t)$$

d'une mesure positive bornée $d\mu$.

Quel que soit $t > 0$, les fonctions $(x_1,\dots,x_m) \longrightarrow \exp(-t(x_1^2 + \dots + x_m^2))$ et $(x_1,\dots x_m) \longrightarrow \exp(-t(\sin^2 x_1 + \dots + \sin^2 x_m))$ sont de type positif. Il en résulte que, si $f$ est complètement monotone, les fonctions $f(x_1^2 + \dots + x_m^2)$ et $f(\sin^2 x_1 + \dots$ $\dots + \sin^2 x_m)$ sont de type positif.

Inversement, que peut-on dire de $f$, si pour tout $m$, la fonction $f(x_1^2 + \dots + x_m^2)$ est de type positif (problème 1) ? ou si, pour tout $m$, la fonction $f(\sin^2 x_1 + \dots + \sin^2 x_m)$ est de type positif (problème 2) ? Jacques Deny m'a signalé que la question intéressait les physiciens (B. Picinbono), et m'a indiqué la réponse de A. Schoenberg au problème 1.

THEOREME 1. (Schoenberg, Annals of Mathematics 1938). <u>Si, pour tout</u> $m$, $f(x_1^2 + \dots + x_m^2)$ <u>est de type positif</u>, $f$ <u>est complètement monotone</u>.

On va donner la preuve de Schoenberg, puis une autre preuve qui permettra de répondre au problème 2, et d'obtenir quelques autres résultats.

Première preuve (Schoenberg). Ecrivons $\|x\|^2 = x_1^2 + \dots + x_m^2$ et $x.\xi = x_1\xi_1 + \dots + x_m\xi_m$. L'hypothèse est que $f$ s'écrit

$$f(\|x\|^2) = \int_{\mathbb{R}^m} e^{ix.\xi}\, d\mu_m(\xi), \qquad d\mu_m \geq 0$$

(1) $$f(\|x\|^2) = \int_0^\infty \left(\int_{S^{m-1}} e^{ix.r\xi'}\, d\omega_m(\xi')\right) d\nu_m(r)$$

où $d\omega_m$ est la mesure normalisée sur la sphère $S^{m-1}$, et $d\nu_m$ une mesure positive sur $\mathbb{R}^+$. Posons

$$\Omega_m(\|x\|) = \int_{S^{m-1}} e^{ix.\xi'}\, d\omega_m(\xi') = \int_{S^{m-1}} e^{i\|x\|\xi'_1}\, d\omega_m(\xi')$$

(Schoenberg l'appelle fonction de Poisson ; on peut l'exprimer en termes de fonctions de Bessel, mais c'est inutile ici). On a

$$\Omega_m(\rho) = \int_0^\pi e^{i\rho\cos\theta} \sin^{m-2}\theta\, d\theta \Big/ \int_0^\pi \sin^{m-2}\theta\, d\theta$$

$$= \int_{-1}^1 e^{i\rho t}\,(1-t^2)^{\frac{m-3}{2}}\, dt \Big/ \int_{-1}^1 (1-t^2)^{\frac{m-3}{2}}\, dt.$$

LEMME. $\Omega_m(\rho\sqrt{m-3})$ tend uniformément vers $e^{-\rho^2/2}$ quand $m \to \infty$.

En effet

$$\Omega_m(\rho\sqrt{m-3}) = c_m \int_{-\sqrt{m-3}}^{\sqrt{m-3}} e^{i\rho s}\left(1 - \frac{s^2}{m-3}\right)^{\frac{m-3}{2}} ds$$

et la fonction $\left(\left(1 - \frac{s^2}{m-3}\right)^+\right)^{\frac{m-3}{2}}$ tend vers $e^{-s^2/2}$ dans $L^1(\mathbb{R})$ (elle est positive, majorée par $e^{-s^2/2}$, et tend ponctuellement vers $e^{-s^2/2}$). Donc l'intégrale tend uniformément vers $\sqrt{2\pi}\, e^{-\rho^2/2}$, et on conclut en observant que $\Omega_m(0) = 1$.

Ecrivons (1) sous la forme

$$f(u^2) = \int_0^\infty \Omega_m(ur)\, d\nu_m(r) = \int_0^\infty \Omega_m(u\rho\sqrt{m-3})\, d\sigma_m(\rho).$$

Les $d\sigma_m$ sont des mesures positives de masse $f(0)$. Une sous-suite converge faiblement vers une mesure $d\sigma$ (dans la dualité avec $\mathcal{C}([0,\infty])$). Grâce au lemme

$$f(u^2) = \int_0^\infty e^{-u^2\rho^2/2}\, d\sigma(\rho)$$

donc $f$ est complètement monotone. C.Q.F.D.

Deuxième preuve. On utilise la caractérisation de Bochner :

$$\Sigma\ f(\|x^i - x^j\|^2)\, a_i\, a_j \geq 0$$

quel que soit le choix des $x^i \in \mathbf{R}^m$ et des $a_i$ réels. On va choisir les $x^i$ aux sommets du cube $[0,1]^m$, puis les $a_i$ de manière convenable.

Désignons par $k = (k_1, \ldots, k_m)$, $\ell = (\ell_1, \ldots, \ell_m)$ des points de l'ensemble $E = \{0,1\}^m$, et posons $|k-\ell| = \|k-\ell\|^2 = \sum_1^m |k_j - \ell_j|^2 = \sum_1^m |k_j - \ell_j|$. Quels que soient les réels $a_k$ $(k \in E)$, on a

(2) $$\sum_o^m A_n f(n) \geq 0$$

avec

$$A_n = \sum_{|k-\ell|=n} a_k\, a_\ell.$$

Soit $\mu$ un entier, $0 \leq \mu \leq m$. Posons $k' = (k_1, \ldots k_\mu, 0, 0, \ldots)$, et $a_k = (-1)^{|k'|}$. Observons que

$$a_k a_\ell = (-1)^{|k'|+|\ell'|} = (-1)^{|k'-\ell'|}$$

et que la somme

$$\sum_{k,\ |k-\ell|=n} (-1)^{|k'-\ell'|} \qquad (\ell \text{ fixé})$$

ne dépend pas de $\ell$ (si on définit les coordonnées modulo 2, $k-\ell$ parcourt $E$ quand $k$ parcourt $E$). Donc

$$A_n = 2^m \sum_{|k|=n} (-1)^{|k'|} \qquad (n = 0,\ 1, \ldots\ m)$$

et

$$2^{-m} \sum_{n=0}^m A_n X^n = \sum_n \sum_{|k|=n} (-1)^{|k'|} X^n$$

$$= \sum_{k \in E} (-1)^{k_1 + \ldots + k_\mu} X^{k_1 + \ldots + k_m}$$

(3) $$= (1 - X)^\mu (1+X)^{m-\mu}\ .$$

Chaque fois que les $A_n$ sont donnés par (3) $(0 \leq \mu \leq m)$, on a (2). Il en résulte que

(4) $$f(n) = \int_{-1}^1 X^n\, d\mu(X)$$

$d\mu$ étant une mesure positive bornée sur $[-1\ ,\ 1]$. Aux notations près (on considère classiquement l'intervalle $[0,1]$ et les polynômes $X^{\mu}(1-X)^{m-\mu}$), c'est le théorème de Hausdorff-Bernstein sur les moments de Stieltjes ; la preuve se trouve par exemple dans G. Lorentz, Bernstein polynomials, p. 58-59. Et de (4) découle

$$f(2n) = \int_0^1 X^{2n}\,(d\mu(X) + d\mu(-X)) = \int_0^{\infty} e^{-2nt}\,d\nu(t).$$

Si, au lieu des sommets du cube $[0,1]^m$, on considère les sommets du cube homothétique $[0,\varepsilon]^m$, on obtient

$$f(2n\,\varepsilon) = \int_0^{\infty} e^{-2n\varepsilon t}\,d\nu_{\varepsilon}(t), \qquad d\nu_{\varepsilon} \geq 0.$$

Si $\varepsilon = 10^{-j}$ $(j = 1, 2, \ldots)$, et si $d\nu$ est limite faible d'une sous-suite des $d\nu_{\varepsilon}$, on a

$$f(x) = \int_0^{\infty} e^{-xt}\,d\nu(t)$$

pour tout $x$ décimal, et, par continuité, pour tout $x$ réel. C.Q.F.D.

Cette seconde preuve donne sans difficulté le théorème suivant, qui répond au problème 2.

THEOREME 2. Soit $\varphi$ une fonction définie sur $\mathbb{R}$ positive, paire, continue, nulle en $0$ et non identiquement nulle. Si, pour tout $m$, la fonction $f(\varphi(x_1) + \ldots + \varphi(x_n))$ est de type positif, $f$ est complètement monotone.

Ici, pour chaque $\varepsilon > 0$ assez petit, on choisit $\eta > 0$ tel que $\varphi(\eta) = \varepsilon$, et on applique le critère de Bochner en choisissant les $x^i$ aux sommets du cube $[0,\eta]^m$.

Au lieu d'une seule fonction $\varphi$, on peut donner une suite de fonctions $\varphi_n$ et supposer $f(\varphi_1(x_1) + \ldots + \varphi_m(x_m))$ de type positif. La méthode marche si $\lim_{m\to\infty} (m\|\varphi_m\|_{\mathcal{C}(R)}) = \infty$.

Nous allons voir que la même méthode, convenablement adaptée, fournit ceci, qui est suggéré par un théorème d'Harzallah (voir deuxième partie).

THEOREME 3. Pour un choix convenable des suites positives $\rho_j$ et $\alpha_j$, la suite

$$(5) \qquad \varphi(n) = \sum_{j=1}^{\infty} \rho_j \sin^2 \alpha_j n$$

est à valeurs finies sur $\mathbb{Z}$ et jouit des propriétés suivantes :

a) Si $f$ est une application continue de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$ telle que la suite $n \longrightarrow f(\varphi(n))$ $(n\in\mathbb{Z})$ soit de type positif, alors $f$ est complètement monotone

b) si $f$ est une application continue de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$ telle que la suite $n \longrightarrow f(\varphi(n))$ $(n\in\mathbb{Z})$ soit de type négatif, alors $f$ est une fonction de Bernstein.

On reviendra plus loin sur les fonctions de type négatif et les fonctions de Bernstein. Nous nous satisfaisons ici des caractérisations suivantes, qui rendent b) évident à partir de a) :

Soit $f$ une application continue de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$, nulle en $0$. C'est une fonction de Bernstein si et seulement si, pour tout $t > 0$, $e^{-tf}$ est complètement monotone.

Soit $g$ une application de $\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{R}$, nulle en $0$. Elle est de type négatif si et seulement si, pour tout $t > 0$, $e^{-tg}$ est de type positif.

Construction de $\varphi$ et preuve de a).

Choix des $\rho_j$. Soit $\varepsilon_k$ $(k\in\mathbb{N})$ une suite dont les valeurs sont les puissances négatives de $10$, chaque valeur étant prise une infinité de fois (par exemple, $\varepsilon_k = 10^{-\mu(k)}$, $\mu(k)$ étant la somme des chiffres de $k$ écrit dans le système décimal). Soit $J_k$ l'intervalle d'entiers $\left]10^{k-1}, 10^k\right]$. Posons $\rho_j = \varepsilon_k$ quand $j \in J_k$.

Choix des $\alpha_j$. On impose deux conditions : 1°) $\pi, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots$ doivent être linéairement indépendants sur les rationnels 2°) la suite $\alpha_j$ doit tendre assez rapidement vers $0$, comme on va le préciser. Au cause de la condition 1°), on peut, pour tout $k\in\mathbb{N}$ et tout $j\in J_k$, trouver un entier positif $n_j$ tel que

$$(6) \qquad \begin{aligned} &(i) && |\sin n_j \alpha_j - 1| \le 10^{-3k} \\ &(ii) && |\sin n_j \alpha_\ell| \le 10^{-3k} \qquad \text{pour} \quad 1 \le \ell \le 10^k, \quad \ell \ne j. \end{aligned}$$

Posons

$$N_k = \sum_{10^{k-1}<j\leq 10^k} n_j .$$

Notre condition 2°) sera

(7) $$\sum_{j>10^k} \rho_j \alpha_j^2 N_k^2 \leq 10^{-k} \qquad (k\in\mathbb{N}).$$

Il est clair que les conditions 1°) et 2°) sont compatibles.

Fixons $k$. Soit $\{\eta_j\}$ une suite à valeurs $0$, $+1$ ou $-1$ $(j\in J_k)$. Posons $n = \sum \eta_j n_j$ $(j\in J_k$ ; les $n_j$ satisfont (6)). D'après (6) (ii), $n\alpha_j$ est voisin de $\eta_j n_j \alpha_j$ modulo $2\pi$ ; plus précisément, leur distance modulo $2\pi$ ne dépasse pas $(10^k - 10^{k-1})$ Arc sin $10^{-3k}$. Compte tenu de (6) (i), on a donc

$$|\sin n\,\alpha_j - \eta_j| < 10^{-2k} \qquad (j\in J_k).$$

Pour $\ell \leq 10^{k-1}$, on a d'après (6) (ii)

$$|\sin n\,\alpha_\ell| < 10^{-2k}.$$

Enfin, d'après (7), en remarquant que $|n|$ ne dépasse pas $N_k$,

$$\sum_{j>10^k} \rho_j \sin^2 n\,\alpha_j \leq 10^{-k}.$$

Il résulte de ces trois inégalités que

$$\left|\varphi(n) - \varepsilon_k \sum |\eta_j|\right| < 3.10^{-k}.$$

Désignons maintenant par $\varkappa = \{\varkappa_j\}$, $\lambda = \{\lambda_j\}$ des éléments de $\{0,1\}^{J_k}$, et posons $n_\varkappa = \sum \varkappa_j n_j$ $(j\in J_k)$. La condition de Bochner, appliquée aux points $n_\varkappa$ avec les coefficients $a_\varkappa$, donne

$$\sum_{\varkappa,\lambda} f(\varphi(n_\varkappa - n_\lambda))\, a_\varkappa a_\lambda \geq 0$$

soit

(8) $$\sum_{\varkappa,\lambda} f(\varepsilon_k \sum |\varkappa_j - \lambda_j| + \omega_j)\, a_\varkappa a_\lambda \geq 0, \quad |\omega_j| < 3.10^{-k}.$$

Si $\varepsilon$ est une puissance négative de $10$, $\underline{k}$, $\underline{\ell}$, ... des éléments de $\{0,1\}^m$, $a_{\underline{k}}$ des scalaires réels indexés par $\{0,1\}^m$, la somme

$$\sum_{k,\ell} f(\varepsilon \sum |\underline{k}_j - \underline{\ell}_j|)\, a_{\underline{k}}\, a_{\underline{\ell}}$$

est approchable d'aussi près qu'on veut par des sommes (8) (on utilise la continuité de $f$ et la définition des $\varepsilon_k$), donc elle est positive. La seconde preuve du théorème 1 montre que $f$ est complètement monotone, et cela achève la preuve du théorème 3.

Cela termine la première partie de l'exposé.

---

II

Dans la seconde partie de l'exposé on décrit le contexte. Je le dois pour ma part à Jacques Deny. La référence la plus récente est Faraut-Harzallah, Annales de l'Institut Fourier 24,3 (1974). L'étude des fonctions qui opèrent sur les fonctions définies négatives remonte à K. Harzallah 1965 (Comptes Rendus 260, p. 6790-6793).

<u>Type positif</u>. Soit $X$ un ensemble, $K$ une application de $X \times X$ dans $\mathbb{C}$. On dit que $K$ est un noyau de type positif si

$$\sum K(x_j, x_k)\, a_j\, \bar{a}_k \geq 0$$

quels que soient les $x_j \in X$ et les $a_j \in \mathbb{C}$ $(j = 1, 2, \dots n)$.

Si $X$ est fini, disons $X = \{1, 2, \dots N\}$, un tel noyau n'est pas autre chose qu'une matrice de type positif. Une matrice de type positif peut être caractérisée comme matrice hermitienne à valeurs propres positives.

Dans le cas général, un noyau de type positif n'est pas autre chose qu'un noyau reproduisant (N Aronszajn, Proceedings Cambridge Phil. Soc. 39 (1943) p. 133-153 ; je dois cette référence à N. Lohoué). Dire que $K$ est un noyau de type positif sur $X$, c'est dire qu'il existe un espace de Hilbert $\mathcal{H}$ de fonctions définies sur $X$, tel que 1°) pour tout $x \in X$ on ait $K(x,.) \in \mathcal{H}$ 2°) pour tout $x \in X$ et toute $f \in \mathcal{H}$ on ait

$$f(x) = (f(.)\,,\, K(x,.)).$$

Si $X$ est un groupe topologique et $F$ une application de $X$ dans $\mathbb{C}$, on dit que $F$ est une fonction de type positif si $F$ est continue sur $X$ et si la fonction $K(x,y) = F(xy^{-1})$ est un noyau de type positif.

Si $X$ est un groupe abélien localement compact, on a la caractérisation de Bochner : les fonctions de type positif sont les transformées de Fourier des mesures positives bornées

$$F(x) = \int_{\hat{X}} (\chi\ , x)\ d\mu(\chi) \qquad d\mu \geq 0.$$

<u>Type négatif (sens restreint)</u>. Ici la terminologie n'est pas constante ; le "sens restreint" signifie que nous nous restreignons à des noyaux (ou fonctions) réels, et nuls sur la diagonale (resp. en $0$). Soit $X$ un ensemble, $K$ une application de $X \times X$ dans $\mathbb{R}$. On dira que $K$ est un noyau de type négatif si

1) $K(x,x) = 0$ et $K(x,y) = K(y,x)$

quels que soient $x$ et $y$ dans $X$

2) $\Sigma\, K(x_j\ , x_k)\, a_j\, a_k \leq 0$

quels que soient les $x_j \in K$ et les $a_j$ réels vérifiant $\Sigma\, a_j = 0$ $(j = 1, 2, \ldots n)$.

Si $X$ est fini, disons $X = \left\{1, 2, \ldots N\right\}$, un tel noyau s'appelle aussi matrice de type négatif.

Théorèmes de Schoenberg (cf. Annals of Math. 36 (1935), p. 724-732 ; Annals of Math. 38 (1937) p. 787-793 (avec J. von Neumann) ; Transactions A.M.S. 44 (1938) p. 522-536). C'est l'équivalence des propositions suivantes, dans lesquelles $K$ désigne une application de $X \times X$ dans $\mathbb{R}$ :

a) $K$ est un noyau de type négatif

b) il existe un espace de Hilbert réel $\mathcal{H}$ et une application $\xi$ de $X$ dans $\mathcal{H}$, tels que

$$K(x,y) = \|\xi(x) - \xi(y)\|^2$$

pour tout $x$ et tout $y$ de $X$

c) $K(x,x) = 0$ pour tout $x$, et pour tout $t > 0$ $e^{-tK}$ est un noyau de type positif.

La caractérisation b) est la motivation géométrique de l'introduction des noyaux de type négatif. La caractérisation c) fait le lien entre noyaux de type positif et noyaux de type négatif. Voici à ce propos une remarque utile : si $P(x,y)$ est un noyau de type positif, réel,

$$N(x,y) = \frac{1}{2}(P(x,x)+P(y,y)) - P(x,y)$$

est un noyau de type négatif ; inversement, si $N(x,y)$ est un noyau de type négatif, majoré par $M$,

$$P(x,y) = M - N(x,y)$$

est un noyau de type positif.

Si $X$ est un groupe topologique et $F$ une application de $X$ dans $\mathbf{R}$, on dit que $F$ est une fonction de type négatif si $F$ est continue sur $X$ et si $K(x,y) = F(xy^{-1})$ est un noyau de type négatif.

Si $X$ est un groupe abélien localement compact, on a la formule de Lévy-Khintchine ; les fonctions de type négatif s'écrivent

$$F(x) = Q(x) + \int_{\hat{X}} (1 - \mathrm{Re}(\chi,x))\, d\sigma(\chi)$$

où $Q$ est une "forme quadratique" (c'est-à-dire que $Q$ est continue et satisfait la condition du parallélogramme

$$Q(x+y) + Q(x-y) = 2(Q(x)+Q(y))\ ),$$

positive, et $d\sigma$ est une mesure positive (non nécessairement bornée) sur $\hat{X}\setminus\{0\}$ (voir Harzallah, Ann. Inst. Fourier 19, 2 (1969) 527-532, et aussi Faraut-Harzallah, loc. cit., qui étendent cette formule au cas où $X$ est non-abélien).

<u>Fonctions complètement monotones</u>. On envisagera deux cas. Soit $F$ une fonction à valeurs réelles définie sur la demi-droite ouverte $]0,\infty[$ ; on dit qu'elle est complètement monotone si elle vérifie l'une des deux conditions suivantes, qui sont équivalentes :

1. $F$ est de classe $C^\infty$ et $(-1)^n F^{(n)} \geq 0$ pour $n = 0, 1, 2, \ldots$

2. $F(x) = \int_0^\infty e^{-xt}\, d\mu(t)$, $d\mu \geq 0$ (non nécessairement bornée).

Soit maintenant $F$ une fonction à valeurs réelles définie sur la demi-droite fermée $[0,\infty[$ ; on dit qu'elle y est complètement monotone si elle vérifie l'une des conditions équivalentes

1. $F$ est continue sur $[0,\infty[$ et complètement monotone sur $]0,\infty[$
2. $F(x) = \int_0^\infty e^{-xt}\, d\mu(t)$, $d\mu \geq 0$ bornée.

C'est le sens de "complètement monotone" dans la première partie.

Cette dernière caractérisation, jointe au théorème de Schoenberg (partie c)) rend évident l'énoncé suivant : si $N$ est un noyau de type négatif et si $F$ est complètement monotone sur $[0,\infty[$, $F \circ N$ est un noyau de type positif. La réciproque a été étudiée par K. Harzallah (loc. cit. et Annales Fourier 17-1 (1967), 443-468) : si $X$ est un groupe abélien localement compact infini et si $F$ est une fonction à valeurs réelles définie sur $[0,\infty[$ telle que, pour toute fonction $\varphi$ de type négatif définie sur $X$, $F \circ \varphi$ soit une fonction de type positif, alors $F$ est complètement monotone sur $[0,\infty[$. Le théorème 3 de la première partie dit que, si $X = \mathbb{Z}$, on n'a pas besoin dans l'hypothèse que $F \circ \varphi$ soit de type positif pour <u>toute</u> $\varphi$ de type négatif, mais seulement que $F \circ \varphi$ soit de type positif pour <u>une</u> $\varphi$ particulière bien choisie. Dans cette réciproque précisée, il ne semble pas y avoir de difficulté à prendre au lieu de $\mathbb{Z}$ un autre groupe abélien localement compact et non compact ; naturellement, il n'est pas possible de prendre $X$ compact.

<u>Fonctions de Bernstein (nulles en 0)</u>. Il s'agit des fonctions $F$, définies sur $[0,\infty[$, et de la forme

$$F(x) = bx + \int_0^\infty (1 - e^{-xt})\, d\nu(t)$$

avec $b \geq 0$, et $d\nu \geq 0$ telle que $\int_0^\infty \frac{t}{1+t}\, d\nu(t) < \infty$.

[On appelle quelquefois fonctions de Bernstein les sommes de ces fonctions $F$ et de constantes positives ; c'est commode si l'on n'impose pas aux fonctions de type négatif de s'annuler en 0 ; ce serait génant pour nous ici.] Voici deux exemples :

$$F(x) = x^{\alpha} = \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} \int_o^{\infty} (1 - e^{-xt}) \frac{dt}{t^{1+\alpha}} \qquad 0 < \alpha < 1$$

$$F(x) = \log(1+x) = \int_o^{\infty} (1-e^{-xt}) \frac{e^{-t}}{t} \, dt.$$

Soit $F$ une fonction à valeurs réelles définie sur $[0,\infty[$, nulle en $0$. Dire que $F$ est une fonction de Bernstein, c'est dire que, pour tout $t \geq 0$, $e^{-tF}$ est une fonction complètement monotone (cf. Bochner, Harmonic Analysis and Probability Theory, p. 86).

THEOREME. Si $N$ est un noyau de type négatif et si $F$ est une fonction de Bernstein, $F \circ N$ est un noyau de type négatif.

C'est presque évident : $e^{-tF}$ étant complètement monotone, $e^{-tF \circ N}$ est de type positif, et comme cela vaut pour tout $t > 0$, $F \circ N$ est de type négatif.

Réciproque (Harzallah, loc. cit.). Soit $X$ un groupe abélien localement compact infini, et $F$ une fonction à valeurs réelles définie sur $[0,\infty[$. Si, pour toute fonction $\varphi$ de type négatif, sur $X$, $F \circ \varphi$ est de type négatif, $F$ est une fonction de Bernstein.

Réciproque précisée (cas $X = \mathbb{Z}$). Il existe une $\varphi$ de type négatif sur $\mathbb{Z}$ telle que, si $F \circ \varphi$ est de type négatif, $F$ est une fonction de Bernstein.

C'est le théorème 3 de la première partie. On peut répéter les observations sur le rôle de $\mathbb{Z}$ faites à propos des fonctions complètement monotones (voir dernière partie).

Mise en garde : fonctions absolument monotones. Il s'agit des fonctions $F$ de classe $C^{\infty}$ telles que $F^{(n)} \geq 0$ pour $n = 0, 1, 2\ldots$ Formellement, si $F(x)$ est complètement monotone, $F(-x)$ est absolument monotone. Les fonctions absolument monotones sur $[0,\infty[$ sont les fonctions entières $\sum_o^{\infty} a_n x^n$, $a_n \geq 0$. Ces fonctions opèrent, c'est facile à voir, sur les fonctions de type positif : si $\varphi$ est de type positif, $\sum_o^{\infty} a_n \varphi^n$ est de type positif. Si l'on se borne à des fonctions de type positif bornées par $1$, les fonctions $\sum_o^{\infty} a_n x^n$, $a_n \geq 0$, $\sum_o^{\infty} a_n < \infty$ opèrent. La réciproque a été étudiée par W. Rudin (Duke Math. J. 26 (1959, 617-622) et Carl Herz (Annales Fourier 13, 1 (1963), 161-180). C'est un sujet formellement voisin de celui considéré ici, mais bien distinct.

Hélices. La notion remonte à Schoenberg. Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert réel. Une $\mathbf{Z}$-hélice dans $\mathcal{H}$ est une suite $h_n$ d'éléments de $\mathcal{H}$ $(n\in\mathbf{Z})$ telle que la distance de $h_n$ à $h_m$ ne dépende que de $n-m$. Si $X$ est un groupe abélien localement compact, une $X$-hélice dans $\mathcal{H}$ est une application $\xi : X \longrightarrow \mathcal{H}$ telle que la distance $\|\xi(x) - \xi(y)\|$ ne dépende que de $x-y$.

A une isométrie près dans $\mathcal{H}$, une $X$-hélice dans $\mathcal{H}$ est bien définie par la fonction $\varphi(x) = \|\xi(x) - \xi(0)\|^2$. Le théorème de Schoenberg dit que, quand $\xi$ parcourt toutes les $X$-hélices dans $\mathcal{H}$, $\varphi$ parcourt toutes les fonctions de type négatif sur $X$ (c'est pourquoi les fonctions de type négatif se sont d'abord appelées les "screw-functions")

Formulés en termes de $\mathbf{Z}$-hélices, nos énoncés précédents donnent ceci. 1. Si $h_n$ $(n\in\mathbf{Z})$ est une $\mathbf{Z}$-hélice dans $\mathcal{H}$ et si $F$ est une fonction de Bernstein, il existe une $\mathbf{Z}$-hélice $\xi_n$ $(n\in\mathbf{Z})$ telle que

$$\|\xi_n - \xi_m\|^2 = F(\|h_n-h_m\|^2) \qquad (n\in\mathbf{Z},\ m\in\mathbf{Z}).$$

2. Il existe une $\mathbf{Z}$-hélice $h_n$ $(n\in\mathbf{Z})$ telle que, quelle que soit la $\mathbf{Z}$-hélice $\xi_n$ $(n\in\mathbf{Z})$, la fonction $F$ définie par l'égalité qui précède est une fonction de Bernstein.

Hélices et processus gaussiens. Supposons que $\mathcal{H}$ soit un espace de Hilbert de variables aléatoires gaussiennes centrées, de dimension infinie ; $\mathcal{H}$ est un sous-espace fermé de $L^2(\Omega)$, $\Omega$ étant l'espace de probabilité. Une $X$-hélice dans n'est pas autre chose qu'un processus gaussien stationnaire indexé par $X$, et la fonction de type négatif associée est la fonction de corrélation du processus. Par exemple, le mouvement brownien sur $\mathbf{R}$ est la $\mathbf{R}$-hélice, nulle en $0$, associée à $\varphi(t) = |t|$. Le mouvement brownien à $n$ paramètres de Paul Lévy est la $\mathbf{R}^n$-hélice, nulle en $0$, associée à $\varphi(t_1, t_2, \ldots t_n) = (t_1^2 + t_2^2 + \ldots + t_n^2)^{1/2}$. La relatior entre les propriétés géométriques des hélices et les propriétés presque sûres des réalisations du processus est un très beau sujet d'études ; pour la continuité presque-sûre, R. Dudley et X. Fernique ont établi un critère géométrique en termes d'$\varepsilon$-entropie (cf. P. A. Meyer, séminaire Bourbaki, 1974, ou X. Fernique, Lecture Notes 480).

Fonctions de type négatif et processus à accroissements indépendants. Tandis que A. Schoenberg introduisait les "screw-functions" - qui sont les fonctions de type négatif au sens restreint que nous avons considérées ici -, Paul Lévy introduisait les "fonctions-$\psi$" des lois indéfiniment divisibles ou, ce qui revient au même, des processus à accroissements indépendants. Les fonctions-$\psi$ sont de la forme

$$\psi(y) = miy - \lambda \frac{y^2}{2} + \int_{-\infty}^{\infty} (e^{iuy} - 1 - \frac{iuy}{u^2+1})\, d\nu(u) \qquad (y \in \mathbf{R})$$

où $m$ est réel, $\lambda \geq 0$, et $d\nu$ une mesure positive, non nécessairement bornée, intégrant la parenthèse ⊗. Au signe près, ce sont les fonctions de type négatif "au sens large" sur $\mathbf{R}$. Si $X(t)$ est un processus à acroissements indépendants stationnaire, nul en $0$, on a

$$E(e^{iyX(t)}) = e^{t\psi(y)}$$

pour une fonction-$\psi$ convenable. Ainsi $\psi(y) = m\,i\,y$ correspond à la translation uniforme $(X(t) = mt)$, $\psi(y) = -\frac{y^2}{2}$ correspond au mouvement brownien, $\psi(y) = p(e^{iuy}-1)$ correspond à un processus de Poisson (somme de sauts de hauteur $u$ dont la distribution sur un intervalle $(t\ ,\ t+\Delta t)$ est une variable aléatoire de Poisson de paramètre $p\Delta t$). Si $X(t)$ est symétrique, c'est-à-dire si $X(t)$ et $-X(t)$ ont la même loi, $\psi$ est paire, et $-\psi$ est une fonction de type négatif au sens restreint.

Fonctions de type négatif et espaces de Dirichlet, synthèse spectrale, etc...

A. Beurling, indépendamment de A. Schoenberg et P. Lévy, a redécouvert les fonctions de type négatif. Sur leur rôle dans divers sujets, cf. J. Deny, Méthodes

⊗ (Cf. Paul Lévy, Théorie de l'addition des variables aléatoires, p. 180.)

hilbertiennes en théorie du potentiel (C.I.M.E. 1969), 123-201 ; particulièrement p. 187 et suivantes et la bibliographie citée.

---

III

Dans cette dernière partie on considère le groupe $\Delta$ constitué par les suites $\delta = (\delta_1, \delta_2, \ldots \delta_n, \ldots)$ de 0 et de 1, nulles presque partout, où l'addition est définie comme l'addition modulo 2 des coordonnées. Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert réel de dimension infinie, et $(e_1, e_2, \ldots e_n, \ldots)$ une base orthonormée de $\mathcal{H}$. La plus simple des $\Delta$-hélices dans $\mathcal{H}$ est l'hélice "cubique" définie par

$$\xi(\delta) = \delta_1 e_1 + \delta_2 e_2 + \ldots + \delta_n e_n + \ldots$$

et la fonction de type négatif associée est

$$\|\xi(\delta)\|^2 = \delta_1 + \delta_2 + \ldots + \delta_n + \ldots = |\delta|.$$

Quelles sont les fonctions $F$, définies sur $\mathbb{N}$, telles que l'application $\delta \longrightarrow F(|\delta|)$ soit de type positif sur $\Delta$ ? ou qu'elle soit de type négatif sur $\Delta$ ? La seconde question s'interprète géométriquement : désignons par $E$ l'image de l'hélice cubique ; quelles sont les métriques $\Phi$ sur $E$, telles que la $\Phi$-distance ne dépende que de la distance dans $\mathcal{H}$, et que par une isométrie convenable $(E , \Phi)$ s'applique dans $\mathcal{H}$ ? L'image de $(E , \Phi)$ est alors une $\Delta$-hélice dans $\mathcal{H}$ (il existe d'ailleurs des $\Delta$-hélices dans $\mathcal{H}$ qu'on ne peut pas obtenir de cette façon, comme on le vérifie facilement).

THEOREME 4. 1. <u>Pour que l'application</u> $\delta \longrightarrow f(|\delta|)$ <u>soit de type positif sur</u> $\Delta$, <u>il faut et il suffit que</u>

$$f(n) = \int_{[-1,1]} X^n \, d\mu(x) \tag{9}$$

<u>où</u> $d\mu$ <u>est une mesure positive bornée</u>. 2. <u>Pour que l'application</u> $\delta \longrightarrow F(\delta)$ <u>soit de type négatif sur</u> $\Delta$, <u>il faut et il suffit que</u>

$$F(n) = kn + \int_{[-1,1]} (1 - X^n) \, d\mu(X) \tag{10}$$

<u>où</u> $k \geq 0$ <u>et</u> $d\mu$ <u>est une mesure positive, bornée sur</u> $[-1,0]$, <u>et intégrant</u> $1-X$ <u>sur</u> $[0,1]$.

Preuve. Si $\delta \longrightarrow f(|\delta|)$ est de type positif sur $\Delta$, la seconde preuve du théorème 1 montre que $f$ vérifie (4), c'est-à-dire (9).

Si $\delta \longrightarrow F(|\delta|)$ est de type négatif sur $\Delta$, $\delta \longrightarrow e^{-tF(|\delta|)}$ $(t > 0)$ est de type positif, donc, d'après (9),

$$e^{-tF(n)} = \int_{-1}^{1} X^n \, d\mu_t(X), \qquad d\mu_t \geq 0, \quad \int_{-1}^{1} d\mu_t = 1,$$

donc

$$F(n) = \lim_{t \to 0} \int_{-1}^{1} (1-X^n) \frac{d\mu_t(X)}{t}$$

d'où (10).

Inversement, soit $f(n) = X^n$, $-1 \leq X \leq 1$. Alors

$$f(|\delta|) = X^{\delta_1} X^{\delta_2} \ldots X^{\delta_n} \ldots$$

Pour montrer que c'est de type positif, il suffit de le vérifier pour $X^{\delta_n}$, ce qui est immédiat. En intégrant par rapport à $d\mu$, on a encore une fonction de type positif, donc (9) entraîne bien que $f(|\delta|)$ est de type positif.

On conclut de la même façon pour (10).

La première partie du théorème 4 donne la signification de la seconde preuve du théorème 1.

Indiquons rapidement la signification du théorème 3.

La construction donnée dans le théorème 3 est celle d'une $\mathbf{Z}$-hélice qui s'accumule de façon convenable sur l'hélice cubique $E$ et sur ses homothétiques $10^{-k}E$ $(k = 1, 2, \ldots)$. De façon précise, appelons "maille dans $\mathbf{Z}$" tout ensemble d'entiers distincts de la forme $\delta_1 n_1 + \delta_2 n_2 + \ldots \delta_q n_q$, où $\delta_j = 0$ ou $1$, et les $n_j$ sont des entiers. Appelons "maille dans la $\mathbf{Z}$-hélice" l'image d'une "maille dans $\mathbf{Z}$". La $\mathbf{Z}$-hélice construite dans le thécrème 3 admet une suite de mailles qui s'accumulent sur $E$, et, de la même façon, une suite de mailles qui s'accumulent sur $10^{-k}E$ pour tout $k$, de telle façon que deux points distincts d'une maille viennent au voisinage de deux points distincts de $E$ (ou de $10^{-k}E$).

Soit $h_n$ $(n\in\mathbf{Z})$ cette $\mathbf{Z}$-hélice, et $H$ son image. Ainsi la fonction $\varphi(n)$ de la formule (5) est

$$\varphi(n) = \|h_n\|^2 = \|h_{n+k} - h_k\|^2 .$$

Donnons l'interprétation géométrique de la seconde partie du théorème 3 - essentiellement, sa preuve -. On cherche les métriques $\Psi$ sur $H$, telles que la $\Psi$-distance de $h_n$ à $h_m$ ne dépende que de $|n-m|$, et que l'espace métrique $(H,\Psi)$ puisse s'appliquer isométriquement dans $\mathcal{H}$ ; on pose

$$\Psi(h_n , h_m) = F(\varphi(n-m)) = F(\|h_n-h_m\|^2).$$

Par continuité, on obtient une métrique $\Psi$ sur $E$, telle que la $\Psi$ distance de deux éléments de $E$ ne dépende que de leur distance dans $\mathcal{H}$, et que $(E,\Psi)$ puisse s'appliquer isométriquement dans $\mathcal{H}$. Alors

$$\Psi(\xi(\delta),0) = F(\|\xi(\delta)\|^2) = F(|\delta|)$$

est de type négatif sur $\Delta$, donc on a (10). De même, en remplaçant $E$ par $10^{-k}E$, on a une représentation pour $F(10^{-k}n)$. En utilisant la continuité de $F$, on parvient au résultat que $F$ est une fonction de Bernstein.

L'avantage de cette interprétation est de voir comment adapter la démonstration pour d'autres groupes que $\mathbf{Z}$, abéliens et localement compacts mais non compacts.

# PRODUITS DE RIESZ GENERALISES

Yves MEYER

## 1. INTRODUCTION.

On désigne par $g_k : \mathbb{R} \longrightarrow [0,+\infty[$ une suite de fonctions continues, $2\pi$-périodiques et telles que $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g_k(x)\,dx = 1$ et l'on forme pour tout entier $N \in \mathbb{N}$, $P_N(x) = \prod_0^N g_k(3^k x)$. Le problème est de savoir s'il existe une mesure de probabilité $d\mu(x)$ sur $[0,2\pi]$ telle que $P_N(x)$ converge vers $d\mu(x)$ au sens faible : cela revient à savoir si pour tout entier $j \in \mathbb{Z}$, le coefficient de Fourier $\gamma_{N,j}$ de $P_N(x)$ tend vers une limite $\gamma_j$ quand $N$ tend vers l'infini.

En second lieu, on cherche si le mesure limite $d\mu$ est définie par une densité $f \in L^1[0,2\pi]$. Si c'est le cas, on cherche enfin si $P_N(x)$ tend vers $f(x)$ au sens de la norme $L^1$ ; il se peut même que la suite des $P_N(x)$ vérifie les hypothèses du théorème de convergence dominée de Lebesgue : $P_N(x) \longrightarrow f(x)$ presque-partout et $\sup_{N\geq 0} P_N(x) \in L^1[0,2\pi]$.

Sous cette forme générale le problème semble inabordable même dans le cas extrêmement particulier où $g_k(x) = g(x)$ est une fonction indéfiniment dérivable indépendante de $k$.

A ma connaissance, deux cas particulier ont été étudiés : le cas des produits de Riesz usuels (où $g_k(x) = 1 + r_k \cos x$ et où $-1 \leq r_k \leq 1$) et le cas des g-mesures de M. Keane [3] où, pour tout $x$, $\frac{1}{3}\left[g(x)+g(x+\frac{2\pi}{3})+g(x+\frac{4\pi}{3})\right]=1$ ; on suppose, en outre que $g$ appartient à l'espace $\Lambda_\alpha$ des fonctions höldériennes d'exposant $\alpha$ et que $g_k(x)=g(x)$ pour tout $k\geq 0$.

La condition de Keane implique évidemment $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g(x)\,dx = 1$. Si la condition de Keane n'est pas satisfaite, la conclusion souhaitée est généralement fausse comme le montre le contre-exemple très simple suivant : $g_k(x)=g(x)=1+r(\cos x+\cos 3x)$, $r>0$, $r\leq\frac{1}{2}$.

Suivant une notion classique [1] nous désignerons par $A_p$, $1<p<+\infty$, l'ensemble des fonctions mesurables $\omega : \mathbb{R}\longrightarrow [0,+\infty]$ telles qu'il existe une constante $C$ pour laquelle on ait, pour tout intervalle $I$ de longueur $|I|$,

$$(1)\qquad \left(\frac{1}{|I|}\int_I \omega(x)\,dx\right)\left(\frac{1}{|I|}\int_I \omega^{-1/p-1}(x)\,dx\right)^{p-1}\leq C.$$

Si $p=1$, $\omega\in A_1$ s'il existe $C$ (toujours positive et finie) telle que, pour tout intervalle $I$ on ait

$$\frac{1}{|I|}\int_I \omega(x)\,dx \leq C \operatorname*{inf\,ess}_{x\in I}\omega(x).$$

## 2. ENONCES DES THEOREMES.

Le théorème suivant donne une condition suffisante pour qu'un produit de Riesz généralisé définisse une fonction appartenant à $L^1[0,2\pi]$. Mais cette fonction appartiendra, du même coup, à toutes les classes $A_p$ de poids pour $1<p<+\infty$.

THEOREME 1. Soient $\theta>1$ un nombre réel et $n_k\in\mathbb{N}$, $k\geq 0$, une suite d'entiers vérifiant $n_o\geq 1$ et $n_{k+1}\geq\theta\, n_k$ pour tout $k\in\mathbb{N}$.

Désignons par $\alpha$ un nombre réel dans l'intervalle $]0,1]$ et par $f_k$ une suite de fonctions $2\pi$-périodiques d'une variable réelle, à valeurs réelles, telle que $|f_k(x)|\leq 1$, $|f_k(x)-f_k(y)|\leq|x-y|^\alpha$ et $\int_0^{2\pi} f_k(t)\,dt=0$ pour tout $x\in\mathbb{R}$, tout $y\in\mathbb{R}$ et tout $k\in\mathbb{N}$.

Alors pour toute suite $r_k$, $k \in \mathbb{N}$, de nombres réels tels que $-1 < r_k < 1$ ($k \in \mathbb{N}$) et que $\sum_0^\infty r_k^2 < +\infty$, le produit infini $\prod_0^\infty (1 + r_k f_k(n_k x))$ converge pour presque tout $x$ vers une fonction $\omega(x)$ appartenant à toutes les classes $A_p$ de poids pour $1 < p \leq +\infty$. De plus $\omega(x) \in L^p[0,2\pi]$ pour $1 \leq p < +\infty$.

La démonstration du théorème 1 repose sur les propriétés du sous-espace VMO de l'espace BMO de John et Nirenberg. Cet espace VMO sera, dans notre cas, défini comme la fermeture dans $BMO(\mathbb{R})$ du sous-espace des fonctions continues $2\pi$-périodiques.

Si $S(x) \in VMO$, alors $\omega(x) = \exp S(x)$ appartient à tous les $L^p$ pour $1 \leq p < +\infty$ et à toutes les classes $A_p$ de Muckenhoupt (où cette fois $1 < p$).

La démonstration du théorème 1 se fera donc en calculant $\log \prod_0^\infty (1 + r_k f_k(n_k x)) = \sum_0^\infty \log(1 + r_k f_k(n_k x))$. Un développement limité nous ramène, compte tenu de $\sum_0^\infty r_k^2 < +\infty$, à l'étude de la série $\sum_0^\infty r_k f_k(n_k x)$ ; ceci est l'objet du théorème 2.

Posons, pour tout $N \in \mathbb{N}$, $S_N(x) = \sum_0^N r_k f_k(n_k x)$, $S^*(x) = \sup_{N \geq 0} |S_N(x)|$, $P_N(x) = \prod_0^N (1 + r_k f_k(n_k x))$ et $P^*(x) = \sup_{N \geq 0} P_N(x)$.

THEOREME 2. Pour tout $\theta > 1$, il existe une constante $C(\theta)$ telle que, si $\sum_0^\infty r_k^2 < +\infty$, $S^*$ appartienne à VMO. De plus on a

(2) $$\|S^*\|_{L^2[0,2\pi]} \leq C(\theta) \left(\sum_0^\infty r_k^2\right)^{1/2}$$

et

(3) $$\|S^*\|_{VMO} \leq C(\theta) \left(\sum_0^\infty r_k^2\right)^{1/2} .$$

Enfin on a un renseignement sur le produit maximal $P^*(x)$.

THEOREME 3. Si $\sum_{o}^{\infty} r_k^2 < +\infty$, $P^*(x)$ est un poids appartenant à la classe $A_1$.

Nous commencerons par la démonstration du théorème 2.

## 3. LE LEMME DE PRESQUE-ORTHOGONALITE.

LEMME 1. Pour tout $\theta > 1$ et tout $\alpha \in ]0,1$ il existe une constante $C(\alpha,\theta)$ telle que, pour toute suite $f_k$ de fonctions vérifiant les hypothèses du théorème 1 et pour toute suite $t_k$, $k \geq 0$, de nombres réels positifs telle que $t_o \geq 1$ et $t_{k+1} \geq \theta t_k$ $(k \geq 0)$, on ait, si $0 \leq b-a \leq 2\pi$ et $r_k \in \ell^2$

(4) $$\left(\int_a^b |\Sigma\, r_k f_k(t_k x)|^2\, dx\right)^{1/2} \leq C(\alpha,\theta)(\Sigma\, |r_k|^2)^{1/2} .$$

Une telle inégalité se prouve, en fait, pour des suites $r_k$ nulles à partir d'un certain rang. Le cas général s'en déduit immédiatement ; la somme infinie $\sum_{o}^{\infty} r_k f_k(t_k x)$ étant interprétée ici comme la limite dans $L^2[a,b]$ des sommes partielles.

On développe le carré et il suffit d'examiner $I_{j,k} = \int_a^b f_j(t_j x)\, \bar{f}_k(t_k x)\, dx$.

Nous allons montrer dans un instant l'existence de deux constantes positives $\varepsilon \geq 0$ et $C > 0$ telles que, pour toute suite $f_k$ de fonctions vérifiant les hypothèses du théorème 1, on ait

(5) $$|I_{j,k}| \leq C\, 2^{-\varepsilon |j-k|} .$$

Il en résulte évidemment que $|\Sigma\Sigma\, r_j \bar{r}_k I_{i,k}| \leq C' \,\Sigma\, |r_k|^2$ ce qu'il fallait démontrer.

Dans la preuve de l'inégalité (5), il suffit de se restreindre au cas où $j < k$. Si $j > k$ on procède de façon symétrique et l'estimation de $I_{j,j}$ est triviale.

On décompose l'intervalle $[a,b]$ en intervalles $\left[\frac{2\pi q}{t_k}, \frac{2\pi(q+1)}{t_k}\right]$ où

$q \in \mathbf{Z}$. Naturellement il y a peut-être deux intervalles exceptionnels à considérer de la forme $\left[a\,,\,\frac{2\pi q'}{t_k}\right]$ et $\left[\frac{2\pi q''}{t_k}\,,\,b\right]$. Mais leurs longueurs ne dépassent pas $\frac{2\pi}{t_k}$ et la contribution correspondante de $I_{j,k}$ est majorée par $\frac{4\pi}{t_k}$.

Calculons $v_q = \int_{2\pi q/t_k}^{2\pi(q+1)/t_k} f_j(t_j x)\,\bar{f}_k(t_k x)\,dx$. Puisque

$$\int_o^{2\pi} f_k(x)\,dx = 0, \quad \text{on a} \quad v_q = \int_{2\pi q/t_k}^{2\pi(q+1)/t_k} \left[f_j(t_j x) - f_j(t_j x_q)\right] \bar{f}_k(t_k x)\,dx.$$

Ceci en appelant, par exemple, $x_q$ le point $2\pi q/t_k$. Or $|f_j(t_j x) - f_j(t_j x_q)| \leq t_j^\alpha\, |x-x_q|^\alpha \leq C\left(\frac{t_j}{t_k}\right)^\alpha$. D'où

$|v_q| \leq \frac{2\pi}{t_k} C\left(\frac{t_j}{t_k}\right)^\alpha$ et $\Sigma\,|v_q| \leq C'\left(\frac{t_j}{t_k}\right)^\alpha$ puisque le nombre de termes de la somme est de l'ordre de grandeur de $t_k$.

Finalement $|I_{j,k}| \leq \frac{C_1}{t_k} + C_2\left(\frac{t_j}{t_k}\right)^\alpha \leq C_3\, 2^{-\varepsilon|j-k|}$ par suite des hypothèses faites sur $\alpha$ et les $t_k$.

Remarque : si $b-a \geq 2\pi$, l'inégalité (4) est encore satisfaite si l'on remplace dans le premier membre $\left(\int_a^b |\ldots|^2\,dx\right)^{1/2}$ par $\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b |\ldots|^2\,dx\right)^{1/2}$. La démonstration que nous avons donnée s'adapte immédiatement à ce nouveau cas.

## 4. PREUVE DU THEOREME 2.

LEMME 2. <u>Les notations sont celles du lemme 1 et du théorème 2. On pose</u> $f(x) = \sum_o^\infty r_k f_k(t_k x)$ <u>et l'on appelle</u> $f^*(x)$ <u>la fonction maximale de Hardy et Littlewood de</u> $f(x)$, <u>cependant que</u> $S^*(x)$ <u>désigne toujours</u> $\sup_{N \geq 0} \left|\sum_o^N r_k f_k(t_k x)\right|$. <u>Alors il existe une constante</u> $C(\alpha,\theta)$ <u>ne dépendant que de</u> $\alpha$ <u>et de</u> $\theta$ <u>et telle que, pour tout</u> $x$ <u>réel on ait</u>

(6) $$S^*(x) \leq f^*(x) + C(\alpha,\theta)\left(\sum_o^\infty |r_k|^2\right)^{1/2}.$$

La preuve de (6) est classique et nous ne la rappelons que pour la commodité du lecteur.

Soit, en effet, I l'intervalle $\left[x\ ,\ x+\frac{2\pi}{t_N}\right]$. Si $u\in I$, on a

$$|S_N(x)-S_N(u)| \le \sum_o^N |r_k|\,|f_k(t_kx)-f_k(t_ku)| \le (2\pi)^\alpha \sum_o^N |r_k|\left(\frac{t_k}{t_N}\right)^\alpha \le C(\Sigma\,|r_k|^2)^{1/2}.$$

On a donc $|S_N(x)| \le |S_N(u)| + C(\Sigma\,|r_k|^2)^{1/2}$ et, en prenant la moyenne sur I, $|S_N(x)| \le \frac{1}{|I|}\int_I |S_N(u)|\,du + C(\Sigma\,|r_k|^2)^{1/2} \le \frac{1}{|I|}\int_I |f(u)|\,du +$

$\frac{1}{|I|}\int_I |R_{N+1}(u)|\,du + C(\Sigma\,|r_k|^2)^{1/2} = \alpha+\beta+\gamma$. On majore $\alpha$ par $f^*(x)$.

Pour majorer $\beta$, on fait le changement de variable $u = x+\frac{s}{t_N}$, $0\le s\le 2\pi$ et l'on applique le lemme 1 à $s \longrightarrow R_{N+1}(s+\frac{s}{t_N}) = \sum_{N+1}^{\infty} r_kf_k(x+\frac{s}{t_N})$. Ceci termine la vérification de (6).

LEMME 3. <u>Si</u> $b-a\ge 2\pi$, <u>alors</u>

$$(7)\qquad \left(\frac{1}{b-a}\int_a^b [S^*(x)]^2\,dx\right)^{1/2} \le C(\theta)\,(\sum_o^\infty |r_k|^2)^{1/2}.$$

Par périodicité, on se ramène au cas où $b-a = 2\pi$ et (6) entraine (7) car $f\to f^*$ est bornée sur $L^2[0,2\pi]$.

LEMME 4. <u>On a</u> $\|S^*\|_{BMO} \le C(\theta)\,(\Sigma\,|r_k|^2)^{1/2}$. <u>Soit</u> $I\subset[0,2\pi]$ <u>un intervalle et</u> $N\in\mathbb{N}$ <u>l'entier défini par</u> $\frac{2\pi}{n_{N+1}} < |I| \le \frac{2\pi}{n_N}$.

Si N n'existe pas, c'est que $|I| > \frac{2\pi}{n_o}$. On choisit $c_I = 0$ et l'on majore $\frac{1}{|I|}\int_I |S^*(u)|^2\,du$ en faisant le changement de variable $n_o u = x$. Alors $S^*(u) = \sigma^*(x) = \sup_{N\ge 0}\left|\sum_o^N r_k f_k(t_kx)\right|$ où $t_k = n_k/n_o$. On pose $[a,b] = n_oI$ ; $b-a\ge 2\pi$ et l'on peut appliquer le lemme 3 à $\sigma^*(x)$. Il vient

$$(8)\qquad \left(\frac{1}{|I|}\int_I |S^*(u)|^2\,du\right)^{1/2} = \left(\frac{1}{b-a}\int_a^b |\sigma^*(x)|^2\,dx\right)^{1/2} \le C(\theta)(\sum_o^\infty |r_k|^2)^{1/2}.$$

Si N existe, on appelle $x_o$ le centre de I et l'on pose

$= \sup \{ |S_o(x_o)|, \ldots, |S_N(x_o)\}$. On a alors

(9) $$\Big(\frac{1}{|I|}\int_I |S^*(x) - c_I|^2\, dx\Big)^{1/2} \le C(\theta)\Big(\sum_o^\infty |r_k|^2\Big)^{1/2}.$$

Pour démontrer (9), on se servira systématiquement de la remarque évidente suivante : si $u_n \ge 0$, $v_n \ge 0$ et $|u_n - v_n| \le 1$, alors $|\sup_{n\ge 0} u_n - \sup_{n\ge 0} v_n| \le 1$.

On pose $\alpha(x) = \sup\{ |S_o(x_o)|, \ldots, |S_N(x_o)|, |S_N(x_o) + R_{N+1}(x)|, \ldots$ $\ldots, |S_N(x_o) + R_{N+k}(x)|, \ldots\}$ avec $R_j(x) = \sum_j^\infty r_k f_k(n_k x)$.

Comme nous l'avons déjà observé, $|S_k(x) - S_k(x_o)| \le \omega_N = C|I| \sum_o^N n_j |r_j| \le C'(\sum_o^\infty |r_j|^2)^{1/2}$ si $k \le N$, $x \in I$, et $x_o \in I$. Grâce à notre remarque, il vient

(10) $$|\alpha(x) - S^*(x)| \le C(\sum_o^\infty |r_k|^2)^{1/2}.$$

On pose alors $\beta(x) = \sup\{|R_{N+1}(x)|, \ldots, |R_{N+k}(x)|, \ldots\}$ et l'on a $|\alpha(x) - c_I| \le \beta(x)$ car $c_I = \sup\{|S_o(x_o)|, \ldots, |S_N(x_o)|, |S_N(x_o)|, \ldots, |S_N(x_o)|, \ldots\}$. Finalement $|S^*(x) - c_I| \le \beta(x) + C(\sum_o^\infty |r_k|^2)^{1/2}$ et

(11) $$\Big(\frac{1}{|I|}\int_I |S^*(x) - c_I|^2 dx\Big)^{1/2} \le \Big(\frac{1}{|I|}\int_I |\beta(x)|^2\, dx\Big)^{1/2} + C\Big(\sum_o^\infty |r_k|^2\Big)^{1/2}.$$

Pour évaluer la première intégrale du second membre de (11), on fait le changement de variable $t = n_{N+1}x$ et l'on est encore ramené au lemme 3 avec $[a,b] = n_{N+1}I$ et $\sigma^*(t) = \sup_{t\ge 1} \Big|\sum_{N+1}^{N+k} r_j f_j\Big(\frac{n_j}{n_{N+1}} t\Big)\Big|$.

Ceci termine la preuve de (9).

Nous venons de prouver que $S^* \in BMO$.

Pour montrer que $S^* \in VMO$, il suffit de vérifier que $\frac{1}{|I|}\int_I |S^*(x) - \gamma_I|\, dx \longrightarrow 0$ quand $|I| \longrightarrow 0$ uniformément par rapport à la position de l'intervalle $I$.

Il suffit pour cela de reprendre la démonstration précédente en observant que $\omega_N \longrightarrow 0$ avec $|I|$ et que $\left(\frac{1}{|I|}\int_I |\beta(x)|^2 dx\right)^{1/2} \le C\left(\sum_{N+1}^{\infty} |r_k|^2\right)^{1/2} \longrightarrow 0$ avec $|I|$.

## 5. PREUVE DU THEORME 1.

Rappelons que $-1 < r_k < 1$, $|f_k(x)| \le 1$ et que $\sum_{o}^{\infty} r_k^2 < +\infty$. Alors la convergence du produit infini $\omega(x) = \prod_{o}^{\infty} (1 + r_k f_k(n_k x))$ est équivalente à celle de la série $S(x) = \sum_{o}^{\infty} r_k f_k(n_k x)$. De plus il existe une constante $C$ telle que $|\log \omega(x) - S(x)| \le C$. Par ailleurs la convergence presqu-partout de $S(x)$ résulte d'arguments classiques.

On pose $R_N^*(x) = \sup_{j \ge k \ge N} |S_j(x) - S_k(x)|$ et en appliquant le lemme 3 au cas où $r_o = r_1 = \dots = r_N = 0$, il vient $\|R_N^*\|_2 \le C(\theta)\left(\sum_{N+1}^{\infty} |r_k|^2\right)^{1/2}$. Puisque $R_1^* \ge R_2^* \ge \dots \ge R_N^* \ge \dots$ et que $\int_o^{2\pi} R_N^*(x)\,dx \longrightarrow 0$, on a $R_N^*(x) \longrightarrow 0$ presque partout. Par conséquent $S_N(x)$ converge presque-partout.

Pour terminer, il existe deux constantes $C_2 > C_1 > 0$ telles que $C_1 \exp S(x) \le \omega(x) \le C_2 \exp S(x)$. Les propriétés du produit de Riesz généralisé $\omega(x)$ découlent donc de celles de $\exp S(x)$ que l'on obtient immédiatement à l'aide de la caractérisation de John et Nirenberg de la classe BMO par la classe exponentielle.

## 6. PREUVE DU THEOREME.

Elle débute par le lemme suivant.

LEMME 5. <u>Il existe deux constantes</u> $\varepsilon > 0$ <u>et</u> $C > 0$ <u>telles que pour toute suite</u> $r_k \in \ell^2$ <u>vérifiant</u> $\left(\sum_{o}^{\infty} r_k^2\right)^{1/2} \le \varepsilon$ <u>on ait</u> $\frac{1}{2\pi}\int_o^{2\pi} P^*(x)\,dx \le C$.

Rappelons que $P^*(x) = \sup_{N\geq 0} P_N(x)$ est le "produit de Riesz maximal".

Pour démontrer le lemme 5, on part de la remarque que $P_N(x) \leq C \exp\{S_N(x)\}$ ce qui entraîne $P^*(x) \leq C \exp\{S^*(x)\}$. Or $\|S^*\|_{BMO} \leq C(\alpha,\theta)(\sum_0^\infty r_k^2)^{1/2}$.

Enfin le théorème de John et Nirenberg implique l'existence d'une constante $\delta > 0$ telles que si $\|S^*\|_{BMO} \leq \delta$, on ait $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \exp S^*(x)\,dx \leq C \exp\left\{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} S^*(x)\,dx\right\}$.

Puisque nous savons également que $\|S^*\|_2 \leq C(\alpha,\theta)(\sum_0^\infty r_k^2)^{1/2}$, on obtient, si $\varepsilon C(\alpha,\theta) \leq \delta$, la conclusion désirée.

Nous sommes maintenant en mesure de prouver le théorème 3.

Soit $I$ un intervalle de $[0,2\pi]$. Si $|I| > \frac{2\pi}{n_o}$, l'estimation est évidente car $P^*(x) \geq 1 - r_o > 0$ et $\frac{1}{|I|}\int_I P^*(x)\,dx < \frac{n_o}{2\pi}\int_0^{2\pi} P^*(x)\,dx \leq C$.

Supposons alors que $\frac{2\pi}{n_{N+1}} < |I| \leq \frac{2\pi}{n_N}$ et désignons par $x_o$ le centre de $I$.

On a alors le lemme suivant.

LEMME 6. __Il existe une constante__ $C > 0$ __telle que, pour tout__ $x \in I$ __on ait, quand__ $0 \leq j \leq N$, $P_j(x) \leq C\, P_j(x_o)$ __et aussi__ $P_j(x_o) \leq C\, P_j(x)$.

La constante $C$ ne dépend que des $r_k$ toujours supposés réels, appartenant à $]-1,1[$ et tels que $\sum_0^\infty r_k^2 < +\infty$.

La preuve du lemme 6 est très simple. On majore $|\log P_j(x) - \log P_j(x_o)|$ par $\sum_{k=0}^{j} |\log(1+r_k f_k(n_k x)) - \log(1+r_k f_k(n_k x))| \leq C \sum_0^j |r_k|\, n_k^\alpha\, |x-x_o|^\alpha \leq C'$.

Retournant à la preuve du théorème 3, on pose $\gamma_k(x) = (1 + r_{N+1} f_{N+1}(x_{N+1}x)) \ldots$ $\ldots(1+r_{N+k} f_{N+k}(n_{N+k}x))$ et l'on a $P^*(x) = \sup(P_1(x), \ldots, P_N(x), P_N(x)\gamma_1(x), \ldots$ $\ldots, P_N(x)\gamma_k(x), \ldots) \leq C \sup(P_1(x_o), \ldots, P_N(x_o), P_N(x_o)\gamma_1(x), \ldots, P_N(x_o)\gamma_k(x), \ldots$ $\ldots) \leq C \sup(a, b\,\gamma^*(x))$ où $\gamma^*(x) = \sup_{k\geq 1} \gamma_k(x)$. De même $P^*(x) \geq C' \sup(a, b\,\gamma^*(x))$ $\geq C'a$.

Tout sera terminé si nous montrons le lemme suivant.

LEMME 7. Il existe une constante $C$ telle que $\frac{1}{|I|}\int_I \gamma^*(x)\,dx \leq C$.

En effet on a $0 \leq b \leq a$ et donc $\sup(a, b\gamma^*(x)) \leq a + b\gamma^*(x) \leq a + a\gamma^*(x)$. Donc $\frac{1}{|I|}\int_I P^*(x)\,dx \leq Ca = C\sup(P_1(x_o), \ldots, P_N(x_o))$. Par ailleurs $P^*(x) \geq C'a$ sur l'intervalle $I$. Donc $P^* \in A_1$.

La preuve du lemme 7 s'obtient grâce au changement de variable $t = n_{N+1}x$ comme celle du lemme 3.

## 7. REMARQUES.

Posons $f_k(x) = \cos x + \cos 3x$ et $r_k = \alpha_j$ si $k = 3j$, $r_k = \alpha_j$ si $k = 3j+1$ et $r_k = 0$ sinon ; $\alpha_j$ étant une suite réelle donnée dans $\left]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right[$.

La condition $\Sigma\, \alpha_j^2 < +\infty$, c'est-à-dire $\Sigma\, r_k^2 < +\infty$, est alors nécessaire à l'existence du produit de Riesz en tant que mesure.

Cependant en remplaçant $n_k = 3^k$ par $n_k = k!$, on peut montrer que, pour toute fonction indéfiniment dérivable et $2\pi$-périodique $g(x)$ vérifiant $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g(x)\,dx = 1$ et $g > 0$, le produit de Riesz $\prod_0^\infty g(k!\,x)$ définit une mesure de probabilité.

On peut se demander si le fait que $\prod_0^\infty (1 + r_k f_k(n_k x))$ appartienne à $L^1[0,2\pi]$ ne peut pas se démontrer en calculant le coefficient de Fourier d'indice $0$ de ce produit infini. Il y a deux obstacles.

(a) la condition $f_k \in \Lambda_\alpha$ n'entraîne aucune condition sur les modules des coefficients de Fourier qui soit meilleure que $\sum_{-\infty}^{+\infty} |j|^{2\alpha} |\hat{f}_k(j)|^2 < +\infty$. Or cette dernière condition équivaut à $f_k \in H^{(\alpha)}$ (l'espace de Sobolev d'indice $\alpha$). Si $0 \leq \alpha \leq 1/2$, $H^{(\alpha)}$ n'est pas une algèbre. Plus précisément un produit de $N$ fonctions de $H^{(\alpha)}$ n'appartient pas à $L^1[0,2\pi]$ quand $N$ est assez grand (et quand les fonctions en question sont judicieusement choisies).

(b) si, au lieu de supposer $f_k \in \Lambda_\alpha$, on fait l'hypothèse simplificatrice $|\hat{f}_k(j)| \leq j^{-2}$ pour $j \neq 0$, il est possible mais pénible de majorer le coefficient de Fourier d'indice $0$ du produit de Riesz.

La méthode "de variable réelle" l'emporte donc, dans ce problème sur la méthode de transformée de Fourier.


[1] COIFMAN, R. and FEFFERMAN, C. Weighted norm inequalities for maximal functions and singular integrals. Studia Math. (1974), 241-250.

[2] JOHN, F. and NIRENBERG, L. On functions of bounded mean oscillation. Comm. Pure Appl. Math. 14 (1961), 415-426.

[3] KEANE, M. Strongly mixing g-measures. Inventiones math. 16, 309-324 (1972).

[4] ZYGMUND, A. Trigonometric series (2nd ed.). 2 vol.. Cambridge (1959).

# LE THEOREME DE CALDERON PAR LES "METHODES DE VARIABLE REELLE"

Ronald Coifman et Yves Meyer

Dans la première partie nous démontrons une version "variable réelle" du théorème de Calderón sur l'intégrale de Cauchy. Dans la seconde partie nous prouvons le théorème de représentation conforme avec "estimations BMO" et l'équivalence entre les deux versions du théorème de Calderón en découle aisément.

Calderón's theorem by real variable methods.

In the first part we obtain a real variable version of A. P. Calderón's theorem for the Cauchy integral.

In the second part a real variable proof (with BMO estimates) of the Riemann mapping theorem is given. The equivalence between the two formulations of Calderón's theorem follows easily.

## 1. L'espace BMO et le groupe $\mathcal{G}$.

Une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, localement intégrable, appartient à BMO si $\|f\|_{BMO} = \sup_I \frac{1}{|I|} \int_I |f(x) - m_I f|\, dx < +\infty$ [4]. L'espace BMO est en fait formé des classes des fonctions précédentes modulo les fonctions constantes.

Le groupe $\mathcal{G}$ est l'ensemble des homéomorphismes croissants $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ préservant BMO ; c'est-à-dire tels que, pour tout $f \in BMO$, $V_h(f) = f \circ h$ appartienne à BMO.

Pour tout $h \in \mathcal{G}$, $\log h'(x) \in BMO$ (la dérivée est prise au sens des distributions). Réciproquement il existe deux constantes $\gamma > 0$ et $C > 0$ telles que, pour toute fonction $b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vérifiant $\|b\|_{BMO} \le \gamma$ et tout $x_0 \in \mathbb{R}$, $h(x) = \int_{x_0}^{x} \exp b(u)\, du$ appartienne à $\mathcal{G}$ et que les normes des opérateurs $V_h$ et $V_h^{-1} : BMO \longrightarrow BMO$ ne dépassent pas $C$.

Il en résulte que si $h_1 \in \mathcal{G}$, $h_2 \in \mathcal{G}$, $h_3 = h_1 h_2^{-1}$ et si $\|\log h_2'\|_{BMO} \le \gamma$, on a

$$(1) \qquad \|\log h_3'\|_{BMO} \le C \|\log h_1' - \log h_2'\|_{BMO}.$$

2. La version hilbertienne du théorème de Calderón.

A tout homéomorphisme $h \in \mathcal{G}$ on associe l'opérateur unitaire $U_h : L^2(\mathbb{R}) \longrightarrow L^2(\mathbb{R})$ défini par $U_h(f) = (f \circ h)\sqrt{h'}$ ; pour toute partie $E \subset L^2(\mathbb{R})$, $U_h(E)$ est l'image de $E$ par $U_h$.

Le sous-espace de Hardy $H^2$ est l'ensemble des fonctions $f \in L^2(\mathbb{R})$ dont la transformée de Fourier est nulle presque partout sur $]-\infty, 0]$ et $L^2(\mathbb{R})$ est la somme orthogonale directe de $H^2$ et de $\overline{H}^2$ ($\overline{H}^2$ est l'espace des fonctions $\bar{f}$ telles que $f \in H^2$).

Si $\alpha \in A$ (groupe des transformations affines $ax + b$, $a > 0$, $b \in \mathbb{R}$), on a $U_\alpha(H^2) = H^2$. Il en résulte que si $h_1 \in \mathcal{G}$, $\alpha \in A$ et $h_2 = \alpha\ h_1$, on a $U_{h_2}(H^2) = U_{h_1}(H^2)$ ; en d'autres termes, $U_h(H^2)$ ne dépend que de la classe dans BMO de $\log h'$.

THEOREME 1. Il existe une constante $\gamma > 0$ telle que, pour tout $h \in \mathcal{G}$ vérifiant $\|\log h'\|_{BMO} \leq \gamma$, $L^2(\mathbb{R})$ soit la somme directe des sous-espaces $U_h(H^2)$ et $\overline{H}^2$.

COROLLAIRE. Il existe une (autre) constante $\gamma > 0$ telle que pour tout $h_1 \in \mathcal{G}$ et tout $h_2 \in \mathcal{G}$ vérifiant $\|\log h'_j\|_{BMO} \leq \gamma$, $j = 1$ et $2$, l'espace $L^2(\mathbb{R})$ soit la somme directe de $U_{h_1}(H^2)$ et de $U_{h_2}(\overline{H}^2)$.

Pour le voir on applique le théorème 1 à $h = h_1 h_2^{-1}$ et l'on utilise (1).

3. Preuve du théorème 1.

Soient $E_1$ et $E_2$ deux sous-espaces vectoriels fermés d'un espace de Hilbert $H$ et soient $P_1$ et $P_2$ les projecteurs orthogonaux sur $E_1$ et $E_2$. Si $\|P_1 - P_2\| < 1$, nous dirons que $E_1$ et $E_2$ sont voisins ; alors $H$ est la somme directe de $E_2$ et de l'orthogonal de $E_1$.

Ici, comme dans ce qui suit, $\|T\|$ désigne la norme d'un opérateur $T : L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})$.

Pour démontrer le théorème 1, il suffit de vérifier que $H^2$ et $U_h(H^2)$ sont voisins dès que $\|\log h'\|_{BMO} \leq \gamma$. Désignons par $\mathcal{H} : L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})$ la transformation de Hilbert. Le projecteur orthogonal de $L^2$ sur $H^2$ est $\frac{1}{2}(I + i\mathcal{H})$ et celui de $L^2$ sur $U_h H^2$ est donc $\frac{1}{2} U_h(I + i\mathcal{H})U_h^{-1}$.

Dès lors le théorème 1 résulte de la proposition suivante.

PROPOSITION 1. <u>Il existe une constante</u> $C > 0$ <u>telle que, pour tout</u> $h \in \mathcal{G}$, <u>on ait</u>

(2) $$\|\mathcal{H} - U_h \mathcal{H} U_h^{-1}\| \leq C \|\log h'\|_{BMO}.$$

Naturellement le membre de gauche de (2) ne dépasse pas 2 et (2) n'a d'intérêt que si $\|\log h'\|_{BMO}$ est assez petit (ce que nous supposerons dans la démonstration).

On se limite au cas où $\|\log h'\|_{BMO} \leq \gamma$ ($\gamma$ est le même qu'au § 1) et l'on définit, si $0 \leq t \leq 1$, $h_t(x) = h(0) + \int_0^x (h'(u))^t\, du$. Alors $h_t \in \mathcal{G}$ et, en posant $b_t(x) = \log h' \circ h_t^{-1}$ et $B_t(x) = \int_0^x b_t(u)\, du$, on a $\frac{\partial}{\partial t} h_t = B_t \circ h_t$ et $\|b_t\|_{BMO} \leq C \|\log h'\|_{BMO}$.

On écrit, pour alléger, $U_t = U_{h_t}$ et un calcul facile donne $\frac{\partial}{\partial t} U_t \mathcal{H} U_t^{-1} = U_t \left[B_t(x) \frac{d}{dx}, \mathcal{H}\right] U_t^{-1} + \frac{1}{2}\left[b_t, \mathcal{H}\right] U_t^{-1}$ ; ceci en notant $[S, T]$ le commutateur entre deux opérateurs $S$ et $T$ et, par abus de langage, $b_t$ l'opérateur (non borné sur $L^2(\mathbb{R})$) de multiplication par la fonction $b_t(x) : (b_t f)(x) = b_t(x) f(x)$.

On aura $\left\|\frac{\partial}{\partial t} U_t \mathcal{H} U_t^{-1}\right\| \leq C$ et donc (2) par intégration comme conséquence des deux lemmes suivants [5], [1] et [3].

LEMME 1. <u>Pour toute fonction</u> $b \in BMO$, <u>le commutateur</u> $[b, \mathcal{H}]$ <u>est</u>

borné sur $L^2(\mathbb{R})$.

LEMME 2. Pour toute fonction $b \in BMO$ et toute primitive $B$ de $b$, le commutateur $\left[B(x)\frac{d}{dx}, \mathcal{H}\right]$ entre le champ de vecteurs $B(x)\frac{d}{dx}$ et la transformation de Hilbert est borné sur $L^2(\mathbb{R})$ et sur BMO.

Si $b \in L^\infty(\mathbb{R})$, le lemme 2 est prouvé dans [1] ou [3]. L'extension au cas général s'obtient par les "méthodes de variable réelle" [4].

Rappelons que si $h \in \mathcal{G}$, $V_h : BMO \longrightarrow BMO$ est défini par $V_h(f) = f \circ h$. Si $T : BMO \to BMO$ est un opérateur linéaire et continu, sa norme sera notée $\|T\|_*$. Avec ces notations on a

PROPOSITION 2. Il existe deux constantes $\gamma > 0$ et $C$ telles que, pour tout $h \in \mathcal{G}$, on ait, si $\|\log h'\|_{BMO} \leq \gamma$,

$$\|\mathcal{H} - V_h \mathcal{H} V_h^{-1}\|_* \leq C \|\log h'\|_{BMO} . \tag{3}$$

La preuve est semblable à celle de la proposition 1.

## 4. Les courbes et la représentation conforme.

Dans toute la suite $\Gamma$ sera une courbe rectifiable et orientée du plan complexe, définie par une représentation paramétrique $s \to z(s)$ où $s \in \mathbb{R}$ est la longueur d'arc et où $z : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ est injective et propre $(\lim_{s \to \pm\infty} |z(s)| = +\infty)$.

Alors $\Gamma$ partage le plan complexe en deux ouverts notés $\Omega_1$ et $\Omega_2$.

Soit $\eta$ une constante positive. Nous dirons que $\Gamma$ vérifie la condition "corde-arc de type $\eta$" si, pour tout couple $s_1$, $s_2$ de deux nombres réels, on a

$$|s_2 - s_1| \leq (1 + \eta) |z(s_2) - z(s_1)| . \tag{4}$$

Alors il existe une fonction $b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que

$$\frac{dz}{ds} = \exp ib(s) \quad \text{et} \quad \|b\|_{BMO} \leq C \sqrt{\eta} \tag{5}$$

où $C$ est une constante.

Nous dirons que $\zeta(x)$, $-\infty < x < +\infty$, est une représentation paramétrique admissible d'une courbe $\Gamma$ vérifiant (4) s'il existe un élément $h \in \mathcal{G}$ tel que $z(s) = \zeta(h(s))$ pour tout $s \in \mathbf{R}$.

Alors $\log \zeta'(x) = ib \circ h^{-1}(x) - \log h' \circ h^{-1}(x)$ appartient à BMO ; la fonction $b(s)$ étant définie par (5).

Suivant Pommerenke [6], désignons par BMOA l'espace des traces sur $y = 0$ des fonctions $F(x + iy)$, analytiques dans le demi-plan supérieur $P_1$ et telles que $\sup_{y>0} \|F(x + iy)\|_{BMO(dx)} < +\infty$.

PROPOSITION 3 (Lavrent'ev [6]). Il existe une constante $\gamma > 0$ telle que si $\eta \leq \gamma$ et si $\Gamma$ vérifie (4), la représentation conforme $\Phi$ du demi-plan supérieur $P_1$ sur $\Omega_1$, correctement normalisée, se prolonge en un homéomorphisme $\Phi : \overline{P}_1 \to \overline{\Omega}_1$. De plus $\Phi(x)$, $-\infty < x < +\infty$, est une représentation paramétrique admissible de $\Gamma$ et $\|\log \Phi'\|_{BMOA} \leq C\sqrt{\eta}$.

La démonstration qui suit donne, du même coup, l'existence de la représentation conforme et l'estimation désirée. Elle n'utilise que des méthodes de variable réelle et repose sur les remarques suivantes.

(A) Il existe $\gamma > 0$ tel que si $\Psi \in$ BMOA, $\|\Psi\|_{BMOA} \leq \gamma$ et si $\Phi : P_1 \to \mathbf{C}$ est défini par $\Phi'(z) = \exp \Psi(z)$, alors $\Phi : P_1 \to \Phi(P_1)$ est conforme.

(B) Si $\Psi(x) = u(x) + iv(x) \in$ BMOA, alors $v(x)$ est la transformée de Hilbert de $u(x)$.

Nous cherchons $h \in \mathcal{G}$ tel que, $b$ étant défini par (5), $ib \circ h^{-1} - \log h' \circ h^{-1}$ appartienne à BMOA avec une norme $\leq \gamma$. Revenant à la variable $s$, (B) donne

(6) $$\log h' = (V_h \mathcal{H} V_h^{-1})\, b.$$

En posant $\log h' = \beta$, on observe, grâce à (3), que l'application qui associe à $\beta$ le second membre de (6) est contractante de rapport $C\|b\|_{BMO}$ dans la boule $\|\beta\|_{BMO} \leq \gamma$. Le théorème du point fixe s'applique dans l'espace BMO dès que $\eta > 0$ est assez petit et l'on a

$$\|\log h'\|_{BMO} \leq C'\|b\|_{BMO} \leq C'' \sqrt{\eta}. \tag{7}$$

Notons désormais $\Phi_1 : P_1 \to \Omega_1$ cette représentation conforme ; appelons $P_2$ le demi-plan inférieur et $\Phi_2 : P_2 \to \Omega_2$ la représentation conforme correspondante. Désignons par $h_1$ et $h_2$ les éléments du groupe $\mathcal{G}$ associés à $\Phi_1$ et $\Phi_2$.

Par transfert de structure hilbertienne, les espaces de Hardy généralisés $H^2(\Omega_j)$, $j = 1$ ou $2$, sont définis comme les espaces des fonctions $F : \Omega_j \to \mathbb{C}$, holomorphes et telles que $(F \circ \Phi_j)\sqrt{\Phi_j'}$ appartienne à l'espace de Hardy usuel $H^2(P_j)$.

Désignons par $L^2(\Gamma)$ l'espace $L^2(ds)$. Les opérateurs de trace $\theta_j$ : $H^2(\Omega_j) \to L^2(\Gamma)$ sont alors des injections isométriques dont les images seront notées $H^2(\Omega_j)|_\Gamma$. En désignant par $M$ l'opérateur unitaire de multiplication par $\exp(-i \frac{b(s)}{2})$, il vient

$$H^2(\Omega_1)|_\Gamma = M\, U_{h_1} H^2 \quad \text{et} \quad H^2(\Omega_2)|_\Gamma = M U_{h_2} \bar{H}^2. \tag{8}$$

## 5. Le théorème de Calderón pour les courbes vérifiant (4).

Avec les notations précédentes, on a

THEOREME 2. Il existe une constante $\gamma > 0$ telle que, pour toute courbe $\Gamma$ du plan complexe vérifiant la condition corde-arc de type $\eta \leq \gamma$, l'espace $L^2(\Gamma)$ soit la somme directe des sous-espaces $H^2(\Omega_1)|_\Gamma$ et $H^2(\Omega_2)|_\Gamma$.

Puisque $M$ est unitaire, le théorème 2 résulte immédiatement du corollaire du théorème 1, de (7) et de (8).

Une conséquence simple du théorème 2 est que l'opérateur $U_h \mathcal{H} U_h^{-1}$ est.

en fait, une fonction analytique de $\beta(x) = \log h'(x)$, dans une boule $\|\beta\|_{BMO} < \gamma$, à valeurs dans $\mathcal{L}(L^2(\mathbb{R}), L^2(\mathbb{R}))$.

Pour être plus précis, on a

THEOREME 3. <u>Il existe deux constantes</u> $\gamma > 0$, $C > 0$ <u>et une suite d'opérateurs multiplinéaires</u> $T_k : (BMO)^k \times L^2 \longrightarrow L^2$ <u>telles que</u> $T_o = \mathcal{H}$, $\|T_k(b, b, \ldots, b, f)\|_2 \leq C^k \|b\|_{BMO}^k \|f\|_2$ <u>(si</u> $b \in BMO$ <u>et</u> $f \in L^2$) <u>et que</u>

(9) $$U_h \mathcal{H} U_h^{-1} = \sum_{o}^{\infty} T_k(\beta, \beta, \ldots, \beta, f)$$

<u>si</u> $h \in \mathcal{G}$, $\beta = \log h'$ <u>et</u> $\|\beta\|_{BMO} < \gamma$.

[1] CALDERÓN, A. P. Commutators of singular integral operators. Proc. Nat. Acad. Sc. USA 53 (1965), 1092-1099.

[2] ________________ Cauchy integrals on Lipschitz curves and related operators. Proc. Nat. Acad. Sc. USA 74 (1977), 1324-1327.

[3] COIFMAN, R. R. and MEYER, Y. Commutators of singular integrals. Coll. Math. Soc. Janos Bolyai, Fourier analysis and approximation theory, Budapest 1976.

[4] ________________________ Au-delà des opérateurs pseudo-différentiels. Astérisque 57, SMF 1978.

[5] COIFMAN, R. R., ROCHBERG, R. and WEISS, G. Factorization theorems for Hardy spaces ir several variables. Ann. Math. 103 (1976), 611-635.

[6] POMMERENKE, C. Schlichte Funktionen und BMOA. Comm. Math. Helv. 52 (1977), 591-602.

R. R. Coifman
Department of Mathematics
Washington University
ST. LOUIS, Missouri 63130 (USA)

Y. Meyer

# A theorem of J.-F. Fournier on Littlewood's conjecture

S. K. Pichorides
September 1978

1. Let $f(x) = \exp(i\eta_1 x) + \ldots + \exp(i\eta_N x)$, $0 < \eta_1 < \eta_2 < \ldots < \eta_N$ distinct integers. It has been proved recently (see [2]) that

(1) $$\|f\|_1 \geq C(\log N)^{1/2}.$$

A different proof of the same result, obtained a few months ago by J. F. Fournier proved (1) as a corollary of the following

THEOREM 1. _If_ $E$ _is a set of non negative integers then there is a maximal strictly increasing sequence_ $\{h_\varkappa\}$ _of elements of_ $E$ _such that for each_ $\varkappa$ _there are fewer than_ $4^\varkappa$ _elements of_ $E$ _less than_ $h_\varkappa$, _and such that_

(2) $$\left\{\Sigma\, |\hat{f}(h_\varkappa)|^2\right\}^{1/2} \leq \sqrt{8}\, \|f\|_1$$

_for every integrable_ $f$ _with_ $\hat{f}(n) = 0$ _if_ $n \notin E$.

This result is stronger than (1) :

(i) It implies (1) in the more general case of $f(x) = c_1 \exp(i\eta_1 x) + \ldots + c_N \exp(i\eta_N x)$, $|c_\varkappa| \geq 1$, $\varkappa = 1, \ldots, N$. It has been shown that this more general case can also be obtained by the method used in [1]

(ii) The method used by Fournier shows that (2) is valid if we replace $f$ by $f+g$, provided that $\hat{g}(n) = 0$ for all $n \leq n_N$. An analogous property was shared by an older method introduced by P. Cohen. This property has been used by Kahane in relation to problems of characterizing sequences $c_n \longrightarrow 0$, $|n| \longrightarrow \infty$, which are the Fourier transforms of periodic integrable functions.

(iii) Perhaps the most important feature of Fournier's result is that it asserts the existence of a subsequence $\eta_{t_\varkappa}$ of $\{\eta_1, \ldots \eta_N\}$ such that the sequence of indices $t_\varkappa$ grows more slowly than the geometric progression $4^\varkappa$ and such that (2) is valid. This reminds a classical theorem of Paley on $H^1$ functions. Fournier examines the relation of his method to Paley's theorem as well to Grothendieck's inequality and some more recent results of Gundy and Varopoulos.

(1) with the exponent $\frac{1}{2}$ replaced by $1$ is known as Littlewood's conjecture. More on the history of that problem can be found in [1].

In this talk we shall present Fournier's proof with some slight modifications. The proof follows essentially the same pattern as the older one introduced by P. Cohen but complelety new ideas (especially in the second part of the proof) are needed. It is interesting to observe that the proof is completed by the use of a simple Riesz type product in several variables, while the usual Riesz products appear to be unsufficient for this purpose.

2. Outline of the proof. It is immediate that theorem 1 implies (2). In order to prove theorem 1 we need first a definition.

Given a sequence $\{h_\varkappa\}$, $\varkappa = 1, 2, \ldots$ of positive integers we let $S(h)$ be the set of integers of the form $\Sigma\, \alpha_\varkappa h_\varkappa$ where $\alpha_\lambda$ is a finite sequence $\alpha_0, \alpha_1, \ldots \alpha_\varkappa$ such that

(i) $\Sigma\, \alpha_\varkappa = 1$

(ii) If $\varkappa_1$ is the smallest index such that $\alpha_{\varkappa_1} \neq 0$ and $\varkappa > \varkappa_1$ then $\sum_{r=0}^{\varkappa} a_r \geq 1$

(iii) $\Sigma\, |\alpha_r| \geq 3$

(iv) $\alpha_r \in \{-1, 0, 1\}$ for all $r$.

A "multiindex" $\{\alpha\}$ satisfying (i) - (iv) will be called "supplementary".

The proof is divided into two steps.

STEP I. Given $E$ as in theorem 1 we construct a sequence $\{h_\varkappa\} \subset E$ s. t. $S(h) \cap E = \emptyset$, and such that for each $\varkappa$ there are fewer than $4^\varkappa$ elements of $E$ which are $\leq h_\varkappa$.

STEP II. Given $h_0, h_1, \ldots$ such that $h_\varkappa \notin S(h)$ for all $\varkappa$ and any sequence $u_0, u_1, \ldots$ of complex numbers we construct a polynomial

$$g(x) = \Sigma\, u_r \exp(ih_r x) + \sum_{r \in S(h)} u_r \exp(irx)$$

such that $\|g\|_\infty \leq \sqrt{8}\,(\Sigma\, |u_r|^2)^{1/2}$.

Suppose for the moment that these two steps have been carried out. If

$$f(x) = \sum_{n \in E} \hat{f}(\eta) \exp(i\eta x)$$

we construct $h_0, h_1, \ldots$ as in step I and we find $g$ as in step II with $u_r = \hat{f}(h_r)$. We shall have

$$\int f(x)\,\bar{g}(x)\,dx = \Sigma\ |\hat{f}\,(h_\varkappa)|^2 \le \|f\|_1 (\Sigma\ |\hat{f}(h_\varkappa)|^2)^{1/2}$$

which is equivalent to (2).

3. STEP I. Let us write $P(b)$ for the number of elements in $E \le b$. We take $h_o < h_1$ to be the two smallest elements of $E$ and assume that $h_o < h_1 < \ldots < h_{\varkappa-1}$, $\varkappa > 3$ have been constructed so that

($\alpha$) $h_i \in E$ and $P(h_i) \le 4^i$, $0 \le i \le \varkappa-1$ and

($\beta$) for every supplementary multiindex $\alpha_o, \ldots, \alpha_{\varkappa-1}$, $\sum_{o}^{\varkappa-1} h_r \alpha_r \notin E$.

We shall show that if $E$ has more than $4^\varkappa$ elements then we can choose $h_\varkappa$ in $E$ so that ($\alpha$) and ($\beta$) hold with $\varkappa-1$ replaced by $\varkappa$.

The ineligible choices for $h_\varkappa$ are those elements $h_\varkappa$ of $E$ which are greater than $h_{\varkappa-1}$ and such that $\sum_{r=0}^{\varkappa} \alpha_r h_r \in E$. We divide them into classes according to the index $r$ at which $\alpha$ begins (i. e. the smallest $r$ for which $\alpha_r \ne 0$).

If $\alpha$ begins at $r$ then

$$\sum_{t=0}^{\varkappa} \alpha_t h_t = \alpha_r h_r + \alpha_{r+1}(h_{r+1}-h_{r+2}) + \ldots + (\alpha_{r+1}+\ldots+a_{\varkappa-1})(h_{\varkappa-1} - h_\varkappa) +$$

$$(\alpha_{r+1} + \ldots + \alpha_\varkappa)\, h_\varkappa .$$

Since $\alpha$ is by hypothesis a supplementary multiindex $\alpha_r = 1$, $\alpha_{r+1} \ge 0$, $\alpha_{r+1} + \alpha_{r+2} \ge 0$, $\alpha_{r+1} + \ldots + \alpha_{\varkappa-1} \ge 0$, $\alpha_{r+1} + \ldots + \alpha_\varkappa = 0$. Thus

$$\sum_{t=0}^{\varkappa} \alpha_t h_t \le h_r .$$

On observing that there are not more than $3^{\varkappa-r-2}$ supplementary multiindices beginning at $r$ and ending at $\varkappa$ (note that $\alpha_r = 1$ $\alpha_\varkappa = -1$ and the condition $\alpha_r + \ldots + \alpha_\varkappa = 1$ specifies one more of the $\alpha_i$'s) we have at most

$$\sum_{r=0}^{\varkappa-2} 4^r . 3^{\varkappa-r-2} = 3^{\varkappa-2} \sum_{r=0}^{\varkappa-2} (\tfrac{4}{3})^r \le 4^{\varkappa-1}$$

ineligible choices for $h_\varkappa$. Moreover $4^{\varkappa-1} + 4^{\varkappa-1} < 4^\varkappa$ and hence there is an eligible choice for $h_\varkappa$.

4. STEP II. We shall write $w = \left\{w_n\right\}_{n=1}^N$ for an element of $T^N$ and $\beta = \left\{\beta_n\right\}_{n=1}^N$ for an element of $Z^N$. $w^\beta$ will mean $w_1^{\beta_1} \ldots w_n^{\beta_n}$, $\beta \ge 0, \ldots$ $\beta_n \ge 0$ and

(3) $$f(w) = \sum_\beta \hat{f}(\beta)\, w^\beta$$

is of power series type if $\hat{f}(\beta) = 0$ unless $\beta \ge 0$. The sum $\sum_{\beta \le (1,1,\ldots,1)} \hat{f}(\beta)\, w^\beta$ is called the initial segment of $f$.

Given a sequence of complex numbers $c_o, \ldots c_w$ and writing

$$P_N(w) = c_N + c_{N-1} w_N + c_{N-2}\, w_N w_{N-1} + \ldots + c_o w_N \ldots w_1$$

we shall call a function $f_N(w)$ a <u>good extension</u> of $P_N$ if $f_N$ is analytic on $T^N$ its power series has initial segment $P_N$ the coefficients $\hat{f}_N(\beta)$ vanish unless $\beta$ is of tail type i. e. if $\beta = (\beta_1, \ldots \beta_N)$ and $\beta_\varkappa \neq 0$ then $\beta_{\varkappa+1}, \ldots, \beta_N$ are also $\neq 0$ ($P_N$ itself for instance has this last property) and $\|f_N\|_\infty < 1$.

LEMMA 1. <u>If</u> $\|c\|_2 < 1/\sqrt{2}$ <u>then</u> $P_N$ <u>has a good extension.</u>

For the proof we shall use a technique known as Schur's algorithm.

Proof. If $N = 1$, $P_1(w) = c_1 + c_o w_1$ and

$$|P_1(w_1)| \le (|c_1|^2 + |c_o|^2)^{1/2}(1 + |w_1|^2)^{1/2} = \sqrt{2}\|c\|_2$$

so it suffices to take $f_1(w) = p_1(w)$.

Suppose now that the lemma is true for $N-1$ and let $f_{N-1}(w_1, \dots w_{N-1})$ be a good extension of $c_{N-1} + c_{N-2}\, w_{N-1} + \dots + c_o w_{N-1} \dots w_1$.

By the induction hypothesis

$$\left|\frac{1}{1-|c_N|^2} f_{N-1}\right| \le \frac{1}{1-|c_N|^2}\sqrt{2}\left\{|c_o|^2 + \dots + |c_N|^2 - |c_N|^2\right\}^{1/2}$$

$$\le \frac{1}{1-|c_N|^2}\sqrt{2}\left(\tfrac{1}{2} - |c_N|^2\right)^{1/2} \le 1.$$

We write now

$$f_N(w_1, \dots w_N) = \frac{\dfrac{1}{1-|c_N|^2}\, w_N\, f_{N-1} + c_N}{1 + \bar{c}_N \dfrac{1}{1-|c_N|^2}\, w_N f_{N-1}} .$$

Using the inequalities $|c_N| < 1$ and $|\ _{N-1}/(1-|c_N|^2)| < 1$ it is very easy to see that $|f_N(w)| < 1$.

Moreover expanding $f_N$ into a power series we have

$$f_N(w) = \left(\frac{1}{1-|c_N|^2}\, w_N\, f_{N-1} + c_N\right)\left(1 - \bar{c}_N \frac{1}{1-|c_N|^2}\, w_N\, f_{N-1} + \dots\right)$$

$$= (w_N\, f_{N-1} + c_N) + \left\{\text{terms in } (w_N f_{N-1})^{\varkappa},\ \varkappa > 1\right\}$$

$$= P_N(w) + \left\{\text{terms in } (w_N\, f_{N-1})^{\varkappa},\ \varkappa > 1\right\}.$$

It is now obvious that the initial segment of $f_N$ is $p_N(w)$ and a trivial induction shows that $f_N$ has the tail structure.

We use now lemma 1 to prove.

LEMMA 2. For each sequence $c = \{c_n\}_{n=0}^{N}$ of complex number there is a trigonometric polynomial $P$ on $T^{N+1}$ of the form

$$P(z) = \sum_{n=0}^{N} c_n z_n + \sum_{\alpha \in S} \hat{P}(\alpha)\ z^{\alpha}$$

with the property $\|P\|_{\infty} = \sqrt{8}\,\|c\|_2$.

Proof. We write

$$w_1 = \frac{z_o}{z_1}, \quad w_2 = \frac{z_1}{z_2}, \quad \ldots, \quad w_N = \frac{z_{N-1}}{z_N}$$

and consider the polynomial $2(c_N + c_{N-1}w_N + \ldots + c_o w_N \ldots w_1)$. Applying lemma 1 we get a good extension $f_N(w_1, \ldots w_N)$ such that

$$z_N f_N(w_1, \ldots, w_N) = P(z) = 2(c_N z_N + c_{N-1} z_{N-1} + \ldots + c_o z_o) +$$

$$z_N \left\{\text{terms in } (w_N f_{N-1})^{\varkappa}, \quad \varkappa > 1\right\}$$

and $|z_N f_N| < 1$ if $\|c\|_2 = \frac{1}{2\sqrt{2}}$. Thus it would remain to show that in the expression $A = z_N\left\{\text{terms in } (w_N f_{N-1})^{\varkappa}, \ \varkappa > 1\right\}$ there are only frequencies belonging to $S$, i. e. being supplementary multiindices. This is not true but we do have most of the required properties. More precisely if we write $A$ in the form of a series of powers of $z = (z_o, z_1, \ldots z_N)$ we shall obtain termsof the form (modulo a multiplicative constant)

$$z_N \left\{\left(\frac{z_o}{z_1}\right)^{\beta_1} \cdots \left(\frac{z_{N-1}}{z_N}\right)^{\beta_N}\right\}$$

where $\beta_o, \ldots \beta_N$ form a tail type sequence and $\beta_i \geq 0$, $i = 1, \ldots N-1$, $\beta_N \geq 2$. If $\beta_r$ is the first non vanishing term in $\{\beta_1, \ldots \beta_N\}$ the above term will be of the form

$$z_r^{\beta_{r+1}} \cdot z_{r+1}^{\beta_{r+2}-\beta_{r+1}} \cdots\cdots z_{N-1}^{\beta_N-\beta_{N-1}} \cdot z_N^{1-\beta_N}.$$

Since $\beta_i \geq 0$ and $\beta_N \geq 2$ it is very easy to show that the sequence $\{\alpha_o = \beta_i, \ldots \alpha_r = \beta_{r+1}-\beta_r, \ldots \alpha_N = 1-\beta_N\}$ satisfies the condition (i), (ii) and (iii) of the definition of a supplementary multiindex.

In order to satisfy the last condition and obtain a polynomial with initial part $c_N z_N + \ldots + c_o z_o$ we consider the Riesz product $\prod_{n=0}^{N} \left(1 + \frac{z_n + z_n^{-1}}{2}\right) = R(z)$ and we set

$$q(z) = (P * R)(z).$$

It is now trivial to see that all the requirements for the desired extensions are fulfilled.

The case $\|c\|_2 \neq \frac{1}{2\sqrt{2}}$ is treated easily by linearity.

In order to finish step II we have only to consider the trigonometric polynomial

$$g(\theta) = q(\exp(ih_o\theta), \ldots, \exp(ih_N\theta))$$

where $q$ is the polynomial in $z_o, \ldots, z_N$ constructed above.

## References

[1] FOURNIER, J. F. On a theorem of Paley and the Littlewood conjecture. To appear.

[2] PICHORIDES, S. K. On a conjecture of Littlewood concerning exponential sums. To appear in the Bull. Greek Math. Society.

UNIVERSITÉ DE PARIS-SUD

ÉQUIPE DE RECHERCHE ASSOCIÉE AU CNRS (296)
ANALYSE HARMONIQUE
MATHÉMATIQUE (Bât. 425)
91405 ORSAY CEDEX

No. d'impression 393
4ème trimestre 1979