UNIVERSITÉ PARIS XI

U.E.R. MATHÉMATIQUE

91405 ORSAY FRANCE

217

Suites d'interpolation harmoniques

Eric AMAR

Analyse Harmonique d'Orsay
1976

217

Suites d'interpolation harmoniques

Eric AMAR

Analyse Harmonique d'Orsay
1976

SUITES D'INTERPOLATION HARMONIQUES

INTRODUCTION.

Soit $\mathbb{R}_+^{m+1}$ le demi-espace, $\mathbb{R}_+^{m+1} = \left\{z = (x,y) \in \mathbb{R}^{m+1}, \quad y \in \mathbb{R}, \quad y > 0\right\}$; à chaque point $z = (x,y)$ de $\mathbb{R}_+^{m+1}$ on associe le noyau de Poisson $P_z(\xi) = \frac{1}{y^m} P(\frac{\xi - x}{y})$, où $P(\xi) = \frac{c_m}{(|\xi|^2+1)^{\frac{m+1}{2}}}$ [1].

On appelle $\mathcal{E}^p$ l'espace des fonctions harmoniques dans $\mathbb{R}_+^{m+1}$ et dont les valeurs au bord appartiennent à $L^p(\lambda)$, $1 < p \leq +\infty$, où λ est la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^m$. $\mathcal{E}^p$ est aussi l'espace des intégrales de Poisson de fonctions de $L^p(\lambda)$.

Soit $\sigma = \left\{z_n , n \in \mathbb{N}\right\}$ une suite de points de $\mathbb{R}_+^{m+1}$; on dit que σ est <u>d'interpolation</u> L^p si l'opérateur T_p, $1 < p \leq +\infty$, défini sur $\mathcal{E}^p$ par :

$\forall u \in \mathcal{E}^p, \quad T_p u = \left\{u(z_n)\, y_n^{\frac{m}{p}} , n \in \mathbb{N}\right\}$ est surjectif sur $\ell^p(\mathbb{N})$; on dit que σ est <u>fortement d'interpolation</u>, si de plus, T_p est continu de $\mathcal{E}^p$ dans $\ell^p(\mathbb{N})$; on dit que σ possède la <u>propriété d'extension linéaire bornée</u> de $\ell^p(\mathbb{N})$ dans $\mathcal{E}^p$ si il existe un opérateur borné U_p de $\ell^p(\mathbb{N})$ dans $\mathcal{E}^p$ tel que $T_p U_p$ = identité sur $\ell^p(\mathbb{N})$.

Dans [2], L. Carleson et J. Garnett montrent qu'il y a deux conditions nécessaires pour que σ soit d'interpolation L^∞,

a) La suite σ doit être séparée, c'est-à-dire :

(S) $\exists\, c > 0,\ \forall\, k \in \mathbb{N},\ \forall\, \ell \in \mathbb{N},\ k \neq \ell \Longrightarrow |z_k - z_\ell| \geq c\, y_\ell$;

b) σ doit être une suite de Carleson, c'est-à-dire qu'il existe $C > 0$ tel que pour tout cube Q ayant une face sur l'hyperplan $\{y = 0\}$ et de côtés parallèles aux axes et d'arête $s(Q)$ on a :

$$\text{(C)} \qquad \sum_{z_n \in Q} y_n^m \leq C\, s(Q)^m.$$

Réciproquement, ils montrent [2] :

THEOREME [L. Carleson et J. Garnett]. <u>Les conditions</u> (S) <u>et</u> (C) <u>sont vérifiées si et seulement si la suite</u> σ <u>est l'union d'un nombre fini de suites</u> σ_i, $i = 1, \ldots, n$, <u>telles que</u> $\sigma_i \cup \sigma_j$ <u>soit d'interpolation</u> L^∞.

Utilisant d'une part les techniques introduites dans [2] et d'autre part les techniques de fonctions maximales [3], on montre le

THEOREME 1. <u>Soit</u> σ <u>une suite vérifiant</u> (S) <u>et</u> (C) ; <u>alors, pour</u> $1 < p < +\infty$, σ <u>est l'union d'un nombre fini de suites</u> σ_i, $i = 1, \ldots, n$, <u>telles que</u> $\sigma_i \cup \sigma_j$ <u>est fortement d'interpolation</u> L^p ; <u>de plus</u>, $\sigma_i \cup \sigma_j$ <u>possède la propriété d'extension linéaire bornée de</u> $\ell^p(\mathbb{N})$ <u>dans</u> $\mathcal{E}^p$.

Réciproquement, on a

THEOREME 2. Si la suite σ est telle que, pour un p, $1 < p < +\infty$, σ est l'union finie de suites σ_i, $i = 1, \ldots, n$, telles que $\sigma_i \cup \sigma_j$ est fortement d'interpolation L^p alors σ vérifie les conditions (S) et (C).

J. Garnett (communication privée) a montré le théorème suivant, meilleur que notre théorème 2, avec des arguments analogues à ceux de [2].

THEOREME [J. GARNETT]. Si la suite σ est telle que, pour un p, $1 < p \leq +\infty$, σ est l'union finie de suites σ_i, $i = 1, \ldots, n$, telles que $\sigma_i \cup \sigma_j$ est d'interpolation L^p, alors σ vérifie les conditions (S) et (C).

Les théorèmes 1 et 2 se généralisent dans le cadre abstrait défini par L. Hörmander [3] et pour une classe de noyaux plus généraux que les noyaux de Poisson et qui vont être définis maintenant.

1. NOTATIONS ET PREMIERES PROPRIETES.

O. q sera l'exposant conjugué de p, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

1. On note, $\forall x \in \mathbb{R}^m$ et $\forall \rho > 0$, $Q(x,\rho)$ le cube de $\mathbb{R}^m$ de centre x, de côtés parallèles aux axes, et de côté $s(Q) = \rho$; à chaque point $z = (x,y)$ de $\mathbb{R}_+^{m+1}$ et à chaque $\alpha > 0$ on associe le cube $B(z,\alpha) = Q(x\ ,\ \alpha y)$. On peut alors définir la fonction maximale ainsi [3] :

$\forall f \in L^1_{loc}(\lambda)$, $\forall z \in \mathbb{R}_+^{m+1}$, $\forall \alpha > 0$, on pose

$$M_\alpha f(z) = \sup_{Q(x',\rho)\supset B(z,\alpha)} \frac{1}{|Q(x',\rho)|} \int_{Q(x',\rho)} |f|\, d\lambda$$

où si E est mesurable dans $\mathbb{R}^m$, $|E|$ désigne sa mesure de Lebesgue.

2. Soit $\sigma = \{z_n, n \in \mathbb{N}\}$ une suite de points de $\mathbb{R}_+^{m+1}$. Il est facile de voir que la condition de Carleson est équivalente à la condition suivante, encore notée (C) [4] :

$\exists\, C \geqslant 0$ t. q. pour toute suite finie $\mathcal{J}$ de $\mathbb{N}$, on a :

$$\text{(C)} \qquad \sum_{n \in \mathcal{J}} |B(z_n, 1)| \leq C \Big| \bigcup_{n \in \mathcal{J}} B(z_n, 1) \Big| .$$

On en déduit trivialement dès que $\alpha \geq 1$: $\sum_{n \in \mathcal{J}} |B(z_n, \alpha)| \leq C\alpha^m \Big| \bigcup_{n \in \mathcal{J}} B(z_n, \alpha) \Big|$.

De plus, si (C) est vrai on a le théorème de Carleson-Hörmander [3] :

$$\forall\, p,\quad 1 < p < \infty, \quad \forall\, f \in L^p(\lambda), \quad \sum_{n \in \mathbb{N}} |B(z_n, \alpha)| (M_\alpha f)^p(z_n) \leq C\alpha^m B_p^p \|f\|_p^p$$

la constante B_p ne dépendant que de m et de p ; le cas $p = +\infty$ donne alors $\sup_{n \in \mathbb{N}} (M_\alpha f)(z_n) \leq \|f\|_\infty$.

On aura besoin de la variante suivante du théorème de Carleson-Hörmander, variante qui s'en déduit de suite : si C_1 et C_2 sont deux constantes et si, $\forall\, \alpha > 0$, on a $C_1\alpha \leq \alpha(z_n) \leq C_2\alpha \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$, alors

$$(1.1) \quad \forall\, p,\ 1 < p < +\infty, \quad \forall f \in L^p(\lambda), \quad \sum_n |B(z_n, \alpha(z_n))| (M_{\alpha(z_n)} f)^p(z_n) \leq C C_2^m C_1^{-m} \alpha^m B_p^p \|f\|_p^p .$$

3. Soit $\{k_z, z \in \mathbb{R}_+^{m+1}\}$ une famille de fonctions normalisées dans $L^1(\lambda)$; nous supposerons que les éléments de cette famille vérifient la condition suivante :

$$\begin{cases} \forall\, z = (x, y) \in \mathbb{R}_+^{m+1}, \quad \forall\, \alpha \geq 1, \quad \forall\, \xi \in \mathbb{R}^m \\ |k_z(\xi)| \leq A\, \alpha^m \dfrac{1}{|B(z,\alpha)|} \chi_{B(z,\alpha)}(\xi) + \displaystyle\sum_{i=1}^{\infty} A_i \dfrac{1}{|Q(x, \rho_i)|} \chi_{Q(x,\rho_i)}(\xi) \end{cases}$$

où χ_E est la fonction indicatrice de l'ensemble $E \subset \mathbb{R}^m$, A est une constante ne dépendant que de m, les A_i, $i \in \mathbb{N}$, ne dépendant que de m et α et vérifiant $\left(\sum_{i=1}^{\infty} A_i\right) \to 0$ quand $\alpha \to +\infty$, et enfin $\forall\, i \in \mathbb{N}$, $Q(x, \rho_i) \supset B(z, \alpha)$.

Posons $A' = A + \frac{1}{\alpha^m} \sum_{i=1}^{\infty} A_i$, on voit que A' est borné indépendamment de α et on a $\forall f \in L^1(\lambda)$, $\forall \alpha \geq 1$, $\forall z \in \sigma$,

$$\int_{\mathbb{R}^m} |f|\,|k_z|\,d\lambda \leq A\,\alpha^m \frac{1}{|B(z,\alpha)|}\int_{B(z,\alpha)} |f| + \sum_{i=1}^{\infty} A_i \frac{1}{|Q(x,\rho_i)|}\int_{Q(x,\rho_i)} |f|$$

donc, par définition de $M_\alpha f$,

$$\int |f|\,|k_z|\,d\lambda \leq A'\,\alpha^m (M_\alpha f)(z). \tag{1.2}$$

Si $B^c(z,\alpha) = \mathbb{R}^m \setminus B(z,\alpha)$, on voit que (N) entraîne :

$\forall \eta > 0$, $\exists \alpha \geq 1$, t. q. $\forall z \in \sigma$, $z = (x,y)$, $\forall \xi \in \mathbb{R}^m$,

$$|k_z(\xi)|\,\chi_{B^c(z,\alpha)}(\xi) \leq \eta \left[\frac{1}{|B(z,\alpha)|}\chi_{B(z,\alpha)}(\xi) + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{A_i}{\eta} \frac{1}{|Q(x,\rho_i)|}\chi_{Q(x,\rho_i)}(\xi)\right],$$

avec $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{A_i}{\eta} \leq 1$, d'où :

$$\forall f \in L^1(\lambda) \qquad \left|\int_{B^c(z,\alpha)} k_z f\right| \leq 2\eta (M_\alpha f)(z). \tag{1.3}$$

4. La relation (N) prouve, puisque k_z est borné dans $L^1(\lambda)$ que :

$$\|k_z\|_p \leq A^{\frac{1}{q}}\, A'^{\frac{1}{p}}\, y^{-\frac{m}{p}} ; \tag{1.4}$$

on fait l'hypothèse supplémentaire suivante :

$\exists \beta_o > 0$, $\exists \alpha_o > 1$, $\exists \delta > 0$ t. q. $\forall z \in \mathbb{R}_+^{m+1}$, $\forall z' \in \mathbb{R}_+^{m+1}$ avec $|z-z'| \geq cy$, $\forall \alpha \geq \alpha_o$, $\forall \alpha' \geq \alpha_o$, $\forall \beta \leq \beta_o$ et quels que soient les ensembles mesurables $F_z \subset B(z,\alpha)$, $F_{z'} \subset B(z',\alpha')$ vérifiant $|F_z| \leq 3\,\beta^{1/2}\,|B(z,\alpha)|$, $|F_{z'}| \leq 3\beta^{1/2}\,|B(z',\alpha')|$ on a, posant

$$E_{z,z'} = (B(z,\alpha) \setminus F_z) \cup (B(z',\alpha') \setminus F_{z'}) :$$

$$\left|\int_{E_{z,z'}} (\lambda y^{\frac{m}{q}} k_z + \lambda' y'^{\frac{m}{q}} k_{z'})(\bar{\mu}\, y^{\frac{m}{p}}\, \bar{k}_z + \bar{\mu}' y'^{\frac{m}{p}}\, \bar{k}_{z'})\right| \geq \delta(|\lambda|^p + |\lambda'|^p)^{\frac{1}{p}}(|\mu|^q + |\mu'|^q)^{\frac{1}{q}} \tag{1.5}$$

où λ, λ', μ, μ' sont des nombres complexes et $1 < p < +\infty$; si $\lambda = \mu = 1$ et $\lambda' = \mu' = 0$, (1.5) se réduit à

$$\int_{B(z,\alpha)\setminus F_z} y^m |k_z|^2 \geq \delta . \tag{1.6}$$

5. On suppose encore (uniquement dans le but de montrer le théorème 2) que :

$\exists\, \gamma > 0$, $\forall\, \alpha \geq 1$, $\forall\, z \in \mathbb{R}_+^{m+1}$, $\forall\, w \in \mathbb{R}_+^{m+1}$ t. q. $B(z,\alpha) \supseteq B(w,\alpha)$ alors

$$\left| \int_{B(z,\alpha)} k_w \bar{k}_z \right| \geq \gamma y^{-m} ; \ (z = (x,y)) \tag{1.7}$$

6. On appelle $\mathcal{E}^p$, $1 < p \leq +\infty$, l'espace des intégrales de fonctions de $L^p(\lambda)$ contre la famille de noyaux k_z : $u \in \mathcal{E}^p$ si il existe $f \in L^p(\lambda)$ telle que, $\forall\, z \in \mathbb{R}_+^{m+1}$, $u(z) = \int f\, \bar{k}_z$.

Compte tenu des propriétés de $\{k_z\ ,\ z \in \mathbb{R}_+^{m+1}\}$ on peut montrer, par une méthode standard [1], que u possède des limites non tangentielles presque partout et que ces limites sont égales à f presque partout.

Si σ est une suite dans $\mathbb{R}_+^{m+1}$ on définit enfin l'opérateur T_p, $1 < p \leq \infty$, ainsi : $\forall\, u \in \mathcal{E}^p$, $T_p u = \{ y^{\frac{m}{p}} u(z),\ z \in \sigma \}$.

7. Exemples. Soit $k(\xi)$ une fonction radiale dans $L^1(\lambda) \cap L^\infty(\lambda)$; pour $z = (x,y) \in \mathbb{R}_+^{m+1}$ posons $k_z(\xi) = \frac{1}{y^m} k(\frac{\xi - x}{y})$; alors cette famille de noyaux vérifie toutes nos hypothèses.

Le cas le plus intéressant est celui où $k(\xi) = \dfrac{c_m}{(1+|\xi|^2)^{\frac{m+1}{2}}}$, car alors les intégrales contre ce noyau ne sont autres que les fonctions harmoniques dans $\mathbb{R}_+^{m+1}$.

2. DUALITE ET INTERPOLATION STRICTE.

Soit $\sigma = \{z_n , n\in\mathbb{N}\}$ une suite dans $\mathbb{R}_+^{m+1}$ on note $\Sigma^{(p)} = \{y^{\frac{m}{q}} k_z , z\in\sigma\}$ cette suite de noyaux presque normalisés et $\mathcal{E}_\sigma^p$ le sous espace fermé dans $L^p(\lambda)$ engendré par $\Sigma^{(p)}$.

On rappelle que $\Sigma^{(p)}$ est une base de $\mathcal{E}_\sigma^p$ équivalente à la base canonique de $\ell^p(\mathbb{N})$ si on a la relation :

(2.1) $\exists\, D \geqslant 0,\ \forall\, a = \{a_n, n\in\mathbb{N}\} \in \ell^p(\mathbb{N}),\ \frac{1}{D}\|a\|_p \leq \|\Sigma\, a_n\, y_n^{\frac{m}{q}}\, k_{z_n}\|_p \leq D\|a\|_p$.

On peut alors énoncer le lemme de dualité suivant.

LEMME 2.1. <u>La suite</u> σ <u>est fortement d'interpolation</u> L^p, $1 < p \leq +\infty$, <u>si et seulement si</u> $\Sigma^{(q)}$ <u>est une base de</u> $\mathcal{E}_\sigma^q$ <u>équivalente à la base canonique de</u> $\ell^q(\mathbb{N})$.

Preuve. Supposons que σ soit fortement d'interpolation L^p et soit $a = \{a_n , n\in\mathbb{N}\} \in \ell^p(\mathbb{N})$, $f(\xi) = \sum_n a_n\, y_n^{\frac{m}{p}}\, k_{z_n}(\xi)$, on a :

$$\|f\|_q = \sup_{g\in L^p(\lambda),\ \|g\|_p = 1} \left|\sum_n a_n\, y_n^{\frac{m}{p}} \int k_{z_n} g\right|$$

par Hölder $\|f\|_q \leq \|a\|_q \sup_{g\in L^q(\lambda)} \|T_p g\|_p \leq \|a\|_q\, \|T_p\|$.

Réciproquement, puisque T_p est surjectif et continu, il existe $g \in L^p(\lambda)$ tel que $T_p g = \{a_n\, |a_n|^{q-2}, n\in\mathbb{N}\}$ et $\|g\|_p \leq D_1\, \|a\|_q^{q-1}$, D_1 provenant du théorème de l'application ouverte et étant indépendante de a.

On a donc :

$$\left|\int \bar{f}\, g\, d\lambda\right| \leq \|f\|_q\, \|g\|_p \leq D_1 \|a\|_q^{q-1}\, \|f\|_q$$

d'où $\|f\|_q \geq \dfrac{1}{D_1\|a\|_q^{q-1}}\, |\langle a\, ,\, T_p g\rangle| \geq \dfrac{1}{D_1}\|a\|_q$.

Supposons maintenant que Σ^q soit une base de $\mathcal{E}^q_\sigma$ équivalente à la base canonique de $\ell^q(\mathbb{N})$, et soit g dans $L^p(\lambda)$; on a :

$$\|T_p g\|_p = \sup_{\substack{a\in \ell^q(\mathbb{N}) \\ \|a\|_q = 1}} \left|\sum_n a_n y_n^{\frac{m}{p}} \int g\, k_{z_n}\, d\lambda\right| = \sup_{a\in \ell^q} \left|\int f\, g\, d\lambda\right|$$

où l'on a posé $f = \Sigma\, a_n y_n^{\frac{m}{p}} k_{z_n}$, mais par hypothèse on a $\|f\|_q \leq D\|a\|_q$ donc $\|T_p g\|_p \leq D\|g\|_p$.

Pour montrer que T_p est surjectif, il suffit de montrer que T_p^*, l'adjoint de T_p, vérifie une inégalité $\|T_p^* a\|_q \geq \frac{1}{D}\|a\|_q$; mais pour $a = \{a_n, n\in\mathbb{N}\} \in \ell^q(N)$ on a $(T_p^* a) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n y_n^{\frac{m}{p}} k_{z_n}$ et par hypothèse, on a bien $\|T_p^* a\|_q \geq \frac{1}{D}\|a\|_q$.

On dira que σ est strictement d'interpolation L^p si σ est fortement d'interpolation L^p et si, de plus, le dual de $\mathcal{E}^q_\sigma$ est isomorphe à $\mathcal{E}^p_\sigma$; on a alors

LEMME 2.2. Si σ est strictement d'interpolation L^p, $1 < p \leq +\infty$, alors σ possède la propriété d'extension linéaire bornée de $\ell^p(\mathbb{N})$ dans $\mathcal{E}^p$.

Preuve. Puisque σ est fortement d'interpolation L^p alors Σ^q est une base de $\mathcal{E}^q_\sigma$ équivalente à la base canonique de $\ell^q(\mathbb{N})$ grâce au lemme 2.1, puisque $\mathcal{E}^p_\sigma$ est isomorphe au dual de $\mathcal{E}^q_\sigma$, il existe une base, duale de Σ^q, dans $\mathcal{E}^p_\sigma$, c'est-à-dire une famille $\Sigma'^p = \{\rho_n, n\in\mathbb{N}\} \subset \mathcal{E}^p_\sigma$ telle que

(2.2) $\forall\, n,n'\in\mathbb{N}$, $\langle \rho_n, y_{n'}^{\frac{m}{p}} k_{z_{n'}} \rangle = \delta_{n,n'}$ et il existe $D_2 > 0$ t. q.

$\forall\, b = \{b_n, n\in\mathbb{N}\} \in \ell^p(\mathbb{N})$

$$\frac{1}{D_2}\|b\|_p \leq \left\|\sum_n b_n \rho_n\right\|_p \leq D_2\|b\|_p. \tag{2.3}$$

Soit encore $b = \{b_n, n \in \mathbb{N}\} \in \ell^p(\mathbb{N})$ on pose $U_p(b) = \sum_n b_n \rho_n$; grâce à

(2.2) $\|U_p(b)\|_p \leq D_2 \|b\|_p$ et grâce à (2.2) on a bien $T_p U_p(b) = b$.

3. LE THEOREME 2.

On va montrer le théorème suivant.

THEOREME. Soit σ une suite dans $\mathbb{R}_+^{m+1}$ telle que pour $1 < p < +\infty$, σ soit l'union de suites σ_i, $i = 1, \ldots, n$ vérifiant $\sigma_i \cup \sigma_j$ est fortement d'interpolation L^p, alors σ vérifie (S) et (C).

Que σ vérifie (S) est immédiat. Montrons que σ vérifie (C) ; il suffit de montrer que σ_i vérifie (C).

Or, puisque T_p est continu, on a, pour $z \in \mathbb{R}_+^{m+1}$

$\|T_p k_z\|_p^p \leq \|T_p\|^p \|k_z\|_p^p$; mais grâce à (1.4) on a

(3.1) $$\sum_n \left| y_m^{\frac{m}{p}} \int k_z \bar{k}_{z_n} \right|^p \leq \|T_p\|^p C_1^p \, y^{-\frac{m}{q}p} \quad \text{avec} \quad C_1 = A^{\frac{1}{q}} A'^{\frac{1}{p}}$$

mais $\left|\int k_z \bar{k}_{z_n}\right| \geq \left|\int_{B(z,\alpha)} k_z \bar{k}_{z_n}\right| - \left|\int_{B^c(z,\alpha)} k_z \bar{k}_{z_n}\right|$ et utilisant

(N) on a $\left|\int_{B^c(z,\alpha)} k_z \bar{k}_{z_n}\right| \leq \sum_i A_i \frac{1}{Q(x,\rho_i)} \int_{B^c(z,\alpha) \cap Q(x,\rho_i)} |\bar{k}_{z_n}|$

mais $Q(x,\rho_i) \geq B(z,\alpha)$ donc $|Q(x,\rho_i)| \geq y^m$ dès que $\alpha \geq 1$ et on a :

$$\left|\int_{B^c(z,\alpha)} k_z \bar{k}_{z_n}\right| \leq y^{-m} \|k_{z_n}\|_1 \left(\sum_{i=1}^{\infty} A_i\right) \leq y^{-m} A' \left(\sum_{i=1}^{\infty} A_i\right)$$

prenons $\alpha \geq \alpha_o$ pour que $\left(\sum_{i=1}^{\infty} A_i\right) \leq \frac{\gamma}{2}$ et utilisons (1.7), il vient

$$(3.2) \qquad \left|\int k_z \bar{k}_{z_n}\right| \geq \frac{\gamma}{2} y^{-m}$$

reportant dans (3.1)

$$\left(\frac{\gamma}{2}\right)^p y^{-mp} \sum_{\substack{(z_n \text{ t. q.} \\ B(z_n,\alpha) \subseteq B(z,\alpha)}} y_n^m \leq \|T_p\|^p C_1^p y^{-m(p-1)} \quad \text{d'où}$$

$$\sum_{z_n \text{ t. q. } B(z_n,\alpha) \subset B(z,\alpha)} |B(z_n,\alpha)| \leq \|T_p\|^p C_1^p |B(z,\alpha)|.$$

Le α_o ne dépendant pas de z, et z étant quelconque dans $\mathbb{R}_+^{m+1}$, on en déduit aisément le théorème 2.

4. REDUCTION DU PROBLEME.

Soit $\sigma = \{z_n , n\in\mathbb{N}\}$ une suite de $\mathbb{R}_+^{m+1}$ qui vérifie (S) et (C) et soit $f \in L^p(\lambda)$; on a $\|T_p f\|_p^p = \sum_n y_n^m \left|\int f \bar{k}_{z_n}\right|^p$ donc, grâce à (1.2)

$\|T_p f\|_p^p \leq A' \sum_n |B(z_n,1)|(M_1 f)^p(z_n)$ donc par (1.1), puisque σ est de Carleson,

$$(4.1) \qquad \|T_p f\|_p \leq A'^{1/p} C^{1/p} B_p \|f\|_p$$

et l'opérateur T_p est bien continu de $L^p(\lambda)$ dans $\ell^p(\mathbb{N})$.

On va maintenant réduire le problème. Reprenant le découpage de [2], on constitue dans $\mathbb{R}_+^{m+1}$ un réseau et puisque σ est séparée, on a :

il existe deux constantes C_1 et C_2 positives telles que, pour tout $\alpha \geq 1$, on peut diviser σ en une union finie $\sigma_1, \ldots, \sigma_{n_o}$ telle que

$\forall\, i \in [1, \ldots, n_o]$, $\forall\, z \in \sigma_i$, $\exists\, \alpha(z)$ avec $C_1\alpha \leq \alpha(z) \leq C_2\alpha$ et $\forall\, z' \in \sigma_i$, on a :

$$(4.2)\qquad \begin{cases} \text{ou bien} \quad B(z,\alpha(z)) \cap B(z',\alpha(z')) = \emptyset \\ \text{ou bien} \begin{cases} \text{soit} \quad B(z,\alpha(z)) \subset B(z',\alpha(z')) \\ \text{soit} \quad B(z',\alpha(z')) \subset B(z,\alpha(z)). \end{cases} \end{cases}$$

Le nombre n_o ne dépend que de la constante de (S) et du nombre α.

On va maintenant raisonner sur σ_i.

Construisons les générations au sens de Carleson-Garnett : $\forall\, z_\nu \in \sigma_i$, on pose

$G_1(z_\nu) = \{z_\mu \in \sigma_i \,,\, B(z_\mu) \subset B(z_\nu) \text{ et } B(z_\mu) \text{ maximal}\}$

$G_2(z_\nu) = \{\cup G_1(z_\mu) \,,\, z_\mu \in G_1(z_\nu)\}$, etc...

où l'on note en abrégé : $B(z) = B(z,\alpha(z))$.

Puisque, a fortiori, σ_i est une suite de Carleson, (C) entraîne

$\sum\limits_{\nu \in J} |B(z_\nu)| \leq C\, C_3^m \alpha^m \Big| \bigcup\limits_{\nu \in J} B(z_\nu)\Big|$, où J est une sous-suite finie de $\mathbb{N}$; posant

alors, comme dans [2], $t_n = \sum\limits_{z_\mu \in G_n(z_\nu)} |B(z_\mu)|$, il vient

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} t_n \leq C\, C_2^m \alpha^m |B(z_\nu)|$; pour tout $\beta > 0$, il vient donc $q_o \in \mathbb{N}$ avec

$$(4.3)\qquad \sum_{n \geq q_o} t_n < \beta\, |B(z_\nu)| \; ;$$

de plus cette relation est uniforme par rapport à $z_\nu \in \sigma_i$.

On peut donc partager σ_i en une union finie $\sigma_{i,j}$, $j = 1, \dots, n_1$ telle que [2]

a) si $z_\mu \in G_q(z_\nu)$, $q < q_o$, alors z_μ et z_ν sont dans des $\sigma_{i,j}$ différents

b) Pour $z_\nu \in \sigma_{i_1}$, chaque $\sigma_{i_2,j}$ contient au plus un point z_μ tel que

$B(z_\mu,\alpha(z_\mu)) \cap B(z_\nu,\alpha(z_\nu)) = \emptyset$ et

$$(4.4)\qquad \beta^{1/2} \leq \frac{|B(z_\nu,\alpha(z_\nu))|}{|B(z_\mu,\alpha(z_\mu))|} \leq \beta^{-1/2}.$$

Posons $s = \sigma_{i,j} \cup \sigma_{i',j'}$ on a alors $\forall z_\mu \in s$ il existe au plus un $z_{\mu'}$ dans s tel que $B(z_\mu) \cap B(z_{\mu'}) \neq \emptyset$ et (4.4) vrai ; posons alors $G_1'(z_\mu)$ la première génération de z_μ relativement à $\sigma_{i,j}$ si $z_\mu \in \sigma_{i,j}$ ou a $\sigma_{i',j'}$ si $z_\mu \in \sigma_{i',j'}$ c'est-à-dire si $z_\mu \in \sigma_{i,j}$:

$$G_1'(z_\mu) = \left\{ z_\nu \in \sigma_{i,j} \text{ t. q. } B(z_\nu) \subset B(z_\mu) \text{ et } B(z_\nu) \text{ maximal} \right\}$$

de même si $z_\mu \in \sigma_{i',j'}$. On définit $G_1''(z_\mu)$ la première génération de z_μ pour la suite où il n'est pas, en excluant $z_{\mu'}$

$$\text{si } z_\mu \in \sigma_{i,j},\ G_1''(z_\mu) = \left\{ z_\nu \in \sigma_{i',j'},\ z_\nu \neq z_{\mu'},\ B(z_\nu) \cap B(z_\mu) \neq \emptyset \text{ et } B(z_\nu) \cap B(z_\mu) \text{ maximal} \right\}$$

$$\text{si } z_\mu \in \sigma_{i',j'},\ G_1''(z_\mu) = \left\{ z_\nu \in \sigma_{i,j},\ z_\nu \neq z_{\mu'},\ B(z_\nu) \cap B(z_\mu) \neq \emptyset \text{ et } B(z_\nu) \cap B(z_\mu) \text{ maximal} \right\}.$$

On pose encore $F(z_\mu) = \bigcup_{z_\nu \in G_1'(z_\mu) \cup G_1''(z_\mu)} B(z_\nu)$;

grâce à (4.3) et (4.4), on a

$$(4.5) \qquad |F(z_\mu)| \leq \sum_{z_\nu \in G_1'(z_\mu) \cup G_1''(z_\mu)} |B(z_\nu)| \leq 3\, \beta^{1/2} |B(z_\mu)|.$$

De la même manière, on définit $G_1'(z_{\mu'})$, $G_1''(z_{\mu'})$ et $F(z_{\mu'})$ et on a :

$$(4.6) \qquad |F(z_{\mu'})| \leq \sum_{z_\nu \in G_1'(z_\mu) \cup G_1''(z_\mu)} |B(z_\nu)| \leq 3\, \beta^{1/2} |B(z_{\mu'})|.$$

5. LE THEOREME PRINCIPAL.

On va montrer que, pour $1 < p < +\infty$, on peut choisir convenablement les constantes pour que s soit d'interpolation stricte L^p.

Il suffit de montrer qu'il existe $K > 0$ telle que si $\{a_k\ ,\ k\in\mathbb{N}\}$ est une suite de $\ell^q(\mathbb{N})$, alors il existe $\{b_k\ ,\ k\in\mathbb{N}\}\in\ell^p(\mathbb{N})$ telle que, posant $f = \sum_\ell b_\ell\, y_\ell^{\frac{m}{q}}\, k_{z_\ell}$ et $g = \sum_\ell a_\ell\, y_\ell^{\frac{m}{p}}\, k_{z_\ell}$ on ait :

$$(5.1)\qquad |\langle f,g\rangle| = \Big|\sum_{u,v} a_u \bar b_v\, y_u^{\frac{m}{p}}\, y_v^{\frac{m}{q}} \int k_{z_u}\bar k_{z_v}\Big| \geq K\|a\|_q\,\|b\|_p\ ;$$

en effet, on sait déjà, en utilisant Hölder et la relation (4.1) que :

$$(5.2)\qquad \|f\|_p \leq A'^{\frac{1}{q}}\, C^{\frac{1}{q}}\, B_q\|b\|_p \quad \text{et} \quad \|g\|_q \leq A'^{\frac{1}{p}}\, C^{\frac{1}{p}}\, B_p\|a\|_q$$

et donc (5.1) prouve alors que $\{y_\ell^{\frac{m}{p}}\, k_{z_\ell}\ ,\ \ell\in\mathbb{N}\}$ est une base de $\mathcal{E}_s^q$ équivalente à la base canonique de $\ell^q(\mathbb{N})$ et prouve aussi que le dual de $\mathcal{E}_s^q$ est $\mathcal{E}_s^p$.

Soit donc $z_u\in s$, et si il existe $z_{u'}\in s$ tel que $B(z_u)\cap B(z_{u'})\neq\emptyset$ et (4.4) vrai, on pose

$$(5.3)\qquad E_u = (B(z_u)\setminus F(z_u))\cup(B(z_{u'})\setminus F(z_{u'})).$$

Si $z_{u'}$ n'existe pas, on pose

$$(5.4)\qquad E_u = B(z_u)\setminus F(z_u).$$

Comme dans [2], les E_u sont disjoints sauf si $E_u = E_v$ auquel cas, on a $u = v$ où $u' = v$.

Soit $\{E_\nu\ ,\ \nu\in\mathbb{N}\}$ une indexation sans répétitions des E_u ; on a alors, posant $a_{\nu'} = b_{\nu'} = 0$ si $z_{\nu'}$ n'existe pas :

$$\begin{aligned}|\langle f,g\rangle| = \Big|&\sum_\nu\int_{E_\nu}(a_\nu\, y_\nu^{\frac{m}{p}}\, k_{z_\nu} + a_{\nu'}\, y_{\nu'}^{\frac{m}{p}}\, k_{z_{\nu'}})\bar f\\ &+\sum_\nu\int_{E_\nu^c}(a_\nu\, y_\nu^{\frac{m}{p}}\, k_{z_\nu} + a_{\nu'}\, y_{\nu'}^{\frac{m}{p}}\, k_{z_{\nu'}})\bar f\Big|\end{aligned}$$

soit $|\langle f,g\rangle| \geq |I_1| - |I_2|$.

Voyons I_2. $I_2 = \sum_\nu \int_{E_\nu^c} (a_\nu\, y_\nu^{\frac{m}{p}}\, k_{z_\nu} + a_{\nu'}\, y_{\nu'}^{\frac{m}{p}}\, k_{z_{\nu'}})\,\bar{f}$

et $E_\nu^c = (B(z_\nu)\setminus F(z_\nu))^c \cap (B(z_{\nu'})\setminus F(z_{\nu'}))^c$

donc $|I_2| \le \sum_\nu \int_{(B(z_\nu)\setminus F(z_\nu))^c} |a_\nu|\, y_\nu^{\frac{m}{p}}\, |k_{z_\nu}|\,|f| + \sum_\nu \int_{(B(z_{\nu'})\setminus F(z_{\nu'}))^c} |a_{\nu'}|\, y_{\nu'}^{\frac{m}{p}}\, |k_{z_{\nu'}}|\,|f|$

mais $(B(z_\nu)\setminus F(z_\nu))^c = B^c(z_\nu)\cup F(z_\nu)$ et $(B(z_{\nu'})\setminus F(z_{\nu'}))^c = B^c(z_{\nu'})\cup F(z_{\nu'})$

cela induit une décomposition de $|I_2|$:

$$|I_2| \le I_3 + I_4 + I_5 + I_6 .$$

Voyons I_3. $I_3 = \sum_\nu \int_{B_\nu^c} |a_\nu|\, y_\nu^{\frac{m}{p}}\, |k_{z_\nu}|\,|f|.$

Par Hölder, on a $|I_3| \le \|\{a_\nu\}\|_q \left[\sum_\nu y_\nu^m \left(\int_{B_\nu^c} |k_{z_\nu}|\,|f|\right)^p\right]^{1/p}$

grâce à (1.3), il vient alors

$$|I_3| \le \|\{a_\nu\}\|_q\, 2\eta \left[\alpha^{-m} \sum_\nu |B(z_\nu)|\,(M_\alpha f)^p(z_\nu)\right]^{1/p} \quad \text{et}$$

utilisant (1.1)

$$|I_3| \le 2\eta\, C^{\frac{1}{p}}\, B_p \|\{a_\nu\}\|_q\, \|f\|_p . \tag{5.5}$$

Voyons I_4. $I_4 = \sum_\nu \int_{B_{\nu'}^c} |a_{\nu'}|\, y_{\nu'}^{\frac{m}{p}}\, |k_{z_{\nu'}}|\,|f|.$

Le même raisonnement que pour I_3 vaut et on a

$$|I_4| \le 2\eta\, C^{1/p}\, B_p \|\{a_{\nu'}\}\|_q\, \|f\|_p . \tag{5.6}$$

Voyons I_5. $I_5 = \sum_\nu \int_{F_\nu} |a_\nu|\, y_\nu^{\frac{m}{p}}\, |k_{z_\nu}|\,|f|$

par Hölder, on a : $\left|I_5\right| \leq \left\|\{a_\nu\}\right\|_q \left[\sum_\nu y_\nu^m \left(\int_{F_\nu} |k_{z_\nu}|\,|f|\right)^p\right]^{1/p}$

d'où

$$(5.7) \qquad \left|I_5\right| \leq \left\|\{a_\nu\}\right\|_q \left[\alpha^{-m} C_2^{-m} \sum_\nu |B(z_\nu)| \left(\int_{F_\nu} |k_{z_\nu}|\,|f|\right)^p\right]^{1/p}$$

mais, à cause de la définition de F_ν, on a :

$$\int_{F_\nu} |k_{z_\nu}|\,|f| \leq \sum_{z_\mu \in G_1'(z_\nu) \cup G_1''(z_\nu)} \int_{B(z_\mu)} |k_{z_\nu}|\,|f|$$

$$\int_{F_\nu} |k_{z_\nu}|\,|f| \leq \sum_{z_\mu \in G_1'(z_\nu) \cup G_1''(z_\nu)} C_2^m A\alpha^m \frac{1}{|B(z_\nu)|} \int_{B(z_\mu)} |f|.$$

Posons $U_\nu(f) = \sum_{z_\mu \in G_1'(z_\nu) \cup G_1''(z_\nu)} \frac{1}{|B(z_\nu)|} \int_{B(z_\mu)} |f|$, il vient, en remarquant que :

$$\frac{1}{|B(z_\nu)|} = \left(\frac{|B(z_\mu)|}{|B(z_\nu)|}\right)^{1/p} \left(\frac{|B(z_\mu)|}{|B(z_\nu)|}\right)^{1/q} \frac{1}{|B(z_\mu)|}$$

et en utilisant Hölder :

$$U_\nu(f) \leq \left\{\sum_{z_\mu \in G_1' \cup G_1''} \frac{|B(z_\mu)|}{|B(z_\nu)|}\right\}^{\frac{1}{q}} \left\{\sum_{z_\mu \in G_1' \cup G_1''} \frac{|B(z_\mu)|}{|B(z_\nu)|} \int_{B(z_\mu)} |f| \quad p\right\}^{\frac{1}{p}}$$

mais (4.5) implique $\displaystyle\sum_{z_\mu \in G_1' \cup G_1''} \frac{|B(z_\mu)|}{|B(z_\nu)|} \leq 3\beta^{1/2}$

et $\displaystyle\frac{1}{|B(z_\mu)|} \int_{B(z_\mu)} |f| \leq M_\alpha f(z_\mu)$ donc

$$U_\nu(f) \leq 3^{\frac{1}{q}} \, B^{\frac{1}{2q}} \left\{\sum_{z_\mu \in G_1' \cup G_1''} \frac{|B(z_\mu)|}{|B(z_\nu)|} (M_\alpha f)^p(z_\mu)\right\}^{1/p}$$

reportant dans (5.7) il vient :

$$\left|I_5\right| \leq 3^{\frac{1}{q}} A C_2^m C_1^{-\frac{m}{p}} \beta^{\frac{1}{2q}} \alpha^m \left\|\{a_\nu\}\right\|_q \left\{\alpha^{-m} \sum_\nu |B(z_\nu)| \sum_{z_\mu \in G_1'(z_\nu) \cup G_1''(z_\nu)} \frac{|B(z_\mu)|}{|B(z_\nu)|} (M_\alpha f)^p(z_\nu)\right\}^{\frac{1}{p}}$$

On remarque alors que $\tilde{s} = \bigcup_{\nu} G_1'(z_\nu) \cup G_1''(z_\nu)$ est une suite de points distincts de s et donc que $\tilde{s}$ est de Carleson de constante C ; (1.1) implique alors :

$$|I_5| \leq K\, \beta^{\frac{1}{2q}}\, \alpha^m\, \|\{a_\nu\}\|_q \|f\|_p \tag{5.8}$$

où K est une constante numérique.

Voyons I_6. $I_6 = \sum_\nu \int_{F(z_{\nu'})} |a_{\nu'}|\, y_{\nu'}^{\frac{m}{p}}\, |k_{z_{\nu'}}|\, |f|$.

Comme pour I_5, on obtient

$$|I_6| \leq K\, \beta^{\frac{1}{2q}}\, \alpha^m \|\{a_{\nu'}\}\|_q\, \|f\|_p. \tag{5.9}$$

De (5.5), (5.6), (5.8) et (5.9) on tire

$$|I_2| \leq \|f\|_p \left[2\eta C^{1/p} \beta_p (\|\{a_\nu\}\|_q + \|\{a_{\nu'}\}\|_q) + K\, \beta^{\frac{1}{2q}} \alpha^m (\|\{a_\nu\}\|_q + \|\{a_{\nu'}\}\|_q)\right].$$

Soit

$$|I_2| \leq \|f\|_p\, \|a\|_q \left[2\eta\, C^{1/p}\, \beta_p + K\, \beta^{\frac{1}{2q}}\, \alpha^m\right]. \tag{5.10}$$

Voyons maintenant I_1. $I_1 = \sum_\nu \int_{E_\nu} (a_\nu\, y_\nu^{\frac{m}{p}}\, k_{z_\nu} + a_{\nu'}\, y_{\nu'}^{\frac{m}{p}}\, k_{z_{\nu'}})\, f$

on a $I_1 = \sum_\nu \int_{E_\nu} (a_\nu\, y_\nu^{\frac{m}{p}}\, k_{z_\nu} + a_{\nu'}\, y_{\nu'}^{\frac{m}{p}}\, k_{z_{\nu'}})(b_\nu\, y_\nu^{\frac{m}{q}}\, \bar{k}_{z_\nu} + b_{\nu'}\, y_\nu^{\frac{m}{q}}\, \bar{k}_{z_{\nu'}})$

$$+ \sum_\nu \sum_{\mu \neq \nu} \int_{E_\nu} (a_\nu\, y_\nu^{\frac{m}{p}}\, k_{z_\nu} + a_{\nu'}\, y_{\nu'}^{\frac{m}{p}}\, k_{z_{\nu'}})(b_\mu y_\mu^{\frac{m}{q}}\, \bar{k}_{z_\mu} + b_{\mu'}\, y_{\mu'}^{\frac{m}{q}}\, \bar{k}_{z_{\mu'}})$$

soit $|I_1| \geq |I_7| - |I_8|$.

Voyons I_8.

$$I_8 = \sum_\nu \sum_{\mu \neq \nu} \int_{E_\nu} (a_\nu\, y_\nu^{\frac{m}{p}}\, k_{z_\nu} + a_{\nu'}\, y_{\nu'}^{\frac{m}{p}}\, k_{z_{\nu'}})(b_\mu\, y_\mu^{\frac{m}{q}}\, \bar{k}_{z_\mu} + b_\mu y_\mu^{\frac{m}{q}}\, \bar{k}_{z_\mu})$$

on majore I_8 par les valeurs absolues dans les intégrales et on pose

$$\tilde{g} = \sum_{\nu} \left| a_{\nu}\, y_{\nu}^{\frac{m}{p}}\, k_{z_{\nu}} + a_{\nu'}\, y_{\nu'}^{\frac{m}{p}}\, k_{z_{\nu'}} \right| ;$$

remarquant que $E_{\nu} \subset E_{\mu}^{c}$ pour $\mu \neq \nu$ on a

$$|I_8| \leq \sum_{\mu} \int_{E_{\mu}^{c}} \left| b_{\mu}\, y_{\mu}^{\frac{m}{q}}\, k_{z_{\mu}} + b_{\mu'}^{\frac{m}{q}}\, k_{z_{\mu'}} \right| |\tilde{g}| .$$

Cette série se traite alors exactement comme I_2 en échangeant a et b et p et q ; il vient donc par (5.10)

$$(5.11) \qquad |I_8| \leq \|\tilde{g}\|_q \, \|b\|_p \left[2\eta C^{1/q} B_q + K \beta^{\frac{1}{2p}} \alpha^m \right].$$

Voyons enfin I_7.

$$I_7 = \sum_{\nu} \int_{E_{\gamma}} (a_{\nu}\, y_{\nu}^{\frac{m}{p}}\, k_{z_{\nu}} + a_{\nu'}\, y_{\nu'}^{\frac{m}{p}}\, k_{z_{\nu'}})(b_{\nu}\, y_{\nu}^{\frac{m}{q}}\, \bar{k}_{z_{\nu}} + b_{\nu'}\, y_{\nu'}^{\frac{m}{q}}\, \bar{k}_{z_{\nu'}})$$

grâce à (1.5) on sait qu'il existe $b = \{b_u, \; u \in \mathbb{N}\} \in \ell^p(\mathbb{N})$ tel que

$$(5.12) \qquad |I_7| \geq \delta \|a\|_q \, \|b\|_p .$$

On a finalement : $|\langle f,g \rangle| \geq |I_7| - |I_2| - |I_8|$

remarquant que $\|\tilde{g}\|_q \leq K' \|a\|_q$ grâce à (5.2) de même $\|f\|_p \leq K'' \|b\|_p$, on choisit d'abord α assez grand pour que

$$(5.13) \qquad 2\eta K' \, C^{1/p} B_p < \frac{\delta}{8}$$

et pour que

$$(5.14) \qquad 2\eta K'' \, C^{1/q} B_q < \frac{\delta}{8}$$

ce qui est possible grâce à (1.3) ; ensuite on choisit β assez petit pour que

$$(5.15) \qquad KK'' \, \alpha^m \, \beta^{\frac{1}{2q}} < \frac{\delta}{8} \quad \text{et}$$

$$(5.16) \qquad KK'' \, \beta^{\frac{1}{2p}} \, \alpha^m < \frac{\delta}{8} .$$

Ce qui est possible grâce à (4.3) ; de (5.10), (5.11) et (5.12) on tire alors

$$|\langle f,g\rangle| \geq \frac{\delta}{2} \|a\|_q \|b\|_p$$

ce qui prouve (5.1) et achève la preuve du théorème.

REMARQUE. Les inégalités (5.15) et (5.16) ne peuvent être vraies simultanément que si $\frac{1}{p}$ et $\frac{1}{q}$ sont strictement positifs donc si $1 < p < +\infty$; toutefois, si $p = +\infty$, on montre, en prenant g dans $L^\infty(\lambda)$, que : $|\langle f,g\rangle| \geq \frac{\delta}{2}\|a\|_1\|g\|_\infty$; on retrouve ainsi le résultat de L. Carleson et J. Garnett, mais comme on n'a pu choisir g dans $\mathcal{C}_s^{(\infty)}$ on ne peut plus affirmer que s est strictement d'interpolation L^∞ et donc que s a la propriété d'extension linéaire bornée de $\ell^\infty(\mathbb{N})$ dans $L^\infty(\lambda)$.

[1] STEIN, E. and WEISS, G. Fourier analysis on Euclidean spaces. Princeton Univ. Press (1971).

[2] CARLESON, L. and GARNETT, J. Interpolating sequences and separation properties. J. Anal. Math. 28 (1975).

[3] HÖRMANDER, L. L^p estimates for (pluri-) subharmonic functions. Math. Scand. 20 (1967).

[4] VAROPOULOS, N. Sur un problème d'interpolation. C. R. Acad. Sc. Paris 274 (1972).