PUBLICATIONS MATHEMATIQUES D'ORSAY

96-01

Recueil d'articles réunis à l'occasion du
Colloque tenu à Anogia (Crète, 24 - 28 juillet 1995)
en l'honneur de
STYLIANOS PICHORIDES

HARMONIC ANALYSIS FROM THE PICHORIDES VIEWPOINT

Université de Paris-Sud
Mathématiques - Bâtiment 425
91405 ORSAY Cedex (France)

PUBLICATIONS MATHEMATIQUES D'ORSAY
96-01

Recueil d'articles réunis à l'occasion du Colloque tenu à Anogia (Crète, 24 - 28 juillet 1995) en l'honneur de STYLIANOS PICHORIDES

HARMONIC ANALYSIS FROM THE PICHORIDES VIEWPOINT

Université de Paris-Sud
Mathématiques - Bâtiment 425
91405 ORSAY Cedex (France)

Du 24 au 28 juillet 1995 s'est tenu à Anogia, au centre de la Crète, un colloque en l'honneur de Stylianos Pichorides, sous le titre : *Harmonic analysis from the Pichorides viewpoint*. Ce colloque a été une parfaite réussite. Il se prolongera peut-être par une édition des œuvres de Pichorides, mais il n'est pas prévu d'Actes du colloque.

Pichorides avait de fortes attaches à Orsay comme en Crète. Le colloque d'Anogia a été organisé avec le concours très actif de Bahman Saffari, qui fut l'un de ses meilleurs amis. Il a comporté une bonne participation de mathématiciens d'Orsay. Myriam Déchamps a réuni la plupart de leurs contributions pour ce volume. Thomas Körner et Serguei Konyagin y figurent comme Orcéens d'honneur.

L'idée du colloque était de faire des exposés qui auraient plu à Pichorides. Et le résultat est que presque tous les exposés ont plu à presque tout le monde. Garderont-ils, imprimés, la fraîcheur qu'ils avaient quand les paroles volaient dans les montagnes de Crète? Au lecteur de juger.

Jean-Pierre Kahane

Ces articles ont été sollicités et réunis par Myriam Déchamps qui s'excuse de leur présentation hétérogène et des éventuelles erreurs dues aux aléas des transferts électroniques.

ON THE CONJECTURE OF LITTLEWOOD AND MINIMA OF EVEN TRIGONOMETRIC POLYNOMIALS

A. S. BELOV, S. V. KONYAGIN

Résumé

Nous donnons une synthèse des résultats liés aux estimations inférieures des normes L_1 des sommes d'exponentielles et des minima des valeurs absolues des sommes de cosinus.

Abstract

We give a review of results on the lower estimates for the L_1-norm of exponential sums and the absolute value of cosine sums.

MOTS CLES : polynôme trigonométrique, coefficient, entier.

KEY WORDS : trigonometric polynomial, coefficient, integer.

AMS classification : 42A

ON THE CONJECTURE OF LITTLEWOOD AND MINIMA OF EVEN TRIGONOMETRIC POLYNOMIALS

A.S. Belov, S.V. Konyagin*

For integrable on $[-\pi, \pi]$ functions f we denote

$$||f||_1 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|dx;$$

for instance if $f \equiv a = const$ then $||f||_1 = |a|$. By $C_1, C_2, \dots$ we will denote absolute positive constants.

In 1948 Littlewood[1] suggested the following

Conjecture L. *For any different integers* $k_1, \dots, k_n$

$$\left\|\sum_{j=1}^{n} \exp(ik_jx)\right\|_1 \geq C_1 \ln n. \tag{1}$$

There were strong reasons for this hypothesis. It is known that in the case $k_j = j$ the following formula holds

$$\left\|\sum_{j=1}^{n} \exp(ijx)\right\|_1 = \frac{4}{\pi^2}\ln n + O(1)$$

[2, chapter 2, (12.1)]. The polynomial has the same L-norm if $\{k_j\}$ form an arithmetic progression. A much stronger estimate than (1) was well-known in the other extreme case when the k_j are scattered. If k_j are positive integers and $k_j \geq 2k_{j-1}$ $(j = 2, \dots, n)$ then ([2, chapter 5, (8.20)])

$$\left\|\sum_{j=1}^{n} \exp(ik_jx)\right\|_1 \geq C_2\sqrt{n}.$$

Set

$$L(n) = \inf \left\|\sum_{j=1}^{n} \exp(ik_jx)\right\|_1,$$

*Research was supported by Grants 96-01-00094 and 96-01-00378 from the Russian Foundation for Basic Research

where inf is taken over all collections of different integers $k_1, \dots, k_n$. The conjecture of Littlewood can be rewritten as

$$L(n) \geq C_1 \ln n. \tag{2}$$

The first nontrivial estimates for $L(n)$ was obtained in 1960. Cohen[3] proved that

$$L(n) \geq C_3 (\ln n / \ln \ln n)^{1/8} \tag{3}$$

for any $n \geq 3$. The estimate (3) was improved by Davenport[4], Fournier[5] and in the series papers by Pichorides ([6]—[10]). In [10] it was proved that

$$L(n) \geq C_4 \ln n / (\ln \ln n)^2 \quad (n \geq 3).$$

It was Pichorides who made the crucial contribution to the solution of the Littlewood problem. In 1981 the conjecture of Littlewood was proved by the second author[11] and independently by McGehee, Pigno, and Smith [12]. The second proof was more simple and shorter than Konyagin's one. The proof in [11] was based on combination of an idea of the papers [3], [4], [6], and the new approach suggested by Pichorides [10]. The authors of [12] offered a new brilliant idea for the proof of the conjecture of Littlewood but they also used the reasons of their predecessors including Pichorides as well.

In [12] more than Littlewood conjecture is established and the following generalization of the well-known Hardy's inequality is proved:

$$\left\| \sum_{j=1}^{n} a_j \exp(ik_j x) \right\|_1 \geq C_5 \sum_{j=1}^{n} \frac{|a_j|}{j},$$

where $k_1 < k_2 < \cdots < k_n$. In [11] the Littlewood conjecture is also proved as a special case of a more general assertion. The generalization offered by Konyagin does not follow from the one offered by McGehee, Pigno, and Smith; conversely, the latter authors offer a generalization of the Littlewood conjecture that does not provable by Konyagin's method.

In [7], [10] and [11] the bounds for exponential sums on a set of fixed positive measure were used. Pichorides[13] observed that one can easily deduce the Littlewood conjecture from the following one: for any different integers $k_1, \dots, k_n$ and for any set $E \subset [-\pi, \pi]$ of measure π the inequality

$$\int_E \left| \sum_{j=1}^{n} \exp(ik_j x) \right| dx \geq C_6$$

holds. Unfortunately, this nice hypothesis has been recently disproved by the second author.

Note that in [1] another conjecture was suggested: for any different positive integers $k_1, \dots, k_n$ and for any real numbers $a_0, \dots, a_n$ such that $a_0 \geq |a_j|$ ($j = 1, \dots, n$) the following inequality holds:

$$\left\| \frac{a_0}{2} + \sum_{j=1}^{n} a_j \cos(k_j x) \right\|_1 \geq C_7 \left\| \frac{a_0^*}{2} + \sum_{j=1}^{n} a_j^* \cos(jx) \right\|_1, \tag{4}$$

where $\{a_j^*\}$ denotes $\{|a_j|\}$ rearranged in nonincreasing order. It was easy to check that this hypothesis was stronger that Conjecture L, but it seemed too optimistic and Littlewood[14] conjectured that (4) is not true in general. This was proved by the second author[15].

We will give the slightly modified proof of this result. For a positive integer n we denote by m the maximal integer such that $3^{m+1} \leq 2n+1$. Let

$$T_n(x) = \prod_{j=0}^{m} \left(1 + \cos(3^j x)\right) = 1 + \sum_{j=1}^{n} a_j \cos(jx).$$

Then $||T_n||_1 = 1$ and the trigonometric polynomial $T_n^*(x) = 1 + \sum_{j=1}^{n} a_j^* \cos(jx)$ has coefficients $a_j^* = 1$ for $j = 1, \ldots, m+1$, $a_j^* \leq 1/2$ for $j > m+1$. We have

$$4||T_n^*||_1 \max_x \left| \sum_{j=1}^{m+1} \frac{\sin(jx)}{j} \right| \geq \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} T_n^*(x) 2\sin((m+2)x) \sum_{j=1}^{m+1} \frac{\sin(jx)}{j} dx$$
$$= \sum_{j=1}^{m+1} \frac{1}{j} - \sum_{j=1}^{m+1} \frac{a_{m+2+j}^*}{j} \geq \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{m+1} \frac{1}{j} \geq C_8 \ln\ln(n+3)$$

and therefore,

$$||T_n^*||_1 / ||T_n||_1 > C_9 \ln\ln(n+3),$$

because the absolute value of $\sum_{j=1}^{m+1} \frac{\sin(jx)}{j}$ is bounded by an absolute constant (as this polynomial is a partial sum of the 2π- periodic odd function g equal to $(\pi - x)/2$ on $(0, \pi)$ and g has the bounded variaton on $(-\pi, \pi)$).

The papers [13] and [16] contain the history and many interesting discussions on the Littlewood conjecture. Some further results on this subject are obtained in [17]—[19].

Let us turn to the problem of evaluation of minima of even trigonometric polynomials. Ankeny and Chowla[20] suggested to estimate the magnitude

$$M_1(n) = \inf \left(-\min_x \sum_{j=1}^{n} \cos(k_j x) \right),$$

where inf is taken over all collections of different positive integers $k_1, \ldots, k_n$. Clearly, $M_1(n) \geq 0$ since the average value of polynomial above is 0. The connection between the numbers introduced above is well-known (see [21]):

$$M_1(n) \geq L(2n)/4. \tag{5}$$

To prove (5) let us take an arbitrary polynomial

$$P(x) = \sum_{j=1}^{n} \cos(k_j x)$$

and denote $a = -\min_x P(x)$. Then we have

$$||P(x)+a||_1 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(P(x)+a)dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}P(x)dx + \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}a dx = a,$$

and by the triangle inequality,

$$||P(x)||_1 \le ||P(x)+a||_1 + ||a||_1 = 2a,$$

i.e. $-\min_x P(x) \ge ||P(x)||_1/2$. On the other hand,

$$2||P(x)||_1 = \left\|\sum_{j=1}^{n}\exp(ik_jx) + \sum_{j=1}^{n}\exp(-ik_jx)\right\|_1 \ge L(2n).$$

As P has been chosen arbitrarily we get (5).

At first Ankeny and Chowla suggested to prove that $M_1(n) \to \infty$ as $n \to \infty$. The first nontrivial esimate for $M_1(n)$ was obtained by K. Uchiyama and S. Uchiyama[22], independently of analogous estimate for $L(n)$ in [3]. In 1965 Chowla[23] conjectured that

(6) $$M_1(n) \ge C_{10}\sqrt{n}.$$

If (6) is true it would be the best possible since, as was observed by Chowla,

(7) $$M_1(n) \le C_{11}\sqrt{n}.$$

The inequality (7) is a consequence of the following identity: for any positive integer m

$$2\sum_{0\le j<l\le m}\cos((2^l-2^j)x) = -1-m+\left|\sum_{j=0}^{m}\exp(i2^jx)\right|^2,$$

and therefore, $M_1((m^2+m)/2) \le (m+1)/2$.

Moreover, let $\{k_s\}_{s=1}^{\infty} = \{1,2,3,4,6,7,\dots\}$ be the increasing sequence of positive integers obtained as a renumbering of the sequence $\bigcup_{l=1}^{\infty}(\{2^l-2^j\}_{j=0}^{l-1})$, that is $k_{\frac{l(l-1)}{2}+j} = 2^l - 2^{l-j}$ for $l \ge 1$, $j = 1,\dots,l$. Then for any positive integer n we have

$$M_1(n) \le -\min_x \sum_{s=1}^{n}\cos(k_sx) < 2\sqrt{n}.$$

Actually, for any positive integer n there exists the unique positive integer m such that $\left|n - \frac{m(m+1)}{2}\right| \le m/2$. The last inequality implies that $m^2 \le 2n$ and

$$\sum_{s=1}^{n}\cos(k_sx) \ge \sum_{s=1}^{\frac{m(m+1)}{2}}\cos(k_sx) - \left|n-\frac{m(m+1)}{2}\right| \ge -\frac{m+1}{2}$$
$$+\frac{1}{2}\left|\sum_{j=0}^{m}\exp(i2^jx)\right|^2 - m/2 \ge -m-1/2 \ge -\sqrt{2n}-1/2 > -2\sqrt{n}.$$

Thus,

$$-\min_x \sum_{s=1}^{n} \cos(k_s x) < 2\sqrt{n} \quad \text{for all} \quad n \geq 1.$$

The following nice result was proved by Pichorides[24]. Let $k_1, \ldots, k_n$ are different positive integers, $a_1, \ldots, a_n$ are complex numbers, $\{a_j^*\}$ denotes $\{|a_j|\}$ rearranged in non-increasing order,

$$F(x) = \sum_{j=1}^{n} a_j \exp(ik_j x), \quad M = -\min_x \Re F(x) > 0.$$

Then

$$M \ln M + ||F||_1 \geq C_{12} \sum_{j=1}^{n} (a_j^*/j) - C_{13}.$$

Substituting γF instead of F in the last inequality for $\gamma = C_{13}/M$, one can get after simple transformations

$$(1 + \ln C_{13})M + ||F||_1 \geq C_{12} \sum_{j=1}^{n} (a_j^*/j).$$

This inequality is stronger in general than the previous one.

The method of [24] might be very fruitful. It was developed by Pichugov[25], who actually proved that for any number $A > 0$ and different positive integers $k_1, \ldots, k_n$ the following inequality holds

$$-\min_x \left(\sum_{j=1}^{n} \cos(k_j x) + \sum_{j=1}^{n} \sin(k_j x) \right) \geq C(A)(\ln n)^A,$$

where $C(A)$ depends only on A.

It follows from the validity of Conjecture L that $M_1(n) \geq C_1 \ln n/4$. This estimate was significantly improved by Bourgain[26] who showed that $M_1(n) \geq \exp(\ln^{C_{14}} n)$. Bourgain's estimate is still the best known.

We know more about some other analogs of the problem of Ankeny and Chowla. Let us define

$$M_2(n) = \inf \left(-\min_x \sum_{j=1}^{n} a_j \cos(k_j x) \right),$$

where inf is taken over all collections of different positive integers $k_1, \ldots, k_n$ and all $a_1 \geq 1, \ldots, a_n \geq 1$. Analogous to (5), one can get from any of papers [11] and [12]

$$M_2(n) \geq C_{15} \ln n. \tag{8}$$

Clearly, $M_2(n) \leq M_1(n)$. The magnitude $M_2(n)$ was studied by Odlyzko [27] who showed that

$$M_2(n) \leq C_{16}(n \ln n)^{1/3} \quad (n \geq 2).$$

The second author[28] for each $n \geq 2$ constructed an example of a polynomial

$$P(x) = \sum_{j=1}^{n} a_j \cos(jx), \quad a_j \geq 1 \ (j = 1, \ldots, n)$$

such that

$$-\min P(x) \leq C_{17} \ln n \quad (n \geq 2).$$

Therefore, $M_2(n) \leq C_{17} \ln n \quad (n \geq 2)$, and by (8), $\ln n$ is the true order of $M_2(n)$. Note that the choice $k_j = j \ (j = 1, \ldots, n)$ in the case of Ankeny and Chowla, when all coefficients should be equal to 1, entails a very big $-\min_x P(x)$, since

$$-\min_x \sum_{j=1}^{n} \cos(jx) \geq C_{18} n.$$

We also see that $\ln n$ is the true order of

$$M(n) = \inf \left(-\min_x \sum_{j=1}^{n} a_j \cos(jx) \right),$$

where inf is taken over all $a_1 \geq 1, \ldots, a_n \geq 1$. The first author[29] found the exact value of $M(n)$: $M(n) = \sum_{k<n/2} c_k^2$ for odd n and $M(n) = \sum_{k<n/2} c_k^2 + c_{n/2}^2/2$ for even n, where $c_k = 2^{-2k}(k!)^{-2}(2k)!$ for $k \geq 0$. It is interesting to note that the coefficients of the unique extremal polynomial consructed in [29] are nonincreasing:

$$a_1 \geq a_2 \cdots \geq a_n. \tag{9}$$

Thus, denoting

$$M^{\downarrow}(n) = \inf \left(-\min_x \sum_{j=1}^{n} a_j \cos(jx) \right),$$

where inf is taken over all $a_1 \geq 1, \ldots, a_n \geq 1$ satisfying (9), we have $M(n) = M^{\downarrow}(n)$.

Denote

$$M_{\mathbf{Z}}(n) = \inf \left(-\min_x \sum_{j=1}^{n} a_j \cos(jx) \right), \tag{10}$$

where inf is taken over all positive integers $a_1, \ldots, a_n$. The magnitude $M_{\mathbf{Z}}^{\downarrow}(n)$ is defined by the same formula with the only addition that $a_1, \ldots, a_n$ are supposed to satisfy (9). Clearly, $M_{\mathbf{Z}}(n) \leq M_{\mathbf{Z}}^{\downarrow}(n)$. The first author([30],[31]) obtained an upper bound for $M_{\mathbf{Z}}^{\downarrow}(n)$ of subexponential type; thus, $M_{\mathbf{Z}}^{\downarrow}(n) = O(n^{\varepsilon})$ for any positive ε. In [31] the magnitudes

$M^+(n)$, $M^{+\downarrow}(n)$, $M^+_{\mathbb{Z}}(n)$, $M^{+\downarrow}_{\mathbb{Z}}(n)$ are also studied, where the sign + denotes that we replace the right-hand side of (10) by

$$\inf\left(-\min_{1\le m\le n}\min_x\sum_{j=1}^m a_j\cos(jx)\right).$$

It occurs that all these numbers have the same order n^α where $\alpha\in(0,1)$ is the unique solution of the equation

$$\int_0^{3\pi/2} t^{-\alpha}\cos t dt = 0.$$

Moreover, nonnegative polynomials supplying the best order estimates have been explicitly constructed. For example,

$$4n^\alpha+\sum_{k=1}^m\left[2\left(\frac{n}{k}\right)^\alpha-1\right]\cos kx>0$$

for all x and all positive integers $m\le n$ where the square brackets denote the integral part.

We have recently established the following estimates[32]:

$$C_{19}\ln^2 n/\ln\ln n\le M^{\downarrow}_{\mathbb{Z}}(n)\le C_{20}\ln^3 n\quad (n\ge 3). \tag{11}$$

Our proof is based on an interesting connection between $M^{\downarrow}_{\mathbb{Z}}(n)$ and another magnitude. In [30] the notion of acceptable sequences was introduced. We say that a sequence of positive numbers $\Lambda=\{\lambda_n\}_{n=1}^\infty$ is acceptable if it satisfies the following condition

$$\sum_{n=1}^\infty\frac{1}{\lambda_n}<\infty\quad\text{and}\quad\sum_{n=1}^\infty\sin\left(\frac{x}{\lambda_n}\right)\ge 0\quad\text{for all}\quad x\ge 0.$$

Establishing the existence of such sequences is an easy but not a trivial task. For instance, the sequence $\{n^2\}$ is acceptable. For any real number t we denote by $\varphi_\Lambda(t)$ the number of members of a sequence Λ which do not exceed t. Let us define the function

$$\Phi_\Lambda(x)=x\int_x^\infty t^{-2}\varphi_\Lambda(t)dt,\quad x>0.$$

Denote

$$\Phi(x)=\inf\left\{\Phi_\Lambda(x)\ :\ \Lambda\text{ is acceptable, }\min\Lambda=1\right\}.$$

The function Φ is continuous, positive, strictly increasing and concave on $(0,+\infty)$. We have proved in [32] that the following inequalities hold:

$$\frac{1}{28}\Phi(n)\le M^{\downarrow}_{\mathbb{Z}}(n)\le\frac{11}{5}\Phi(n). \tag{12}$$

So the problem of estimating of the order of $M_{\mathbb{Z}}^{\downarrow}(n)$ is equivalent to the problem of estimating of the order of $\Phi(n)$. Roughly speaking, estimates in [32] for $\Phi(x)$ mean that an acceptable sequence $\{\lambda_n\}$ can increase as $\exp(n^{1/3})$ but cannot increase faster than $\exp((n \ln n)^{1/2})$.

Both inequalities in (12) are constructive. The second inequality is an immediate consequence of the following fact: if $\Lambda = \{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ is an acceptable sequence and $\min \Lambda = 1$ then for any positive integer n and for any x the inequality

$$\frac{11}{10}\Phi_\Lambda(2n) + \sum_{k=1}^{n} \varphi_\Lambda\left(\frac{n}{k}\right)\cos(kx) > 0$$

holds. However the upper estimate of order $\ln^3(x+2)$ for $\Phi(x)$ is not constructive but it is proved by using random sequences Λ. Thus, our proof of the second inequality in (11) is not constructive either. We are able to construct an acceptable sequence Λ for which $\Phi_\Lambda(x)$ has the order $\ln^5(x+2)$. Namely, for any $q \geq 2^9$ the sequence

$$\Lambda = \{1\} \cup \left\{\frac{2^j p}{2k-1}\right\}_{(j,p,k)\in D},$$

where D is the set of all (j,p,k) such that

$$j \in \mathbb{N}, \quad p \in P, \quad 3 \leq p \leq qj^2, \quad k = 1, 2, \ldots, p(1 + [\ln j]),$$

and P is the set of all primes, is an acceptable one and

$$\Phi_\Lambda(x) < 2^{11} q^2 (1 + \ln x)^5 \text{ for all } x \geq 1.$$

Hence, the upper bound of order $1 + \ln^5 n$ for $M_{\mathbb{Z}}^{\downarrow}(n)$ can also be proved by an explicit construction of suitable trigonometric polynomials.

One can fix the sum of coefficients of a trigonometric polynomial rather that the number of its nonzero terms. Denote

$$K_{\mathbb{Z}}^{\downarrow}(n) = \inf\left(-\min_x \sum_{j=1}^{\infty} a_j \cos(jx)\right),$$

where infimum is taken over all nonnegative integers $a_1, a_2, \ldots$ such that $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = n$ and $a_1 \geq a_2 \geq \ldots$. If we omit the last condition then we get the definition of $K_{\mathbb{Z}}(n)$. Clearly, $K_{\mathbb{Z}}(n) \leq K_{\mathbb{Z}}^{\downarrow}(n)$.

For $n \geq 2$ Odlyzko[27] got the estimate $K_{\mathbb{Z}}(n) = O(n^{1/3}(\ln n)^{1/3})$. Kolountzakis[33] (see also [34]) slightly improved it showing that the logarithmic factor in it can be removed. In [32] we have proved that

$$(13) \qquad C_{21} \ln^2 n / \ln\ln n \leq K_{\mathbb{Z}}^{\downarrow}(n) \leq C_{22} \ln^3 n \quad (n \geq 3).$$

It is known that the magnitude $K_{\mathbb{Z}}(n)$ is connected with the following problem by Erdös and Szekeres [35]: to estimate

$$f(n) = \inf \left\{ \max_t \left| \prod_{j=1}^{n} \left(1 - e^{itk_j}\right) \right| : k_1, \dots, k_n \in \mathbb{N} \right\},$$

where the inner maximum is taken over all real numbers t and n is an arbitrary positive integer; the numbers $k_1, \dots, k_n$ are not supposed to be distinct. The above connection is based on the estimate $\ln f(n) < K_{\mathbb{Z}}(n)(1 + \ln n)$[27]. From this and (13) it follows immediately that $\ln f(n) \le C_{23} \ln^4 n$ for $n \ge 2$.

We wish to thank Michael Filaseta, Jean-Pierre Kahane, and Vladimir Temlyakov for some helpful discussions.

References

[1] G.H. Hardy, J.E. Littlewood, A new proof of a theorem on rearragements// Jour. Lond. Math. Soc. **23** (1948), 163–168.

[2] A. Zygmund, Trigonometric series, V. 1, Cambridge, 1959.

[3] P.J. Cohen, On a conjecture of Littlewood and idempotent operators // Amer. J. of Math. **82** (1960), 191–212.

[4] H. Davenport, On a theorem of P.J. Cohen // Mathematika **7** (1960), 93–97.

[5] J.F. Fournier, On a theorem of Paley and Littlewood conjecture // Arkiv för Math. **17** (1979), 199-216.

[6] S.K. Pichorides, A lower bound for the L^1-norm of the exponential sums // Mathematika **21** (1974), 155–159.

[7] S.K. Pichorides, On a conjecture of Littlewood concerning exponential sums (I) // Bull. Greek Math. Soc. **18** (1977), 8–16.

[8] S.K. Pichorides, On a conjecture of Littlewood concerning exponential sums (II) // Bull. Greek Math. Soc. **19** (1978), 274–277.

[9] S.K. Pichorides, On the L^1-norm of exponential sums // Lect. Notes Math. **781** (1980), 171–176.

[10] S.K. Pichorides, On the L^1-norm of exponential sums // Ann. Inst. Fourier. **30** (1980), 79–89.

[11] S.V. Konyagin, On a problem of Littlewood, Math. USSR Izvestiya **24** (1981), 206–225.

[12] O.C. McGehee, L. Pigno, B. Smith, Hardy's inequality and the L^1-norm of exponential sums// Ann. Math. **113** (1981), 613–618.

[13] S.K. Pichorides, Notes on trigonometric polynomials// Conference on harmonic analysis in honor of Antoni Zygmund (Chicago 1981), edited by Beckner, Calderon, Fefferman, Jones. Chicago, 1983, 84–96.

[14] J.E. Littlewood, On the inequality between functions f and f^* // Jour. Lond. Math. Soc. **35** (1960), 352–365.

[15] S.V. Konyagin, On a problem of Littlewood [in Russian] // Matematicheskie zametki **49** (1991), 143–144.

[16] J.P. Kahane, Stylianos Pichorides 1940-1992 // Fourier analysis and differential equations (CRCpress 1995), edited by Garcia-Cuerva, 7–17.

[17] J.D. Stegeman, On the constant in the Littlewood problem // Math. Ann. **261** (1982), 51–54.
[18] J.F. Fournier, Some remarks on the recent proofs of the Littlewood conjecture// Canad. Math. Soc. Conf. Proc. **3** (1983), 157–170.
[19] F.L. Nazarov, On the proof of the Littlewood hypothesis by McGehee, Pigno, and Smith [in Russian] // Algebra i Analyz **7** (1995), 106–120.
[20] S. Chowla, The Riemann zeta and allied functions// Bull. Am. Math. Soc. **58** (1952), 287–305.
[21] K.F. Roth, On cosine polynomials corresponding to sets of integers// Acta Arith. **24** (1973), 87–98.
[22] K. Uchiyama, S. Uchiyama, On the cosine problem// Proc. Japan. Acad. **36** (1960), 475–479.
[23] S. Chowla, Some applications of a method of A. Selberg // J. Reine und Angew. Math. **217** (1965), 128–132.
[24] S.K. Pichorides, A remark on exponential sums// Bull. Am. Math. Soc. **83** (1977), 283–285.
[25] S.A. Pichugov, Estimates of minima of trigonometric sums [in Russian] // Issledovaniia po sovremennum problemam summirovaniia i pribligeniia funkcii i ih prilogeniiam, Dnepropetrovsk, 1982, 35–37.
[26] J. Bourgain, Sur le minimum d'une somme de cosinus// Acta Arith. **45** (1986), 381–389.
[27] A.M. Odlyzko, Minima of cosine sums and maxima of polynomials on the unit circle // J. Lond. Math. Soc. **26** (1982), 412–420.
[28] S.V. Konyagin, Representation of functions by trigonometric series [in Russian]. Doctorate dissertation, Moscow, 1989.
[29] A.S. Belov, On an extremal problem about minima of a trigonometric polynomial [in Russian] // Izv. RAN. Ser. matem. **57** (1993), 212–226.
[30] A.S. Belov, New examples of nonnegative trigonometric polynomials with integral coefficients [in Russian], In: Constructive Function Theory and Its Applications, Dagestan State University, Mahachkala, 1994, 17–19.
[31] A.S. Belov, New examples of nonnegative trigonometric polynomials with integral coefficients [in Russian], // Fund. i Prikl. Matem. **1** (1995), 581–612.
[32] A.S. Belov, S.V. Konyagin, On estimates for the constant term of a nonnegative trigonometric polynomial with integral coefficients [in Russian] // Matematicheskie zametki **59** (1996), 627–629.
[33] M.N. Kolountzakis, On nonnegative cosine polynomials with nonnegative integral coefficients // Proc. Amer. Math. Soc. **120** (1994), 157–163.
[34] M.N. Kolountzakis, Probabilistic and constructive methods in harmonic analysis and addittive number theory. Dissertation, Stanford, 1994.
[35] P. Erdös , G. Szekeres, On the product $\prod_{k=1}^{n}(1-z^{a_k})$ // Acad. Serbe Sci. Publ. Inst. Math. 13(1959), 29–34.

Dept. Math & Mech, Moscow State University, 119899 Moscow (Russia)

Mouvements par courbure moyenne perturbés et multiplicateurs de Fourier[*]

Aline BONAMI[†]

Abstract

We consider a free boundary problem which is a perturbation of the mean curvature motion in the unit disc. The additional term is the solution of a Dirichlet problem related to the moving domain. We show that, when the coefficient of the perturbation increases, radial stationary solutions appear. They are stable at first, then unstable. The proofs rely on an analysis of linearized equations which involve Fourier series.

Résumé

Nous étudions un problème à frontière libre qui est une perturbation du mouvement par courbure moyenne dans le disque unité. Le terme additionnel est la solution d'un problème de Dirichlet lié au domaine mobile. Nous montrons que lorsque le coefficient de la perturbation augmente il apparaît des solutions radiales stationnaires, d'abord stables puis instables. Nous utilisons les séries de Fourier pour faire l'analyse des équations linéarisées.

1 Introduction

Le but de cet article est de montrer comment une équation de réaction-diffusion non linéaire peut mener à l'étude de multiplicateurs des séries de Fourier. Il fait partie d'un programme de travail plus vaste, poursuivi en commun avec Danielle Hilhorst et Elisabeth Logak.

Les séries de Fourier apparaissent ici comme un outil lorsque l'équation est l'équation d'un mouvement dans le disque unité. Dans ce cas l'invariance par rotation permet d'écrire simplement l'équation linéarisée au voisinage d'une solution radiale, et d'en faire l'étude à l'aide de la théorie de Calderón-Zygmund. Malheureusement l'étude de l'équation linéarisée apporte un très faible éclairage sur l'équation non linéaire dés qu'il y a instabilité.

En un sens, on est bien loin du point de vue de S. Pichorides en analyse harmonique puisque nous allons considérer un problème venu d'ailleurs dont, à l'heure actuelle, la

[*]Classification AMS : 35R35, 35K57, 42A45

[†]MAPMO - URA 1803, Université d'Orléans, BP 6759, 45067 Orléans Cédex 2 FRANCE

compréhension est très superficielle. Mais sa curiosité pouvait l'entraîner au loin, et peut-être aurais-je pu l'intéresser à ces questions d'analyse non linéaire. Je suis heureuse, en tous cas, d'avoir la possibilité de m'associer à l'hommage qui lui est rendu dans cet ouvrage.

Dans tout cet article, Ω désigne le disque unité de $\mathbb{R}^2$; Ω_t^- est un ouvert relativement compact dans Ω, dont la frontière Γ_t est de classe $\mathcal{C}^2$; on note Ω_t^+ le complémentaire de Ω ; le mouvement de Γ_t suivant le temps t est régi par le système

$$(S_\gamma) \qquad \begin{cases} V_{\vec{n}} = -K + \gamma v \\ -\Delta v = \pm 1 \quad \text{dans} \quad \Omega_t^\pm \end{cases}$$

avec la condition frontière $v|_{\partial\Omega} = 0$ et la condition initiale $\Gamma_t|_{t=0} = \Gamma_0$. Ici γ est une constante positive, K est la courbure de Γ_t (comptée positivement si Γ_t est convexe), et $V_{\vec{n}}$ est la vitesse normale de Γ_t, avec la convention que $\vec{n}$ est orienté vers Ω_t^+.

Le système (S_γ) a été introduit à la fois en électromagnétisme et en biologie pour modéliser des phénomènes diphasiques. Il apparaît comme limite de systèmes d'équations de réaction-diffusion. De façon générale, Ω désigne alors un ouvert régulier dans $\mathbb{R}^N$, et K désigne la courbure moyenne de Γ_t, que l'on appelle encore l'interface. Nous renvoyons à [2] et [6] pour la bibliographie, et pour l'existence et l'unicité locales (en temps) des solutions de (S_γ) sous l'hypothèse que Γ_0 est de classe $\mathcal{C}^{2+\epsilon}$. Notre but, ici, est de montrer que, lorsque Ω est le disque unité et γ est assez grand, le système (S_γ) possède des solutions stationnaires, et d'étudier (S_γ) lorsque Γ_0 est proche d'une de ces solutions stationnaires. Les méthodes que nous allons utiliser ont, pour la plupart, été utilisées pour d'autres problèmes à frontière libre : recours au théorème des fonctions implicites, calcul explicite des valeurs propres , etc (voir par exemple [1] ,[3], [7]). La simplicité des calculs, dans notre cas, permet de les présenter sans rencontrer trop de difficultés techniques.

Lorsque $\gamma = 0$, on dit que Γ_t est animé d'un mouvement par courbure moyenne. Celui-ci a été très étudié. Il y a alors existence de l'interface Γ_t jusqu'à sa disparition en temps fini, Ω_t^- se rétractant. Lorsque $\gamma > 0$, il y a compétition entre les deux termes. Pour γ petit on peut conjecturer que la courbure l'emporte et que le mouvement est analogue à un mouvement par courbure moyenne. Pour $\gamma > \gamma_0$, nous allons voir qu'apparaît un cercle stationnaire, qui est d'abord stable, puis instable lorsque γ croît encore. On peut conjecturer que le mouvement devient de plus en plus instable au fur et à mesure que γ augmente, se rappochant d'un mouvement sans courbure (après changement de temps)

$$(S_\infty) \qquad \begin{cases} V_{\vec{n}} = v \\ -\Delta v = \pm 1 \quad \text{dans} \quad \Omega_t^\pm \end{cases}$$

dont le comportement est tout à fait inconnu. Nous verrons cette instabilité croîssante se manifester dans le problème linéarisé dont le nombre de modes instables augmente.

Nous allons considérer des interfaces Γ_t admettant une équation polaire

$$r = \rho(\theta, t), \quad \text{avec} \quad \rho > 0.$$

Il n'y a pas de restriction de généralité à faire cette hypothèse lorsque Γ_t est proche d'un cercle au sens C^1. En coordonnées polaires on peut écrire explicitement $V_{\vec{n}}$, K et v en fonction de ρ. La vitesse normale vaut, au point $re^{i\theta}$,

$$V_{\vec{n}} = \frac{\partial \rho}{\partial t}(\theta, t)\cos(\vec{n}, \vec{u}),$$

où $\vec{u}$ désigne le rayon vecteur. Autrement dit :

$$V_{\vec{n}} = \frac{\rho}{\sqrt{\rho^2 + \rho_\theta'^2}}\rho_t'.$$

La courbure en coordonnées polaires est donnée par :

$$\frac{\rho^2 + 2\rho'^2 - \rho\rho''}{(\rho^2 + \rho'^2)^{3/2}}.$$

La fonction de Green du disque unité est donnée par :

$$G(\zeta, z) = \frac{1}{2\pi}\mathrm{Log}\,\frac{|1 - \zeta\bar{z}|}{|\zeta - z|}.$$

Le système (S_γ), écrit en termes de la fonction ρ, devient l'équation :

$$(E_\gamma) \qquad \frac{\rho\rho_t'}{(\rho^2 + \rho_\theta'^2)^{1/2}} = -\frac{\rho^2 + 2\rho_\theta'^2 - \rho\rho_{\theta^2}''}{(\rho^2 + \rho_\theta'^2)^{3/2}} + \gamma w$$

où $w(\theta, t) = v(\rho(\theta, t)e^{i\theta}))$ est donné par :

$$w(\theta, t) = \frac{1}{4}(1 - \rho^2(\theta, t)) - \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\int_0^{\rho(\varphi, t)} \mathrm{Log}\,\frac{|1 - r\rho(\theta, t)e^{i(\theta, \varphi)}|}{|r - \rho(\theta, t)e^{i(\theta, \varphi)}|} r\,dt. \qquad (1)$$

Nous avons écrit $v = \frac{1}{4}(1 - |z|^2) + v_1$, avec

$$\Delta v_1 = 2\chi_{\Omega_t^-} \quad , \quad v_1|_{\partial\Omega} = 0.$$

2 Solutions stationnaires

Nous allons chercher les cercles stationnaires. Notons, pour $R \in]0, 1[$,

$$C_R = \{z \in \mathbb{C}; |z| = R\}.$$

La solution de

$$-\Delta v(z) = \begin{cases} 1 & \text{si } |z| > R \\ -1 & \text{si } |z| < R \end{cases}$$

qui vaut 0 au bord du disque unité se calcule aisément : c'est une fonction radiale $v_R(z) = \tilde{v}_R(|z|)$, où $\tilde{v}_R$ est de classe $\mathcal{C}^1$ dans $[0,1]$, vaut 0 en 1 et satisfait à

$$r\tilde{v}_R''(r) + \tilde{v}_R'(r) = \begin{cases} 1 & \text{si } r < R \\ -1 & \text{si } R < r \,. \end{cases}$$

Sur C_R, v_R prend la valeur

$$v_R(R) = \frac{1}{4}(1 - R^2) + R^2 \mathrm{Log}\, R \,.$$

C_R est un cercle stationnaire si

$$\gamma^{-1} = Rv_R(R) = \frac{1}{4}R(1 - R^2) + R^3 \mathrm{Log}\, R. \tag{2}$$

Soit a la fonction définie sur $[0,1]$ par $a(R) = Rv_R(R)$. Des calculs élémentaires montrent que a s'annule en $0, 1$ et $r_\infty \in]0,1[$, et, sur $[0, r_\infty]$, est d'abord croissante puis décroissante. On notera r_0 la valeur pour laquelle a est maximum sur $[0, r_\infty]$ et γ_0 la valeur de γ correspondante, $\gamma_0 = [\sup(Rv_R(R))]^{-1}$. Pour tout $R \in]0, r_\infty]$ le cercle C_R est stationnaire lorsque γ est donné par (2). Il en résulte qu'il n'y a pas de cercle stationnaire si $\gamma < \gamma_0$, un cercle stationnaire si $\gamma = \gamma_0$, et deux cercles stationnaires si $\gamma > \gamma_0$. Dans ce cas on notera r_γ, r'_γ leurs rayons, avec $r'_\gamma < r_\gamma$. On sait que $a'(r'_\gamma) > 0$, $a'(r_\gamma) < 0$.

Plus généralement on obtient aisément les solutions radiales de l'équation (E_γ). Si Γ_0 est le cercle C_{R_0}, alors, du fait de l'invariance par rotation, Γ_t est également un cercle $C_{R(t)}$, et $R(t)$ est solution de l'équation

$$R' = -[1 - \gamma R v_R(R)]/R, \tag{3}$$

avec condition initiale $R(0) = R_0$. Parmi ces solutions radiales, tout se passe comme nous l'avons décrit dans l'introduction. Lorsque $\gamma < \gamma_0$, $R(t)$ décroît et s'annule en temps fini, ce qui veut dire que l'interface disparaît. Lorsque $\gamma > \gamma_0$, c'est encore le cas si $R_0 < r'_\gamma$. Si au contraire $R_0 > r'_\gamma$, alors $R(t)$ est défini pour tout $t \in]0, \infty[$ et tend vers r_γ quand t tend vers $+\infty$. Le cercle stationnaire C_{r_γ} est donc attractif pour les solutions radiales, contrairement au cercle $C_{r'_\gamma}$ qui est répulsif. Nous l'appellerons dans la suite le cercle « stable ». Nous pouvons résumer l'étude précédente dans la proposition suivante :

Proposition 2.1 *(i)Lorsque $\gamma < \gamma_0 = [\sup(Rv_R(R))]^{-1}$, il n'y a pas de cercle C_R stationnaire, et, si l'interface initial est un cercle C_{R_0}, il disparaît en temps fini.*
(ii)Lorsque $\gamma = \gamma_0$, il y a un cercle stationnaire qui est instable parmi les solutions radiales.
(iii) Lorsque $\gamma > \gamma_0$, il y a deux cercles stationnaires C_{r_γ} et $C_{r'_\gamma}$ avec $r'_\gamma < r_\gamma$. Le cercle $C_{r'_\gamma}$ est répulsif, tandis que si l'interface initial est un cercle C_{R_0} avec $R_0 \in]r'_\gamma, 1[$ le système (S_γ) admet une solution globale et l'interface solution tend vers C_{r_γ} quand t tend vers $+\infty$.

Avant de commencer l'étude de la stabilité du cercle « stable », faisons quelques remarques. Remarquons tout d'abord que, du fait du principe du maximum, la solution de l'équation

$$-\Delta v = \pm 1 \quad \text{dans} \quad \Omega_t^{\pm},$$

avec condition de Dirichlet au bord, est majorée en module par la solution de

$$-\Delta v = 1 \text{ dans } \Omega$$

c'est-à-dire par $\frac{1}{4}(1-|z|^2)$.

Supposons que Γ_0 soit un interface stationnaire (non forcément circulaire). Soit z le point de Γ_0 le plus éloigné de l'origine. Alors la courbure en z est supérieure à $\frac{1}{|z|}$. Comme $V_{\vec{n}}$ vaut 0 en z, c'est que

$$-\frac{1}{|z|} + \frac{\gamma}{4}(1-|z|^2) \geq 0.$$

Il en résulte que $\gamma \geq 6\sqrt{3}$. Nous avons montré que :

Proposition 2.2 *Si $\gamma < 6\sqrt{3}$, il n'y a pas d'interface stationnaire.*

On peut calculer $\gamma_0 \simeq 27.0662.$ [1]

Remarque 2.3 *Le problème serait entièrement différent si nous avions pris γ négatif.*

Dans ce cas, les inclusions sont respectées par le mouvement : si $\Omega_0^- \subset \tilde{\Omega}_0^-$, alors, à tout instant $t, \Omega_t^- \subset \tilde{\Omega}_t^-$ (voir [2]). On peut donc voir comment évolue l'interface initial Γ_0 en regardant l'évolution d'une couronne qui le contient. Mais l'interet du modèle étudié ici est justement l'apparition d'instabilités qu'on observe effectivement dans les phénomènes physiques pour lesquels il est proposé.

3 Linéarisation de l'équation et espaces fonctionnels adaptés.

Soit $\mathcal{L}$ l'opérateur apparaissant dans l'équation (E_γ) :

$$\mathcal{L}(\rho) = \frac{\rho\rho'_t}{(\rho^2+\rho_\theta'^2)^{1/2}} + \frac{\rho^2 + 2\rho_\theta'^2 - \rho\rho''_{\theta^2}}{(\rho^2+\rho_\theta'^2)^{3/2}} - \gamma w$$

où w est donné par (1). Formellement, il s'agit de linéariser $\mathcal{L}$, c'est-à-dire de trouver sa dérivée suivant ρ au sens de Fréchet au point $\rho \equiv r_\gamma$. Tout d'abord nous allons fixer l'espace de Banach dans lequel nous nous placerons. Il est naturel de considérer ici les espaces de Lipschitz anisotropes associés à l'opérateur de la chaleur.On désignera par **T** le cercle unité,

1. Les calculs numériques ont été effectués à l'aide de Mathematica.

idendifié à $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$. Pour $\alpha \in]0,1[$, on définit $\Lambda_c^\alpha(\mathbf{T} \times [0,\mathrm{T}])$ comme l'espace des fonctions continues f telles que

$$\|f\|_\alpha = \|f\|_\infty + sup\left\{ \frac{|f(\theta_1,t_1) - f(\theta_2,t_2)|}{|\theta_1-\theta_2|^\alpha + |t_1-t_2|^{\alpha/2}} \right\} < \infty.$$

Pour $\alpha \in [1,2[$, Λ_c^α est défini comme dans le cas des espaces de Lipschitz classiques en utilisant des différences d'ordre 2 en la variable θ. Pour $\alpha \in]2m, 2m+2[$, où m désigne un entier strictement positif, Λ_c^α est défini comme l'espace des fonctions f qui possèdent des dérivées $\frac{\partial^{k+l}}{\partial\theta^k\partial t^l}f$ pour tous les entiers k, l, tels que $k+2l \leq 2m$, et telles que de plus

$$\frac{\partial^{k+l}}{\partial\theta^k\partial t^l}f \in \Lambda_c^{\alpha-2m}$$

pour $k+2l = 2m$. Lorsque α est un entier pair, Λ_c^α peut être défini par interpolation, ou en utilisant des différences d'ordre supérieur. Nous pourrons considérer uniquement les espaces de Lipschitz $\Lambda_c^{2m+\alpha}$, avec $\alpha \in]0,1[$, pour simplifier les démonstrations, mais les résultats restent valables pour toutes les valeurs de α.

La proposition suivante porte sur la différentiabilité de $\mathcal{L}$. Dans son énoncé ε_0 est fixé, $\varepsilon_0 \in]0,1/2[$.

Proposition 3.1 *Pour $\alpha > 2$, l'opérateur $\mathcal{L}$ est bien défini sur l'ouvert U_α de Λ_c^α formé des fonctions ρ telles que les deux conditions suivantes soient satisfaites:*

$$(i) \qquad \varepsilon_0 < \rho < 1-\varepsilon_0 \qquad\qquad (ii) \qquad |\rho'_\theta| < \varepsilon_0/2$$

et à valeurs dans l'espace $\Lambda_c^{\alpha-2}$. De plus $\mathcal{L}$ est de classe C^1 sur U_α.

Démonstration. Considérons tout d'abord l'opérateur différentiel

$$\mathcal{L}_0(\rho) = \frac{\rho\rho'_t}{(\rho^2+\rho'^2_\theta)^{1/2}} + \frac{\rho^2 + 2\rho'^2_\theta - \rho\rho''_{\theta^2}}{(\rho^2+\rho'^2_\theta)^{3/2}}.$$

Lorsque ρ est dans U_α, on peut encore écrire:

$$\mathcal{L}_0(\rho) = F_1(\rho,\rho'_\theta)\rho'_t + F_2(\rho,\rho'_\theta)\rho''_{\theta^2} + F_3(\rho,\rho'_\theta),$$

où F_1, F_2, F_3 sont trois fonctions de classe C^∞. Par composition $F_i(\rho,\rho'_\theta)$ appartient à l'espace $\Lambda_c^{\alpha-2}$ pour $i = 1,2,3$. Le fait que $\mathcal{L}_0(\rho)$ soit également dans $\Lambda_c^{\alpha-2}$ s'en déduit immédiatement. Pour montrer que $\mathcal{L}_0$ est différentiable en $\rho \in U_\alpha$, il suffit de montrer que chaque terme l'est. Pour $h \in \Lambda_c^\alpha$ de norme petite, on peut écrire

$$F_i(\rho+h, \rho'_\theta + h'_\theta) = F_i(\rho,\rho'_\theta) + \frac{\partial F_i}{\partial x_1}(\rho,\rho'_\theta)h + \frac{\partial F_i}{\partial x_2}(\rho,\rho'_\theta)h'_\theta + R,$$

avec

$$\|R\|_{\alpha-2} = \mathcal{O}(\|h\|_\alpha^2).$$

La différentiabilité de $\mathcal{L}_0$ en découle, ainsi que l'expression de la différentielle et sa continuité.

Considérons maintenant $\mathcal{L}-\mathcal{L}_0$. Il s'agit de prouver la proposition lorsque $\mathcal{L}$ est remplacé par $\mathcal{L}_1$, où $\mathcal{L}_1(\rho)$ est égal à w donné par (1). Nous avons montré dans [2] que $\mathcal{L}_1$ préserve les espaces Λ_c^α . On obtient la différentiabilité en reprenant la démonstration. Nous n'entrerons pas dans les détails, et renvoyons à [2]. □

Une fois démontrée la différentiabilité de $\mathcal{L}$, la différentielle en ρ_0 se calcule aisément lorsque ρ_0 est une solution radiale de l'équation (E_γ), c'est-à dire

$$\rho_0(\theta,t) = R(t),$$

avec $R(t)$ solution de (3). On voit tout de suite que la différentielle de l'opérateur $\mathcal{L}_0$ est l'opérateur linéaire L_0 défini par

$$L_0 h = h'_t - R^{-2}(h + h''_{\theta^2}).$$

Calculons maintenant la différentielle de l'opérateur $\mathcal{L}_1$. Lorsque $\rho = R + h$, la solution du problème de Dirichlet

$$-\Delta v(re^{i\theta},t) = \begin{cases} 1 & \text{si } \rho(\theta,t) < r < 1 \\ -1 & \text{si } 0 < r < \rho(\theta,t) \end{cases}$$

s'écrit $v_R + v_1$, où l'expression de v_R a été donnée précédemment, et v_1 est solution du problème de Dirichlet

$$-\Delta v_1(re^{i\theta},t) = \begin{cases} -2 & \text{si } r \in [R(t), R(t)+h(\theta,t)], & h(\theta,t) > 0 \\ 2 & \text{si } r \in [R(t)+h(\theta,t), R(t)], & h(\theta,t) < 0 \\ 0 & \text{sinon}. \end{cases}$$

Il en résulte que la différentielle cherchée est donnée par

$$L_1 h(\theta,t) = \frac{R(t)}{2} h(\theta,t) - 2R(t) \int_{-\pi}^{+\pi} G(R(t)e^{i\theta}, R(t)e^{i\varphi}) h(\varphi) d\varphi.$$

Nous avons utilisé le fait que $v'_R(R) = R/2$. Nous venons de démontrer que :

Proposition 3.2 *Soit $t \to R(t)$ une solution radiale de l'équation (E_γ) définie sur tout l'intervalle $[0,T]$. Alors la différentielle au sens de Fréchet de l'opérateur $\mathcal{L}$ en ce point est donnée par*

$$Lh = h'_t - R^{-2}(h + h''_{\theta^2}) - \gamma((R/2)h - G_R * h) ,$$

où G_R est la fonction

$$G_R(\theta) = 2R \mathrm{Log} \frac{|1 - R^2 e^{i\theta}|}{R|1 - e^{i\theta}|}$$

et la convolution porte sur la variable θ.

La prochaine section va être consacrée à l'étude de l'équation linéarisée dont l'expression découle de la proposition 3.2, la suivante aux conséquences de cette étude pour l'équation initiale. Nous utiliserons le théorème des fonctions implicites, non pas pour $\mathcal{L}$ mais pour $\overrightarrow{\mathcal{L}}$ défini par

$$\overrightarrow{\mathcal{L}}(\rho)(\theta,t) = (\mathcal{L}(\rho)(\theta,t), \rho(\theta,0)).$$

C'est un opérateur de classe $\mathcal{C}^1$ de U_α dans $\Lambda_c^{\alpha-2}(\mathbf{T} \times [0,\mathrm{T}]) \times \Lambda^\alpha(\mathbf{T})$. Ici $\Lambda^\alpha(\mathbf{T})$ désigne l'espace de Lipschitz usuel sur $\mathbf{T}$.

La différentielle de $\overrightarrow{\mathcal{L}}$ en $t \to R(t)$ a pour coordonnées L, où L est donné par la proposition 3.2, et l'opérateur d'évaluation à l'instant 0. On notera

$$\overrightarrow{L} h(\theta,t) = ((Lh)(\theta,t), h(\theta,0)).$$

Pour étudier l'inversibilité de la différentielle, on est amené à résoudre le problème de Cauchy suivant:

$$(PL) \qquad \begin{cases} h'_t - R^{-2}(h + h''_{\theta^2}) - \gamma((R/2)h - G_R * h) = g \\ h(\theta,0) = h_0(\theta) \end{cases} .$$

4 Etude de l'équation linéarisée

Dans la suite on se donne une solution radiale de l'équation (E_γ), qu'on note $t \to R(t)$ et qu'on suppose définie sur tout l'intervalle $[0,T]$. Nous allons considérer ici le problème linéarisé au voisinage de cette solution, c'est-à-dire le problème (PL). On a la proposition suivante

Proposition 4.1 *Soit $\alpha > 2$. Soient $g \in \Lambda_c^{\alpha-2}(\mathbf{T}\times[0,\mathrm{T}])$ et $h_0 \in \Lambda^\alpha(\mathbf{T})$. Alors le problème (PL) possède une solution et une seule qui appartient à l'espace $\Lambda_c^\alpha(\mathbf{T} \times [0,\mathrm{T}])$. De plus l'opérateur linéaire ainsi défini est un opérateur continu.*

Démonstration. Développons en série de Fourier les fonctions qui interviennent dans l'écriture de (PL), en notant par exemple

$$\hat{h}_0(k) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} h_0(\varphi)e^{-ik\varphi}d\varphi$$

$$\hat{h}(k,t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} h(\varphi,t)e^{-ik\varphi}d\varphi.$$

Alors, pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $\hat{h}(k,t)$ est solution de l' équation différentielle

$$\frac{d\hat{h}}{dt}(k,t) - [(R(t)^{-2})(1-k^2) + \gamma((R(t)/2) - \hat{G}_R(k))]\hat{h}(t,k) = \hat{g}(k,t)$$

avec donnée initiale $\hat{h}(k,0) = \hat{h}_0(k)$. L'existence et l'unicité d'une solution distribution en découlent immédiatement. Il reste à montrer que la solution est dans l'espace $\Lambda_c^\alpha(\mathbf{T}\times[0,\mathrm{T}])$.

On peut déduire directement cette propriété du calcul pseudo-différentiel. Pour simplifier la compréhension, nous admettrons seulement que c'est vrai lorsque le problème (PL) est remplacé par le problème (PLS), où (PLS) est donné par

$$(PLS) \qquad \begin{cases} h'_t + (h - h''_{\theta^2}) = g \\ h(\theta, 0) = h_0(\theta) \end{cases}$$

(voir par exemple [5]). Pour conclure pour (PL) à partir de (PLS), nous allons tout d'abord effectuer un changement de temps dans (PL) pour que le terme principal soit donné par (PLS). On définit τ par

$$\frac{d\tau(t)}{dt} = R^2(t) \qquad\qquad \tau(0) = 0\,.$$

Dans ce changement de variables, l'intervalle $[0, T]$ devient l'intervalle $[0, T_\tau]$, et l'espace $\Lambda^\alpha_c(\mathbf{T} \times [0, \mathrm{T}])$ est envoyé sur l'espace $\Lambda^\alpha_c(\mathbf{T} \times [0, \mathrm{T}_\tau])$. Le problème (PL) est alors remplacé par

$$(PL_\tau) \qquad \begin{cases} h'_\tau + (h - h''_{\theta^2}) + \mu_R * h = g \\ h(\theta, 0) = h_0(\theta) \end{cases}$$

où μ_R est une mesure sur $\mathbf{T}$, dépendant de τ de façon C^∞, et de norme uniformément bornée. On vérifie plus précisément que μ_R s'écrit sous la forme

$$a(t)\delta + b(\theta, t) + c(t)f(\theta)$$

où a, b, c sont C^∞ et f est intégrable. Il en résulte que l'opérateur $h \to \mu_R * h$ est un opérateur borné dans $\Lambda^\alpha_c(\mathbf{T} \times [0, \mathrm{T}_\tau])$. C'est donc un opérateur compact de $\Lambda^\alpha_c(\mathbf{T} \times [0, \mathrm{T}_\tau])$ dans $\Lambda^{\alpha-2}_c(\mathbf{T} \times [0, \mathrm{T}_\tau])$ puisque l'injection de $\Lambda^\alpha_c(\mathbf{T} \times [0, \mathrm{T}_\tau])$ dans $\Lambda^{\alpha-2}_c(\mathbf{T} \times [0, \mathrm{T}_\tau])$ est compacte. Pour conclure que la solution du problème (PL_τ) est donnée par un opérateur continu de $\Lambda^{\alpha-2}_c(\mathbf{T} \times [0, \mathrm{T}_\tau])$ dans $\Lambda^{\alpha-2}_c(\mathbf{T} \times [0, \mathrm{T}_\tau])$, on utilise le fait que cette propriété est satisfaite par le problème (PL), et l'alternative de Fredholm. □

La proposition précédente ne suffit pas pour prouver l'existence de solutions globales au voisinage d'un cercle « stable ». Nous avons besoin d'un calcul de valeurs propres plus précis, et en particulier de connaître leurs signes. Pour tout $\gamma > \gamma_0$, définissons la suite $a_k(\gamma)$ comme la suite des coefficients de Fourier intervenant dans l'opérateur L lorsque $R \equiv r_\gamma$:

$$a_k(\gamma) = r_\gamma^{-2}(1 - k^2) + \gamma(r_\gamma/2 - \hat{G}_{r_\gamma}(k)).$$

Proposition 4.2 *Il existe une suite croissante $(\gamma_k)_{k\geq 2}$, dont tous les termes sont supérieurs à γ_0, qui tend vers $+\infty$, et qui satisfait à la propriété suivante : pour tout $k \neq 0, \pm 1$, $a_k(\gamma)$ est positif si et seulement si $\gamma > \gamma_{|k|}$. Pour $k = 0, \pm 1$, alors $a_k(\gamma)$ est strictement négatif.*

Démonstration. On calcule tout d'abord

$$a_0(\gamma) = r_\gamma^{-2} + \gamma r_\gamma(1/2 + 2\text{Log } r_\gamma)$$

dont on sait déjà que c'est un nombre négatif : c'est la raison pour laquelle le cercle $\mathcal{C}_{r_\gamma}$ est attractif parmi les solutions radiales. Pour $k \neq 0$ l'expression de $a_k(\gamma)$ découle du calcul des coefficients de Fourier de G_R. La fonction $2\text{Log } |1 - Re^{i\theta}|$ a pour dérivée le noyau de Poisson conjugué dont l'expression en termes de série de Fourier est bien connue (voir par exemple [4]). On en déduit que

$$2\text{Log } \frac{|1 - R^2 e^{i\theta}|}{|1 - e^{i\theta}|} = \sum_{k \neq 0} (\frac{1 - R^{2|k|}}{|k|}) e^{ik\theta}.$$

Finalement

$$a_k(\gamma) = r_\gamma^{-2}(-k^2 + 1) + \gamma r_\gamma(\frac{1}{2} - \frac{1}{|k|} + \frac{r_\gamma^{2|k|}}{|k|}).$$

En particulier

$$a_1(\gamma) = a_{-1}(\gamma) = -\gamma r_\gamma(\frac{1}{2} - r_\gamma^2)$$

est négatif puisque r_∞, qui majore r_γ pour tout $\gamma > \gamma_0$, est de l'ordre de 0.533543. Pour étudier la suite $a_k(\gamma)$ lorsque $k \geq 2$, nous allons reprendre les notations de la section 2. Puisque r_γ est une fonction croissante de γ, il est équivalent de considérer la suite

$$b_k(r) = r^{-2}(-k^2 + 1) + r(a(r))^{-1}(\frac{1}{2} - \frac{1}{|k|} + \frac{r^{2|k|}}{|k|})$$

et de montrer qu'il existe une suite croissante $(r_k)_{k \geq 2}$,dont tous les termes sont supérieurs à r_0, qui tend vers r_∞,et telle que, pour tout $k \neq 0, \pm 1$,$b_k(r)$ est positif si et seulement si $r > r_{|k|}$. Une fois connue la suite (r_k), la suite (γ_k) cherchée est donnée par

$$\gamma_k = (a(r_k))^{-1}.$$

La suite $b_k(r)$ étant paire, nous pouvons nous restreindre à $k \geq 2$. Pour $k \geq 2$ fixé, la fonction $r \longrightarrow b_k(r)$ est une fonction croissante, négative puis positive sur l'intervalle $[0, r_\infty[$. On appelle r_k la valeur r pour laquelle $b_k(r)$ s'annule. Le fait que (r_k) tend vers $+\infty$ est immédiat. On peut calculer $r_0 \simeq 0.25474$, $r_2 \simeq 0.489155$, $r_3 \simeq 0.502268$. Il reste à montrer que (r_k) est une suite croissante pour $k \geq 3$. Nous allons utiliser le lemme suivant, qui est une conséquence de la convexité de la fonction $x \longrightarrow (1 - e^{-x})/x$ sur $[0, +\infty[$:

Lemme 4.3 *La suite $(b_k(r))_{k \geq 2}$ est concave.*

Supposons prouvé que r_k est plus grand que r_{k-1}, et montrons que r_{k+1} est plus grand que r_k. Il suffit de montrer que $b_{k+1}(r_k) < 0$. Or, du fait de la concavité,

$$0 = 2b_k(r_k) \geq (b_{k-1}(r_k) + b_{k+1}(r_k)).$$

Par hypothèse de récurrence, $b_{k-1}(r_k) > 0$, ce qui permet de conclure. $\square$

Nous allons utiliser la concavité pour montrer une propriété de presque contraction qui nous servira dans la suite.

Proposition 4.4 *Soit γ donné dans l'intervalle $]\gamma_0, \gamma_2[$. Il existe deux constantes positives C et c (avec c dépendant de γ) telles que pour tout $t > 0$*

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} |\sum_{-\infty}^{+\infty} e^{a_k(\gamma)t} e^{ik\theta}| d\theta \leq C e^{-ct}. \tag{4}$$

Démonstration. Il est élémentaire de montrer que $a_2(\gamma) > a_3(\gamma)$ dans cet intervalle. Par convexité il en résulte que la suite $(a_k(\gamma))_{k\geq 2}$ est décroissante, puis, par composition que la suite $(e^{a_k(\gamma)t})_{k\geq 2}$ est convexe décroissante. On la prolonge en 0 et 1 en lui donnant les valeurs que prend la fonction linéaire qui vaut $e^{a_2(\gamma)t}$ en 2, et $e^{a_3(\gamma)t}$ en 3. On définit ainsi une nouvelle suite $(\tilde{a}_k(\gamma, t))_{-\infty}^{+\infty}$ qui est paire, et dont la restriction aux entiers positifs est une suite convexe décroissante. On sait alors que

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} \tilde{a}_k(\gamma, t) e^{ik\theta}$$

est une fonction positive. Son intégrale sur $\mathbf{T}$ pour la mesure de Lebesgue normalisée est égale à son coefficient de Fourier en 0, c'est-à-dire à

$$\tilde{a}_0(\gamma, t) = 3e^{a_2(\gamma)t} - 2e^{a_3(\gamma)t}.$$

On en déduit la majoration cherchée pour

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} e^{a_k(\gamma)t} e^{ik\theta} = \sum_{-\infty}^{+\infty} \tilde{a}_k(\gamma, t) e^{ik\theta} + e^{a_0(\gamma)t} - \tilde{a}_0(\gamma, t) + 2[e^{a_1(\gamma)t} - \tilde{a}_1(\gamma, t)] cos\theta.$$

avec $c = \min\{|a_2(\gamma)|, |a_1(\gamma)|, |a_0(\gamma)|\}$, ou encore

$$c = \min\{|a_k(\gamma)|, k \in \mathbb{Z}\}.$$

$\square$

5 Retour à l'équation non linéaire

En utilisant le théorème des fonctions implicites, la différentiabilité de l'opérateur $\overrightarrow{\mathcal{L}}$ donnée par la proposition 4.1, et l'inversibilité de la différentielle donnée par la proposition 3.2, on obtient le théorème suivant, qui donne l'existence d'une solution au voisinage d'une solution radiale:

Théorème 5.1 *Soit $R_0 \in]0,1[$; on suppose que la solution radiale à l'équation (E_γ) ayant pour valeur initiale R_0 est définie sur l'intervalle $[0, T]$. Quel que soit $\alpha > 2$, il existe $\varepsilon > 0$ tel que, si $\|\rho_0 - R_0\|_{\Lambda^\alpha(\mathrm{T})} < \varepsilon$, alors l'équation (E_γ) avec donnée initiale ρ_0 admet une solution dans $\Lambda^\alpha_c(\mathbf{T} \times [0, \mathrm{T}])$.*

Remarquons qu'il y a également unicité de la solution, qui est C^∞ dans $\mathbf{T}\times]0,\mathrm{T}]$. Ces propriétés supplémentaires découlent de l'unicité et la régularité locales démontrées dans [2].

Remarquons également qu'en utilisant le calcul pseudo-différentiel, plutôt que l'écriture explicite de la différentielle comme nous l'avons fait, on pourrait montrer le même résultat d'existence au voisinage de toute solution régulière. C'est encore dire que l'application qui à un interface Γ_0 fait correspondre le temps d'existence de la solution maximale régulière de donnée initiale Γ_0 est semi-continue inférieurement.

Il n'y a pas en général d'existence globale de la solution puisque les solutions radiales ne sont pas toutes définies pour tout temps. Pour trouver des solutions globales nous allons donc considérer les données initiales qui sont proches d'une solution radiale définie globalement. On suppose $\gamma > \gamma_0$ pour que de telles solutions existent. Nous montrons tout d'abord la proposition suivante:

Proposition 5.1 *Soit $\gamma \in]\gamma_0, \gamma_2[$. Quel que soit $\alpha > 2$, il existe $\varepsilon > 0$ tel que, si*

$$\|\rho_0 - r_\gamma\|_{\Lambda^\alpha(\mathbf{T})} < \varepsilon,$$

alors la solution ρ de l'équation (E_γ) qui a pour donnée initiale ρ_0 est définie sur $[0,\infty[$ et converge vers r_γ dans l'espace $\Lambda^\alpha(\mathbf{T})$. De plus il existe deux constantes C et c telles que $\|\rho(.,t) - r_\gamma\|_{\Lambda^\alpha(\mathbf{T})} < Ce^{-ct}$.

Démonstration. Choisissons $T > 0$ tel que

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} |A(\theta,(T/2))|d\theta \leq 1/4\,.$$

Ici $A(\theta,t)$ désigne la fonction

$$A(\theta,t) = \sum_{-\infty}^{+\infty} e^{a_k(\gamma)t}e^{ik\theta}.$$

L'existence de T est assurée par la proposition 4. Ayant ainsi fixé T, on utilise le théorème 5.1 pour choisir ε_0 de sorte que, si $\|\rho_0 - r_\gamma\|_{\Lambda^\alpha(\mathbf{T})} < \varepsilon_0$, alors la solution ρ de l'équation (E_γ) qui a pour donnée initiale ρ_0 est définie sur $[0,T]$. Reprenant les notations de la section 3, c'est dire que

$$\vec{\mathcal{L}}(\rho)(\theta,t) = (0,\rho_0(\theta)).$$

En développant $\vec{\mathcal{L}}$ à l'ordre 1 au voisinage de r_γ, on en déduit que $h = \rho - r_\gamma$ satisfait à l'équation

$$Lh = g \qquad\qquad h(.,0) = \rho_0 - r_\gamma$$

avec

$$\|g\|_{\Lambda_c^{\alpha-2}(\mathbf{T}\times[0,T])} = o(\|h\|_{\Lambda_c^\alpha}) = o(\|\rho_0 - r_\gamma\|_{\Lambda^\alpha(\mathbf{T})}).$$

Il en résulte que h s'écrit $h_1 + h_2$, où

$$\begin{aligned} Lh_1 &= g & \qquad h_1(.,0) &= 0 \\ Lh_2 &= 0 & \qquad h_2(.,0) &= \rho_0 - r_\gamma\,. \end{aligned}$$

La valeur de h_2 à l'instant t est donnée par la convolution de $\rho_0 - r_\gamma$ avec la fonction $A(.,t)$. Il en découle pour h_2 l'estimation

$$\|h_2(.,(T/2))\|_{\Lambda^\alpha(\mathbf{T})} < (1/4)\|\rho_0 - r_\gamma\|_{\Lambda^\alpha(\mathbf{T})}.$$

D'autre part,

$$\|h_1(.,(T/2))\|_{\Lambda^\alpha(\mathbf{T})} \leq \|h_1\|_{\Lambda^\alpha_c} = o(\|\rho_0 - r_\gamma\|_{\Lambda^\alpha(\mathbf{T})}).$$

Si ε est choisi assez petit, on a donc, pour $\|\rho_0 - r_\gamma\|_{\Lambda^\alpha(\mathbf{T})} < \varepsilon$,

$$\|h_1(.,(T/2))\|_{\Lambda^\alpha(\mathbf{T})} < (1/4)\|\rho_0 - r_\gamma\|_{\Lambda^\alpha(\mathbf{T})}.$$

Finalement

$$\|\rho(.,(T/2)) - r_\gamma\|_{\Lambda^\alpha(\mathbf{T})} < (1/2)\|\rho_0 - r_\gamma\|_{\Lambda^\alpha(\mathbf{T})} \ ,$$

ce qui permet de montrer l'existence de la solution jusqu'au temps $3T/2$. En répétant l'argument on prouve l'existence globale de la solution, et le fait que la solution s'approche du cercle « stable » à une vitesse exponentielle. □

Du théorème 5.1 et de la proposition 5.1 on déduit

Théorème 5.2 *Si R_0 est strictement supérieur à r'_γ, il existe $\varepsilon > 0$ tel que si*

$$\|\rho_0 - R_0\|_{\Lambda^\alpha(\mathbf{T})} < \varepsilon,$$

alors la solution ρ de l'équation (E_γ) qui a pour donnée initiale ρ_0 est définie sur $[0,\infty[$ et converge vers r_γ dans l'espace $\Lambda^\alpha(\mathbf{T})$.De plus il existe deux constantes C et c telles que $\|\rho(.,t) - r_\gamma\|_{\Lambda^\alpha(\mathbf{T})} < Ce^{-ct}$.

Démonstration. On fixe T et on utilise le théorème 5.1 pour choisir ε assez petit de sorte que la solution existe sur l'intervalle $[0,T]$ et se soit suffisamment rapprochée de r_γ à l'instant $T/2$ pour pouvoir utiliser la proposition 5.1. □

Finissons par quelques remarques. Lorsque γ appartient à l'intervalle $]\gamma_0, \gamma_2[$ nous avons montré la stabilité des solutions radiales globales au problème non linéaire. Au delà de γ_2 nous avons seulement montré que le problème linéarisé devenait instable, avec un nombre croissant de valeurs propres positives. On aimerait évidemment faire plus, et savoir décrire le comportement des solutions au problème non linéaire. D'autre part on peut conjecturer qu'à chacune des valeurs γ_k apparaît une autre solution stationnaire. Nous ne savons pas répondre à ces questions. A partir de l'étude faite ici on peut seulement énoncer la proposition suivante:

Proposition 5.2 *Soit $\alpha > 2$ et soit $\gamma > \gamma_0$, γ différent de γ_k quel que soit $k \geq 2$. Alors $\rho \equiv r_\gamma$ est isolée en tant que solution stationnaire à l'équation (E_γ) appartenant à l'espace $\Lambda^\alpha(\mathbf{T})$.*

Démonstration. Les solutions stationnaires sont les interfaces Γ_0 pour lesquels

$$-K + \gamma v = 0.$$

En reprenant les notations de la section 3, c'est dire que, si Γ_0 est la courbe d'équation polaire $r = \rho(\theta)$, alors il définit une solution stationnaire lorsque $\mathcal{M}(\rho) \equiv 0$, où

$$\mathcal{M}(\rho) = -\frac{\rho^2 + 2\rho'^2_-\rho\rho''}{(\rho^2 + \rho'^2)^{3/2}} + \gamma w$$

avec w donné par (1). L'opérateur $\mathcal{M}$ est bien défini au voisinage de r_γ dans $\Lambda^\alpha(\mathbf{T})$, à valeurs dans $\Lambda^{\alpha-2}(\mathbf{T})$. De plus il est C^1, et de différentielle M en r_γ, avec M donné par

$$Mh = r_\gamma^{-2}(h + h'') + \gamma((r_\gamma/2)h - G_{r_\gamma} * h) .$$

On utilise le théorème d'inversion locale. Pour montrer l'inversibilité de M on procède comme dans la démonstration de la proposition 4.1, en utilisant l'alternative de Fredholm et le fait que l'opérateur linéaire M_0, défini par

$$M_0 h = r_\gamma^{-2}(-h + h'')$$

est un isomorphisme de $\Lambda^\alpha(\mathbf{T})$ sur $\Lambda^{\alpha-2}(\mathbf{T})$. Rappelons que

$$(\hat{Mh})(k) = (r_\gamma^{-2}(1 - k^2) + \gamma((r_\gamma/2) - \hat{G}_{r_\gamma}(k))\hat{h}(k) = a_k(\gamma)\hat{h}(k).$$

Le fait que M est injectif est donc donné par la condition sur γ et la proposition 4.2. D'autre part $M - M_0$ est un opérateur compact de $\Lambda^\alpha(\mathbf{T})$ dans $\Lambda^{\alpha-2}(\mathbf{T})$ puisque c'est un opérateur de convolution par une mesure bornée, qui préserve les espaces $\Lambda^\alpha(\mathbf{T})$. □

Cette dernière proposition est susceptible de divers prolongements. D'une part on pourrait montrer, en utilisant l'inversibilité de M et le théorème des fonctions implicites, que les domaines voisins du disque unité possèdent aussi des solutions stationnaires voisines de C_{r_γ}. D'autre part la proposition 5.2 est encore vérifiée par le cercle C_{r_∞} pour le système (S_∞) : cette fois M est donné par

$$(\hat{Mh})(k) = \gamma((r_\infty/2) - \hat{G}_{r_\infty}(k))\hat{h}(k) .$$

C'est donc, à une constante près, une perturbation compacte de l'identité puisque

$$\hat{G}_{r_\infty}(k)) = \mathcal{O}(1/|k|) .$$

(La convolution par G_{r_∞} envoie l'espace de Sobolev H^α dans $H^{\alpha+1}$, qui est inclus dans $\Lambda^{\alpha+1/2}$.) Par contre la généralisation à ce système du théorème 5.1 nécessite l'introduction de méthodes différentes.

Remarquons enfin qu'on peut trouver d'autres solutions radiales stationnaires du système $(S\gamma)$ de topologie différente. On peut montrer que, si γ est assez grand, il existe R_1, R_2, avec $R_2 > R_1 > 0$, tels que

$$\Omega_t^- = \{re^{i\theta}; \quad R_1 < r < R_2\}$$

est une solution stationnaire.

Références

[1] F. ABERGEL, Well posedness for a Cauchy problem associated to time-dependent free boundaries with nonlocal leading terms, preprint Orsay 1994

[2] A. BONAMI , D. HILHORST, E. LOGAK, Modified motion by mean curvature: local existence and uniqueness and qualitative properties, preprint 1996

[3] X. CHEN, The Hele-Shaw problem and area-preserving curve-shortening motions, *Arch. Rat. Mech. Anal.* **123** (1993), 117-151

[4] Y. KATZNELSON, *an introduction to Harmonic Analysis*, Wiley 1968

[5] O. A. LADYZHENSKAJA, V. A. SOLONNIKOV, N. N. URAL'CEVA, *Linear and quasilinear equations of parabolic type*, Amer. Math. Soc, 1968

[6] E. LOGAK, Equations de réaction-diffusion et ondes progressives dans des modèles de combustion et de transition de phase, Thèse de Doctorat, 1994

[7] M. MIMURA and T. TSUJIKAWA, Aggregating pattern dynamics in a chemotaxis model including growth, à paraître dans *Physica A*.

COMPACTS ASSOCIÉS AUX SOMMES DE SUITES LACUNAIRES

M. Déchamps
O. Sellès

Résumé. *Nous montrons ici, par des méthodes relativement élémentaires (construction explicite de mesures d'interpolation), que certains sous-ensembles de $\mathbb{Z}$, construits à partir de suites lacunaires de Hadamard, ont densité harmonique nulle.*

Abstract. *We show, with quite elementary methods (explicit construction of interpolation measures), that some subsets of $\mathbb{Z}$, built with Hadamard lacunary sequences, have harmonic density zero.*

Mots clés : *suites lacunaires, compacts associés, mesures d'interpolation, produits de Riesz.*

Keywords : *lacunary sequences, associated compacts, interpolation measures, Riesz products.*

Code matière AMS (1994) : 42A38-42A55-42A85-43A05-43A25-43A40-43A46

I. Introduction

Soit $\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} \ , \ |z| = 1\}$ le cercle unité, identifié à $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ et muni de la mesure de Lebesgue normalisée $dt/2\pi$. Pour toute fonction f de $L^1(\mathbb{T})$ et pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on note :

$$\hat{f}(n) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t)\, e^{-int} dt \tag{1}$$

$C(\mathbb{T})$ est l'espace de Banach des fonctions définies et continues sur $\mathbb{T}$, à valeurs complexes, muni de la norme uniforme. Pour f dans $C(\mathbb{T})$, on note :

$$\|f\| = \sup_{t \in \mathbb{T}} |f(t)| \ \text{ et } \ \|f\|_K = \sup_{t \in K} |f(t)|$$

où K est une partie compacte de $\mathbb{T}$ ($\| \quad \|_K$ n'est évidemment pas une norme).

Pour toute partie Λ de $\mathbb{Z}$, on note $C_\Lambda(\mathbb{T})$ le sous-espace de $C(\mathbb{T})$ des fonctions à spectre dans Λ, c'est à dire, telles que $\hat{f}(n) = 0$ si $n \in \mathbb{Z} \backslash \Lambda$.

$M(\mathbb{T})$ désigne l'espace de Banach des mesures complexes, régulières et bornées sur $\mathbb{T}$. Pour $\mu \in M(\mathbb{T})$, et pour $n \in \mathbb{Z}$, on note :

$$\hat{\mu}(n) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-int} d\mu(t)$$

Pour toute partie Λ de $\mathbb{Z}$, on note $M_\Lambda(\mathbb{T})$ le sous-espace de $M(\mathbb{T})$ des mesures à spectre dans Λ, c'est à dire, telles que $\hat{\mu}(n) = 0$ si $n \in \mathbb{Z} \backslash \Lambda$.

DEFINITION 1. Le compact K de $\mathbb{T}$ est dit associé à la partie Λ de $\mathbb{Z}$ s'il existe une constante $M > 0$ telle que pour toute fonction f de $C_\Lambda(\mathbb{T})$, on a :

$$\|f\| \leq M \ \|f\|_K \tag{2}$$

On dira alors que K est associé à Λ avec constante M.

La partie Λ de $\mathbb{Z}$ est dite avoir *densité harmonique nulle*, et on note $d_h(\Lambda) = 0$, si tout compact d'intérieur non vide de $\mathbb{T}$ est associé à Λ.

Quelles sont les parties de $\mathbb{Z}$ de densité harmonique nulle ? Nous rappelons au paragraphe suivant des résultats connus et des problèmes ouverts liés à cette question. Dans ce travail, nous montrons que les ensembles d'une classe usuelle d'ensembles lacunaires, que nous allons décrire, ont densité harmonique nulle.

DEFINITION 2. Une suite $E = \{\lambda_j\}_{j \geq 1}$ d'entiers positifs est appelée suite de Hadamard s'il existe $q > 1$ tel que pour tout entier $j \geq 1$, on a :

$$\frac{\lambda_{j+1}}{\lambda_j} \geq q \tag{3}$$

Pour tout entier $k \geq 1$, on note :

$$E_k = \{\pm\lambda_{j_1} \pm \lambda_{j_2} \ldots \pm \lambda_{j_k} \ , \ 1 \leq j_1 < j_2 < \ldots < j_k\}$$

Nous démontrons ici le résultat suivant :

THEOREME A. Soit $E = \{\lambda_j\}_{j\geq 1}$ une suite de Hadamard d'entiers positifs satisfaisant (3) avec une constante $q \geq 3$. Alors pour tout entier $k \geq 1$, la densité harmonique de E_k est nulle.

Ce résultat était connu pour $k = 2$ [3] et pour $k = 3$ [5]. La démonstration faite dans [3] utilisait des arguments fonctionnels et topologiques qui n'avaient pas d'extension naturelle à d'autres cas. La preuve donnée dans [5] n'utilisait plus ces arguments, mais faisait encore appel à des mesures d'interpolation aléatoires. Nous proposons ici une preuve élémentaire, basée sur la construction explicite de mesures d'interpolation liées à des produits de Riesz et à des noyaux de Fejer adaptés au problème.

II. Résultats connus et problèmes ouverts

PROBLEME 1. Quelles sont les parties de $\mathbb{Z}$ de densité harmonique nulle ?

Les suites de Hadamard fournissent le premier exemple non trivial d'ensemble de densité harmonique nulle [17]. On montre ensuite que les réunions finies de suites de Hadamard ont densité harmonique nulle [6]. Mais en général, le problème de la réunion est ouvert :

PROBLEME 2. Si Λ_1 et Λ_2 sont deux parties de $\mathbb{Z}$ ayant densité harmonique nulle, est-ce que $d_h(\Lambda_1 \cup \Lambda_2) = 0$?

Par contre, on sait qu'il est possible d'ajouter un nombre fini de points à une suite sans "trop changer" les compacts qui lui sont associés.

PROPOSITION 1. [4] Soit K un compact de $\mathbb{T}$ associé à la suite Λ de $\mathbb{Z}$. Alors pour tout $n \in \mathbb{Z}$ et pour tout voisinage compact W de l'origine dans $\mathbb{T}$, le compact $K + W$ est associé à $\{n\} \cup \Lambda$.

Beaucoup de résultats autour des compacts associés à une suite peuvent être reliés au problème général suivant :

PROBLEME 3. Quelles sont les propriétés fonctionnelles de l'espace de Banach $C_\Lambda(\mathbb{T})$ ou les propriétés arithmétiques de la suite Λ qui assurent l'existence d'un compact $K \neq \mathbb{T}$ associé à Λ ? Quelles propriétés impliquent que $d_h(\Lambda) = 0$?

La première propriété fonctionnelle qui a été étudiée dans ce contexte est liée à la notion d'*ensemble de Sidon*:

DEFINITION 3. Un sous-ensemble Λ de $\mathbb{Z}$ est appelé ensemble de Sidon s'il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout polynôme trigonométrique $P(t) = \sum_{\lambda\in\Lambda} a_\lambda e^{i\lambda t}$ à spectre dans Λ, on a :

$$\sum_{\lambda\in\Lambda} |a_\lambda| \leq C \ \|P\|$$

Si Λ est un ensemble de Sidon, $C_\Lambda(\mathbb{T})$ est isomorphe à l'espace de Banach l^1 des suites de nombres complexes $(a_n)_{n\geq 0}$ telles que $\sum\limits_{n\geq 0} |a_n| < \infty$. La réciproque est vraie aussi : si $C_\Lambda(\mathbb{T})$ est isomorphe à l^1, alors Λ est un ensemble de Sidon [12]. Ce résultat a été ensuite redémontré par des méthodes plus directes et a admis des généralisations successives: si $C_\Lambda(\mathbb{T})$ est de cotype 2 [12] ou de cotype q pour un $q > 2$ [2], alors Λ est un ensemble de Sidon.

THEOREME 2. [4] Si $\Lambda \subseteq \mathbb{Z}$ est un ensemble de Sidon alors $d_h(\Lambda) = 0$.

La preuve de ce théorème, très liée à la structure des ensembles de Sidon ne semble pas s'adapter à d'autres classes d'ensembles lacunaires.

"L'abondance" des ensembles de Sidon est assurée par une condition arithmétique, qui se généralise à tout groupe abélien.

DEFINITION 4. Un sous-ensemble Λ de $\mathbb{Z}$ est dit quasi-indépendant (resp. dissocié) si pour tout sous-ensemble fini A de Λ et toute suite $(\epsilon_n)_{n\in A} \in \{-1,0,1\}^A$ (resp. $(\epsilon_n)_{n\in A} \in \{-2,-1,0,1,2\}^A$),

$$\sum_{n\in A} \epsilon_n \, n = 0 \Longrightarrow \epsilon_n = 0, \; n \in A$$

PROPOSITION 2.[15] Toute réunion finie d'ensembles quasi-indépendants de $\mathbb{Z}$ est un ensemble de Sidon.

Il est surprenant que le résultat inverse soit encore ouvert :

PROBLEME 4. Tout ensemble de Sidon de $\mathbb{Z}$ est-il réunion finie d'ensembles quasi-indépendants ?

La première notion de quasi-indépendance, introduite par S.B. Stečkin [16], a été ensuite étudiée et simplifiée par D.Rider [14], G.Pisier [13], et J.Bourgain [1].

On note c_o l'espace de Banach des suites $(c_n)_{n\geq 1}$ de nombres complexes telles que $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = 0$. On dit qu'un espace de Banach B ne contient pas c_o, et on note $B \not\supset c_o$, si B n'a pas de sous-espace fermé isomorphe à c_o.

Cette dernière condition est liée à l'existence de compacts associés :

THEOREME 3. [8] Si $C_\Lambda(\mathbb{T})$ ne contient pas c_o, il existe un voisinage ouvert V de l'origine dans $\mathbb{T}$ tel que le compact $\mathbb{T}\backslash V$ soit associé à Λ.

Il y a un certain nombre de conditions nécessaires ou suffisantes, arithmétiques ou fonctionnelles, liées à la condition : $C_\Lambda(\mathbb{T}) \not\supset c_o$:

Pour toute suite Λ d'entiers, la densité supérieure uniforme de répartition de Λ, notée $\Delta(\Lambda)$, est définie par :

$$\Delta(\Lambda) = \lim_{r\to\infty} \sup_{m\in\mathbb{Z}} \frac{n(m, m+r)}{r}$$

où $n(m, m+r)$ est le nombre de points de Λ dans l'intervalle $[m, m+r]$.

Si $C_\Lambda(\mathbb{T}) \not\supset c_o$, alors $\Delta(\Lambda) = 0$ [9]. Ce résultat a été ensuite simplifié et généralisé : si $C_\Lambda(\mathbb{T}) \not\supset c_o$, alors Λ ne contient pas d'ensemble de Hilbert [7].

Si $C_\Lambda(\mathbb{T}) \not\supset c_o$, alors Λ est un ensemble de Riesz, c'est à dire $L^1_\Lambda(\mathbb{T}) = M_\Lambda(\mathbb{T})$, et la réciproque est fausse [10]. Si Λ est un ensemble de Rosenthal, c'est à dire $L^\infty_\Lambda(T) = M_\Lambda(T)$, alors $C_\Lambda(\mathbb{T}) \not\supset c_o$ [10]. La réciproque n'est pas connue :

PROBLEME 5. Si $C_\Lambda(\mathbb{T}) \not\supset c_o$, est-ce que Λ est un ensemble de Rosenthal ?

PROBLEME 6. Si $C_\Lambda(\mathbb{T}) \not\supset c_o$, est-ce que Λ a la propriété de Schur ?

Revenons aux ensembles E_k, $k \geq 1$, définis à partir d'une suite $E = (\lambda_j)_{j\geq 1}$ d'entiers. Si la suite E est dissociée (en particulier si E est une suite de Hadamard satisfaisant (3) avec $q \geq 3$) on sait que, pour $k \geq 1$, $C_{E_k}(\mathbb{T}) \not\supset c_o$, car $C_{E_k}(\mathbb{T})$ est alors isomorphe à un sous-espace fermé du produit tensoriel injectif $\underbrace{l^1\check{\oplus}\ldots\check{\oplus}l^1}_{k \text{ fois}}$ [11]. Cette propriété a été à l'origine de la preuve que $d_h(E_2) = 0$ dans [3]. Nous ne l'utiliserons pas ici pour établir notre théorème, néanmoins les relations entre la condition $C_\Lambda(\mathbb{T}) \not\supset c_o$ et d'autres "mesures" de lacunarité de Λ restent d'actualité.

III. Lemmes préparatoires

Lemme 1. *La notion de compact associé est invariante par translation : si le compact K de $\mathbb{T}$ est associé à $\Lambda \subset \mathbb{Z}$ avec constante C, alors pour tout $x_o \in \mathbb{T}$ et pour tout $\gamma_o \in \mathbb{Z}$, $K + x_o$ est associé à $\Lambda + \gamma_o$ avec constante C.*

La preuve est élémentaire.

Lemme 2. *Soit K un compact de $\mathbb{T}$ associé à $\Lambda \subset \mathbb{Z}$ avec constante C. Alors pour toute mesure $\mu \in M(\mathbb{T})$ il existe $\nu \in M(\mathbb{T})$ à support dans K telle que :*

- $\|\nu\| \leq C\ \|\mu\|$
- *pour tout* $\gamma \in \Lambda$, $\widehat{\nu}(\gamma) = \widehat{\mu}(\gamma)$

ν est dite une mesure d'interpolation (sur Λ, à support dans K).

Preuve. Il s'agit d'une simple application du théorème de Hahn-Banach.

Soit $L :\ \begin{array}{ccc} C_\Lambda(\mathbb{T}) & \to & C(K) \\ f & \mapsto & f_{|K} \end{array}$

On montre facilement que $Im(L)$ est fermée dans $C(K)$, que L est un isomorphisme de $C_\Lambda(\mathbb{T})$ sur $Im(L)$, et que $\|L^{-1}\| \leq C$. Si $\mu \in M(\mathbb{T})$, l'application $g \in Im(L) \to \mu(L^{-1}(g))$ est une forme linéaire continue sur $Im(L)$, de norme majorée par $C\ \|\mu\|$. D'après le théorème de Hanh-Banach, il existe $\nu \in M(K)$ ayant les propriétés voulues.

La lacunarité et la structure particulière des ensembles E_k jouent un rôle fondamental dans la démonstration. Les deux lemmes suivants sont capitaux pour la suite. Pour tout entier $k \geq 1$ et pour tout entier $r \geq 1$, on note :

$$E_k^r = \{\pm\lambda_{j_1} \pm \lambda_{j_2} \pm \ldots \pm \lambda_{j_k}\ ,\ r \leq j_1 < j_2 < \ldots < j_k\}$$

Lemme 3 (lacunarité).

a . Pour tout entier $r \geq 1$, pour tous n , $n' \in \{0\} \cup \bigcup_{k \geq 1} E_k^r$, $n \neq n'$, on a :

$$|n - n'| \geq \lambda_r$$

b . Soit k un entier. Il existe $\beta \in \left]0, \frac{1}{2}\right[$ tel que pour tout $r > k$, on a : $|\gamma| \leq \beta \, \lambda_r$, pour tout γ de la forme :

$$\gamma = \epsilon_1 \lambda_{j_1} + \ldots + \epsilon_s \lambda_{j_s} \,, \quad \begin{array}{l} 1 \leq j_1 < \ldots < j_s < r \\ 1 \leq s \leq k \\ \epsilon_i \in \{-1, 0, 1\} \,, 1 \leq i \leq s \end{array}$$

c . Soit k un entier . Il existe $\beta' > 0$ tel que pour tout $r > k$, pour tous n , n' comme en a. , pour tous γ , γ' comme en b. :

$$|n - n' + \gamma - \gamma'| \geq \beta' \lambda_r$$

Preuve .

a . Soient n, n', r comme dans l'énoncé . $n - n'$ s'écrit :

$$n - n' = \sum_{k=r}^{r+p} \alpha_k \lambda_k \quad \textit{où} \ : \quad \begin{array}{l} \blacklozenge \ p \in \mathbb{N} \\ \blacklozenge \ \alpha_k \in \{0, \pm 1, \pm 2\} \\ \blacklozenge \ \alpha_{r+p} \neq 0 \end{array}$$

- Si $p = 0$, l'inégalité est claire .
- Si $p \geq 1$, on a :

$$\begin{aligned} |n - n'| &\geq \lambda_{r+p} - 2(\lambda_r + \ldots + \lambda_{r+p-1}) \\ &\geq \lambda_{r+p} - \frac{2}{q} \lambda_{r+p} (1 + \frac{1}{q} + \ldots + \frac{1}{q^{p-1}}) \\ &\geq \lambda_r \, q^p (1 - \frac{2}{q} (1 + \ldots + \frac{1}{q^{p-1}})) \end{aligned}$$

or : $q^p(1 - \frac{2}{q}(1 + \ldots + \frac{1}{q^{p-1}})) \geq 3^p(1 - \frac{2}{3} \frac{1 - 3^{-p}}{1 - 3^{-1}}) = 1$. D'où l'inégalité .

b . Soit γ comme dans l'énoncé . On a :

$$\begin{aligned} |\gamma| &\leq (\lambda_{r-k} + \ldots + \lambda_{r-1}) \\ &\leq \frac{\lambda_r}{q} (1 + \frac{1}{q} + \ldots + \frac{1}{q^{k-1}}) \end{aligned}$$

Or : $\frac{1}{q}(1 + \frac{1}{q} + \ldots + \frac{1}{q^{k-1}}) = \frac{1 - q^{-k}}{q - 1} < \frac{1}{2}$

c . évident avec a. et b. (on prend $\beta' = 1 - 2\beta$)

Lemme 4 . *Soit* $n \in \mathbb{N}^*$ *.Pour tout* $i \in \{1,\ldots,n\}$ *, il existe des mesures* τ_i *telles que :*

- $\widehat{\tau_i}(0) = 1$
- $\widehat{\tau_i}(\gamma) = 1$ *si* $\gamma \in E_i$
- $\widehat{\tau_i}(\gamma) = 0$ *si* $\gamma \in E_j$, $j \in \{1,\ldots,n\}$, $j \neq i$.

Preuve : On considère le produit de Riesz suivant :

$$R(t) = \prod_{j\geq 1}(1 + \cos\lambda_j t\ )$$

On vérifie facilement que :

$$\begin{array}{l} \diamondsuit\ R \geq 0 \\ \diamondsuit\ \|R\| = \widehat{R}(0) = 1 \\ \diamondsuit\ \widehat{R}(\gamma) = 2^{-k}\ si\ \gamma \in E_k \\ \diamondsuit\ \widehat{R}(\gamma) = 0\ \ si\ \gamma \notin \{0\} \cup \bigcup_{k\geq 1} E_k \end{array}$$

Pour $i \in \{1,\ldots,n\}$, il existe un unique polynôme P_i de degré n tel que : $P_i(0) = 1$, $P_i(2^{-i}) = 1$ *et* $P_i(2^{-j}) = 0$ *si* $j \neq i$, $1 \leq j \leq n$.(on peut par exemple utiliser les polynômes interpolateurs de Lagrange).On pose alors : $\tau_i = P_i(R)$, où , par définition : $R^0 = \delta$ (mesure de Dirac en 0) et pour $k \geq 1$, $R^k = \underbrace{R * \ldots * R}_{k \text{ fois}}$

($*$ désigne le produit de convolution sur $M(\mathbb{T})$) .On vérifie alors aisément que τ_i convient .

IV. Preuve du théorème

En fait, nous allons montrer un résultat légèrement plus fort que le théorème A :

Théorème B. *Soit* $E = \{\lambda_j\}_{j\geq 1}$ *une suite d'entiers de Hadamard vérifiant :* $\inf_{j\geq 1}\left(\dfrac{\lambda_{j+1}}{\lambda_j}\right) \geq q \geq 3$. *Posons pour tout entier* $k \geq 1$,

$$E_k = \{\pm\lambda_{j_1} \pm \lambda_{j_2} \ldots \pm \lambda_{j_k}\ ,\ 1 \leq j_1 < j_2 < \ldots < j_k\}$$

Alors, pour tout entier $n \geq 1$,

$$d_h(\{0\} \cup E_1 \cup E_2 \cup \ldots \cup E_n) = 0$$

La démonstration se fait par récurrence sur l'entier n (l'idée de cette récurrence se fonde à l'examen du cas $n = 2$ et surtout du cas $n = 3$).

Soit H_n l'énoncé suivant : $d_h(\{0\} \cup E_1 \cup E_2 \cup \ldots \cup E_n) = 0$.

H_1 est vrai car $\{0\} \cup E_1$ est un ensemble de Sidon.

Supposons H_n vrai et montrons H_{n+1}.Nous procédons par étapes.

Etape 1 . Décomposition des ensembles E_k.
Soit r un entier, $r > n+1$.On rappelle que pour tout $k \geq 1$:

$$E_k^r = \{\pm\lambda_{j_1} \ldots \pm \lambda_{j_k},\ r \leq j_1 < \ldots < j_k\}$$

On introduit de nouvelles notations.
Pour tout $s \in \mathbb{N},\ 1 \leq s \leq n+1$, on pose :

$$I_s^r = \{(j_1, \ldots, j_s) \in \mathbb{Z}^s,\ j_1 j_2 \ldots j_s \neq 0,\ |j_1| < \ldots < |j_s| < r\}$$

Soit $X = (j_1, \ldots, j_s) \in I_s^r$.
On pose $\epsilon_X = sgn(j_1)\ \lambda_{|j_1|} + \ldots + sgn(j_s)\ \lambda_{|j_s|}$ (pour tout entier j, $sgn(j)$ désigne le signe de j).
Pour tout $k \geq 2$, pour tout $s \in \{1, ..., k-1\}$, pour tout $X \in I_s^r$, on pose:

$$E_{k,s}^r(X) = \epsilon_X + E_{k-s}^r$$

Par convention : $E_{k,k}^r(X) = \{\epsilon_X\}$, $X \in I_k^r$, $1 \leq k \leq n+1$
Ensuite, on pose : $E_{k,s}^r = \bigcup_{X \in I_s^r} E_{k,s}^r(X)$, $2 \leq k,\ 1 \leq s \leq k$.
On vérifie aisément que :

$$\bigcup_{k=1}^{n+1} E_k = \bigcup_{k=1}^{n+1} E_k^r \cup \bigcup_{k=2}^{n+1} \left(\bigcup_{s=1}^{k-1} E_{k,s}^r \right) \cup \underbrace{\bigcup_{k=1}^{n+1} E_{k,k}^r}_{ensemble\ fini}$$

Notons F_r l'ensemble fini qui apparaît dans la décomposition précédente.D'après le lemme 1 et la proposition 1, il suffit de montrer que pour tout $a > 0,\ a < \pi$, il existe un entier $r \geq n+1$ tel que $E_1 \cup \ldots \cup E_{n+1} \backslash F_r$ soit associé à $[-a, +a]$.

Soit donc $a > 0,\ a < \pi$. Pour tout $x \in \mathbb{T}$, on va construire une mesure qui interpole δ_x sur $E_1 \cup \ldots \cup E_{n+1} \backslash F_r$ et dont une partie significative de la masse est portée par $[-a, +a]$. Cette mesure sera une somme de mesures adaptées à chacun des ensembles de la décomposition établie à l'étape 1.

Etape 2 . Produits de Riesz.
Soit $R(t) = \prod_{j \geq r} (1 + \cos \lambda_j (x+t))$.

Cette notation signifie que la suite$R_N(t) = \prod_{j=r}^{N} (1 + \cos \lambda_j (x+t))$ converge dans $M(\mathbb{T})$ pour la topologie faible $\sigma(M(\mathbb{T}), C(\mathbb{T}))$ vers la mesure R.

On a $R \geq 0$, $\|R\| = \hat{R}(0) = 1$, $Sp(R) = \{0\} \cup \bigcup_{k \geq 1} E_k^r$, et si $\gamma \in E_k^r$, $k \geq 1$, $\hat{R}(\gamma) = 2^{-k} e^{i\gamma x}$

Etape 3 . Noyaux de Fejer.

Soit β' la constante apparaissant dans le lemme 3. On considère $N = [\beta' q^{r-1}]$ la partie entière de $\beta' q^{r-1}$ et F_N le noyau de Fejer d'ordre N:

$$F_N(t) = \frac{1}{N+1}\frac{\sin^2 \frac{N+1}{2}t}{\sin^2 \frac{t}{2}} = \frac{1}{N+1}\sum_{|j|\leq N}\left(1-\frac{|j|}{N+1}\right)e^{ijt}$$

Etape 4 . Mesure ν_o.

Par hypothèse, $d_h(\{0\}\cup E_1 \cup E_2 \cup \ldots \cup E_n) = 0$. Donc $\{0\}\cup E_1 \cup E_2 \cup \ldots \cup E_n$ est associé à $\left[-\frac{a}{2}, \frac{a}{2}\right]$ avec constante C. D'après le lemme 2 , il existe une mesure ν_o à support dans $\left[-\frac{a}{2}, \frac{a}{2}\right]$ telle que $\hat{\nu}_o(0) = 1$

$\hat{\nu}_o(\gamma) = 0$ si $\gamma \in E_1 \cup E_2 \cup \ldots \cup E_n$

$\|\nu_o\| \leq C$

Etape 5 : Mesures d'interpolation sur E_k^r , $1 \leq k \leq n+1$.

On pose : $\mu_k = 2^k(R * \tau_k)(F_N * \nu_o)$ où les mesures τ_k sont celles données par le lemme 4. Soit $k \in \{1, ..., n+1\}$.

- Soit $\gamma \in \mathbb{Z}$. Calculons $\hat{\mu}_k(\gamma)$.

$$\begin{aligned}\hat{\mu}_k(\gamma) &= 2^k \int e^{-i\gamma t} d(R * \tau_k)(F_N * \nu_o)(t) \\ &= 2^k \sum_{\delta \in Sp(R)\cap Sp(\tau_k)} \hat{R}(\delta)\hat{\tau}_k(\delta)\hat{F}_N(\gamma-\delta)\hat{\nu}_o(\gamma-\delta) \\ &= 2^k \sum_{\delta\in\{0\}\cup\ E_k^r} \hat{R}(\delta)\hat{F}_N(\gamma-\delta)\hat{\nu}_o(\gamma-\delta)\end{aligned}$$

- Si $\gamma \in E_k^r$, alors $\hat{\mu}_k(\gamma) = e^{i\gamma x}$.

En effet, si $\delta \in \{0\} \cup\ E_k^r$, $\delta \neq \gamma$, le lemme 3 garantit que $|\gamma - \delta| > N$ et donc que $\hat{F}_N(\gamma-\delta) = 0$. D'où $\hat{\mu}_k(\gamma) = 2^k\hat{R}(\gamma) = e^{i\gamma x}$.

- Si $\gamma \in E_k \backslash (E_k^r \cup F_r) = \bigcup_{s=1}^{k-1} E_{k,s}^r$, alors $\hat{\mu}_k(\gamma) = 0$ (notons que l'ensemble précédent est vide pour $k = 1$; on suppose donc implicitement que $k \geq 2$).

En effet, il existe alors $s \in \{1, ..., k-1\}$, $X \in I_s^r$ et $\xi \in E_{k-s}^r$ tels que $\gamma = \epsilon_X + \xi$. Le lemme 3 s'applique à nouveau et on a pour tout $\delta \in \{0\}\cup\ E_k^r$: $|\gamma - \delta| > N$ et $\hat{F}_N(\gamma-\delta) = 0$.

- Soit maintenant $k' \neq k$ ($k' \in \{1, ..., n+1\}$) et $\gamma \in E_{k'}\backslash F_r$. Alors $\hat{\mu}_k(\gamma) = 0$.

Pour montrer ceci, on distingue plusieurs cas :

Premier cas : $\gamma \in\ E_{k'}^r$

Si $\delta \in \{0\} \cup\ E_k^r$, on a , puisqu'alors $\gamma \neq \delta$, $|\gamma - \delta| > N$ et $\hat{F}_N(\gamma - \delta) = 0$.

Deuxième cas : $\gamma \notin E^r_{k'}$ (ce qui implique $k' > 1$)

Il existe alors $s \in \{1, ..., k'-1\}$, $X \in I^r_s$ et $\xi \in E^r_{k'-s}$ tels que $\gamma = \epsilon_X + \xi$.

Si $k' - s \neq k$, on peut alors appliquer le lemme 3 et on obtient que pour tout $\delta \in \{0\} \cup E^r_k$, $\hat{F}_N(\gamma - \delta) = 0$.

Si $k' - s = k$, le lemme 3 s'applique encore lorsque $\delta \neq \xi$. Si $\delta = \xi$, on a $\hat{\nu}_o(\epsilon_X) = 0$ (car ϵ_X appartient alors à $E_1 \cup ... \cup E_n$). D'où $\hat{\mu}_k(\gamma) = 0$.

Etape 6 . Mesure d'interpolation sur $E^r_{k,s}(X)$.

Soit $k \in \{2, ..., n+1\}$, soit $s \in \{1, ..., k-1\}$, soit $X \in I^r_s$.

$-\epsilon_X + (\{0\} \cup E_1 \cup ... \cup E_n)$ est associé à $[-\frac{a}{2}, \frac{a}{2}]$ avec constante C (ceci résulte du lemme 1). D'après le lemme 2 (appliqué à la mesure de Dirac en 0), il existe une mesure $\nu_{s,X}$ à support dans $[-\frac{a}{2}, \frac{a}{2}]$ telle que :

$\hat{\nu}_{s,X}(0) = 1$

$\hat{\nu}_{s,X}(\gamma) = 0$ si $\gamma \in -\epsilon_X + (\{0\} \cup E_1 \cup ... \cup E_n)$, $\gamma \neq 0$.

$\|\nu_{s,X}\| \leq C$

On pose alors :

$$\mu_{k,s,X} = 2^{k-s} e^{i\epsilon_X(x+t)} (R * \tau_{k-s})(F_N * \nu_{s,X})$$

$$\text{et} \qquad \mu'_{k,s,X} = (R * \tau_{k-s})(F_N * \nu_{s,X})$$

- Soit $\gamma \in \mathbb{Z}$. Calculons $\hat{\mu}_{k,s,X}(\gamma)$.

$$\begin{aligned} \hat{\mu}_{k,s,X}(\gamma) &= 2^{k-s}\ e^{i\epsilon_X x}\ \hat{\mu}'_{k,s,X}(\gamma - \epsilon_X) \\ &= 2^{k-s}\ e^{i\epsilon_X x} \sum_{\delta \in \{0\} \cup E^r_{k-s}} \hat{R}(\delta) \hat{F}_N(\gamma - \epsilon_X - \delta) \hat{\nu}_{s,X}(\gamma - \epsilon_X - \delta) \end{aligned}$$

- Si $\gamma \in E^r_{k,s}(X)$, alors $\hat{\mu}_{k,s,X}(\gamma) = e^{i\gamma x}$.

En effet, γ s'écrit $\gamma = \epsilon_X + \gamma'$ où $\gamma' \in E^r_{k-s}$.

Pour tout $\delta \in \{0\} \cup E^r_{k-s}$, $\delta \neq \gamma'$, on a d'après le lemme 3, $|\delta - \gamma'| > N$ et $\hat{F}_N(\gamma - \epsilon_X - \delta) = \hat{F}_N(\gamma' - \delta) = 0$.

D'où $\hat{\mu}_{k,s,X}(\gamma) = 2^{k-s}\ e^{i\epsilon_X x}\ \hat{R}(\gamma') = 2^{k-s}\ e^{i\epsilon_X x}\ 2^{s-k} e^{i\gamma' x} = e^{i\gamma x}$.

- Soit $Y \in I^r_s$, $Y \neq X$ et soit $\gamma \in E^r_{k,s}(Y)$. Alors $\hat{\mu}_{k,s,X}(\gamma) = 0$.

En effet, γ s'écrit $\gamma = \epsilon_Y + \omega$, où $\omega \in E^r_{k-s}$. Soit alors $\delta \in \{0\} \cup E^r_{k-s}$. Si $\delta \neq \omega$, alors on peut appliquer le lemme de lacunarité et en déduire que $|\epsilon_Y + \omega - \epsilon_X - \delta| > N$, et donc que $\hat{F}_N(\epsilon_Y + \omega - \epsilon_X - \delta) = 0$. Si $\delta = \omega$, alors $\hat{\nu}_{s,X}(\epsilon_Y - \epsilon_X) = 0$ (comme $Y \neq X$, la lacunarité assure que $\epsilon_Y \neq \epsilon_X$).

- Soit $s' \neq s$, $s' \in \{1, ..., k-1\}$. Soit $Y \in I^r_{s'}$ et $\gamma \in E^r_{k,s'}(Y)$.
  Alors $\quad \hat{\mu}_{k,s,X}(\gamma) = 0$.

En effet, γ s'écrit $\gamma = \epsilon_Y + \omega$, où $\omega \in E^r_{k-s'}$. Si $\delta \in \{0\} \cup E^r_{k-s}$, on a nécessairement $\delta \neq \omega$. On peut donc appliquer le lemme 3 pour conclure que $\hat{F}_N(\epsilon_Y + \omega - \epsilon_X - \delta) = 0$.

- Soit $k' \in \{1, ..., n+1\}$, $k' \neq k$. Soit $\gamma \in E_{k'} \backslash F_r$. Alors $\hat{\mu}_{k,s,X}(\gamma) = 0$.

On distingue plusieurs cas :

Premier cas : $\gamma \in E^r_{k'}$.
Soit $\delta \in \{0\} \cup E^r_{k-s}$. Si $\delta \neq \gamma$ (ce qui est en particulier le cas si $k - s \neq k'$), on applique une fois de plus le lemme de lacunarité pour conclure que $\hat{F}_N(\gamma - \epsilon_X - \delta) = 0$. Si $\delta = \gamma$, on a $\hat{\nu}_{s,X}(-\epsilon_X) = 0$. D'où $\hat{\mu}_{k,s,X}(\gamma) = 0$.

Deuxième cas : $\gamma \notin E^r_{k'}$.
Il existe alors $q \in \{1, ..., k'-1\}$, $Y \in I^r_q$ et $\omega \in E^r_{k'-q}$ tels que γ s'écrive : $\gamma = \epsilon_Y + \omega$.
Soit $\delta \in \{0\} \cup E^r_{k-s}$. Si $\delta \neq \omega$ (ce qui est en particulier le cas si $k - s \neq k' - q$), le lemme 3 s'applique à nouveau et $\hat{F}_N(\gamma - \epsilon_X - \delta) = 0$.
Si $\delta = \omega$, on a nécessairement $k - s = k' - q$. Ceci impose alors $s \neq q$ et donc $\epsilon_Y \neq \epsilon_X$. On sait alors que $\hat{\nu}_{s,X}(\epsilon_Y - \epsilon_X) = 0$.
D'où $\hat{\mu}_{k,s,X}(\gamma) = 0$.

Etape 7 . Majoration des normes des mesures précédentes.

On sait que $\|F_N\| \leq N + 1$. On en déduit donc les majorations suivantes :

- Soit $k \in \{1, ..., n+1\}$. Nous rappelons que $\mu_k = 2^k (R * \tau_k)(F_N * \nu_o)$.

On a alors :
$\|\mu_k\| \leq 2^k \, \|\tau_k\| \; (N+1) \, C$ et $\displaystyle \frac{1}{2\pi} \int_{a \leq |t| \leq \pi} d\,|\mu_k| \leq \frac{2^k \, \|\tau_k\| \; C}{(N+1) \sin^2 \frac{a}{4}}$

- Soit $k \in \{2, ..., n+1\}$, soit $s \in \{1, ..., k-1\}$, soit $X \in I^r_s$. On rappelle que $\mu_{k,s,X} = 2^{k-s} \; e^{i\epsilon_X(x+t)} \; (R * \tau_{k-s})(F_N * \nu_{s,X})$.

On a donc :

$$\|\mu_{k,s,X}\| \leq 2^{k-s} \, \|\tau_{k-s}\| \; C \; (N+1) \text{ et } \frac{1}{2\pi} \int_{a \leq |t| \leq \pi} d\,|\mu_{k,s,X}| \leq \frac{2^{k-s} \, \|\tau_{k-s}\| \; C}{(N+1) \sin^2 \frac{a}{4}}$$

Etape 8 . Conclusion

Appelons

$$C_r = \max_{1\leq k\leq n+1} 2^k \, \|\tau_k\| \;\; (N+1)\; C$$

$$\alpha_r = \frac{\max\limits_{1\leq k\leq n+1, 0\leq s\leq k-1} (2^{k-s}\,\|\tau_{k-s}\|\, C)}{(N+1)\sin^2\dfrac{a}{4}}$$

D'autre part, il est clair que si δ_r désigne le nombre de mesures précédemment construites, on a $\delta_r = O(r^{n+1})$. Enfin, si on veut bien se rappeler que $N = [\beta' q^{r-1}]$, il est également clair que $\alpha_r \; \delta_r \underset{r\to\infty}{\longrightarrow} 0$.

On prend donc r_o tel que $\alpha_{r_o} \; \delta_{r_o} < 1$ et $r_o > n+1$.

Soit alors P un polynôme trigonométrique à spectre dans $\bigcup\limits_{1\leq k\leq n+1} E_k \backslash F_{r_o}$. Soit $x \in \mathbb{T}$ tel que $\|P\| = |P(x)|$. A cet élément on associe les mesures construites précédemment .

Appelons μ la somme de toutes ces mesures. Alors on a :

$$\begin{aligned}
\|P\| = |P(x)| &= \left|\sum_{\gamma\in Sp(P)} \hat{P}(\gamma)\; e^{i\gamma x}\right| \\
&= \left|\sum_{\gamma\in Sp(P)} \hat{P}(\gamma)\; \hat{\mu}(\gamma)\right| \\
&= |\mu(P)| \\
&\leq \frac{1}{2\pi}\Big(\int_{a\leq|t|\leq\pi} |P|\, d\,|\mu| + \int_{|t|\leq a} |P|\, d\,|\mu|\Big) \\
&\leq \delta_{r_o}\; \alpha_{r_o} \;\; \|P\| + \delta_{r_o}\; C_{r_o} \;\; \|P\|_{[-a,a]}
\end{aligned}$$

D'où $\|P\| \leq \dfrac{\delta_{r_o}\; C_{r_o}}{1-\delta_{r_o}\;\alpha_{r_o}} \;\; \|P\|_{[-a,a]}$.

L'inégalité reste vraie par un argument de densité pour les fonctions continues à spectre dans $\bigcup\limits_{1\leq k\leq n+1} E_k \backslash F_{r_o}$. Ceci démontre donc le théorème.

Bibliographie

[1] **J. Bourgain**, *Sidon sets and Riesz products*, An. Inst. Fourier, Grenoble 35, 1 (1985), p. 137–148.

[2] **J. Bourgain et V.D. Milman**, *Dichotomie du cotype pour les espaces invariants*, CRAS Paris, T 300, série I (1985), p. 263 – 266.

[3] **M. Déchamps**, *Densité harmonique et espaces de Banach invariants par translation ne contenant pas c_o*, Colloquium Mathematicum 51 (1987), p.67 – 84

[4] **M. Déchamps-Gondim,** *Ensembles de Sidon topologiques*, Ann. Inst. Fourier 22 (1972).

[5] **M. Déchamps-Gondim,** *Théorie isomorphique des frontières et densité harmonique*, Seminario Brasileiro de Análise n° 24 (1986), p. 203 – 214.

[6] **V.F. Gapoškin**, *Absolute convergence of lacunary series,* Mathematics of the USSR Izvestija, tome 1-2, p. 1217 – 1233.

[7] **D. Li**, *On Hilbert sets and $C_\Lambda(G)$-spaces with no subspaces isomorphic to c_o*, Colloquium Mathematicum 68 (1995), p. 67 – 77. Addendum ibid. p. 79

[8] **F. Lust-Piquard**, *L'espace des fonctions presque périodiques dont le spectre est contenu dans un ensemble compact dénombrable a la propriété de Schur*, Colloquium Mathematicum 41 (1979).

[9] **F. Lust-Piquard,** *Eléments ergodiques et totalement ergodiques dans $L^\infty(G)$*, Studia Math. 69 (1981), p. 191 – 225.

[10] **F. Lust-Piquard**, *Ensembles de Rosenthal et ensembles de Riesz,* CRAS, Série A, 282 (1976), p. 833 – 835.

[11] **Y. Meyer**, *Recent advances in spectral synthesis*, Conf. on Harm. Anal., Maryland 1972, Lecture notes in math. 266.

[12] **G. Pisier**, *Ensembles de Sidon et espaces de cotype 2*, Sem. sur la géométrie des espaces de Banach, Ecole Polytechnique, exposé n°14 (1978).

[13] **G. Pisier,** *Condition d'entropie et caractérisations arithmétiques des ensembles de Sidon*, Modern Topics in Harmonic Analysis -Torino/Milano- 1982, Inst. di Alta Math.Rome (1983), vol. II, p. 911 – 944.

[14] **D. Rider**, *Gap series on groups and spheres*, Canad. J. Math. 18 (1966).

[15] **W. Rudin**, *Fourier Analysis on Groups*, Interscience Publishers, New York (1962), p. 389 – 398.

[16] **S.B. Stečkin,** *On absolute convergence of Fourier series,* Izv. Akad. Nauk. SSSR, Ser. Math. 20 (1956), p. 385.

[17] **A. Zygmund,** *Quelques théorèmes sur les séries trigonométriques,* Studia Math. 3 (1931), p. 77 – 91.

Université de Paris-Sud
Mathématiques - Bâtiment 425
91405 Orsay Cedex (France)

UNE FORMULE DE FOURIER POUR LES NOMBRES PREMIERS. APPLICATION AUX NOMBRES PREMIERS GENERALISES DE BEURLING.

Jean-Pierre KAHANE

Résumé. On établit pour les nombres premiers généralisés de Beurling une formule qui donne et améliore aisément les résultats de Beurling du type $N(x) = Dx + x\epsilon(x) \Rightarrow P(x) = \ell ix(1 + o(1))$.

Abstract. A formula for Beurling generalized prime numbers is given and applied to improve the Beurling condition on $\epsilon(x)$ such that $N(x) = Dx + x\epsilon(x) \Rightarrow P(x) = \ell ix(1 + o(1))$.

MOTS CLES : Fourier, Beurling, nombres premiers
KEY WORDS : Fourier, Beurling, prime numbers

UNE FORMULE DE FOURIER POUR LES NOMBRES PREMIERS. APPLICATION AUX NOMBRES PREMIERS GENERALISES DE BEURLING.

Jean-Pierre KAHANE

On part de

$$\zeta(s) = \sum_{n\in N} \frac{1}{n^s} = \prod_{p\in P} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1} \qquad (\sigma = \Re e\, s > 1).$$

Dans le cas classique, P est l'ensemble des nombres premiers et N celui des entiers naturels. Dans le cas général, introduit par Beurling, P et N sont des ensembles dénombrables de nombres positifs. Pour éviter les complications d'écriture, nous supposerons la factorisation unique des éléments de N dans P, et nous supposerons aussi N et P contenus dans $[1,\infty[$. Nous poserons dans tous les cas

$$\begin{aligned} \nu(x) &= \ N \cap [1,x[\\ \varpi(x) &= \ P \cap [1,x[\end{aligned}$$

et nous supposerons que N a une densité, D, c'est-à-dire que

$$\nu(x) = Dx + x\epsilon(x), \quad \lim_{x\to\infty} \epsilon(x) = 0\ ;$$

dans le cas classique, $D = 1$ et $x\epsilon(x) = 0(1)$. Alors

$$\begin{aligned} \zeta(s) &= \frac{D}{s-1} + \int_1^\infty x^{-s} d(\nu(x) - Dx) \\ &= \frac{D}{s-1} + s\int_1^\infty x^{-s}\epsilon(x)\, dx. \end{aligned}$$

Beurling a montré que l'hypothèse

$$\epsilon(x) = O\left((\log x)^{-\alpha}\right) \quad (x\to\infty), \quad \alpha > \frac{3}{2}$$

entraîne le "théorème des nombres premiers", à savoir

$$\varpi(x) \sim \frac{x}{\log x}.$$

En sens inverse, il donne un exemple de fonctions $\varpi(x)$ et $\nu(x)$ telles que

$$\epsilon(x) = O\left((\log x)^{-3/2}\right) \quad (x\to\infty)$$

et que le théorème des nombmres premiers soit en défaut (à vrai dire, son exemple nécessite une adaptation à notre cadre, qui est un peu plus étroit).

Notre méthode suppose fondamentalement

$$\int_1^\infty \epsilon(x) \frac{dx}{x} < \infty. \tag{0}$$

Alors $\zeta(s)$ se prolonge par continuité sur la droite $\sigma = 1$ en dehors du point $s = 1$. Il en est de même pour la fonction

$$Z(s) = \exp\left(\sum_{p \in P} \frac{1}{p^s}\right) ;$$

comme la série $\sum p^{-2\sigma}$ converge pour $\sigma > \frac{1}{2}$, le quotient $Z(s)/\zeta(s)$ se prolonge en une fonction holomorphe et sans zéro dans le demi-plan $\sigma > \frac{1}{2}$. Posons

$$\ell_\epsilon(t) = \sum_{p \in P} \frac{1}{p^{1+it+\epsilon}} = \log Z(1 + it + \epsilon)$$

et

$$\ell(t) = \lim_{\epsilon \to 0} \ell_\epsilon(t) ;$$

observons que cette limite existe pour tout t, finie ou $-\infty$, sauf pour $t = 0$ où elle vaut $+\infty$. Formellement,

$$\ell(t) = \sum_{p \in P} \frac{1}{p^{1+it}}$$

et, pour toute fonction $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ (C^∞ à support compact),

$$\int f(t)\ell(t)dt = \sum_{p \in P} \frac{1}{p} \hat{f}(\log p) \tag{1}$$

en convenant que

$$\hat{f}(x) = \int f(t)\, e^{-itx}\, dx.$$

La formule à laquelle se réfère le titre de l'article est la formule (1).

La démonstration de (1) est immédiate à partir de

$$\int f(t)\ell_\epsilon(t)\, dt = \sum_{p \in P} \frac{1}{p^{1+\epsilon}} \hat{f}(\log p)$$

et de la convergence de la série $\sum p^{-1}(\log p)^{-2}$. En intégrant deux fois $\ell_\epsilon(t)$, on voit que les deux membres de cette égalité convergent vers les deux membres de (1) quand $\epsilon \to 0$.

L'hypothèse (0) ne suffit pas pour obtenir le théorème des nombres premiers. Nous allons faire intervenir dans la suite les hypothèses plus fortes

$$\int_1^\infty (\epsilon(x) \log x)^2 \frac{dx}{x} < \infty \tag{2}$$

et

$$(3) \qquad \int_1^\infty (\epsilon(x)\log x)^\alpha \frac{dx}{x} < \infty \quad \text{pour un } \alpha < 2.$$

THEOREME. *Sous l'hypothèse (3), on a*

$$(4) \qquad \varpi(x) \sim \frac{x}{\log x} \qquad (x \to \infty).$$

L'hypothèse de Beurling entraîne (3), et l'exemple de Beurling montre que dans (3) la constante 2 est optimale. Nous ne savons pas si (2) suffit à entraîner (4).

Pour la démonstration du théorème, nous supposerons d'abord que $\varsigma(s)$ ne s'annule pas sur la droite $\sigma = 1$; nous montrerons qu'alors (2) entraîne (4), au moyen de la formule (1). Puis nous montrerons, à la manière d'Hadamard et de la Vallée Poussin en 1896, que (3) entraîne $\varsigma(1+it) \neq 0$ pour tout t réel.

Première étape. On suppose que $\varsigma(s)$ ne s'annule pas sur la droite $\sigma = 1$ et on fait l'hypothèse (2). Rappelons que

$$\varsigma(1+it) = \frac{D}{it} + (1+it)\int_1^\infty x^{-it}\,\epsilon(x)\,\frac{dx}{x}.$$

L'hypothèse (2) signifie que l'intégrale est dans la classe H^1 de Sobolev (dérivée au sens des distributions dans L^2). Donc $it\,\varsigma(1+it)$ est une fonction de la classe H^1_{loc} (localement dans H^1), égale à D en 0 et partout $\neq 0$. Ainsi

$$\log\varsigma(1+it) = \log\frac{1}{it} + \text{fonction de } H^1_{\text{loc}}$$

en convenant que

$$\log\frac{1}{it} = \log\frac{1}{|t|} - i\,\frac{\pi}{2}\,\text{signe}\,t.$$

Comme $Z(1+it)/\varsigma(1+it)$ est analytique et ne s'annule pas ($t \in \mathbb{R}$), il en résulte que

$$(5) \qquad \log Z(1+it) = \ell(t) = \log\frac{1}{it} + h(t)$$

avec $h(t) \in H^1_{\text{loc}}$.

Pour utiliser (1) posons d'abord

$$f_0(t) = \frac{e^{ity}}{2\pi(1+it)} \qquad (y > 0 \ \text{donné}),$$

$$\hat f_0(x) = \begin{cases} e^{x-y} & \text{pour } x < y \\ 0 & \textit{pour } x > y, \end{cases}$$

puis $f = \varphi f_0$ avec $\varphi \in \mathcal{D}$. Il vient

$$\int \frac{\ell(t)\varphi(t)}{1+it} e^{ity} dt = \int \hat{\varphi}(x) e^{x-y} \varpi(e^{y-x}) dx. \tag{6}$$

Compte-tenu de (5), le premier membre de (6) s'écrit

$$\int \psi(t) \log \frac{1}{it} e^{ity} dt + \int \psi(t) h(t) e^{ity}\, dt$$

avec $\psi \in \mathcal{D}$. La première intégrale s'évalue au moyen d'une intégration par parties, et vaut

$$\frac{2\pi}{y}\psi(0) + O\left(\frac{1}{y^2}\right) \qquad (y \to \infty).$$

Pour la seconde intégrale, on observe que $(\psi h)' \in L^1$, parce que $(\psi h)' \in L^2$ et que ψh est à support compact ; donc l'intégrale vaut $o\left(\frac{1}{y}\right)$. Ainsi (6) donne

$$\int \hat{\varphi}(x) e^{x-y} \varpi(e^{y-x}) dx = \frac{2\pi}{y}\varphi(0) + o\left(\frac{1}{y}\right). \tag{7}$$

Choisissons $\delta > 0$ et $\varphi \in \mathcal{D}$ telle que $\hat{\varphi}$ soit positive et paire, avec

$$1 - \delta \leq \int_{-\delta}^{\delta} \hat{\varphi}(x) dx < \int \hat{\varphi}(x) dx = 1 = 2\pi\varphi(0).$$

Minorons le premier membre de (7) en intégrant sur $[-\delta, \delta]$. On obtient

$$(1-\delta) e^{-\delta - y} \varpi(e^{y-\delta}) \leq \frac{1}{y} + o\left(\frac{1}{y}\right)$$

et par conséquent, faisant tendre δ vers 0,

$$\limsup_{y \to \infty} y e^{-y} \varpi(e^y) \leq 1. \tag{8}$$

Majorons maintenant le premier membre de (7) en intégrant sur $[-\delta, \delta]$, $]-\infty, -\delta]$ et $[\delta, y]$. On a d'abord

$$\int_{-\delta}^{\delta} \leq e^{\delta - y} \varpi(e^{y+\delta}).$$

Puis, comme (8) entraîne la majoration

$$e^{-x} \varpi(e^x) \leq \frac{K}{x+1}$$

pour un $K > 0$ convenable, on a

$$\int_{-\infty}^{-\delta} \leq K \int_{-\infty}^{-\delta} \frac{\hat{\varphi}(x)}{y - x + 1} dx \leq \frac{K}{y} \int_{-\infty}^{-\delta} \hat{\varphi}(x) dx \leq \frac{K\delta}{y}$$

et, pour $\delta < 1$,

$$\int_\delta^y \leq K \int_\delta^y \frac{\hat{\varphi}(x)}{y-x+1}\, dx \leq \frac{K}{y} \int_\delta^\infty \hat{\varphi}(x)(1+x)\, dx$$

parce que la fonction $x \to \frac{1}{y-x+1}$ est convexe sur $[\delta, y]$ et y est majorée par la fonction affine $x \to \frac{1+x}{\delta}$. On peut choisir $\hat{\varphi}$ de façon que

$$\int_\delta^y \leq \frac{K\delta}{y}.$$

Faisant tendre δ vers 0 on obtient

(9) $$\liminf_{y\to\infty} y\, e^{-y} \varpi(e^y) \geq 1,$$

et (4) résulte de (8) et (9). Cela termine la première étape.

Seconde étape. Supposons d'abord qu'en un point $t_0 \in \mathbb{R}$ on ait

(10) $$Z(1+it_0+\epsilon) = O(\epsilon^\beta), \quad \epsilon \downarrow 0$$

avec $\beta > \frac{1}{2}$ (à ce stade, on suppose aussi (0), comme toujours). Nous allons aboutir à une contradiction. En effet, nous avons

$$\ell_\epsilon(0) = \sum \frac{1}{p^{1+\epsilon}} = \log\frac{1}{\epsilon} + 0(1) \qquad (\epsilon \to 0)$$

$$\Re e\, \ell_\epsilon(t) \leq 0(1) \quad \text{pour tout } t \text{ réel} \neq 0$$

et, d'après (10),

$$\Re e\, \ell_\epsilon(t_0) \leq \beta \log \epsilon + 0(1).$$

Par conséquent, pour tout entier N,

$$\sum_{k=-N}^{N} \left(1 - \frac{|k|}{N}\right) \ell_\epsilon(kt_0) \leq \left(1 - 2\beta\left(1 - \frac{1}{N}\right)\right) \log\frac{1}{\epsilon} + 0(1).$$

Observons que le premier membre, qui vaut

$$\sum_{p\in P} \frac{1}{p^{1+\epsilon}} \sum_{k=-N}^{N} \left(1 - \frac{|k|}{N}\right) p^{-kit_0}$$

est positif. La contradiction en résulte lorsque N est choisi assez grand. Donc on ne peut pas avoir (10) avec $\beta > \frac{1}{2}$.

Supposons maintenant $Z(1+it_0)=0$ et (3) ; nous allons montrer qu'il en résulte (10) avec $\beta > \frac{1}{2}$. En effet

$$\varsigma(1+it_0+\epsilon)-\varsigma(1+it_0) \;=\; (1+it_0)\int (x^{-\epsilon}-1)\epsilon(x)x^{-it}\frac{dx}{x} \;+\; O(\epsilon).$$

L'intégrale est majorée par

$$\int (1-e^{-\epsilon u})\epsilon(e^u)du$$

donc (Hölder) par

$$\left(\int (\epsilon(e^u)u)^\alpha\, du\right)^{1/\alpha}\left(\int \left(\frac{1-e^{-\epsilon u}}{u}\right)^{\alpha'} du\right)^{1/\alpha'}$$

$\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\alpha'}=1\right)$ et le produit de ces deux facteurs est de la forme

$$C\,\epsilon^{1-\frac{1}{\alpha'}}.$$

Donc

$$Z(1+it_0+\epsilon)(=\varsigma(1+it_0+\epsilon)+O(\epsilon)) \;=\; C\epsilon^\beta+O(\epsilon)$$

avec $\beta = 1-\frac{1}{\alpha'} > \frac{1}{2}$. Il en résulte que, sous l'hypothèse (3), $\varsigma(s)$ ne peut s'annuler sur la droite $\sigma=1$. Cela termine la deuxième étape, et la démonstration du théorème.

Indiquons ce que donne dans notre cadre le contre exemple de Beurling. Suivant Diamond 1970, posons

$$\varpi(x) \;=\; \int^x (1-\cos\log y)\frac{dy}{\log y} \;+\; \rho(x)$$

où $\rho(x)$ est une fonction bornée telle que $\varpi(x)$ prenne des valeurs entières. Alors

$$\begin{aligned}\sum\frac{1}{p^s} &= \int^\infty x^{-s}\frac{1-\cos\log x}{\log x}dx + \int^\infty x^{-s}d\rho(x)\\ &= C(s)-\frac{1}{2}(C(s+i)+C(s-i))+R(s)\end{aligned}$$

avec

$$C(s) \;=\; \int^\infty e^{-iut}\frac{du}{u}.$$

C'est la somme de $\log\frac{1}{it}$ et d'une fonction analytique, et c'est $O\left(\frac{1}{t}\right)$ à l'infini ainsi que ses dérivées successives. Supposons t grand, et écrivons

$$R(1+it)=\int^a+\int_a^\infty x^{-1-it}d\rho(x).$$

En intégrant par parties la seconde intégrale et en majorant la première par $\int^a \frac{d\varpi(x)}{x}$ on obtient, en choisissant $a = t$,

$$R(1+it) = O(\log\log t).$$

De plus $R(1+it)$ est analytique, et sa dérivée, suivant un calcul analogue, est $o(\log t)$. En estimant tour à tour $\ell(t)$, $Z(1+it)$, $(1+it)$, on voit que

$$\frac{1}{1+it}\left(\varsigma(1+it) - \frac{1}{it}\right)$$

est transformée de Fourier d'une fonction $O(u^{-3/2})$, d'où $\epsilon(e^u) = O(e^{-3/2})$ $(u \to \infty)$.

Références

Les références historiques sur le théorème des nombres premiers sont les articles d'Hadamard et de Charles de la Vallée Poussin de 1896. Les origines et prolongements se trouvent exposés au début du *Handbuch* de Landau.

Le rapport à l'analyse harmonique apparaît clairement avec le grand article de Wiener sur les théorèmes taubériens. Il est exploité superbement par Beurling dans son article sur les nombres premiers généralisés. Beurling élargit le cadre que nous avons donné : au lieu d'étudier la relation entre les ensembles N et P, il étudie la relation entre les fonctions $\nu(x)$ et $\varpi(x)$. Une raison en est peut-être d'exploiter comme contre-exemple la fonction

$$\varpi(x) = \int^x (1 - \cos\log y)\frac{dy}{\log y}$$

sans s'encombrer d'un terme correctif.

L'introduction de ce terme correctif est dû à Diamond (1970). Diamond (1969) a aussi amélioré la condition de Beurling, $\epsilon(e^u) = O(u^{-\alpha})$, $\alpha > \frac{3}{2}$, sous la forme

$$\epsilon(e^u) = O\left(u^{-3/2}\exp\left(-(\log u)^\beta\right)\right), \quad \beta > \frac{1}{3}.$$

Cette condition de Diamond n'entraîne pas notre condition (3), ni le contraire.

L'étude de Bateman et Diamond fait le point sur les nombres premiers généralisés à la fin des années 1960. A la fin de cette étude (p. 199) on voit apparaître notre condition (2) avec une indication sur le fait que (2), jointe à la non-existence de zéros pour $\varsigma(1+it)$, entraîne (4), et la conjecture que (2) seule entraîne (4).

L'étude la plus récente est celle de Sz. Revész.

P. T. BATEMAN and H. G. DIAMOND [1969]
Asymptotic distribution of Beurling's generalized prime numbers. MAA *Studies in Math.*, vol. 6, Studies in number theory (W. J. Leveque, ed.), 152–210.

A. BEURLING [1937]
Analyse de la loi asymptotique de la distribution des nombres premiers généralisés. *Acta Math.* 68, 255–291. *Collected works* II, 1–37.

H. G. DIAMOND [1969]
The prime number theorem for Beurling's generalized numbers. *J. number theory* 1, 200–207.

H. G. DIAMOND [1970]
A set of generalized numbers showing Beurling's theorem to be sharp. *Ill. J. Math.* 14, 29–34.

J. HADAMARD [1896]
Sur la distribution des zéros de la fonction $\zeta(s)$ et ses conséquences arithmétiques. *Bull. Soc. Math. France* 14, 199–220.

E. LANDAU [1909]
Handbuch der Lehre von der Verteilung der Primzahlen. Vol. I, II. Leipzig.

Sz. REVESZ [1994]
On Beurling's prime number theorem. *Periodica math. hungarica* 28, 195–210.

Ch. de la VALLEE POUSSIN [1896]
Recherches analytiques sur la théorie des nombres, 1. *Ann. Soc. Scient. Bruxelles* 20, 183–256.

29 mai 1995

Université de Paris-Sud
Mathématiques - Bâtiment 425
91405 Orsay Cedex (France)

OLEVSKIĬ AND THE DIVERGENCE OF REARRANGED SERIES

T. W. KÖRNER

ABSTRACT. As an introduction to my paper *Divergence of Decreasing Rearranged Fourier Series* I give an account of the work of Olevskiĭ on which it depends. I emphasise the probabilistic view of his construction and make explicit the fact that it may be extended to wavelets but I do not claim that my account is any serious way different from his.

1. INTRODUCTION

In this paper we shall move without comment between the circle $\mathbb{T} = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$, the closed interval $[0,1]$ and the half closed interval $[0,1)$ as seems most convenient. Since our results deal with almost everywhere behaviour this should not create any problems.

What do we mean when we consider

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}(u) \exp 2\pi iut?$$

Traditionally we take

$$\lim_{N\to\infty} \sum_{n=-N}^{N} \hat{f}(u) \exp 2\pi iut$$

and the only variations that we allow concern the mode of convergence (pointwise, L^p, etc). A sign that this may be too narrow an approach appears when we consider the two dimensional case of a function $f : \mathbb{T}^2 \to \mathbb{C}$. The obvious way to proceed is to take

$$\sum_{(u,v)\in\mathbb{Z}^2} \hat{f}(u,v) \exp 2\pi i(ut+vs) = \lim_{N\to\infty} \sum_{(u,v)\in\Gamma(N)} \hat{f}(u,v) \exp 2\pi i(ut+vs)$$

with the $\Gamma(N)$ finite subsets of $\mathbb{Z}^2$ such that $\Gamma(1) \subseteq \Gamma(2) \subseteq \ldots$ and $\bigcup_{N=1}^{\infty} \Gamma(N) = \mathbb{Z}^2$. However, it is well known that, even when f is quite well behaved, different choices of the sequence $\Gamma(N)$ give rise to different behaviour.

The question of 'correct order' also arises, even in the one dimensional case, from signal processing. If we seek to store and reconstruct

---

1991 *Mathematics Subject Classification.* Primary: 42C20; Secondary 42C15.

Key words and phrases. Divergence of series, rearrangement of series, wavelets.

a function $f : \mathbb{T} \to \mathbb{C}$ by using its Fourier coefficients it is natural to to use them in decreasing order of magnitude and to consider

$$\sum_{|\hat{f}(u)|\geq\eta} \hat{f}(u) \exp 2\pi i u t$$

rather than

$$\sum_{|u|\leq N} \hat{f}(u) \exp iut.$$

This must surely be the best strategy under almost all circumstances, but in [5] I constructed the following example.

Theorem 1. *There exists a real $f \in L^2(\mathbb{T})$ such that*

$$\limsup_{\eta\to 0+} \left| \sum_{|\hat{f}(u)|\geq\eta} \hat{f}(u) \exp 2\pi i u t \right| = \infty.$$

for almost all $t \in \mathbb{T}$.

Theorem 1 strengthens a well known result on the rearrangement of Fourier series.

Theorem 2. *There exists a real $f \in L^2(\mathbb{T})$ and a bijection $\sigma : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ such that*

$$\limsup_{N\to\infty} \left| \sum_{u=-N}^{N} \hat{f}(\sigma(u)) \exp i\sigma(u)t \right| = \infty.$$

for almost all $t \in \mathbb{T}$.

This theorem was first stated by Kolmogorov. A proof of Kolmogorov's statement was sketched by Zahorskiĭ, given in detail by Ulyanov and much simplified by Olevskiĭ. The reader who consults [6] will find an excellent bibliography.

Since my construction builds directly on the work of Olevskiĭ the natural way to write [5] would have been to start with an exposition of Olevskiĭ's arguments. However the conventions of the research paper forbid the lengthy repetition of material available elsewhere, so I am glad to take this opportunity to write the missing first part.

Pólya says that sometimes the easiest way to prove a result is to generalise it and prove the generalisation. By the time Kolmogorov's theorem reached Ulyanov and Olevskiĭ it had taken the following form.

Theorem 3. *Let ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3, ... form a complete orthonormal system in $L^2([0,1))$. Then there exists a real $f \in L^2(\mathbb{T})$ and a bijection $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ such that*

$$\limsup_{N\to\infty} \left| \sum_{u=0}^{N} \hat{f}(\sigma(u))\phi_{\sigma(u)}(t) \right| = \infty.$$

for almost all $t \in [0,1)$.

Here as usual we write

$$\hat{f}(\phi_r) = \langle f, \phi_r \rangle = \int_0^1 f(t)\phi_r(t)\,dt.$$

In fact Olevskiĭ improved Theorem 3 by replacing $f \in L^2(\mathbb{T})$ by f continuous. We shall prove a result which includes this as Theorem 6.

In the years since Olevskiĭ published his result, more general systems than those of complete orthonormal type have assumed practical importance.

Definition 4. *We say that ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3, ... form a Riesz basis for $L^2([0,1))$ if the linear span of the ϕ_n is dense in L^2 and there exists a A with $A \geq 1$ such that*

$$A^{-1}\sum_{n=0}^{\infty}|a_n|^2 \leq \left\|\sum_{n=0}^{\infty} a_n\phi_n\right\|_2^2 \leq A\sum_{n=0}^{\infty}|a_n|^2.$$

We call A the Riesz constant of the system. Easy functional analysis reveals the following lemma.

Lemma 5. *Let ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3, ... form a Riesz basis for $L^2([0,1))$ then there exist a unique sequence ψ_1, ψ_2, ψ_3, ... of bounded L^2 norm such that $\sum_{n=0}^{\infty}|\langle\psi_n, f\rangle|^2 < \infty$ and*

$$f = \sum_{n=0}^{\infty}\langle\psi_n, f\rangle\phi_n$$

for every $f \in L^2$ and if $f = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\phi_n$ then $a_n = \langle\psi_n, f\rangle$ for all n.

We write $\hat{f}(n) = \langle\psi_n, f\rangle$.

As Olevskiĭ indicates very clearly his proof can be extended to Riesz bases. result.

Theorem 6. *Let ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3, ... form a Riesz basis for $L^2([0,1])$. Then there exists a real continuous f and a bijection $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ such that*

$$\limsup_{N\to\infty}\left|\sum_{u=0}^{N}\hat{f}(\sigma(u))\phi_{\sigma(u)}(t)\right| = \infty.$$

for almost all $t \in [0,1]$.

If we ask for which complete orthonormal system Theorem 3 is least plausible one answer would be the Haar system. Set

$$\Lambda(N) = \{(r,s) \in \mathbb{Z}^2 : 0 \leq s \leq 2^r - 1 \text{ and } N \geq r \geq 0\}$$

and $\Lambda = \bigcup_{N\geq 0}\Lambda(N)$. Consider intervals of the form

$$E(r,s) = [s2^{-r}, (s+1)2^{-r})$$

where $(r,s) \in \Lambda$. We define

$$\begin{aligned} \chi_{r,s}(t) &= 1 && \text{if } t \in E(r+1, 2s) \\ \chi_{r,s}(t) &= -1 && \text{if } t \in E(r+1, 2s+1) \\ \chi_{r,s}(t) &= 0 && \text{otherwise} \end{aligned}$$

where, again, $(r,s) \in \Lambda$. We call the $\chi_{r,s}$ together with the function $1 = \chi_{-1,0}$ the Haar system. We call the $T_{r,s} = 2^{r/2}\chi_{r,s}$ together with the function 1 the normalised Haar system. It is well known that the normalised Haar system is a complete orthonormal system. If we put the standard order

$$(r,s) \ll (r', s') \text{ if } r' > r \text{ or } r = r' \text{ and } s' \geq s$$

on the Haar system it enjoys remarkable convergence properties. For example if f is continuous

$$\sum_{(u,v) \ll (r,s)} \hat{f}(u,v) T_{u,v} \to f$$

uniformly as we allow (r,s) to increase so as to exhaust the system.

If we can prove Theorem 3 for the Haar system, one is tempted to say, we can surely prove it for any orthonormal system. Olevskiĭ showed that this is indeed the case and we shall see that once we have Theorem 3 for the Haar system we can obtain the rest of the theorem from this particular case. As we might expect on general grounds the key to the Haar system case lies in a finite version of the theorem.

Lemma 7. *Let $\epsilon > 0$ and $K \geq 1$ be given. Then we can find a bijection*

$$\sigma : \{1, 2, 3, \ldots, 2^{N+1} - 1\} \to \Lambda(N)$$

and real $a_{r,s}$ $[(r,s) \in \Lambda(N)]$ such that

$$\left| \sum_{(r,s) \in \Lambda(N)} a_{r,s} \chi_{r,s}(t) \right| \leq 1$$

for all $t \in [0,1)$ but

$$\max_{1 \leq k \leq 2^{N+1}-1} \left| \sum_{j=1}^{k} a_{\sigma(j)} \chi_{\sigma(j)}(t) \right| \geq K$$

for all $t \notin E$ where E is a set of measure at most ϵ.

The next section is devoted to the proof of this key lemma. Once it is understood the rest is relatively routine.

2. Olevskiĭ's Lemma

We shall need two simple results, the first combinatorial and the second probabilistic.

Lemma 8. *If $a_1, a_2, \ldots, a_m \geq 0$ and $a_{m+1}, a_{m+2}, \ldots, a_N \leq 0$ then*

$$\max_{1\leq j\leq N}\left|\sum_{r=1}^{j} a_r\right| \geq \frac{1}{3}\sum_{r=1}^{N}|a_r|.$$

Proof. Observe that

$$\sum_{r=1}^{N}|a_r| = 2\sum_{r=1}^{m}a_r - \sum_{r=1}^{N}a_r \leq 3\max_{1\leq j\leq N}\left|\sum_{r=1}^{j}a_r\right|.$$

■

Lemma 9. *Let $X_1, X_2, \ldots, X_N$ be independent identically distributed random variables with $\Pr(X_r = 1) = \Pr(X_r = -1) = 1/2$ and let K be an integer with $K \geq 1$. Then*

(i) $\Pr\left(\max_{1\leq j\leq N}\sum_{r=1}^{j} X_r \geq K\right) \leq 2\Pr\left(\sum_{r=1}^{N} X_r \geq K\right)$.

(ii) $\Pr\left(\max_{1\leq j\leq N}\left|\sum_{r=1}^{j} X_r\right| \geq K\right) \leq 4\Pr\left(\left|\sum_{r=1}^{N} X_r\right| \geq K\right)$.

(iii) $\Pr\left(\max_{1\leq j\leq N}\left|\sum_{r=1}^{j} X_r\right| \geq K\right) \leq 2NK^{-2}$.

Proof. (i) This is the simplest form of the reflection principle. (See e.g. [2] Chapter 3.)

(ii) Use symmetry.

(iii) Use Chebychev's inequality to bound $\Pr\left(\left|\sum_{r=1}^{N} X_r\right| \geq K\right)$. ■

Of course, we can get much better estimates in (iii) but the only use I can find for such estimates is to study of the Hausdorff dimension of the exceptional set of convergence in Theorem 3 when applied to Haar functions.

By using the standard interpretation of Haar functions in terms of coin tossing, Lemma 9 gives the following result.

Lemma 10. *If N and K are strictly positive integers then we can find $a_{p,q}$ taking the values 0 or 1 $[(p,q) \in \Lambda(N)]$ and a set E of measure at most $4NK^{-2}$ such that*

$$\left|\sum_{(p,q)\in\Lambda(N)} a_{p,q}\chi_{p,q}(t)\right| \leq K$$

for all $t \in [0,1)$, but

$$\sum_{(p,q)\in\Lambda(N)} |a_{p,q}\chi_{p,q}(t)| = N$$

for all $t \notin E$.

Proof. Consider $[0,1)$ with Lebesgue measure as a probability space. Let

$$X_j(t) = (-1)^{[2^j t]}$$

(where $[2^j t]$ is the integer part of $2^j t$). The X_j satisfy the conditions of Lemma 9. It follows by Lemma 9 (iii) that the set

$$E = \left\{ t : \max_{1 \le j \le N} \left| \sum_{r=1}^{j} X_r \right| \ge K \right\}$$

has measure at most $4NK^{-2}$.

To define $a_{p,q}$ we look at the interval $E(p,q) = [p2^{-q}, (p+1)2^{-q})$ and observe that $\sum_{r=1}^{j} X_r(t)$ is constant on $E(p,q) = [p2^{-q}, (p+1)2^{-q})$ for all $1 \le j \le q-1$. We may thus define $a_{p,q} = 1$ if

$$\max_{1 \le j \le N} \left| \sum_{r=1}^{j} X_r(t) \right| \le K - 1$$

for $t \in E(p,q)$, and $a_{p,q} = 0$ otherwise.

If we now set

$$Y(t) = \sum_{(p,q) \in \Lambda(N)} a_{p,q} \chi_{p,q}(t)$$

then Y is the random variable defined by

$$Y(t) = \sum_{r=1}^{N} X_r(t)$$

if $|\max_{1 \le j \le N} \sum_{r=1}^{j} X_r(t)| \le K$ but

$$Y(t) = \sum_{r=1}^{j(t)} X_r(t)$$

where $j(t)$ is the smallest j with $|\sum_{r=1}^{j(t)} X_r(t)| = K$. In more vivid terms, toss a fair coin keeping track of the difference between the number of heads and tails thrown. If this ever takes the value K or $-K$ stop and record the value as Y. If, after N throws this has not happened, record the value after N throws as Y. By definition $|Y(t)| \le K$ and if $t \notin E$ (so we complete the N throws)

$$\sum_{(p,q) \in \Lambda(N)} |a_{p,q} \chi_{p,q}(t)| = N$$

as required. ∎

Now, instead of taking the sequence of heads and tails as chance presents them, we wish to take all the heads first and then all the tails. To do this we introduce the Olevskiĭ order on Λ

$$(p', q') \succeq (p,q) \text{ if } (2p'+1)2^{-q'} \ge (2p+1)2^{-q}.$$

The Olevskiĭ order is more intricate than may at first appear and the reader should try ordering the (p,q) with $(p,q) \in \Lambda(N)$ for $N = 5$ or $N = 6$. Observe that $(p',q') \succeq \chi(p,q)$ if the mid-point of supp $\chi_{p',q'}$ is to the right of (i.e. greater than or equal to) the mid-point of supp $\chi_{p,q}$. We observe that $\chi_{p,q}(t) \geq 0$ if t is strictly to the left of (i.e. strictly less than) the mid-point of supp $\chi_{p,q}$ and $\chi_{p,q}(t) \leq 0$ if t is to the right of (i.e. greater than or equal to) the mid-point of supp $\chi_{p,q}$. It follows that for each $t \in [0,1)$ there is a $\lambda(t) \in \Lambda(N)$ such that

$$\chi_{p,q}(t) \leq 0 \text{ for} \lambda \succeq (p,q), \ \chi_{p,q}(t) \geq 0 \text{ for} (p,q) \succeq \chi_\lambda.$$

Using this observation we easily arrive at the result we require.

Lemma 11. *Suppose that N and K are strictly positive integers and $a_{p,q}$ and E are as in Lemma 10 then*

$$\max_{\lambda \in \Lambda(N)} \left| \sum_{\lambda \succeq (p,q)} a_{p,q}\chi_{p,q}(t) \right| \geq N/3$$

for all $t \notin E$.

Proof. By Lemma 8 and the last sentence of the previous paragraph

$$\max_{\lambda \in \Lambda(N)} \left| \sum \lambda \succeq (p,q) a_{p,q}\chi_{p,q}(t) \right| \geq \frac{1}{3} \sum_{(p,q)\in\Lambda(N)} |a_{p,q}\chi_{p,q}(t)| = N/3$$

for all $t \notin E$. ■

Theorem 12. *Let $\epsilon > 0$ and $\kappa > 1$ be given. Then we can find an $N \geq 1$, $1 \geq b > 0$, $b_{p,q}$ taking the values 0 or b $[(p,q) \in \Lambda(N)]$ and a set E such that*

(i) $|\sum_{(p,q)\in\Lambda(N)} b_{p,q}\chi_{p,q}(t)| \leq 1$ *for all $t \in [0,1)$,*
(ii) $\max_{\lambda\in\Lambda(N)} |\sum_{\lambda\succeq(p,q)} a_{p,q}\chi_{p,q}(t)| \geq \kappa$ *for all $t \notin E$*
(iii) $|E| < \epsilon$.

Proof. Choose an integer M with $M > 4\epsilon^{-1}$ and $M^2 \geq 3\kappa$. Set $N = M^5$, $K = M^3$ and choose $a_{p,q}$ and E as in Lemma 10. If we now put $b_{p,q} = a_{p,q}/K$, $b = 1/K$ then all the conclusions of the lemma with the exception of condition (ii) follow at once from Lemma 10. Condition (ii) itself follows from Lemma 11. ■

Standard 'rolling hump' (or 'condensation of singularities') methods now give the following result.

Exercise 13. *Let χ_n $[n \in \mathbb{N}]$ be the Haar system enumerated in some way. Then there exists a real $f \in L^\infty([0,1))$ and a bijection $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ such that*

$$\limsup_{N\to\infty} \left| \sum_{u=0}^{N} \hat{f}(\sigma(u))\chi_{\sigma(u)}(t) \right| = \infty.$$

for almost all $t \in [0,1)$.

We leave it as an exercise for the reader because we shall prove stronger results. However these results will require extra complications in their proofs and the reader may find the more complex proofs easier to follow if he or she has worked through an easier case.

3. Extension To General Spaces

We have not yet exhausted the strength of Pólya's dictum. What happens if we seek to extend Theorem 3 to more general measure spaces? A moment's reflection brings to mind the the fact that, so far as measure theory is concerned, all nice measure spaces which are not obviously different are the same. Recall that a measure space $(X, \mathcal{F}, \mu)$ with positive measure μ is *non-atomic* if given $E \in \mathcal{F}$ with $\mu(E) > 0$ we can find $F \in \mathcal{F}$ with $F \subseteq E$ and $\mu(E) > \mu(F) > 0$. The following result is typical (see e.g. theorem 9, page 327 of [7]).

Theorem 14. *Let X be a complete separable metric space equipped with $\mathcal{B}_X$ its σ-algebra of Borel sets and μ a non-atomic measure on $\mathcal{B}_X$. If $I = [0,1]$ is the unit interval with its usual metric, $\mathcal{B}_I$ its σ-algebra of Borel sets, and m is the usual Lebesgue measure then there exists a bijective map $F : I \to X$ such that F and F^{-1} carry Borel sets to Borel sets of the same measure.*

We shall not use Theorem 14 but we shall use the lemma which underlies its proof and the proof of results like it.

Lemma 15. *Let $(X, \mathcal{F}, \mu)$ be a non-atomic probability space. If $E \in \mathcal{F}$ and $1 \geq \alpha \geq 0$ then we can find $F \in \mathcal{F}$ with $E \supseteq F$ and $\mu(F) = \alpha\mu(E)$.*

Lemma 18 follows easily from a lemma of Saks given as Lemma 7 of section IV.9.8 of Dunford and Schwartz[1]. There is a discussion of isomorphism theorems in Chapter VIII of Halmos's *Measure Theory* [3]. However before readers rush off to inspect the wilder shores of measure theory they should note that all they will learn is that they could have stayed at home since $[0,1]$ with Lebesgue measure is the type of all non-atomic measure spaces.

In view of the preceding discussion. natural to aim at the following generalisation of Theorem 3. (The extension of Definition 4 to general probability spaces is obvious.)

Theorem 16. *Let $(X, \mathcal{F}, \mu)$ be a probability space with μ non-atomic. Let ϕ_1, ϕ_2, ... be a Riesz basis in $L^2(X)$. Then there exists a real $f \in L^2(X)$ and a bijection $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ such that*

$$\limsup_{N\to\infty} \left| \sum_{u=0}^{N} \hat{f}(\sigma(u))\phi_{\sigma(u)}(t) \right| = \infty.$$

for almost all $t \in X$.

The result is clearly false if μ is not non-atomic. Suppose $E \in \mathcal{F}$ is an atom, that is $\mu(E) > 0$ and if $F \in \mathcal{F}$ with $F \subseteq E$ then $\mu(F) = \mu(E)$ or $\mu(F) = 0$. Then if $g_n, g \in L^2(X)$ and $\|g_n - g\|_2 \to 0$ it follows that $g_n(t) \to g(t)$ for μ-almost all $t \in E$.

It is not hard to obtain Theorem 16 from Theorem 3 by the standard argument used to prove results like Theorem 14. However, it is more interesting to ask how we might tackle Theorem 16 directly and, in particular, what we are to make of Theorem 12 in the general context. If we do so we are rewarded with a key insight — Theorem 12 is a combinatorial theorem.

Theorem 17. *Let $(X, \mathcal{F}, \mu)$ be a probability space. Let $\epsilon > 0$ and $\kappa > 1$ be given. Then we can find an $N \geq 1$, $1 \geq b > 0$ and $b_{p,q}$ taking the values 0 or b $[(p,q) \in \Lambda(N)]$ with the following property.*

Suppose that we have a collection of sets $E_{n,r} \in \mathcal{F}$ such that

(A) $E(2r-1, n+1) \cap E(2r, n+1) = \emptyset$, $E(2r-1, n+1) \cup E(2r, n+1) = E(r,n)$ for all $(r,n) \in \Lambda_N$.

(B) $|E(r,n)| = 2^{-n}$ for all $(r,n) \in \Lambda_{N+1}$.

Let us set

$$\begin{aligned} H_{r,n}(t) &= 1 && \text{for } t \in E(2r-1, n+1), \\ H_{r,n}(t) &= -1 && \text{for } t \in E(2r, n+1), \\ H_{r,n}(t) &= 0 && \text{otherwise.} \end{aligned}$$

whenever $(r,n) \in \Lambda_N$. Then

(i) $|\sum_{(p,q)\in\Lambda(N)} b_{p,q} H_{p,q}(t)| \leq 1$ for all $t \in [0,1)$,

and there is a set $E \in \mathcal{F}$ such that

(ii) $\max_{\lambda\in\Lambda(N)} |\sum_{\lambda\succeq(p,q)} b_{p,q} H_{p,q}(t)| \geq \kappa$ for all $t \notin E$

(iii) $|E| < \epsilon$.

Proof. This is just Theorem 12. ∎

To see why this is indeed an insight let us return to the concrete case of Lebesgue measure on $[0,1)$ and consider the most important Riesz basis of all, the exponentials $e_n(t) = \exp(2\pi nt)$. If we try to convert Theorem 12 into a result on Fourier series we run into the problem that different Haar functions do not 'occupy different parts of the frequency spectrum'. (Indeed the Fourier coefficients of the Haar functions $\chi_{p,q}$ with fixed p are all of same amplitude differing only in phase.) However, if we 'shuffle $[0,1)$' the $E_{p,q}$ can be chosen so that the $H_{p,q}$ are, for practical purposes, in 'different parts of the frequency spectrum'. That is, although we do not have the ideal outcome in which at most one of the $\hat{H}_{p,q}(j)$ is non-zero for each j, we can arrange that at most one of the $\hat{H}_{p,q}(j)$ is large for each j.

Since there seems no further advantage in considering general measure spaces we shall stay within $[0,1)$ and $[0,1]$. However, readers who wish to work more generally will find that they only need the following simple consequence of Lemma 15.

Lemma 18. *Let $(X, \mathcal{F}, \mu)$ be a non-atomic probability space. If $F \in \mathcal{F}$ and $\mu(F) > 0$ we can find a sequence e_j of orthogonal functions and sets $F_j \in \mathcal{F}$ with $F_j \subseteq F$ such that*

(i) $e_j(t) = 1$ for $t \in F_j$, $e_j(t) = -1$ for $t \in F \setminus F_j$, $e_j(t) = 0$ otherwise,

(ii) $\mu(F_j) = \mu(F)/2$.

Proof. Set $E(0,0) = F$. By repeated use of Lemma 15 with $\alpha = 1/2$ we can find $E_{n,r} \in \mathcal{F}$ such that

(A) $E(2r-1, n+1) \cap E(2r, n+1) = \emptyset$, $E(2r-1, n+1) \cup E(2r, n+1) = E(r, n)$ for all $1 \leq r \leq 2^n$,

(B) $|E(r,n)| = 2^{-n}|F|$ for all $1 \leq r \leq 2^n$.

Now set $F_j = \bigcup_{r=1}^{2^j} E(2r-1, j+1)$ and define e_j as in condition (i). ∎

4. Extension to general Riesz bases

In this section we work in $[0,1]$ with Lebesgue measure. In order to put into effect the programme sketched at the end of the last section we need a sequence of easy lemmas. It may be helpful for the reader to keep in mind as examples both the 'well behaved' orthonormal system of exponentials and some other system ϕ_n where $\phi_n \notin L^\infty$.

Lemma 19. *Let ϕ_1, ϕ_2, ... be a Riesz basis. If e_1, e_2, ... form an orthonormal sequence then*

$$\hat{e}_k(j) \to 0$$

as $k \to \infty$ for each fixed j.

Proof. Referring back to Lemma 5 we see that $\hat{e}_k(j) = \langle \psi_j, e_k \rangle$ and the result is obvious. ∎

Lemma 20. *Let ϕ_1, ϕ_2, ... be a Riesz basis. Suppose that $\delta > 0$, $M \geq 0$ and that F is a set of strictly positive measure. Then we can find E a measurable subset of F with $|E| = |F|/2$ and $M' > M$ such that if we set $H(t) = 1$ for $t \in E$, $H(t) = -1$ for $t \in F \setminus E$ and $H(t) = 0$ otherwise then*

$$\sum_{j=1}^{M} |\hat{H}(j)|^2 + \sum_{j=M'}^{\infty} |\hat{H}(j)|^2 < \delta.$$

Proof. Combining the results of Lemma 18 and Lemma 19 we see that we can find E a measurable subset of F with $|E| = |F|/2$ such that, if H is defined as stated,

$$\sum_{j=1}^{M} |\hat{H}(j)|^2 < \delta/2.$$

Since $H \in L^2$ there exists an $M' > M$ such that $\sum_{j=M'}^{\infty} |\hat{H}(j)|^2 < \delta/2$, so we are done. ∎

We now have our basic construction.

Theorem 21. *Let ϕ_1, ϕ_2, ... be a Riesz basis. Suppose that $\delta > 0$ and $N, M'(0,0) \geq 1$ are given. Then we can find integers $M(r,n) < M'(r,n)$ with $M(r,n) > M'(0,0)$, together a collection of measurable sets $E_(n,r)$ such that*

(A) $E(2r-1,n+1) \cap E(2r,n+1) = \emptyset$, $E(2r-1,n+1) \cup E(2r,n+1) = E(r,n)$ for all $(r,n) \in \Lambda_N$,

(B) $|E(r,n)| = 2^{-n}$ for all $(r,n) \in \Lambda_{N+1}$,

(C) if we write $\Delta(r,n) = \{k : M(r,n) \leq k \leq M'(r,n)\}$ then $\Delta(r,n) \cap \Delta(s,m) = \emptyset$ whenever $(r,n) \neq (s,m)$,

and such that, if we set

$$\begin{aligned} H_{r,n}(t) &= 1 && \textit{for } t \in E(2r-1, n+1), \\ H_{r,n}(t) &= -1 && \textit{for } t \in E(2r, n+1), \\ H_{r,n}(t) &= 0 && \textit{otherwise.} \end{aligned}$$

whenever $(r,n) \in \Lambda_N$ then

$$\sum_{j \notin \Delta(r,n)} |\hat{H}_{r,n}(j)|^2 < \delta.$$

Proof. Use Lemma 20 repeatedly. ∎

Theorem 22. *Let $\epsilon > 0$ and $\kappa > 1$ be given and take $N \geq 1$, b and $b_{p,q}$ $[(p,q) \in \Lambda(N)]$ be as in Theorem 17. Suppose that ϕ_1, ϕ_2, ... a Riesz basis. $\delta > 0$ and $M'(0,0) \geq 1$ are given and that $E(n,r)$, $\Delta(r,n)$ and $H_{r,n}$ are constructed as in Theorem 21. Then if we set*

$$f(t) = \sum_{(p,q) \in \Lambda(N)} b_{p,q} H_{p,q}(t)$$

we have

(i) $||f||_\infty \leq 1$.

Further, provided only that δ is small enough, there is a measurable set F such that

(ii) $\max_{\lambda \in \Lambda(N)} |\sum_{\lambda \succeq (p,q)} \sum_{j \in \Delta(p,q)} |\hat{f}(j)\phi_j(t)| \geq \kappa - 1$ for all $t \notin F$,

(iii) $|F| < 2\epsilon$.

Proof. Conclusion (i) is just conclusion (i) of Theorem 21. To obtain (ii) and (iii) we proceed as follows. Observe that

$$\begin{aligned}\Bigg\|\sum_{\lambda\succeq(p,q)}\sum_{j\in\Delta(p,q)}\hat{f}(j)\phi_j-\sum_{\lambda\succeq(p,q)}b_{p,q}H_{p,q}\Bigg\|_2 &\leq \sum_{\lambda\succeq(p,q)}|b_{p,q}|\sum_{j\in\Delta(p,q)}\Bigg\|H_{p,q}-\sum_{j\in\Delta(p,q)}\hat{f}(j)\phi_j\Bigg\|_2\\ &\leq \sum_{\lambda\succeq(p,q)}\sum_{j\in\Delta(p,q)}\Bigg\|H_{p,q}-\sum_{j\in\Delta(p,q)}\hat{f}(j)\phi_j\Bigg\|_2.\end{aligned}$$

But, for each $(p,q)\in\Lambda(N)$,

$$\begin{aligned}\Bigg\|H_{p,q}-\sum_{j\in\Delta(p,q)}\hat{f}(j)\phi_j\Bigg\|_2 &\leq \Bigg\|\sum_{j\notin\Delta(p,q)}\hat{H}_{p,q}(j)\phi_j\Bigg\|_2+\sum_{(r,s)\neq(p,q)}\Bigg\|\sum_{j in \Delta(p,q)}\hat{H}_{r,s}(j)\phi_j\Bigg\|_2\\ &\leq \Bigg\|\sum_{j\notin\Delta(p,q)}\hat{H}_{p,q}(j)\phi_j\Bigg\|_2+\sum_{(r,s)\neq(p,q)}\Bigg\|\sum_{j notin \Delta(r,s)}\hat{H}_{r,s}(j)\phi_j\Bigg\|_2\\ &= \sum_{(r,s)\in\Lambda(N)}\Bigg\|\sum_{j notin \Delta(r,s)}\hat{H}_{r,s}(j)\phi_j\Bigg\|_2.\end{aligned}$$

But, writing A for the Riesz constant of the basis, Theorem 21 tells us that

$$\Bigg\|\sum_{j notin \Delta(r,s)}\hat{H}_{r,s}(j)\phi_j\Bigg\|_2^2\leq A\sum_{j notin \Delta(r,s)}|\hat{H}_{r,s}(j)|^2<A\delta.$$

Thus, retracing our steps,

$$\Bigg\|H_{p,q}-\sum_{j\in\Delta(p,q)}\hat{f}(j)\phi_j\Bigg\|_2<2^N(A\delta)^{1/2}$$

and

$$\Bigg\|\sum_{\lambda\succeq(p,q)}\sum_{j\in\Delta(p,q)}\hat{f}(j)\phi_j-\sum_{\lambda\succeq(p,q)}b_{p,q}H_{p,q}\Bigg\|_2<2^{2N}(A\delta)^{1/2}$$

for all $\lambda\in\Lambda(N)$.

If we now write

$$F_\lambda=\left\{t:\left|\sum_{\lambda\succeq(p,q)}\sum_{j\in\Delta(p,q)}\hat{f}(j)\phi_j-\sum_{\lambda\succeq(p,q)}b_{p,q}H_{p,q}\right|\geq 1\right\},$$

then Chebychev's inequality, and the last inequality of the preceding paragraph tells us that

$$|F_\lambda| < 2^{4N} A\delta.$$

Thus if we set $F = E \cup \bigcup_{\lambda \in \Lambda(N)} F_\lambda$ conclusion (ii) follows from conclusion (ii) Theorem 21 whilst conclusion (iii) Theorem 21 tells us that

$$|F| < \epsilon + 2^{5N} A\delta,$$

and (iii) holds provided only that δ is small enough. ∎

Theorems 21 and 22 give us what we want. However, we have accumulated a fair amount of notation in the course of the construction which we can now jettison to provide a simpler conclusion.

Theorem 23. *Let $\phi_1, \phi_2, \ldots$ be a Riesz basis. Given $K \geq 1$ we can find an integer $M(K) \geq 1$ with the following properties. Given any integer $m \geq 1$ and any $\eta > 0$ we can find a function $f \in L^\infty([0,1])$, an integer $m' > m$, a bijection $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ with $\sigma(r) = r$ for $1 \leq r \leq m$ and for $r \geq m'$, integers $m \leq p(1) \leq p(2) \leq p(3) \ldots p(M) \leq m'$ and a measurable set E such that*

(i) $||f||_\infty \leq 1$,

(ii) $\sum_{j=1}^{m} |\hat{f}(j)|^2 \leq \eta$,

(iii) $\max_{1 \leq k \leq M} |\sum_{j=1}^{p(k)} \hat{f}(\sigma(j))\phi_{\sigma(j)}| \geq K$ *for all* $t \in E$,

(iv) $|E| > 1 - K^{-1}$.

The distance from $L^\infty([0,1])$ to $C([0,1])$ is usually not very great. The present case is no exception.

Theorem 24. *In Theorem 23 we may take f continuous.*

Proof. This is entirely routine. Let the $M(K)$ of our new Theorem 24 be chosen to be the $M(2K+2)$ of the old Theorem 23. Then, by Theorem 23, given any $m \geq 1$ and any $\eta > 0$ we can find a function $f \in L^\infty([0,1))$, an integer $m' > m$, a bijection $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ with $\sigma(r) = r$ for $1 \leq r \leq m$ and for $r \geq m'$, integers $m \leq p(1) \leq p(2) \leq p(3) \ldots p(M) \leq m'$ and a measurable set E' such that

(i)′ $||f||_\infty \leq 1$,

(ii)′ $\sum_{j=1}^{m} |\hat{f}(j)|^2 \leq \eta$,

(iii)′ $\max_{1 \leq k \leq M} |\sum_{j=1}^{p(k)} \hat{f}(\sigma(j))\phi_{\sigma(j)}(t)| \geq K + 1$ for all $t \in E$,

(iv)′ $|E'| > 1 - K^{-1}/2$.

Let $\delta > 0$ a small number to be determined and choose $f \in C([0,1))$ such that f satisfies condition (i) and $||f - g||_2 \leq \delta/A^2$. Automatically

$$\left(\sum_{j=1}^{\infty} |\hat{f}(j) - \hat{g}(j)|^2\right)^{1/2} \leq \delta/A$$

so condition (ii) is satisfied provided only that we choose δ small enough.

Next we observe that

$$\left\|\sum_{j=1}^{p(k)}\hat{f}(j)\phi_j-\sum_{j=1}^{p(k)}\hat{g}(j)\phi_j\right\|_2\leq A\left(\sum_{j=1}^{p(k)}|\hat{f}(j)-\hat{g}(j)|^2\right)^{1/2}$$
$$\leq A\left(\sum_{j=1}^{\infty}|\hat{f}(j)-\hat{g}(j)|^2\right)^{1/2}\leq\delta.$$

Thus writing

$$E_k=\left\{t\in[0,1):\left\|\sum_{j=1}^{p(k)}\hat{f}(j)\phi_j-\sum_{j=1}^{p(k)}\hat{g}(j)\phi_j\right\|\geq 1\right\},$$

we have, by Chebychev's inequality,

$$|E_k|\leq\left\|\sum_{j=1}^{p(k)}\hat{f}(j)\phi_j-\sum_{j=1}^{p(k)}\hat{g}(j)\phi_j\right\|_2=\delta.$$

Thus, setting $E=E'\setminus\bigcup_{k=1}^{N}$, we see that (iii) holds automatically and

$$|E|\geq|E'|-\sum_{k=1}^{N}|E_k|\geq(1-\eta/2)-N\delta$$

so that (iv) holds provided only that we choose δ small enough. ∎

The remainder of the construction follows a standard rolling hump (condensation of singularities) pattern using Chebychev's inequality in the same way as in the two previous proofs. In view of the amount of notation involved readers will probably prefer to do it themselves rather than follow my proof.

It is easy to put the bricks of Theorem 24 together.

Lemma 25. *Let ϕ_1, ϕ_2, ... be a Riesz basis with constant A. Let $m'(0)=1$ We can construct inductively positive integers $M(n)$, $m(n)$, $m'(n)$ with $m'(n-1)<m(n)$, continuous functions f_n, bijections $\sigma_n:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ with $\sigma_n(r)=r$ for $1\leq r\leq m'(n-1)$ and for $m'(n)\leq r$, integers $m\leq p(1,n)\leq p(2,n)\leq p(3,n)\dots p(n,M(n))\leq m'$ and a measurable set E such that*

(i)$_n$ $\|f_n\|_\infty\leq 2^{-n}$,

(ii)$_n$ $\sum_{r=1}^{m(n)}|\hat{f}_n(r)|^2\leq A^{-1}2^{-4n-4}m(n)^2$,

(iii)$_n$ $\max_{1\leq k\leq M(n)}|\sum_{j=1}^{p(k,n)}\hat{f}_n(\sigma(j))\phi_{\sigma_n(j)}(t)|\geq 2^n$ *for all* $t\in E$,

(iv)$_n$ $|E_n|>1-2^{-n}$,

(v)$_n$ $\sum_{j=1}^{n}\sum_{r=m'(n)}^{\infty}|\hat{f}_j(r)|^2\leq A^{-1}2^{-2n-4}M(n+1)^{-2}$.

Proof. Conditions (i)$_n$ to (iv)$_n$ come directly from Theorem 24. The key point is that Theorem 24 allows us to define $M(n+1)$ before we define $m'(n)$ in such a way as to satisfy condition (v)$_n$. ∎

Proof of Theorem 6. As I said above, this is routine. It is easy to check that $\sigma(r) = \sigma_n(r)$ for $m'(n-1) \leq r \leq m'(n)$ gives a well defined bijection $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$. By the conditions (i)$_n$ $g_n = \sum_{r=1}^{n} f_r$ converges uniformly to a continuous function f as $n \to \infty$. Trivially

$$\begin{aligned}\left|\sum_{j=1}^{p(k,n)} \hat{f}(\sigma(j))\phi_{\sigma(j)}(t) - \sum_{j=1}^{p(k,n)} \hat{f}_n(\sigma(j))\phi_{\sigma(j)}(t)\right| &\leq \|g_{n-1}\|_\infty + |G_{k,n}(t)| \\ &\leq 1 + |G_{k,n}(t)\end{aligned}$$

where

$$G_{k,n}(t) = \sum_{r=1}^{n-1} \sum_{j=p(k,n)+1}^{\infty} \hat{f}_r(\sigma(j))\phi_{\sigma(j)}(t) + \sum_{r=n+1}^{\infty} \sum_{j=1}^{p(k,n)} \hat{f}_r(\sigma(j))\phi_{\sigma(j)}(t).$$

Using the properties of Riesz bases together with conditions (ii)$_{(r)}$ and (v)$_{(r)}$ we have

$$\begin{aligned}\|G_{k,n}\|_2 &\leq \sum_{r=1}^{n-1} \left\| \sum_{j=p(k,n)+1}^{\infty} \hat{f}_r(\sigma(j))\phi_{\sigma(j)} \right\|_2 + \sum_{r=n+1}^{\infty} \left\| \sum_{j=1}^{p(k,n)} \hat{f}_r(\sigma(j))\phi_{\sigma(j)} \right\|_2 \\
&\leq A^{1/2} \sum_{r=1}^{n-1} \left(\sum_{j=p(k,n)+1}^{\infty} |\hat{f}_r(\sigma(j))|^2 \right)^{1/2} + A^{1/2} \sum_{r=n+1}^{\infty} \left(\sum_{j=1}^{p(k,n)} |\hat{f}_r(\sigma(j))|^2 \right)^{1/2} \\
&\leq A^{1/2} \sum_{r=1}^{n-1} \left(\sum_{j=m'(n-1)}^{\infty} |\hat{f}_r(\sigma(j))|^2 \right)^{1/2} + A^{1/2} \sum_{r=n+1}^{\infty} \left(\sum_{j=1}^{m(n)} |\hat{f}_r(\sigma(j))|^2 \right)^{1/2} \\
&\leq A^{1/2} \sum_{r=1}^{n-1} \left(\sum_{j=m'(n-1)}^{\infty} |\hat{f}_r(\sigma(j))|^2 \right)^{1/2} + A^{1/2} \sum_{r=n+1}^{\infty} \left(\sum_{j=1}^{m(r-1)} |\hat{f}_r(\sigma(j))|^2 \right)^{1/2} \\
&\leq 2^{-n-1} M(n)^{-1} + \sum_{r=n+1}^{\infty} 2^{-2r-4} m(r)^{-1} \leq 2^{-n} M(n)^{-1}.\end{aligned}$$

Thus writing

$$E(k,n) = \{t : |G_{k,n}(t)| \geq 1\},$$

we have, by Chebychev's theorem, $|E(k,n)| \leq 2^{-n}M(n)^{-1}$ and, if we set $E'(n) = E(n) \bigcup_{k=1}^{M(n)}$, we have, by (iv)$_n$,

$$|E'(n)| \leq 2^{-n+1}$$

and by (iii)$_n$

$$\max_{1 \leq k \leq M(n)} \left| \sum_{j=1}^{p(k,n)} \hat{f}(\sigma(j))\phi_{\sigma(j)}(t) \right| \geq 2^n - 2$$

for all $t \in E'(n)$. The theorem follows. ■

The reader may readily check that Theorem 16 may be obtained by very similar arguments as can the following direct generalisation of Theorem 6.

Theorem 26. *Let (X,τ) be a compact Hausdorff space. Let $(X,\mathcal{F},\mu)$ be a regular non-atomic probability space. Let $\phi_1, \phi_2, \dots$ form a Riesz basis for $L^2(\mu)$. Then there exists a real continuous f and a bijection $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ such that*

$$\limsup_{N\to\infty} \left| \sum_{u=0}^{N} \hat{f}(\sigma(u))\phi_{\sigma(u)}(t) \right| = \infty.$$

for almost all $t \in X$.

5. Further Questions

It is natural to ask if our results can be improved so as to replace 'divergence almost everywhere' by 'divergence everywhere'. The obvious answer is no, since if we take a complete orthonormal system ϕ_n on $[0,1)$ and define $\tilde{\phi}_n$ by $\tilde{\phi}_n(t) = \phi_n(t)$ for $t \neq 0$, $\tilde{\phi}_n(0) = 0$ the result remains a complete orthonormal system but any linear combination of a finite set of $\tilde{\phi}_n$ will take the value 0 at zero.

The 'unfair' example just given means that we must reformulate our question and suggests that, at least initially, we should consider particular complete orthonormal systems. In the case of Fourier series we recall the remarkable theorem of Kahane and Katznelson that every set of measure zero is a set on which the Fourier sum of a continuous function diverges (see e.g. [4], Chapter II, Section 3) and consider the following sequence of lemmas.

Lemma 27. *Given any $\epsilon > 0$, any $K > 1$ and any integer $N \geq 1$ we can find a trigonometric polynomial P, a set E which is the union of a finite set of intervals and a bijection $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ such that*

(i) $||P||_\infty \leq 1$,
(ii) $\hat{P}(n) = 0$ *for all* $n \leq N$,
(iii) $\max_{k\geq 0} |\sum_{j\leq k} \hat{P}(\sigma(j)) \exp(i\sigma(j)t)| \geq K$ *for all* $t \notin E$.
(iv) $|E| < \epsilon$.

Proof. Apply de la Vallée Poussin summation to Theorem 24 (with the exponentials $\exp(2\pi nt)$ as the Riesz base) to obtain a P satisfying all the conditions except possibly (ii). To obtain (ii) it suffices to replace $P(t)$ by $\exp(iMt)P(t)$ with M a suitable large positive integer. ∎

Lemma 28 (Kahane and Katznelson). *Given any $K > 1$ there exists an $\epsilon(K)$ with the following property. Given any set E which is the union of a finite set of intervals and has $|E| < \epsilon(K)$ and any integer $N \geq 1$ we can find a trigonometric polynomial P such that*

(i) $||P||_\infty \leq 1$,
(ii) $\hat{P}(n) = 0$ *for all* $n \leq N$,

(iii) $\max_{k\geq 0}|\sum_{j\leq k}\hat{P}(j)\exp(ijt)| \geq K$ *for all* $t \in E$.

Proof. See [4], Chapter II, Section 3. ∎

Combining the last two lemma we obtain the following result.

Lemma 29. *Given any* $\epsilon > 0$, *any* $K > 1$ *and any integer* $N \geq 1$ *we can find a trigonometric polynomial* P *and a bijection* $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ *such that*

(i) $||P||_\infty \leq 1$,
(ii) $\hat{P}(n) = 0$ *for all* $n \leq N$,
(iii) $\max_{k\geq 0}|\sum_{j\leq k}\hat{P}(\sigma(j))\exp(2\pi i\sigma(j)t)| \geq K$ *for all* $t \in \mathbb{T}$.

It is now easy to prove the desired result.

Theorem 30. *We can find a continuous function* $f : \mathbb{T} \to \mathbb{C}$ *with* $\hat{f}(n)$ *for* $n < 0$ *and a bijection* $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *such that*

$$\sup_{k\geq 0}|\sum_{j\leq k}\hat{f}(\sigma(j))\exp(2\pi ijt)| = \infty$$

for all $t \notin \mathbb{T}$.

If, instead of considering complex valued functions and the orthonormal system $\exp 2\pi int$, we wish to consider real valued functions and the orthonormal system formed by $\sin 2\pi nt$ and $\cos 2\pi nt$ then we can replace the P of Lemma 29 by $\Re P + \Im P$ and first sum the $\cos 2\pi\sigma(j)t$ terms and then the $\sin 2\pi\sigma(j)t$ terms. The existence of a continuous function whose rearranged Fourier series diverges everywhere was first proved by L. V. Taĭkov [8] using Olevskiĭ's theorem in a different way.

So far as I know the general question remains open. In particular we may ask the following question.

Question 31. *Consider the Haar system on* $[0, 1)$ *ordered in some way. Does there exist a continuous function* $f : [0, 1] \to \mathbb{C}$ *and a bijection* $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *such that*

$$\sup_{k\geq 0}\left|\sum_{j=0}^{k} a_{\sigma(j)}\chi_{\sigma(j)}(t)\right| = \infty$$

for all $t \in [0, 1)$*?*

We remark that a similar proof to the one above (replacing the non-trivial lemma of Kahane and Katznelson by a trivial parallel lemma) gives the following.

Lemma 32. *Consider the Haar system on* $[0, 1)$ *ordered in some way. There exists a real* $f \in L^2$ *and a a bijection*

$$\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$$

such that

$$\sup_{k\geq 1}\left|\sum_{j=1}^{k}\hat{f}(\chi_{\sigma(j)})\chi_{\sigma(j)}(t)\right| = \infty$$

for all $t \in [0,1)$.

The method of proof applies to any 'well behaved' system (though the 'unfair example' with which we began the section shows that it can not apply to all Riesz bases).

Finally let me mention the problem which interests me most. Can Theorem 1 be extended to a wider class of functions? In particular what is the answer to the following question?

Question 33. *Consider the Haar system on* $[0,1)$ *ordered in some way. Does there exists an* $f \in L^2$ *such that*

$$\sup_{\delta>0}\left|\sum_{|\hat{f}(j)|>\delta}\hat{f}(j)\chi_j(t)\right| = \infty$$

for almost all $t \in [0,1)$.

References

[1] N. Dunford and J. T. Schwartz, *Linear Operators (Part I)* (2nd Ed), Wiley, 1957.

[2] W. Feller, *An Introduction to Probability Theory and its Applications*, (3nd Ed) Wiley, 1968.

[3] P. R. Halmos *Measure Theory*, Van Nostrand, 1950.

[4] Y. Katznelson *An Introduction to Harmonic Analysis* Wiley, 1968.

[5] T. W. Körner, *Divergence of decreasing rearranged Fourier series* submitted

[6] A. M. Olevskiĭ, *Fourier Series with Respect to General Orthogonal Systems* Springer 1975.

[7] H. L. Royden, *Real Analysis* (2nd Ed), MacMillan, New York, 1968.

[8] L. V. Taĭkov, *The divergence of Fourier series of continuous functions with respect to a rearranged trigonometric system*, Dokl. Akad. Nauk SSSR, **150**, 262–265 (1963).

DPMMS, 16 Mill Lane, Cambridge
E-mail address: `twk@pmms.cam.ac.uk`

Norm of the inverse of a matrix ; solution to a problem of Schäffer

(Dedicated to the memory of S.K. Pichorides)

Hervé Queffelec

UFR de Mathématiques Pures et Appliquées

URA D751 au CNRS - Bât. M2

Université des Sciences et Technologies de Lille

F-59655 Villeneuve d'Ascq Cedex France

Résumé

Soit E un espace normé complexe de dimension n et soit T un opérateur inversible de E ; Schäffer a montré que $\|T^{-1}\det T\| \leq K_n\|T\|^{n-1}$ avec $K_n \leq \sqrt{en}$, puis nous avons montré que cette estimation était optimale, aux constantes numériques près : $\underline{\lim} K_n n^{-1/2} \geq 1$. Nous donnons ici une exposition détaillée des résultats obtenus depuis le travail de Schäffer.

Abstract

Let E be a complex normed space of dimension n and let T be an invertible operator of E ; Schäffer proved that $\|T^{-1}\det T\| \leq K_n\|T\|^{n-1}$ with $K_n \leq \sqrt{en}$, and then we showed that this estimale was optimal, up to numerical constants : $\underline{\lim} K_n n^{-1/2} \geq 1$. We give here a detailed exposition of the results obtained since Schäffer's work.

AMS classifications : 11 L 40 - 30 C 10 - 47 A 30 - 46 B 07 - 46 B 09

MOTS CLES : Opérateur, déterminant, caractère, nombre premier, variable aléatoire, norme.

KEY WORDS : Operator, determinant, character, prime number, random variable, norm.

CONTENTS

1 Introduction

Fix an integer $n \geq 2$ and denote by $\mathcal{C}$ the set of all complex n-dimensional normed spaces of dimension n. As is well-known, any two elements of $\mathcal{C}$ are isomorphic, which in the mind of a non-analyst creates a tendency to identify all elements of $\mathcal{C}$ (up to isomorphism). But as soon as you work with a priori estimates (think for example of the Khintchine inequalities for Rademacher variables, of constant use in Harmonic analysis), you realize that an isomorphic classification is not precise enough and that you need an *isometric* one ; this is indeed what was already done in Banach's book of 1932 where the famous "Banach-Mazur distance" is introduced :

(1.1) $$d(E,F) = \inf\{\|u\|\|u^{-1}\|\} \geq 1$$

where $E, F \in \mathcal{C}$ and where u runs over all isomorphisms from E to F. Note that by compacity the infimum is always attained, so that

(1.2) $$d(E,F) = 1 \Leftrightarrow E \quad \text{isometric to} \quad F\ .$$

Also observe that

(1.3) $$d(E,G) \leq d(E,F)d(F,G) \quad \forall E,F,G \in \mathcal{C}$$

so that if one sets $\delta(E,F) = \log d(E,F)$ and identifies two isometric elements of $\mathcal{C}, \delta$ is a true metric on $\mathcal{C}$; although d itself is not a metric, it is customary to speak of d as of the Banach-Mazur distance ; by (1.1), (1.2), d indicates the lack of isometry between E, F and introduces an *isometric classification of the elements of* $\mathcal{C}$. This notion sometimes also makes sense for infinite-dimensional spaces ; for example if c (resp. c_0) denotes the set of converging sequences equipped with the sup norm (resp. the set of sequences converging to zero equipped with the sup norm), one has $d(c, c_0) = 3$ ([2]). It is also known ([19]) that

(1.4) $(\mathcal{C}, d)$ is a compact, connected space (Minkowski's compactum) .

$(\mathcal{C}, d)$ is respectably large : if one denote by $N(\varepsilon)$ the smallest number of closed balls of radius ε necessary to cover $\mathcal{C}$, then ([25]) :

(1.5) $$N(\varepsilon) \approx (\frac{1}{\varepsilon})^{\frac{n(n+1)}{2}}\ .$$

In the sequel, we shall implicitly assume that each $E \in \mathcal{C}$ is realized as $\mathbb{C}^n$ equipped with an adequate norm, and that the notion of determinant is such that $\det(e_1, \cdots, e_n) = 1$, where $(e_1, \cdots, e_n)$ is the canonical basis of $\mathbb{C}^n$. ℓ_n^2 denotes the unique (up to isometry) hilbertian space of $\mathcal{C}$:

$$\|\sum_1^n x_j e_j\|_{\ell_n^2} = \Big(\sum_1^n |x_j|^2\Big)^{1/2} .$$

If $E, F \in \mathcal{C}$, $\mathcal{L}(E, F)$ denotes the set of linear mappings from E into F, equipped with the operator norm ; $\mathcal{L}(E)$ denotes $\mathcal{L}(E, E)$; $G(E)$ denotes the set of invertible elements of $\mathcal{L}(E)$; if $T \in G(E)$ we set :

$$\text{(1.6)} \qquad \operatorname{adj} T = T^{-1} \det T =: \quad \text{adjugate of} \quad T .$$

$\operatorname{adj} T$ appears as a renormalized inverse of T (the "comatrix" of T) and is also defined for any $T \in \mathcal{L}(E)$. One easily checks that ([4]), $r(T)$ denoting the rank of T : $r(T) < n - 1 \Rightarrow \operatorname{adj} T = 0$; $r(T) = n - 1 \Rightarrow (\operatorname{adj} T) \circ T = 0$ and $\operatorname{adj} T(x) = \alpha x$ if $x \in \ker T$, α being the product of all non zero eigenvalues of T. Finally $\|T\|_2$ denotes the Hilbert-Schmidt norm of $T \in \mathcal{L}(\ell_n^2)$:

$$\|T\|_2^2 = \sum_1^n \|T(e_j)\|^2 .$$

It was observed by Halmos that

$$\text{(1.7)} \qquad T \in G(\ell_n^2) \Rightarrow \|\operatorname{adj} T\| \leq \|T\|^{n-1} .$$

(The important fact is not the power $n - 1$, obvious for homogeneity reasons, but the constant 1 before $\|T\|^{n-1}$). The proof of (1.7) is easy : Denote by $s_1 \geq \cdots \geq s_n > 0$ the eigenvalues of $|T| = \sqrt{T^*T}$ rearranged in decreasing order ; then (by polar decomposition) one has

$$\|T^{-1} \det T\| = \|T^{-1}\| \det(|T|) = s_n^{-1} s_1 \cdots s_n = s_1 \cdots s_{n-1} \leq s_1^{n-1} = \|T\|^{n-1} .$$

In view of (1.7), two natural questions are, if $E \in \mathcal{C}$:

$$\text{(1.8)} \qquad \begin{cases} \text{What is the behaviour of the best constant } K(E) \text{ such that} \\ \|\operatorname{adj} T\| \leq K(E)\|T\|^{n-1} \quad \forall T \in \mathcal{L}(E)\ ? \end{cases}$$

(The question would be the same for $T \in G(E)$ with distinct eigenvalues : such T's are dense in the unit ball of $\mathcal{L}(E)$ and adj is a continuous function ; we shall make use of this observation in section 3).

$$\text{(1.9)} \qquad \text{What is the behaviour of } K_n := \sup_{E \in \mathcal{C}} K(E)?$$

Observe that, in the isomorphic theory of $\mathcal{C}$, (1.8) and (1.9) are meaningless ; $K_n < \infty$ by compacity and that's all. Question (1.8) has not yet received a satisfactory answer ; one aim of this survey paper is to show that

$$a\sqrt{n} \leq K_n \leq b\sqrt{n} \tag{1.10}$$

where $a, b > 0$ are numerical constants.

2 F. John's theorem and J.J. Schäffer's work :

The following use of Cayley-Hamilton's theorem was made by F. Coppel ; it is the starting point of Gluskin, Meyer and Pajor's work [4] .

Theorem 2.1 (Coppel)

$$K_n \leq 2^n - 1 \, . \tag{2.1}$$

Proof : Take $T \in G(E)$; set $f(z) = \det(T - zI) = a_0 + \cdots + a_n z^n = (-1)^n(z - \lambda_1)\cdots(z - \lambda_n)$, where $\lambda_1, \cdots \lambda_n$ are the eigenvalues of T ; suppose that $\|T\| \leq 1$; then $\sup|\lambda_j| \leq 1$; moreover, as is well-known : $a_{n-k} = (-1)^{n-k}\sum_{1\leq i_1<\cdots<i_k\leq n} \lambda_{i_1}\cdots\lambda_{i_k}$, so that

$$|a_k| \leq C_n^k \, . \tag{2.2}$$

Now, Cayley-Hamilton's theorem implies $a_0 I + \cdots + a_n T^n = 0$, and since $a_0 = \det T$, $\operatorname{adj} T = a_0 T^{-1} = -(a_1 I + \cdots + a_n T^{n-1})$, whence (via (2.2)) :

$$\|\operatorname{adj} T\| \leq |a_1| + \cdots + |a_n| \leq \sum_{k=1}^{n} C_n^k = 2^n - 1 \, .$$

∎

In spite of its elegant proof, (2.1) turns out to be very rough ; this is what Schäffer proved by using a famous theorem of F. John ([11]). In order to state this theorem in modern terms, it is first convenient to give the following

Definition 2.2 *If $E, F \in \mathcal{C}$ and $u \in \mathcal{L}(E, F)$, the two-summing norm of u, denoted by $\Pi_2(u)$, is defined by*

$$\Pi_2(u) = \sup\Big\{\Big(\sum_1^N \|u(x_i)\|^2\Big)^{1/2}\Big\} \tag{2.3}$$

where the supremum runs over all "besselian systems" $x_1, \cdots, x_N$ of E, ie over all systems $x_1, \cdots, x_N$ of vectors of E such that $\sum_1^N |\xi(x_i)|^2 \leq \|\xi\|^2 \quad \forall \xi \in E' :=$ dual of E.

We shall not need the specific definition (2.3), but its following easy consequences (see for example [14]) :

i) $\Pi_2(u) \geq \|u\|$

ii) $E = F = \ell_n^2 \Rightarrow \Pi_2(u) = \|u\|_2$ (Ie Π_2 is an extension of the notion of Hilbert-Schmidt norm)

iii) $E, F, G, H \in \mathcal{C}$, $u \in \mathcal{L}(E,F)$, $v \in \mathcal{L}(F,G)$, $w \in \mathcal{L}(G,H)$ imply $\Pi_2(wvu) \leq \|w\|\Pi_2(v)\|u\|$ (Ie Π_2 is an ideal norm).
Now John's theorem, as crystal-clearly stated (and proved) in ([14]), is :

Theorem 2.3 (F. John) *: $\forall E \in \mathcal{C}$, $\exists u_0 \in \mathcal{L}(\ell_n^2, E)$ such that*

$$\|u_0\| = 1; \ \Pi_2(u_0^{-1}) = \sqrt{n}\,. \tag{2.4}$$

In particular (via i))

$$d(E, \ell_n^2) \leq \|u_0\|\|u\|_0^{-1} = \sqrt{n}\,. \tag{2.5}$$

Remark : u_0 is a good isomorphism between ℓ_n^2 and E ; sometimes, John's theorem is expressed as (2.5), but here we shall need the full strength of (2.4); the key to its proof is the following Kuhn-Tucker type optimization with constraint : take u_0 such that $|\det u_0|$ is maximum under the constraint $\|u_0\| \leq 1$; then $tr(u_0^{-1}v) \leq n\|v\|$ $\forall v \in \mathcal{L}(\ell_n^2, E)$ and (2.4) follows after some work (see[14] for details, where a more general statement, due to Lewis, is given).

We can now state and prove the following theorem of Schäffer ([17])

Theorem 2.4 (J.J. Schäffer)

$$K_n \leq \sqrt{en}\,. \tag{2.6}$$

Proof : It consists of the following three steps
Step 1 (improvement of (1.7) : $T \in G(\ell_n^2)$ implies

$$\|\operatorname{adj} T\| \leq \left(\frac{1}{n-1}\right)^{\frac{n-1}{2}} \|T\|_2^{n-1}\,. \tag{2.7}$$

In fact, using the notations of (1.7) and the comparison between arithmetic and geometric means, one gets :

$$\begin{aligned} \|\operatorname{adj} T\| &= s_1 \cdots s_{n-1} = [(s_1^2 \cdots s_{n-1}^2)^{\frac{1}{n-1}}]^{\frac{n-1}{2}} \leq \left(\frac{1}{n-1}\sum_{j=1}^{n-1} s_j^2\right)^{\frac{n-1}{2}} \\ &\leq \left(\frac{1}{n-1}\sum_{j=1}^{n} s_j^2\right)^{\frac{n-1}{2}} = \left(\frac{1}{n-1}\right)^{\frac{n-1}{2}} \|T\|_2^{n-1}\,. \end{aligned}$$

Step 2 (going to ℓ_n^2) : Take $E \in \mathcal{C}$, $T \in G(E)$ with $\|T\| = 1$, u_0 as in (2.4), and set $S = u_0^{-1}Tu_0$ $\quad(\ell_n^2 \xrightarrow{u_0} E \xrightarrow{T} E \xrightarrow{u_0^{-1}} \ell_n^2)$; then

$$\|\operatorname{adj} S\| \leq \sqrt{e}\,. \tag{2.8}$$

In fact, using (2.4) and the list of properties of the Π_2-norm, one gets :

$$\|S\|_2 = \Pi_2(S) \leq \Pi_2(u_0^{-1})\|Tu_0\| \leq \Pi_2(u_0^{-1})\|T\|\|u_0\| = \Pi_2(u_0^{-1}) = \sqrt{n}$$

and (2.7) now gives $\|\operatorname{adj} S\| \leq \left(\frac{1}{n-1}\right)^{\frac{n-1}{2}} \|S\|_2^{n-1} \leq \left(\frac{n}{n-1}\right)^{\frac{n-1}{2}} = \left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{\frac{n-1}{2}} \leq \sqrt{e}$. It is a bit strange, but it is in this step that Schäffer's estimate turns out to be sharp ; the travelling from E to ℓ_n^2 (i.e. the replacement of T by $\operatorname{adj} S$) is free : starting from $\|T\| = 1$, one gets $\|\operatorname{adj} S\| \leq \sqrt{e} = 0(1)$.

Step 3 (going back from ℓ_n^2) : We will show that $\|\operatorname{adj} T\| \leq \sqrt{en}$. In fact, $\operatorname{adj} T = u_0 \operatorname{adj} S u_0^{-1}$, so that by (2.8) :

$$\|\operatorname{adj} T\| \leq \|u_0\|\|\operatorname{adj} S\|\|u_0^{-1}\| \leq \sqrt{e}\sqrt{n} = \sqrt{en}\,.$$

This ends the proof of theorem 2.4. ■

Remark : Denote by ℓ_n^1 (resp. ℓ_n^∞) the space $\mathbb{C}^n$ equipped with $\|\Sigma x_j e_j\| = \Sigma|x_j|$ (resp $\|\Sigma x_j e_j\| = \sup|x_j|$) ; it is well-known ([19]) that

$$d(\ell_n^1, \ell_n^2) = d(\ell_n^\infty, \ell_n^2) = \sqrt{n}\,. \tag{2.9}$$

So, in view of (2.5), ℓ_n^1 and its dual ℓ_n^∞ are as far as possible from ℓ_n^2 ; now Schäffer was able to prove that (recall that $K(\ell_n^2) = 1$ by (1.7))

$$K(\ell_n^1) = K(\ell_n^\infty) = O(1) \quad \text{as} \quad n \to \infty \tag{2.10}$$

(For real spaces, he even proved that $K(\ell_n^1) = K(\ell_n^\infty) = 2$). His heuristic reasoning was then $K(\ell_n^1), K(\ell_n^\infty)$ do not explode for spaces as far as possible from ℓ_n^2, so $K(E)$ should never explode, in other terms the (obviously increasing) sequence K_n should be bounded ; therefore, Schäffer was not very proud of his theorem 2.4, whereas he should have been since we shall see later that his estimate is best possible. It is instructive to compare this "mistake" with a similar one concerning the Hilbert transform H acting from $L^2(E)$ to $L^2(E)$, where L^2 stands for the standard Lebesgue space on the unit circle and where $E \in \mathcal{C}$ B. Virot ([22]) has proved the following

$$E = \ell_n^1 \Rightarrow \|H\|_{L^2(E)\to L^2(E)} = O(\log n)\,. \tag{2.11}$$

For the same reasons as Schäffer, he conjectured that

$$\sup\{\|H\|_{L^2(E)\to L^2(E)}; E \in \mathcal{C}\} = O(\log n)\,.$$

But as Bourgain ([1]) showed, this is not the case

$$\sup\{\|H\|_{L^2(E)\to L^2(E)}; E \in \mathcal{C}\} \geq an^{1/3} \tag{2.12}$$

where $a > 0$ is a numerical constant ; the correct order of growth of the LHS of (2.12) is not known (it is between $an^{1/3}$ and $n^{1/2}$ by (2.5)).

3 The Gluskin-Meyer-Pajor paper and the new definition of K_n :

Here we shall content ourselves with sketching the main ideas and results of the paper, and refer the interested reader to [4] for a more detailed exposition. Some definitions will be useful.

A^+ is the space of absolutely convergent Taylor series $f(z) = \sum_0^\infty a_k z^k$, equipped with the norm $\|f\|_{A^+} = \sum_0^\infty |a_k|$.

D is the open unit disk of $\mathbb{C}$. If $\lambda_1, \cdots, \lambda_n \in D^n$, we set

$$\varphi_n(\lambda_1, \cdots, \lambda_n) = \inf\{\sum_0^\infty |a_k|\} = \inf\{\|f\|_{A^+} - |f(0)|\} \tag{3.1}$$

where the infimum runs over all $f \in A^+$ satisfying the $n+1$ interpolation conditions (*we shall say that f is admissible*) :

$$f(0) = \lambda_1 \cdots \lambda_n = a_0;\ f(\lambda_1) = \cdots = f(\lambda_n) = 0 \,.$$

Finally we set

$$L_n = \sup\{\varphi_n(\lambda_1, \cdots, \lambda_n); (\lambda_1, \cdots, \lambda_n) \in D^n\} \,. \tag{3.2}$$

Note that L_n is defined as a maximin. Now one of the basic result of [4], which allowed all the progress on the estimation of K_n, is the following

Theorem 3.1 (Gluskin-Meyer-Pajor) *:*

$$K_n = L_n \,. \tag{3.3}$$

We shall just sketch the proof, which consists of two steps.

Step 1 ($K_n \leq L_n$): Although this is the easier part, it is here that the basic idea (i.e. an elaboration of Coppel's argument) appears ; take $E \in \mathcal{C}$, $T \in G(E)$ with $\|T\| < 1$, having distinct eigenvalues $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$, and show that

$$\|\operatorname{adj} T\| \leq \varphi_n(\lambda_1, \cdots, \lambda_n) \,. \tag{3.4}$$

In fact, let $f(z) = \sum_0^\infty a_k z^k$ be an admissible function ; then the characteristic polynomial of T divides f, so that $f(T) = 0$ by Cayley-Hamilton's theorem ; it follows that $\|\operatorname{adj} T\| = \|a_0 T^{-1}\| = \|\sum_1^\infty a_k T^{k-1}\| \leq \sum_1^\infty |a_k|$. Passing to the infimum over f, we get (3.4); using a perturbation argument (check that φ_n

is continuous on D and see the remark following (1.8)), we get $K_n \leq L_n$ as announced.

Step 2 ($L_n \leq K_n$): This is the more difficult part, and is rather unexpected ; starting from $\lambda_1, \cdots, \lambda_n \in D$, distinct and non zero, we shall show that

(3.5) There exists $V \in \mathcal{C}$ such that $\varphi_n(\lambda_1, \cdots, \lambda_n) \leq K(V) \leq K_n$.

Define V in the following artificial way, adapted to $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$:

$$(3.6) \qquad V = \mathbb{C}^n \quad \text{with the norm} \quad \|\sum_1^n \mu_j e_j\| = \inf \|g\|_{A^+}$$

where the infimum runs over all $g \in A^+$ such that $g(\lambda_j) = \mu_j$, $1 \leq j \leq n$. If $\lambda := (\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$, $\mu := (\mu_1, \cdots, \mu_n)$, $\lambda\mu := (\lambda_1\mu_1, \cdots, \lambda_n\mu_n)$ define $T \in \mathcal{L}(V)$ by

$$(3.7) \qquad T(\mu) = \lambda\mu \quad \text{(Hadamard multiplication)} .$$

$T(e_j) = \lambda_j e_j$, so the characteristic polynomial of T is :

$$P(z) = (z - \lambda_1) \cdots (z - \lambda_n) =: \sum_0^n a_k z^k .$$

$\|T(\mu)\| \leq \|\mu\|$ since $g(\lambda_j) = \mu_j \Rightarrow (zg)(\lambda_j) = \lambda_j \mu_j$ with $\|zg\|_{A^+} = \|g\|_{A^+}$; so $\|T\| \leq 1$. Set $e = e_1 + \cdots + e_n$ and observe that $\|e\|_V = 1$. In fact, $g(\lambda_1) = 1$ with $g(z) = \sum_0^\infty b_k z^k$ implies $1 \leq \sum_0^\infty |b_k||\lambda_1|^k \leq \sum_0^\infty |b_k| = \|g\|_{A^+}$ and $g_0 = 1$ is such that $g_0(\lambda_j) = 1$, $1 \leq j \leq n$. Now $\operatorname{adj} T = -Q(T)$, with $Q(z) = \sum_1^n a_k z^{k-1}$ and $Q(T)(e) = \sum_1^n Q(\lambda_j) e_j =: \mu^*$, so that

$$(3.8) \qquad \|\mu^*\|_V \leq \|\operatorname{adj} T\| \leq K(V) .$$

Take $g \in A^+$ such that $g(\lambda_j) = \mu_j^* = Q(\lambda_j)$, $1 \leq j \leq n$; then g is of the form $g = Q + Ph$, $h \in A^+$; set $f(z) = a_0 + zg(z) = a_0 + zQ(z) + zP(z)h(z) = P(z) + zP(z)h(z) = P(z)(1 + zh(z)) \cdot (-1)^n f$ is admissible in the sense of (3.1) since $(-1)^n f(0) = (-1)^n P(0) = \lambda_1 \cdots \lambda_n$ and $f(\lambda_j) = 0$, $1 \leq j \leq n$. So $\varphi_n(\lambda_1, \cdots, \lambda_n) \leq \|f\|_{A^+} - |f(0)| = \|zg\|_{A^+} = \|g\|_{A^+}$. Taking the infimum over g gives

$$(3.9) \qquad \varepsilon_n(\lambda_1, \cdots, \lambda_n) \leq \|\mu^*\|_V .$$

Combining (3.8) and (3.9) gives (3.5). Using a perturbation argument, we get $L_n \leq K_n$ as announced. This ends the proof of theorem 3.1. □

This new and unexpected definition of K_n, from which $\mathcal{C}$ has disappeared, allowed the authors (see [4]) to prove successively that

1) K_n grows to infinity with n (so, Schäffer's conjecture is false).

2) More quantitatively (using entropy estimates), $K_n \geq \delta \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{\log n \log\log n}}$ (So that one is very close to Schäffer's upper bound (2.6)).
They also include in their paper an improvement of 2) due to Bourgain

3) $K_n \geq \delta \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{\log n}}$

(Using probabilistic estimates : one is still closer to Schäffer's upper bound). There is still a slight gap between 3) and (2.6) ; this gap will be filled in the next section, by a refinement of Bourgain's method.

4 Solution of Schäffer's problem via a Turan type estimate :

After publishing [15], we were informed by various mathematicians (G. Halàsz, H. Shapiro, S.B. Stechkin) that lemma 4.4 below was not new and was due to H. Montgomery ; in any case, theorem 4.1. below was new in 1993 and is the key for proving the optimality of Schäffer's result with the help of theorem 3.1. We were also informed by S.B. Stechkin, with whom we could still discuss in september 1995, that he had obtained independently theorem 4.1 in 1994, under a slightly weaker form for upper bounds, but also with lower bounds (see [18]). We shall adopt one of his notations, where K, n, A are integers :

$$U_n(A) = \inf\{\sup |z_1^k + \cdots + z_n^k|\} \tag{4.1}$$

where the supremum runs over $k = 1, 2, \cdots, A$ and the infimum over all $z_1, \cdots, z_n$ such that $|z_1| = \cdots = |z_n| = 1$. Then we have

Theorem 4.1 *([15]) There exists a sequence $(A_n)_{n\geq 1}$ of integers such that*

$$A_n = n^2 - O(n^{17/11}) = n^2(1 - \varepsilon_n) \tag{4.2}$$

$$U_n(A_n) \leq \sqrt{n} + O(n^{3/11}\sqrt{\log n}) = \sqrt{n}(1 + \delta_n) \tag{4.3}$$

where ε_n, δ_n are two positive sequences tending to zero.

We shall first admit theorem 4.1 and derive the following theorem, which shows the optimality of Schäffer's result up to numerical constants.

Theorem 4.2 *[15]*

1) $\underline{\lim} \frac{K_n}{\sqrt{n}} \geq 1$.

2) $\frac{1}{\sqrt{2e}} \leq \inf \frac{K_n}{\sqrt{n}} \leq \sup \frac{K_n}{\sqrt{n}} \leq \sqrt{e}$.

Proof : We will content ourselves with proving 1) ; the right inequality in 2) is just (2.6) ; for the left inequality we refer to [15]. (4.2), (4.3) provide us with $z_1, \cdots, z_n$ such that

$$(4.4)\ |z_j| = 1\ \forall j\ ;\ |z_1^k + \cdots + z_n^k| \leq \sqrt{n}(1+\delta_n) \quad \text{for} \quad 1 \leq k \leq A_n; \delta_n \to 0$$

Take $\rho \in]0,1[$; compress $z_1, \cdots, z_n$ by putting

$$\lambda_\ell = \rho^{1/n} z_\ell \quad (\ell = 1, \cdots n)\ . \tag{4.5}$$

We will show that, for this particular choice, $\varphi_n(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$ is large ; first observe that $\lambda_1 \cdots \lambda_n = \rho z_1 \cdots z_n$, so that

$$|\lambda_1 \cdots \lambda_n| = \rho\ . \tag{4.6}$$

Then take $f(z) = \sum_0^\infty a_k z^k$ an admissible function in the sense of (3.1) ; in particular $|a_0| = |\lambda_1 \cdots \lambda_n| = \rho$ by (4.6). Now forget (here we follow closely Bourgain) that each of the $f(\lambda_\ell)$ is zero to remember only that $0 = \sum_{\ell=1}^k f(\lambda_\ell) = \sum_{k=1}^\infty a_k(\lambda_1^k + \cdots + \lambda_n^k)$. So that

$$n\rho = |na_0| \leq \sum_{k=1}^\infty |a_k||\lambda_1^k + \cdots + \lambda_n^k| = \sum_{k=1}^\infty |a_k|\rho^{k/n}|z_1^k + \cdots + z_n^k|$$

which implies for any integer N :

$$n\rho \leq \sum_{k=1}^N |a_k||z_1^k + \cdots + z_n^k| + n\rho^{\frac{N}{n}} \sum_{N+1}^\infty |a_k|\ . \tag{4.7}$$

Now we would like, roughly speaking, to read (4.7) as

$$n\rho \leq \sqrt{n} \sum_{k=1}^\infty |a_k| \tag{4.7$'$}$$

which would give a good lower bound for $\sum_1^\infty |a_k|$. So we would like to have :

$$|z_1^k + \cdots + z_n^k| \quad \text{dominated by} \quad \sqrt{n} \quad (1 \leq k \leq N) \tag{4.8}$$

$$n\rho^{\frac{N}{n}} \leq \sqrt{n}, \quad \text{i.e.} \quad N \geq \frac{1}{2}\frac{n \log n}{\log 1/\rho}\ . \tag{4.9}$$

But, in view of (4.2) and (4.4), the choice $N = A_n$ is certainly perfectly good (too good !) for that when ρ is fixed and n large ($n \geq n_0(\rho)$) and gives via (4.7) :

$$n\rho \leq \sqrt{n}(1+\delta_n)\sum_{1}^{N}|a_k| + \sqrt{n}\sum_{N+1}^{\infty}|a_k| \leq \sqrt{n}(1+\delta_n)\sum_{1}^{\infty}|a_k| .$$

So, using theorem 3.1 :

$$K_n = L_n \geq \varphi_n(\lambda_1, \cdots, \lambda_n) \geq \frac{n\rho}{\sqrt{n}(1+\delta_n)} .$$

Therefore $\underline{\lim}\frac{K_n}{\sqrt{n}} \geq \rho$; letting ρ tend to 1, we get 1). □

Before proving theorem 4.1, we need some definitions and notations. If a, b are integers, $a|b$ indicates that a divides b and $a \perp b$ indicates that a does not divide b ; p always denotes a prime number > 2; $\frac{\mathbb{Z}}{p\mathbb{Z}}$ denotes the cyclic additive group of integers mod$p$; its cyclic dual is generated by ω : $\omega(\ell) = e^{2i\pi\frac{\ell}{p}}$; $G(p)$ denotes the cyclic multiplicative group of non-zero elements of $\frac{\mathbb{Z}}{p\mathbb{Z}}$; its cyclic dual $\Gamma(p)$ is generated by some ψ (the fact that $G(p)$ is cyclic is standard since $\frac{\mathbb{Z}}{p\mathbb{Z}}$ is a field, but the smallest generator $g(p)$ of $G(p)$ is not known, although it has been computed for the "first" values of p : for example $g(17) = 3$, $g(23) = 5$, $g(2689) = 19$, etc... see also the remark at the end of section 4). If $\chi \in \Gamma(p)$ it is customary, following Dirichlet, to extend it to a number-theoretic function $\chi : \mathbb{N}^* \to \mathbb{C}$ such that

a) $\chi(n+p) = \chi(n) \quad \forall n$

b) $p|n \Rightarrow \chi(n) = 0$

c) $p \perp n \Rightarrow |\chi(n)| = 1$

d) $\chi(mn) = \chi(m)\chi(n) \quad \forall m, n.$

χ_0 denotes the unit element of $\Gamma(p)$: $\chi_0(n) = 1$ for $1 \leq n \leq p-1$. We shall use the gaussian sums

$$S(k,\chi) = \sum_{\ell=1}^{p}\chi(\ell)e^{2i\pi k\frac{\ell}{p}} \quad (\chi \in \Gamma(p); \quad k \in \mathbb{N}^*) .$$

Now the proof of theorem 4.1 is a combination of the following three lemmas, each of them rather well-known as we mentioned earlier.

Lemma 4.3 *$p \perp k$ and $\chi \neq \chi_0$ imply*

(4.10) $$|S(k,\chi)| = \sqrt{p}\,.$$

This is well-known ([7] or [9]), but we recall the proof : $S(k,\chi) = \overline{\chi(k)}S(1,\chi)$ so we may suppose that $k=1$; setting $S = S(1,\chi)$, we get successively

$$\begin{aligned}
|S|^2 &= \sum_{\ell_1=1}^{p-1} \chi(\ell_1)e^{2i\pi\ell_1/p}\Big(\sum_{\ell_2=1}^{p-1} \overline{\chi(\ell_2)e^{-2i\pi\ell_2/p}}\Big) \\
&= \sum_{\ell_1=1}^{p-1} \chi(\ell_1)e^{2i\pi\frac{\ell_1}{p}}\Big(\sum_{\ell_2=1}^{p-1} \overline{\chi(\ell_1\ell_2)e^{-2i\pi\frac{\ell_1\ell_2}{p}}}\Big) = \sum_{\ell_2=1}^{p-1} \overline{\chi(\ell_2)}S\ell_2
\end{aligned}$$

where $S_{\ell_2} = \sum_{\ell_1=1}^{p-1} e^{2i\frac{\pi}{p}(1-\ell_2)\ell_1}$, so that $S_1 = p-1$ and $S_{\ell_2} = \sum_{\ell_1=0}^{p-1} e^{2i\frac{\pi}{p}(1-\ell_2)\ell_1} - 1 =$ -1 if $2 \leq \ell_2 \leq p-1$. Therefore $|S|^2 = p-1-\sum_{\ell_2=2}^{p-1}\overline{\chi(\ell_2)} = p-1-(-1) = p$, since $\sum_{\ell_2=1}^{p-1}\overline{\chi(\ell_2)} = 0$. □

Let us now twist ω by ψ, setting (recall that ψ generates $\Gamma(p)$) :

$$z_\ell = \psi(\ell)\omega(\ell) \quad (1 \leq \ell \leq p-1)\ ;$$

for this particular choice of $z_1,\cdots,z_{p-1}$, we have :

Lemma 4.4 *([20]) : Set $T_k = z_1^k + \cdots + z_{p-1}^k$; then*

1)

$$|T_k| = \begin{cases} \sqrt{p} & \text{if } p \perp k, p-1 \perp k \quad \text{(case 1)} \\ 1 & \text{if } p \perp k, p-1|k \quad \text{(case 2)} \\ 0 & \text{if } p|k, p-1 \perp k \quad \text{(case 3).} \end{cases}$$

In particular

2) $|T_k| \leq \sqrt{p}$ *for* $1 \leq k < p(p-1)$
(Note that $T_{p(p-1)} = p$).

Proof :
Case 1 : $|T_k| = |S(k,\psi^k)| = \sqrt{p}$ by (4.10), since $\psi^k \neq \chi_0$ and $p \perp k$.
Case 2 : $T_k = \sum_{\ell=1}^{p-1} e^{2i\pi k\frac{\ell}{p}} = \sum_{\ell=0}^{p-1} e^{2i\pi k\frac{\ell}{p}} - 1 = -1.$
Case 3 : $T_k = \sum_{\ell=1}^{p-1} \psi^k(\ell) = O$ since $\psi^k \neq \chi_0$. □

Lemma 4.5 (used by Bourgain) *: Let $Z_1, \cdots, Z_n$ be complex independent random variable uniformly distributed on the unit circle Γ ; set $X_k = |Z_1^k + \cdots + Z_n^k|$. Then, for any $N \geq 2$, E denoting expectation :*

1) $E(\sup_{1 \leq k \leq N} X_k) \leq \sqrt{n}\sqrt{2\log N}$.
In particular

2) $\exists z_1, \cdots, z_n \in \Gamma$ such that $|z_1^k + \cdots + z_n^k| \leq \sqrt{n}\sqrt{2\log N}$ for $1 \leq k \leq N$.

Proof : First observe that all X_k''s are equidistributed, since the homomorphism (character !) $z \mapsto z^k$ of Γ preserves Haar measure ; then, setting $X = \sup X_k$ and introducing a real parameter $q \geq 1$, we get $\big(E(X)\big)^q \leq E(X^q) \leq \sum_{k=1}^{N} E(X_k^q) = NE(X_1^q)$. Using the Khintchine inequalities ([24]) : $E(X) \leq N^{\frac{1}{q}}\|X_1\|_q \leq N^{\frac{1}{q}}\sqrt{q}\|X_1\|_2 = \sqrt{n}\sqrt{q}N^{\frac{1}{q}}$; optimizing in q ($q = 2\log N$) gives 1). 2) follows with $z_\ell = Z_\ell(\omega)$, for some ω of the probability space Ω where the Z_j's are defined. □

Proof of theorem 4.1 : Let (p_j) be the sequence of primes and $r = r(n)$ be such that $p_r \leq n < p_{r+1}$. It is known ([5]) that

$$p_{r+1} - p_r = O(p_r^\alpha) \quad \text{for} \quad \alpha = \frac{1}{2} + \frac{1}{22} = \frac{6}{11}\,. \tag{4.11}$$

Set $p = p_r$, $A_n = p(p-1) - 1$, choose $z_1, \cdots, z_{p-1}$ as in lemma 4.4, $z_p, \cdots, z_n$ as in 2) of lemma 4.5 (with n replaced by $n - p$) ; we get

$$|z_1^k + \cdots + z_{p-1}^k| \leq \sqrt{p} \quad (1 \leq k \leq A_n) \tag{4.12}$$

$$|z_p^k + \cdots, + z_n^k| \leq \sqrt{n-p}\sqrt{2\log A_n} \quad (1 \leq k \leq A_n)\,. \tag{4.13}$$

Adding (4.12), (4.13) and using (4.11) gives :

$$|z_1^k + \cdots + z_n^k| \leq \sqrt{p} + \sqrt{n-p}\sqrt{2\log A_n} \leq \sqrt{n} + 0\big(n^{\frac{3}{11}}\sqrt{\log n}\big) \leq \sqrt{n}(1 + \delta_n)$$

for $1 \leq k \leq A_n$, with $\delta_n \xrightarrow{>} 0$; moreover

$$A_n = p^2 + O(n) = \big(n + O(n^\alpha)\big)^2 + O(n) = n^2 + O(n^{\alpha+1}) \geq n^2 - O(n^{\frac{17}{11}}) \geq n^2(1 - \varepsilon_n)$$

where $\varepsilon_n \xrightarrow{>} O$; this ends the proof. □

Remark 4.6 *In [15], theorem 4.1 was in fact stated with the exponents $\frac{65}{42}$ and $\frac{23}{84}$ instead of $\frac{17}{11}$ and $\frac{3}{11}$, because instead of (4.11) we used the slightly weaker estimate ([10]) $p_{r+1} - p_r = O(p_r^\beta)$ with $\beta = \frac{1}{2} + \frac{1}{21} = \frac{23}{42}$; but the proof was exactly the same.*

Remark 4.7 *The proof of theorem 4.1 seens to contain an "explicit" part with the choice of $z_1, \cdots, z_{p-1}$ and a random one with the choice of $z_p, \cdots, z_n$; but in fact the choice of $z_1, \cdots, z_{p-1}$ is not so explicit because nobody knows an explicit generator of $\Gamma(p)$ (or equivalently of $G(p)$) ; this is connected with a famous conjecture of Artin : "let a be an integer, $a \neq 0, +1, -1$, not a perfect square. Then there exists an infinity of primes such that a generates $G(p)$, i.e. is a primitive root mod p". This conjecture was proved assuming the Riemann hypothesis for the Dedekind zêta function of an algebraic number field. Independently of any hypothesis, Heath-Brown [6] and Ram Murty [16] have proved the following : "There exists an infinity of primes such that $g(p)\varepsilon\{2,3,5\}$, where $g(p)$ is the smallest generator of $G(p)$".*
So one of those three integers will generate $G(p)$ for an infinity of p ; but which ? No explicit generator of $G(p)$, even for an infinite subsequence of p's, is known ; so the choice of $z_1, \cdots, z_{p-1}$ is hardly more explicit than that of $z_p, \cdots, z_n$.

5 A^+ norms of interpolating functions ; concluding remarks and questions :

Schäffer proved (using John's theorem) that $K_n \leq \sqrt{en}$; Gluskin, Meyer and Pajor proved that $L_n = K_n$ (theorem 3.1) ; so we get the following :

$$(5.1) \quad \begin{cases} \text{If } \lambda_1, \cdots, \lambda_n \in D, \text{ there exists } f \in A^+ \\ \text{such that } f(0) = \lambda_1, \cdots, \lambda_n, f(\lambda_1) = \cdots = f(\lambda_n) = 0 \\ \text{and } \|f\|_{A^+} - |f(0)| \leq \sqrt{en}\,. \end{cases}$$

A natural question now is : can one obtain a direct proof of (5.1), which does not use C and John's theorem ? Surprisingly enough this has not yet been done and the obvious candidate, the Blaschke product

$$(5.2) \qquad B_n(z) = \prod_{j=1}^{n} \frac{\lambda_j - z}{1 - \bar{\lambda}_j z} = \sum_{0}^{\infty} a_k^{(n)} z^k$$

which does satisfy the $n+1$ interpolation conditions of (5.1), and also (see theorem 5.1 below) $|B_n\|_{A^+} \leq \pi n$, does not in general satisfy the estimate $\|B_n\|_{A^+} = O(\sqrt{n})$. Let us begin by the following positive result (M. Meyer and A. Pajor, private communication)

Theorem 5.1 *Take $\lambda_1, \cdots, \lambda_n \in D$. Then (see (5.2)) :*

1) The estimate $\sum_{1}^{\infty} |a_k^{(n)}| \leq \pi n$ always holds.

2) There exist integers $1 \le p_2 < \cdots < p_n$ *and scalars* $a_1, \cdots, a_n$ *such that* $f(z) := \lambda_1 \cdots \lambda_n + \sum_1^n a_j z^{p_j+1}$ *(with* $p_1 = 0$*) is admissible in the sense of (3.1) and such that* $\sum_1^n |a_j| \le n$.

3) $\forall r \in]0,1[$, $\exists C_r$ *such that* $\sup_j |\lambda_j| \le r \Rightarrow \sum_1^\infty |a_k^{(n)}| \le C_r\sqrt{n}$.

4) If $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = r \in]0,1[$, *then* $\delta_r\sqrt{n} \le \sum_1^\infty |a_k^{(n)}| \le C_r\sqrt{n}$, *where* $\delta_r > 0$ *depends only on* r.

Proof : 1) Take $|z| = 1$; then

$$\frac{B_n'(z)}{B_n(z)} = -\sum_1^n \frac{1-|\lambda_j|^2}{(1-\bar\lambda_j z)^2}\frac{1-\bar\lambda_j z}{\lambda_j - z} = \frac{1}{z}\sum_1^n \frac{1-|\lambda_j|^2}{|1-\bar\lambda_j z|^2}$$

so $|B_n'(z)| = \sum_1^n P_{\lambda_j}(z)$, where $P_a(z) = 1 + 2\mathcal{R}\sum_1^\infty \bar a^n z^n = \dfrac{1-|a|^2}{|z-a|^2}$ is the Poisson kernel at $a \in D$; so by Hardy's inequality for H^1 ([8]) :

$$\sum_1^\infty |a_k^{(n)}| = \sum_1^\infty \frac{k|a_k^{(n)}|}{k} \le \pi\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |B_n'(e^{i\theta})| d\theta = \pi\sum_{j=1}^n \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P_{\lambda_j}(e^{i\theta}) d\theta = n\pi\ .$$

2) Set $e = (1,\cdots,1)$, $\lambda = (\lambda_1,\cdots,\lambda_n)$, $\lambda^p = (\lambda_1^p,\cdots,\lambda_n^p)$ and select integer $1 \le p_2 < \cdots < p_n$) which maximize the determinant (in modulus) $\Delta(p_2,\cdots,p_n) := \det(e, \lambda^{p_2}, \cdots, \lambda^{p_n}) = \det(\lambda_i^{p_j})$ where $p_1 = 0$. This is possible since $\Delta(p_2,\cdots,p_n) \to 0$ as $p_2,\cdots,p_n \to \infty$. Now consider the following $(n \times n)$ linear system (where $p_1 = 0$)

$$\sum_{j=1}^n a_j \lambda_i^{p_j+1} = -\lambda_1 \cdots \lambda_n \quad (i = 1,\cdots,n)\ .$$

Cramer's formulas show that for example $a_1 = \frac{N_1}{D}$, where $N_1 = -\lambda_1 \cdots \lambda_n \Delta(p_2 + 1,\cdots,p_n+1)$ and $D = \lambda_1 \cdots \lambda_n \Delta(p_2,\cdots,p_n)$; the maximal character of $\Delta(p_2,\cdots,p_n)$ implies $|N_1| \le |D|$ and $|a_1| \le 1$; similarly, $|a_j| \le 1\ \ \forall j$, so f is admissible and $\sum_1^n |a_j| \le n$.

3)If h is continuous on the circle, set as usual $\|h\|_p = \left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |h(e^{it})|^p dt\right)^{\frac{1}{p}}$ $(1 \le p \le \infty)$. The computation of 1) shows that $\|B_n'\|_1 = n$ and $\|B_n'\|_\infty \le \sum_1^n \dfrac{1+|\lambda_j|}{1-|\lambda_j|} \le$

$n\frac{1+r}{1-r}$; so $\|B_n'\|_2^2 \le \|B_n'\|_1 \|B_n'\|_\infty \le n^2 \frac{1+r}{1-r}$. Parseval's identity implies

$$\sum_0^\infty |a_k^{(n)}|^2 = 1; \quad \sum_1^\infty k^2 |a_k^{(n)}|^2 \le n^2 \frac{1+r}{1-r}. \tag{5.3}$$

Cauchy-Schwarz's inequality (applied twice) and (5.3) then give :

$$\begin{aligned} \sum_1^\infty |a_k^{(n)}| &\le \sqrt{n}\Big(\sum_1^n |a_k^{(n)}|^2\Big)^{1/2} + \Big(\sum_{n+1}^\infty k^2 |a_k^{(n)}|^2\Big)^{1/2} \Big(\sum_{n+1}^\infty \frac{1}{k^2}\Big)^{1/2} \\ &\le \sqrt{n} + n\sqrt{\frac{1+r}{1-r}} \times \frac{1}{\sqrt{n}} \le C_r \sqrt{n}\,. \end{aligned}$$

4) $B_n = \left(\frac{r-e^{it}}{1-re^{it}}\right)^n =: e^{inh(e^{it})}$ where h is a real C^2 function depending only of r ; by an estimate of Kahane ([12], p. 77) one has $\|B_n\|_{A^+} = \|e^{inh}\|_{A^+} \ge \delta_r \sqrt{n}$.

We shall now give a simplified proof of a result of Verbitskii ([21]) which says that 1) of theorem 5.1 is optimal in general. Some preliminary lemmas will be needed.

Lemma 5.2 *Let X, Y be two open subsets of $\mathbb{R}^d$, $\varphi : X \to Y$ a C^1-function, $N(\varphi, y) := \sum_{x \in \varphi^{-1}(y)} 1$ the counting function of φ, v a positive Borel function on Y, then*

$$\int_Y v(y) N(\varphi, y)\, dy = \int_X v[\varphi(x)] J_\varphi(x)\, dx \tag{5.4}$$

where J_φ is the jacobian of φ and dx (or dy) the Lebesque measure on $\mathbb{R}^d$.

Proof : This is just the change of variables theorem in the non-injective case ; see [3].

Lemma 5.3 *Take $X = Y = D$, $\varphi = B_n$; then*

$$N(B_n, w) = n \quad \text{for any} \quad w \text{ in } D\,. \tag{5.5}$$

Proof : $|z| = 1$ implies $|B_n(z)| = 1 > |w|$. So, by Rouché's theorem, $N(B_n, w) = N(B_n - w, 0) = N(B_n, 0) = n$.

Lemma 5.4 *One has the following identity :*

$$\sum_1^\infty k |a_k^{(n)}|^2 = n\,. \tag{5.6}$$

Proof : Use lemmas 5.2, 5.3 with $\varphi = B_n$, $J_\varphi = |B_n'|^2$, $v = 1$, to get with obvious notations

$$\int\int_D n\,dx\,dy = \int\int_D |B_n'(z)|^2 dx\,dy = \pi \sum_1^\infty k|a_k^{(n)}|^2$$

the last (standard) equality being obtained by the use of polar coordinates and of Parseval's identity ; this prove (5.6).

Now take $q \in]0,1[$ and $(\lambda_j)_{j\geq 1}$ an infinite sequence of points of D ; we shall say that (λ_j) is a Newman sequence of type q (in short $(\lambda_j) \in (N_q)$) if the following condition holds

$$(N_q) \qquad \frac{1-|\lambda_{j+1}|}{1-|\lambda_j|} \leq q \quad (j \geq 1)\,.$$

It is well-known ([8]) that such a sequence also satisfies Carleson's condition of interpolation for H^∞ functions

$$(C) \qquad \prod_{i\neq j} \left|\frac{\lambda_i - \lambda_j}{1-\bar{\lambda}_i\lambda_j}\right| =: \delta_j \geq \delta > 0$$

where δ depends only of q. This of course implies

$$(C_n) \qquad \prod_{\substack{i\neq j\\ i\leq n}} \left|\frac{\lambda_i - \lambda_j}{1-\bar{\lambda}_i\lambda_j}\right| \geq \delta \quad (j = 1,\cdots,n)\,.$$

We can now prove the following theorem of Newman and Shapiro :

Theorem 5.5 *([13]) : if $(\lambda_j) \in (N_q)$, there exists $C = C_q > 0$ such that*

$$(5.7) \qquad |a_k^{(n)}| \leq \frac{C}{k} \quad (k \geq 1)\,.$$

Proof : First observe that, for some positive a depending only on q,

$$(5.8) \qquad |B_n'(\lambda_j)| \geq \frac{a}{1-|\lambda_j|} \quad (j = 1,\cdots,n)\,.$$

In fact, $B_n'(\lambda_j) = \frac{-1+|\lambda_j|^2}{(1-|\lambda_j|^2)^2} \prod\limits_{\substack{i\neq j\\ i\leq n}} \frac{\lambda_i-\lambda_j}{1-\bar{\lambda}_i\lambda_j}$, and so by (C_n) :

$$|B_n'(\lambda_j)| \geq \frac{\delta}{1-|\lambda_j|^2} \geq \frac{\delta}{2(1-|\lambda_j|)} =: \frac{a}{1-|\lambda_j|}\,.$$

Now the trick is to use $\overline{B_n(e^{i\theta})} = \frac{1}{B_n(e^{i\theta})}$; then Fourier and Cauchy's formulas successively give

$$\begin{aligned}\overline{a_k^{(n)}} &= \frac{1}{2\pi}\int_0 \overline{B_n(e^{i\theta})}e^{ik\theta}d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{e^{ik\theta}}{B_n(e^{i\theta})}d\theta \\ &= \frac{1}{2i\pi}\int_{|z|=1}\frac{z^{k-1}}{B_n(z)}dz = \sum_{j=1}^{n} Res(\frac{z^{k-1}}{B_n(z)},\lambda_j) = \sum_{j=1}^{n}\frac{\lambda_j^{k-1}}{B_n'(\lambda_j)}\,.\end{aligned}$$

We get by (5.8)

$$|a_k^{(n)}| \le a^{-1}\sum_{j=1}^{n}|\lambda_j|^{k-1}(1-|\lambda_j|)\,. \tag{5.9}$$

Set $t_j = |\lambda_j|$, $r = 1-q$; (N_q) then reads $t_{j+1}-t_j \ge r(1-t_j)$, so (5.9) implies

$$\begin{aligned}|a_k^{(n)}| &\le a^{-1}r^{-1}\sum_{j=1}^{n}t_j^{k-1}(t_{j+1}-t_j) =: C\sum_{j=1}^{n}t_j^{k-1}(t_{j+1}-t_j) \\ &= C\sum_{j=1}^{n}\int_{t_j}^{t_{j+1}} t_j^{k-1}dt \le C\sum_{j=1}^{n}\int_{t_j}^{t_{j+1}} t^{k-1}dt \le C\int_0^1 t^{k-1}dt = \frac{C}{k}\,.\end{aligned}$$

□

Remark 5.6 *The estimate (5.7) also holds for the coefficients a_k of the infinite Blaschke product*

$$B(z) = \prod_{j=1}^{\infty}\frac{|\lambda_j|}{\lambda_j}\frac{\lambda_j - z}{1-\bar{\lambda}_j z} =: \sum_{0}^{\infty} a_k z^k \tag{5.10}$$

and was in fact stated for B in [13]. Verbitskii ([21]) proved that $a_k = O(k^{-1})$ in (5.10) if and only if (λ_j) is a finite union of Newman type sequences (in short, $(\lambda_j) \in (wN)$, i.e. (λ_j) is weak Newman). Theorem 5.5 allows us to give a simple proof of the result of Verbitskii already mendioned after the proof of theorem 5.1.

Theorem 5.7 *Take $(\lambda_j) \in (N_q)$ for some q and B_n as in (5.2). Then there exists $\gamma > 0$, depending only on q, such that*

$$\sum_{1}^{\infty}|a_k^{(n)}| \ge \gamma n \quad (n = 2,3,\cdots)\,. \tag{5.11}$$

Proof : Combining (5.6) and (5.7) gives

$$n = \sum_{1}^{\infty} k|a_k^{(n)}|^2 \le \sup(k|a_k^{(n)}|)\sum|a_k^{(n)}| \le C\sum_{1}^{\infty}|a_k^{(n)}|\,,$$

so (5.11) follows with $\gamma = C^{-1}$. □

Let us conclude this work with some remarks and questions :

1) The norm of the inverse of a matrix was also studied under other constraints than $\|T\| \leq 1$ in [23].

2) For specific spaces like $E = \ell_n^p$ ($\mathbb{C}^n$ equipped with $\|\Sigma \mu_j e_j\| = (\Sigma |\mu_j|^p)^{\frac{1}{p}}$), the behavior of $K(E)$ does not seem to have been investigated.

3) For the Blaschke product $B_n(z) = \left(\frac{r-z}{1-rz}\right)^n$, what is the correct upper bound of $\|B_n\|_{A^+}$, independently of $r \in]0,1[$? (theorem 5.1 gives $\|B_n\|_{A^+} \leq \pi n$) ; can one, in this particular case, find an admissible function f such that $\|f\|_{A^+} = O(n^{1/2})$?

4) More generally, can one find a direct proof of the inequality $L_n \leq \sqrt{en}$?

5) Reversing things, can one find an explicit $E \in \mathcal{C}$, less artificial than in theorem 3.12, such that $K(E) \geq \delta\sqrt{n}$?

6) Theorem 4.1 shows that $U_n(A_n) \leq C\sqrt{n}$ for some sequence A_n slightly smaller than n^2 ; is it true that $U_n(n^2) \leq C\sqrt{n}$? (note that lemma 4.5 trivially implies $U_n(n^\alpha) \leq C_\alpha\sqrt{n \log n}$ for any integer α).

7) Strictly speaking, the proof of theorem 2.3 in [14] is given for real spaces, but at reading it is clear that it works all the same for complex ones.

References

[1] J. Bourgain, Sur les sommes de sinus, Publ. Math. Orsay 83-01, exp. $n°3$, 1983, 19 p.

[2] M. Cambern, On mappings of sequence spaces, Studia Math. 30 (1968), 73-77.

[3] H. Federer, Geometric measure theory, Springer-Verlag 1969.

[4] E. Gluskin, M. Meyer, A. Pajor, Zeros of analytic functions and norms of inverse matrices, Israël J. of Maths 87 (1994), 225-242.

[5] H. Halberstam ; Lou,Shituo ; Yao, Qi, A new upper bound in the linear sieve, Number theory, trace formulas and discrete groups Symp. in Honor of Atle Selberg, Oslo/Norway 1987, 331-341 (1989)

[6] D.R. Heath-Brown, Artin's conjecture for primitive roots, Quart. J. Math. Oxford Ser., (2), 37 (1986), 27-38.

[7] E. Hlawka, J. Schoissengeier, R. Taschner, Geometric and analytic Number theory, Springer-Verlag 1991.

[8] K. Hoffman, Banach spaces of analytic functions, Prentice Hall, Inc. 1962.

[9] L.K. Hua, Introduction to Number theory, Springer-Verlag 1982.

[10] H. Iwaniec, J. Pintz, Primes in short intervals, Monatsh. Math., 98 (1984), 115-143.

[11] F. John, Extremum problems with inequalities as susidiary conditions, Studies and Essays presented to R. Courant at his 60th birthday Interscience, New-York, 1948, 197-204.

[12] J.P. Kahane, Séries de Fourier absolument convergentes, Springer-Verlag 1970.

[13] D.J. Newman, H. Shapiro, The Taylor coefficients of inner functions, Mich. Math. J. 1962 (2), 249-255.

[14] G. Pisier, The volume of convex bodies and Banach space geometry, Cambridge University Press, 1989.

[15] H. Queffelec, Sur un théorème de Gluskin-Meyer-Pajor, CRAS t. 317, Série I, p. 155-158, 1993.

[16] M.R. Murty, Artin's conjecture on primitive roots, (Preprint).

[17] J.J. Schäffer, Norms and determinants of linear mapings, Math. Z. 118, 1970, 331-339.

[18] S.B. Stechkin, Extremal properties of some trigonometric sums, Mathematicetski Zametki 1994 tome 55, 130-143.

[19] N. Tomczak-Jaegermann, Banach-Mazur distances and finite dimensional operator ideals, Pitman 1988.

[20] P. Turan, On a new method of Analysis and its applications, Wiley Interscience Tracts 1984.

[21] I.E. Verbitskii, On Taylor coefficients and L^p moduli of continuiti of Blaschke products, Zap. Nauchn. Sem. Leningrad. Otdel. Inst. Steklov (LOMI) 107 (1982), 27-35 (Russian, English summary). MR84d : 30059 (See also P.S. Bourdon, J.H. Shapiro, W.T. Sledd "Fourier series, Mean Lipschitz spaces, and Bounded Mean Oscillation", Lond. Math. Soc. Lect. Note Ser. 137, 81-110 (1989).

[22] B. Virot, Extensions vectorielles d'opérations linéaires bornées sur L^p, Publ. Math. d'Orsay, 81-08, exposé 7.

[23] N.J. Young, Analytic programmes in Matrix algebras, Proc. London Math. Soc. (3) 36 (1978), 226-242.

[24] A. Zygmund, Trigonometric series, Cambridge University Press, 1959.

[25] A. Pajor, Email communication.

SIEVE OF ERATHOSTHENES AND COEFFICIENTS OF TRIGONOMETRIC POLYNOMIALS

by

Bahman SAFFARI
(Orsay, France)

In memory of S. K. Pichorides
(1940-1992)

Résumé. Soit f un polynôme trigonométrique de degré n, à valeurs complexes. L'emploi itéré d'une idée arithmétique simple et élémentaire, apparenté à l'antique "*crible d'Eratosthène*", fournit des majorations non-triviales de $|\hat{f}(k)| + |\hat{f}(-k)|$ en fonction de $\| f \|_q$, $(1 < q \leq \infty)$, et de la position de k dans le spectre de f. Cette note ne traite que du cas $q = \infty$. Un article détaillé ultérieur étudiera le cas $q < \infty$ et des problèmes apparentés, ainsi que certaines applications analytiques.

Abstract. Let f be a complex-valued trigonometric polynomial of degree n. Repeated use of a simple and elementary number-theoretic idea, akin to the ancient "*sieve of Eratosthenes*", leads to non-trivial upper bounds for $|\hat{f}(k)| + |\hat{f}(-k)|$ in terms of $\| f \|_q$, $(1 < q \leq \infty)$, and the location of k in the spectrum of f. This note is only about the case $q = \infty$. A future detailed paper will study the case $q < \infty$ and other related problems, together with some analytic applications.

KEY WORDS/MOTS CLEFS : Trigonometric polynomials/polynômes trigonométriques

AMS CODE : 42A05

SIEVE OF ERATHOSTHENES AND COEFFICIENTS OF TRIGONOMETRIC POLYNOMIALS

by

Bahman SAFFARI
(Orsay, France)

In memory of S. K. Pichorides
(1940-1992)

1. THE PROBLEM. Let $f(t) \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{ikt}$ be the Fourier series of some function $f \in L^q(0,2\pi)$, $(1 \leq q \leq \infty)$. Then, for $1 < q < \infty$,

$$|a_k| + |a_j| \leq C_q \cdot \| f \|_q \qquad \text{(whenever } k \neq j\text{)}, \tag{1}$$

with

$$C_q = 2\left(\frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{q'+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{q'}{2}+1\right)}\right)^{1/q'} \qquad (1 < q < \infty), \tag{2}$$

where Γ denotes the gamma function and $q' = q/(q-1)$ the conjugate exponent of q.

Inequality (1) is quite well known, and very easy to prove. The limit case $q = \infty$ is, of course,

$$|a_k| + |a_j| \leq \frac{4}{\pi} \| f \|_\infty \qquad \text{(whenever } k \neq j\text{)} \tag{3}$$

and the limit case $q = 1$ reduces to $|a_k| + |a_j| \leq 2 \| f \|_1$. This last inequality is utterly trivial, since $|a_k| \leq \| f \|_1$ for any k.

If $j = -k$, then (1) and (3) reduce to :

$$|a_k| + |a_{-k}| \leq C_q \cdot \| f \|_q \qquad \text{(whenever } k \neq 0\text{)} \tag{4}$$

and

$$|a_k| + |a_{-k}| \leq \frac{4}{\pi} \| f \|_\infty \qquad \text{(whenever } k \neq 0\text{)}. \tag{5}$$

These last inequalities (4) and (5) are of special interest. One reason for this is that whenever f is real-valued and we write

$$f(t) \sim a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} r_k \cos(kt + \varphi_k), \qquad (r_k \geq 0),$$

then $r_k = 2 \mid a_k \mid = 2 \mid a_{-k} \mid$, so that

$$r_k \leq C_q \cdot \| f \|_q \qquad (1 < q < \infty) \tag{6}$$

and

$$r_k \leq \frac{4}{\pi} \cdot \| f \|_\infty \,. \tag{7}$$

In all three inequalities (1), (4) and (6) the constant C_q can be proved to be *optimal,* that is, C_q cannot be replaced by any $C'_q < C_q$ with C'_q only depending on q. Similarly, in all three inequalities (3), (5) and (7) the constant $4/\pi$ can be proved to be optimal, that is, cannot be replaced by any smaller *absolute* constant.

However, in the particularly interesting case when $f(t)$ is a trigonometric polynomial:

$$f(t) = \sum_{k=-n}^{n} a_k e^{ikt}, \tag{8}$$

it is possible to improve (4) and (5), and therefore also (6) and (7), into inequalities of the form :

$$\mid a_k \mid + \mid a_{-k} \mid \leq \lambda_k \cdot C_q \cdot \| f \|_q \qquad (k \neq 0) \tag{9}$$

where *a priori* the "improving factor" $\lambda_k = \lambda_k(q)$ is ≤ 1. Here the desired property of $\lambda_k = \lambda_k(q)$ is that it only depends on q and on the size of the coefficient k (compared to the degree n). Of course one would intuitively expect the improving factor $\lambda_k = \lambda_k(q)$ to be smaller for large k ("high frequencies") than small k ("low frequencies").

For this problem the special cases $q = 1$ and $q = \infty$ can be treated optimally by some analytic methods (due to Geronimus, Mulholland, etc.). We shall not discuss these methods here. Also the case $q = 2$ is trivial : we have $C_2 = \sqrt{2}$ and $\lambda_k(2) = 1$, as seen by taking $f(t) = \cos kt + \epsilon \cos nt$ with ϵ as small as we wish.

In the case when $1 < q < \infty$ and $q \neq 2$, one can also expect to address this problem by analytic methods. However, non-trivial results can be obtained by using an interesting (and yet elementary) number-theoretic method akin to the *sieve of Eratosthenes.* This is the very reason why I am mentioning this method here, in memory of my friend S. K. Pichorides (who used to call himself "an ancient Greek living in the twentieth century", and we know how true this was).

This method akin to the "sieve of Eratosthenes" produces non-trivial (and yet non-optimal) inequalities of the form (9) whenever $1 < q \leq \infty$. For the sake of simplicity I shall describe the method in the case $q = \infty$ only, and afterwards I shall make some comments.

2. THE SIEVE METHOD IN THE L^∞ CASE. So, with the arbitrary (complex-valued) trigonometric polynomial $f(t)$ as in (8), we wish to obtain good upper bounds on $|a_k| + |a_{-k}|$, at any rate better than (5).

Let $1 \leq k \leq n$. If our trigonometric polynomial were the two-term function $a_k e^{ikt} + a_{-k}e^{-ikt}$, then its sup-norm would just be $|a_k| + |a_{-k}|$. In order to try to reduce the problem to that particularly simple case, let

$$\begin{aligned} g(t) :&= \frac{1}{k}\sum_{r=0}^{k-1} f\left(t + \frac{2r\pi}{k}\right) \\ &= a_0 + \left(a_k e^{ikt} + a_{-k}e^{-ikt}\right) + \left(a_{2k}e^{2ikt} + a_{-2k}e^{-2ikt}\right) \\ &\quad + \cdots + \left(a_{mk}e^{imkt} + a_{-mk}e^{-imkt}\right) + \cdots \end{aligned}$$

After this averaging, the constant term a_0 is still there. We would like to get rid of it. In doing so, we shall also remove ("sift out") all frequencies of the form $2k, 4k, 6k, \cdots$ (*even* multiples of k) : this will be akin to the *first step* in the sieve of Eratosthenes (sifting out all multiples of 2). So let

$$\begin{aligned} g_1(t) := \frac{1}{2}\left(g(t) - g\left(t + \frac{\pi}{k}\right)\right) &= \left(a_k e^{ikt} + a_{-k}e^{-ikt}\right) \\ &\quad + \left(a_{3k}e^{3ikt} + a_{-3k}e^{-3ikt}\right) \\ &\quad + \left(a_{5k}e^{5ikt} + a_{-5k}e^{-5ikt}\right) + \cdots \end{aligned}$$

This leads to the

FIRST RESULT. *If $n/3 < k \leq n$, then*

$$|a_k| + |a_{-k}| \leq \| f \|_\infty . \tag{10}$$

Proof. If $n/3 < k$, then $g_1(t) = a_k e^{ikt} + a_{-k}e^{-ikt}$, so that

$$|a_k| + |a_{-k}| = \| g_1 \|_\infty \leq \| g \|_\infty \leq \| f \|_\infty .$$

Comment. In the "high frequency" range $n/3 < k \leq n$ (that is, at least two thirds of the frequencies), (10) provides us with an improvement of (5) where we have gained a factor $\pi/4$. Thus

$$\lambda_k(\infty) = \frac{\pi}{4} \qquad \text{(whenever } \frac{n}{3} < k \leq n\text{)}. \tag{11}$$

This value given by (11) can be proved to be *optimal* in the whole range $n/3 < k \leq n$.

SECOND RESULT. *If $n/5 < k \leq n/3$, then*

$$|a_k| + |a_{-k}| \leq \frac{\| f \|_\infty}{\cos\frac{\pi}{6}} = \frac{2}{\sqrt{3}} \| f \|_\infty . \tag{12}$$

Proof. In the above function $g_1(t)$, we would like to sift out all frequencies which are multiples of $3k$. (This is akin to the *second step* in the sieve of Eratosthenes : sifting out all multiples of 3). There are more than one way to do this. The most efficient one (for our purpose) is to put :

$$\begin{aligned} g_2(t) :&= \frac{1}{2}\left(g_1(t) + g_1\left(t + \frac{\pi}{3k}\right)\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(1 + e^{i\pi/3}\right) a_k e^{ikt} + \frac{1}{2}\left(1 + e^{-i\pi/3}\right) a_{-k} e^{-ikt} \\ &\quad + \text{ terms of frequencies } \pm 5k, \pm 7k, \pm 11k, \pm 13k, \pm 17k, \cdots \end{aligned}$$

So no frequency of $g_2(t)$ is a multiple of $2k$ nor of $3k$. Now, if $k > n/5$, then the only frequencies of $g_2(t)$ are $+k$ and $-k$. Since

$$\frac{1}{2}\left|1 + e^{i\pi/3}\right| = \frac{1}{2}\left|1 + e^{-i\pi/3}\right| = \cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

we conclude that, for $k > n/5$,

$$(| a_k | + | a_{-k} |) \cos\frac{\pi}{6} = \| g_2 \|_\infty \leq \| g_1 \|_\infty \leq \| g \|_\infty \leq \| f \|_\infty,$$

which proves (12).

Comment. In the range $n/5 < k \leq n/3$, (12) provides us with an improvement of (5) where we have gained a factor

$$\frac{\pi/4}{\cos(\pi/6)} = \frac{\pi}{2\sqrt{3}}.$$

Thus

$$\lambda_k(\infty) = \frac{\pi}{2\sqrt{3}} \qquad \text{(whenever } \frac{n}{5} < k \leq \frac{n}{3}). \tag{13}$$

This value given by (13) can also be proved to be *optimal* in the whole range $n/5 < k \leq n/3$.

THIRD RESULT. *If* $n/7 < k \leq n/5$, *then*

$$| a_k | + | a_{-k} | \leq \frac{\| f \|_\infty}{\cos\frac{\pi}{6}\cos\frac{\pi}{10}}. \tag{14}$$

Proof. Using the same sieve idea as above, we now sift out all integer multiples of $5k$. So let

$$\begin{aligned} g_3(t) :&= \frac{1}{2}\left(g_2(t) + g_2\left(t + \frac{\pi}{5k}\right)\right) \\ &= \frac{1 + e^{i\pi/3}}{2} \cdot \frac{1 + e^{i\pi/5}}{2} a_k e^{ikt} + \frac{1 + e^{-i\pi/3}}{2} \cdot \frac{1 + e^{-i\pi/5}}{2} a_{-k} e^{-ikt} \\ &\quad + \text{ terms of frequencies } \pm 7k, \pm 11k, \pm 13k, \pm 17k, \pm 19k, \cdots \end{aligned}$$

Now, if $k > n/7$, then the only frequencies of $g_3(t)$ are $+k$ and $-k$. Since

$$\frac{1}{2}\left|1+e^{i\pi/5}\right| = \frac{1}{2}\left|1+e^{-i\pi/5}\right| = \cos\frac{\pi}{10},$$

we conclude that, for $k > n/7$,

$$(\mid a_k \mid + \mid a_{-k} \mid) \cos\frac{\pi}{6}\cos\frac{\pi}{10} = \| g_3 \|_\infty \leq \| g_2 \|_\infty \leq \| g_1 \|_\infty \leq \| g \|_\infty \leq \| f \|_\infty,$$

which proves (14).

Comment. In the range $n/7 < k \leq n/5$, (14) provides us with an improvement of (5) where we have gained a factor

$$\lambda_k(\infty) = \frac{\pi/4}{\cos\frac{\pi}{6}\cos\frac{\pi}{10}} \qquad \left(\frac{n}{7} < k \leq \frac{n}{5}\right). \tag{15}$$

This $\lambda_k(\infty)$ given by (15), although non-trivial, can be proved to be *non-optimal* in the range $n/7 < k \leq n/5$. (From this step onwards, our sieve method will induce, at each step, a small discrepency compared to the optimal result. As a consequence, as we shall see, after a finite number of steps such bounds on $\lambda_k(\infty)$ will stop being non-trivial).

FOURTH, FIFTH, SIXTH & SEVENTH RESULTS. *If* $n/11 < k \leq n/7$, *then :*

$$\mid a_k \mid + \mid a_{-k} \mid \leq \frac{\| f \|_\infty}{\cos\frac{\pi}{6}\cos\frac{\pi}{10}\cos\frac{\pi}{14}}. \tag{16}$$

If $n/13 < k \leq n/11$, *then*

$$\mid a_k \mid + \mid a_{-k} \mid \leq \frac{\| f \|_\infty}{\cos\frac{\pi}{6}\cos\frac{\pi}{10}\cos\frac{\pi}{14}\cos\frac{\pi}{22}}. \tag{17}$$

If $n/17 < k \leq n/13$, *then*

$$\mid a_k \mid + \mid a_{-k} \mid \leq \frac{\| f \|_\infty}{\cos\frac{\pi}{6}\cos\frac{\pi}{10}\cos\frac{\pi}{14}\cos\frac{\pi}{22}\cos\frac{\pi}{26}}. \tag{18}$$

If $n/19 \leq k \leq n/17$, *then*

$$\mid a_k \mid + \mid a_{-k} \mid \leq \frac{\| f \|_\infty}{\cos\frac{\pi}{6}\cos\frac{\pi}{10}\cos\frac{\pi}{14}\cos\frac{\pi}{22}\cos\frac{\pi}{26}\cos\frac{\pi}{34}}. \tag{19}$$

Comments. The proofs of these four (*non-trivial but non-optimal*) inequalities (16), (17), (18), and (19) are, of course, obtained by using the next four steps of the above "sieve of Eratosthenes" idea. But it would be pointless to proceed any further. Indeed, let p denote the generic *odd* prime number, and let p_r denote the rth *odd* prime ($p_1 = 3$,

$p_2 = 5, \cdots, p_7 = 19, \cdots)$. Then, by using the above sieve idea, we can prove by induction that if $r \geq 2$, then

$$(20) \qquad \mid a_k \mid + \mid a_{-k} \mid \leq \frac{\| f \|_\infty}{\Pi_{r-1}} \qquad \left(\text{whenever } \frac{n}{p_r} < k \leq \frac{n}{p_{r-1}}\right),$$

where

$$\prod_r := \prod_{p \leq p_r} \cos \frac{\pi}{2p}.$$

However on comparing the numbers $\pi/4 = 0,78539\cdots$ and

$$\lim_{r \to \infty} \prod_r = \prod_{p \geq 3} \cos \frac{\pi}{2p} = 0,77306\cdots$$

we conclude, a *priori*, that the above sequence of results stop being non-trivial after a finite number of steps. Then we can check that

$$\prod_7 < \frac{\pi}{4} < \prod_6,$$

so that the "cut-off step" is exactly where we stopped.

3. CONCLUDING REMARKS. What precedes is *exactly* the content of my talk at the Crete conference of July 1995 in memory of S. K. Pichorides. For the written version, my hope was to write out in some detail several extensions and related results (such as the L^q case, analytic methods of other authors, other problems to which this sieve method applies, etc.). An alternative hope was to write a joint paper with J.-P. Kahane including some analytic *applications* of the above method which he suggested right after my talk. However, lack of time prevented me from carrying out these plans. I therefore promise the interested reader to write out (in the not too remote future !) a more detailed version of this paper where the above projects will be carried out. This might conceivably be a joint paper with J.-P. Kahane.

B. Saffari
Mathématiques - Bât. 425
Université de Paris-Sud
91405 ORSAY Cedex (France)

e-mail : Bahman.Saffari@math.u-psud.fr

n° d'impression 1815
3éme trimestre 1996