78

SPECIALISATION DES VARIETES POLARISEES ET SURFACES RELATIVES DE TYPE GENERAL

par

Bernard ANGENIOL

22.7

78

SPECIALISATION DES VARIETES POLARISEES ET SURFACES RELATIVES DE TYPE GENERAL

par

Bernard ANGENIOL

Je tiens à remercier Monsieur M. Raynaud pour l' aide constante qu' il m' a apporté dans ce travail.

Ce travail consiste en deux parties portant sur des sujets entièrement distincts.

Dans la première, on améliore un théorème de T. Matsusaka et D. Mumford ([8]) sur la spécialisation des variétés polarisées, puis on montre par des contres exemples que l' on ne peut plus guère améliorer ce résultat.

Dans la seconde, on généralise un théorème sur la contraction de certaines courbes d' une surface minimale de type général, du cas où la base est un corps algebriquement clos de caractéristique zéro au cas d' une base réduite connexe de caractéristique zéro quelconque.

1- Spécialisation des variétés polarisées

Dans 1.1, on rappelle la théorie des transformés quadratiques d' un anneau local régulier le long d' une valuation de son corps des fractions, selon S. Abhyankar ([1]).

1.1- Transformés quadratiques et extensions réglées

Définition 1. Un corps K est une extension réglée d' un corps k s' il existe un corps T compris entre les deux, tel que T soit une extension de k de type fini, et que K soit une extension transcendante pure de T de degré de transcendance strictement positif et fini.

Définition 2. Soit R un anneau local intègre de dimension n M son idéal maximal, K son corps des fractions, v une valuation sur K dont l' anneau R_v contient R et a pour idéal maximal M_v tel que $M_v \cap R = M$. Soit enfin d le degré de transcendance de R_v/M_v sur R/M. On dit que v est un diviseur premier pour R si $d = n - 1$.

Définition 3. Avec les notations de la définition 2, supposons R régulier, et soit $x_1, x_2, \dots x_n$ une base minimale de M. Supposons par exemple $v(x_1) \leqq v(x_i)$, pour tout i tel que $1 < i \leq n$. Soit alors $A = R[x_2/x_1, x_3/x_1, \ldots, x_n/x_1]$, $\mu = A \cap M_v$, et $S = A_\mu$. Alors, S est appelé premier transformé quadratique de R le long de v.

Lemme 1. Avec les notations de la définition 3, si l' on note π l' idéal maximal de S, S est un anneau local régulier de dimension $m \leqq n$, tel que $S \subset R_v$, $M_v \cap S = \pi$, et si d est le degré de transcendance de R_v/M_v par rapport à R/M, d' celui de R_v/M_v par rapport à S/π, on a $n - m = d - d'$.

≪ Soit $\bar{A} = R/M[X_2, X_3, \ldots, X_n]$, où $X_2, \ldots, X_n$ sont des indéterminées. On a un isomorphisme $\bar{A} \simeq A/(x_1 A)$. Soit $\bar{\mu} = \mu/(x_1 A)$. Alors, $\bar{A}_{\bar{\mu}}$ est un anneau local régulier de dimension $h \leqq n-1$. Soient $\bar{y}_2, \ldots, \bar{y}_{h+1}$ engendrant l' idéal $\bar{\mu}$ dans $\bar{A}_{\bar{\mu}}$, et soient des y_i, $(i = 2, \ldots, h + 1)$ appartenant aux classes résiduelles des $\bar{y}_i$ dans S. Alors, $x_1, y_2, \ldots, y_{h+1}$ engendrent π dans S, et la dimension m de S, qui est égale à la hauteur de π, est égale à la hauteur de $\bar{\mu}$ plus 1, soit $h + 1$. Par conséquent, S est régulier et l' on a : $m = h + 1 \leqq n - 1 + 1 = n$. Puisque $\pi \cap R = M$, on a : $R/M \subset S/\pi \subset R_v/M_v$. Or, le degré de transcendance de S/π par rapport à R/M est égal au degré de transcendance du corps des fractions de $\bar{A}/\bar{\mu}$ par rapport à R/M soit $n - h - 1 = n - m$. ≫

Lemme 2. Soit R un anneau local régulier de dimension n ($n > 1$), M son idéal maximal. Soit K son corps des fractions et v une valuation discrète de K qui est un diviseur premier pour R. Alors, la suite quadratique le long de v partant de R est finie, i.e. si l' on pose $R = R_0$, et si l'on désigne par R_{i+1} le premier transformé quadratique de R_i le long de v, alors pour un certain h, R_h est de dimension 1 et égal à R_v.

≪ Tout d' abord, si la suite est effectivement finie, R_h est un anneau local de dimension 1 (Lemme 1), donc un anneau de valuation discrète. Or, $R_h \subset R_v$ et $M_v \cap R_h = M_h$. Donc, $R_h = R_v$.

Supposons maintenant la suite infinie, $R_0 \subset R_1 \subset \ldots \subset R_i \subset \ldots$ Alors, d' après le lemme 1, il existe un entier s tel que l' on ait $\dim R_t = \dim R_s = a$ et $\text{deg. tr.}_{R_t/M_t} R_v/M_v = a - 1$ pour $t \geqq s$. De plus, la dimension a de R_s est strictement supérieure à 1, car R_s admet un transformé quadratique. Par conséquent, le degré de transcendance de R_v/M_v par rapport à R_s/M_s, soit $a - 1$, est strictement positif.

Soit maintenant $S = \bigcup_i R_i$, et $N = \bigcup_i M_i$ (où M_i est l' idéal maximal de R_i).Alors, S est un anneau local d' idéal maximal N, et de plus, pour tout i, $R_i/M_i = S/N$. D' après lellemme 1, si $t \geqq s$ R_{t+1}/M_{t+1} est algébrique sur R_t/M_t. Par conséquent, S/N est algébrique sur R_s/M_s. Donc, si l' on prouve que $S = R_v$, on aura obtenu une contradiction.

Puisque $M_v \cap S = M_v \cap (\bigcup_i R_i) = \bigcup_i (M_v \cap R_i) = \bigcup_i M_i = N$, il suffit pour cela de montrer que S est un anneau de valuation discrète. N est engendré par des éléments $x_1, x_2, \ldots, x_j, \ldots$ que l' on peut choisir parmi les générateurs des R_i utilisés dans la démonstration du lemme 1. De plus, puisque v est une valuation discrète, un des x_j est de valuation minimum, disons x_1. Par conséquent, par construction de S, x_j/x_1 appartient à S. Donc, N est engendré par x_1 et est principal. De plus, S n' est pas un corps car $R \subset S \subset R_v \subsetneqq K$, où K est le corps des fractions de R. Donc, S est un anneau de valuation discrète. ≫

<u>Proposition 1.</u> <u>Soit R un anneau local régulier de dimension n ($n > 1$), et M son idéal maximal. Soit K son corps des fractions et v une valuation discrète de K qui est un diviseur premier pour R. Soit enfin</u> R_v <u>l' anneau de la valuation v, et</u> M_v <u>l' idéal maximal de</u> R_v. <u>Alors,</u> R_v/M_v <u>est une extension réglée de R/M.</u>

<u>N.B.</u> : En fait, on peut montrer que v, étant un diviseur premier pour R, est obligatoirement une valuation discrète. ([1])

≪ Soit $R_0 \subset R_1 \subset \ldots \subset R_{h-1} \subset R_h = R_v$, la suite quadratique étudiée dans le lemme 2. On note M_i l' idéal maximal de R_i. Soit $T = R_{h-1}/M_{h-1}$, et soit d la dimension de R_{h-1}. Alors, on a $d > 1$. Soit $x_1, x_2, \ldots, x_d$ une base minimale minimale de M_{h-1}, telle que pour tout $j > 1$, on ait $v(x_1) \leqq v(x_j)$. Soit $A = R_{h-1}[x_2/x_1, \ldots, x_d/x_1]$ et $\mu = A \cap M_v$. On a encore $A/(x_1A) \simeq T[Y_2, \ldots, Y_d] = \bar{A}$. Soit $\bar{\mu} = \mu/(x_1A)$ Alors, la hauteur de $\bar{\mu}$ est égale à la dimension de R_h moins un, soit à zéro. Par conséquent, $\bar{\mu}$ est égal à (0). Ainsi, $R_v/M_v = \bar{A}_{\bar{\mu}}/(\bar{\mu}\bar{A}_{\bar{\mu}})$ est isomorphe à $T(Y_2, \ldots, Y_d)$. R_v/M_v est donc bien une extension transcendante pure de T de degré de transcendance strictement positif et fini. De plus, T est une extension de R/M de type fini, comme on le voit par récurrence, en remarquant que , si S, d' idéal maximal π, est le premier transformé quadratique de R, le degré de transcendance de S/π par rapport à R/M est fini. »

<u>Définition 4. On dit qu' un schéma algébrique intègre sur un corps k est réglé si son corps de fonctions rationnelles L est une extension réglée de k.</u>

<u>1.2.- Spécialisation des variétés polarisées normales non réglées</u>

Dans 1.2., on améliore le théorème 2 de [8].

<u>Lemme 3.</u> <u>Soit S un trait d' anneau R, η et s respectivement les points génériques et fermé de S, et L le corps résiduel de R. Soit X un S-préschéma localement noethérien, plat sur S, de type fini, à fibres régulières en leurs points génériques. Alors, l'anneau local du point générique d' une composante irréductible de la fibre spéciale X_s est un anneau de valuation discrète plat sur R.</u>

« Soit z le point générique d' une composante irréductible de la fibre spéciale. Il suffit de montrer que $O_{X,z}$ est régulier, de dimension 1, et plat sur R. D' après E.G.A. O 16.3.9., on a:

$\dim O_{X,z} \leq \dim O_{S,s} = \dim R = 1$. Comme z n'est pas point générique de X, on a de plus : $\dim O_{X,z} > 0$. Par conséquent, $\dim O_{X,z} = 1$. De plus, la fibre spéciale X_s est régulière en z, S est régulier en s, et on a : $1 = \dim O_{X,z} = 1 + 0 = \dim R + \dim O_{X_s,z}$. Donc, d' aprés E.G.A. 0_{IV} 17.3.3., $O_{X,z}$ est régulier et R-plat. »

<u>Notation</u> : <u>Dans toute la suite du paragraphe 1, on considèrera un trait S d' anneau R, et on notera η et s respectivement les points générique et fermé de S, et k et L respectivement les corps des fractions et corps résiduel de R.</u>

<u>Proposition 2.</u> <u>Soient X et Y deux S-schémas noethériens, irréductibles, propres et ayant la propriété (R_1) (E.G.A. IV 5.8.1.). On suppose les composantes irréductibles des fibres spéciales</u> X_s <u>et</u> Y_s <u>non réglées sur L. Alors, si les fibres génériques</u> X_η <u>et</u> Y_η <u>sont birationnellement équivalentes, il existe un ouvert U de X (respectivement un ouvert V de Y) contenant les points génériques de</u> X_s <u>(respectivement de</u> Y_s) , <u>et un S-isomorphisme de U dans V qui prolonge l' isomorphisme donné sur les fibres génériques.</u>

« Soit $T_\eta \subset X_\eta \times_k Y_\eta$ le graphe de la correspondance birationnelle entre X_η et Y_η, T l' adhérence schématique de T_η dans $X \times_R Y$, et T_s la fibre spéciale de T. Soit y_o le point générique d' une composante irréductible de Y_s. Puisque Y possède la propriété (R_1), O_{Y,y_o} est un anneau de valuation discrète, d' aprés le lemme 3. T étant un fermé de $X \times_R Y$, puisque X est propre sur S, T est propre sur Y, et $T \times_Y \operatorname{Spec} O_{Y,y_o}$ est propre sur $\operatorname{Spec} O_{Y,y_o}$. De plus, puisque T_η est le graphe d' une correspondance birationnelle entre X_η et Y_η, le morphisme projection de $T \times_Y \operatorname{Spec} O_{Y,y_o}$ sur $\operatorname{Spec} O_{Y,y_o}$ est birationnel. Comme il est aussi á fibres finies, c' est un isomorphisme d' aprés E.G.A. III 4.4.2.. Il y a donc un point générique et un seul de T_s au dessus de y_o, que nous noterons t_o. On a donc un isomorphisme de O_{Y,y_o} sur O_{T,t_o}. Soit x_o la projection de t_o sur X. Supposons que l' on ait prouvé que la dimension de O_{X,x_o} est égale à un. Alors, on en déduira de la même façon que O_{X,x_o} est isomorphe à O_{T,t_o}, donc à O_{Y,y_o}. En effectuant le même raisonnement pour tous les points génériques des composantes irréductibles de Y_s, on déduit que toute composante irréductible de Y_s est birationnellement équivalente à une composante irréductible de X_s. Le même raisonnement appliqué à X achève donc la démonstration , puisque X_s et Y_s n' ont qu' un nombre fini de composantes irréductibles, et que X et Y sont séparés. Il reste donc àmontrer que la dimension de O_{X,x_o} est égale à un.

Posons $n = \dim (O_{X,x_o})$. D' après le lemme 3 et E.G.A. IV 6.3.3., O_{X,x_o} est de Cohen-Macaulay, donc universellement caténaire et l' on a: $\dim (O_{T,t_o}) = \dim (O_{Y,y_o}) = 1 = \dim (O_{X,x_o}) - d^o tr_{k(x_o)} k(y_o)$.

Donc, v est un diviseur premier pour O_{X,x_o}. D' aprés la proposition 1 et la définition 4, si $n > 1$, l'adhérence de y_o dans Y_s est donc une variété réglée, ce qui est contraire à l' hypothèse. Donc $n = 1$. >>

Théorème 1. Soient X et Y deux S-schémas noethériens, irréductibles, normaux et projectifs. on suppose que les fibres spéciales X_s et Y_s sont irréductibles et non réglées sur L, et qu' il existe un isomorphisme h de X_η sur Y_η. De plus, on suppose que X et Y appartiennent à la même classe de polarisation, i.e. qu' il existe deux faisceaux inversibles S-amples F et G respectivement sur X et Y tels que $F \otimes_{O_X} O_{X_\eta} = h^*(G \otimes_{O_Y} O_{Y_\eta})$. Alors, il existe un isomorphisme θ de X sur Y dont la restriction à X_η est égale à h.

<< Tout d' abord, d' aprés la propisition 2, les fibres

spèciales sont birationnellement èquivalentes, et si l' on note x_0 et y_0 leirs points gènèriques, O_{X,x_0} est isomorphe à O_{Y,y_0}. De plus, quitte à les remplacer par une de leurs puissances tensorielles, on peut supposer F et G très amples. D' autre part, puisque F est ample sur X, d' après E.G.A. II 4.5.2.a', il existe un recouvrement affine de X en ouverts X_{f_α}, où f_α est un èlèment homogène de $\bigoplus_{n\geqslant 0} \Gamma (X, F^{\otimes n})$. De plus, d' après E.G.A. II 4.5.4., on peut supposer que tous les X_{f_α} contiennent le point gènèrique de X_s, soit x_0. Par restriction de f_α à X_η, puis en appliquant h, on obtient une section homogène non nulle de $\bigoplus_{n\geqslant 0} \Gamma (Y_\eta, G^{\otimes n})$, qui se prolonge en une section homogène de $\bigoplus_{n\geqslant 0} \Gamma (Y, G^{\otimes n})$. On a donc construit des ouverts affines Y_{g_α}, où g_α est un èlèment homogène de $\bigoplus_{n\geqslant 0} \Gamma (Y, G^{\otimes n})$, tels que h induise des isomorphismes de $X_{f_\alpha} \cap X_\eta$ sur $Y_{g_\alpha} \cap Y_\eta$. Appelons v la valuation de l' anneau de valuation discrète O_{Y,y_0}, π une uniformisante de R, et e l' indice de ramification de O_{Y,y_0} sur R, de sorte que $v(\pi) = e$. De plus, en restreignant $G^{\otimes n}$ à Spec O_{Y,y_0}, on obtient un sous O_{Y,y_0} - module du corps des fractions de O_{Y,y_0}, de sorte que si g est un èlèment de $\Gamma (Y, G^{\otimes n})$, cela a un sens de parler de $v(g/ \text{Spec } O_{Y,y_0})$ que nous noterons $v(g)$. Ainsi, quitte à remplacer g_α par $g_\alpha^{\otimes e}$, ce qui ne change pas Y_{g_α}, on peut supposer que $v(g_\alpha) = k.e$, où k est un entier relatif, et quitte à remplacer g_α par $\pi^{-k} g_\alpha$, ce qui ne change pas la fibre gènèrique de Y_{g_α}, on peut supposer que $v(g_\alpha) = 0$, c' est à dire que y_0 appartient à Y_{g_α}. Posons $X_{f_\alpha} = \text{Spec } A_\alpha$ et $Y_{g_\alpha} = \text{Spec } B_\alpha$. Puisque les seuls points de hauteur 1 de X et Y n' appartenant pas aux fibres gènèriques sont x_0 et y_0, on voit que chaque localisè en un idèal premier de hauteur 1 de A_α est isomorphe à un localisè en un idèal premier de hauteur 1 de B_α, et vice-versa. Puisque A_α et B_α sont intègralement clos et noethèriens, ils sont isomorphes (Bourbaki Algèbre commutative Chap. VII § I coroll. du th. 2 et th. 4)

On a donc un isomorphisme θ_α de X_{f_α} sur Y_{g_α} dont la restriction à la fibre générique est égale àla restriction de h à $X_{f_\alpha} \cap X_\eta$. En recollant ces isomorphismes, on obtient donc une immersion ouverte θ de X dans Y. D' aprés E.G.A. II 5.4.3., puisque X et Y sont propres sur S, θ est un morphisme propre, donc un isomorphisme de X sur Y. >>

<u>Remarque :</u> Si, dans le théorème 1, on suppose de plus X et Y localement factoriels, et si l' on ne suppose plus X_s et Y_s irréductibles, la conclusion devient la suivante : Soit F_x le fermé formé des points de X_s appartenant à au moins deux composantes irréductibles de X_s, et U_x le complémentaire de F_x dans X. Soit de même U_y dans Y. Alors il existe un isomorphisme θ de U_x dans U_y dont la restriction à X_η est h.

<< En effet, si l' on note $X_1, X_2, \ldots, X_n$, (respectivement $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$,) les composantes irréductibles de X_s (respectivement Y_s) et $x_1, x_2, \ldots, x_n$ (respectivement $y_1, y_2, \ldots, y_n$) les points génériques de ces composantes, de telle sorte que O_{X,x_i} soit isomorphe á O_{Y,y_i} (proposition 2), on peut recouvrir U_x en ouverts affines X_{f_α} tels que chaque X_{f_α} contienne un et un seul des x_i, d' aprés E.G.A. II 4.5.4., car tout point de $U_x \cap X_s$ appartient á l' un des X_i et á un seul. On peut donc construire les Y_{g_α} de façon que Y_{g_α} contienne y_i si X_{f_α} contient x_i en appliquant le raisonnement de la démonstration du théorème 1 á la valuation v_i de O_{Y,y_i}. Ainsi, tous les points de X_{f_α} de hauteur 1 sont des points de hauteur 1 de Y_{g_α}. Par conséquent, avec les notations de la démonstration du théorème 1, $B_\alpha = \bigcap_{y \in Y(1) \cap Y_{g_\alpha}} O_{Y,y}$ est inclus dans $A_\alpha = \bigcap_{x \in X(1) \cap X_{g_\alpha}} O_{X,x}$, où X(1) et Y(1) sont les ensembles de points de X et Y de hauteur 1. On en déduit une application θ_α de X_{f_α} dans Y_{g_α} qui est une immersion ouverte d' aprés le théorème de Van der Waerden (E.G.A. IV 21.12.13)

En recollant ces applications, on construit une immersion ouverte θ de U_x dans Y dont l' image est incluse dans U_y. Le même raisonnement en interchangeant X et Y prouve que θ est surjectif. »

1.3.- Minimalité des hypothèses du théorème 1.

Dans ce numéro, nous montrons par deux exemples que l' hypothèse de polarisation d' une part, et l' hypothèse '' X_s et Y_s irréductibles '' d' autre part sont indispensables dans le théorème 1.

Soit X un schéma sur S, régulier et de dimension trois, et L_1 et L_2 deux droites de X se coupant en un point x de la fibre spéciale. Soit Spec A un voisinage affine de x. Supposons que dans Spec A, l' idéal de L_1 soit engendré par (u, v) et celui de L_2 par (u, v'), celui de x étant (u, v, v'), où u, v et v' sont des éléments de A. Soit X_1' le schéma obtenu en faisant éclater L_1 dans X, et X_1 celui obtenu en faisant éclater le transformé propre de L_2 dans X_1'. Soit de même X_2' celui obtenu en faisant éclater L_2 dans X, et X_2 celui obtenu en faisant éclater le transformé propre de L_1 dans X_2'. Soit enfin X_3 celui obtenu en faisant éclater $L_1 \cup L_2$ dans X.
Les trois schémas f_i^{-1}(X - Spec A) sont clairement isomorphes entre eux (si f_i est le morphisme canonique de X_i dans X, i = 1, 2, 3).
Etudions donc les trois schémas f_i^{-1}(Spec A).

- Etude de f_3^{-1} (Spec A): Dans Spec A, le fermé $L_1 \cup L_2$ correspond à l' idéal (u, vv'). f_3^{-1} (Spec A) est donc recouvert par les deux ouverts affines Spec A[u/vv'] et Spec A[vv'/u].

- Etude de f_1^{-1} (Spec A): L' idéal de L_1 dans Spec A étant (u, v), l' image réciproque de Spec A dans X_1' est recouverte par les deux ouverts affines Spec A[u/v] et Spec A[v/u]. Puisque Spec A[v/u] est isomorphe à X'_{1u} et que u appartient à l' idéal de L_2, la transformée propre de L_2 dans X'_1 ne rencontre pas Spec A[v/u]. Dans Spec A[u/v], on a : u = u/v . v, de sorte que les composantes irréductibles du fermé correspondant à l' idéal (u, v) correspondent aux idéaux (u/v, v') et (v, v'), le transformé propre de L_2 correspondant clairement à l' idéal (u/v, v'). L' image réciproque de Spec A[u/v] est donc recouverte par les ouverts affines Spec A[u/v, vv'/u] et Spec A[u/v, u/vv'] = Spec A[u/vv']. Finalement, f_1^{-1}(Spec A) est recouvert par les trois ouverts affines Spec A[v/u], Spec A[u/v, vv'/u] et Spec A[u/vv'].

<u>- Etude de</u> f_2^{-1} <u>(Spec A) :</u> Une étude analogue montre que f_2^{-1} (Spec A) est recouvert par les trois ouverts affines Spec A[v'/u], Spec A[u/v', vv'/u] et Spec A[u/vv'].

Recherchons maintenant si les schémas X_i ont des points singuliers.

<u>- Régularité de</u> X_1 <u>et</u> X_2 <u>:</u> X_1 et X_2 ayant été obtenus en faisant éclater des préschémas réguliers dans des préschémas réguliers sont eux aussi réguliers.

<u>- Etude des singularités de</u> X_3 <u>:</u> Nous noterons k le corps résiduel du point x dans X. Les points où X_3 peut être singulier sont les points de $f_3^{-1}(x)$. Or, on a : $f_3^{-1}(x) \cap$ Spec (A[u/vv']) $\simeq$ Spec (A[u/vv'] $\otimes$ k) = Spec (A[T]/(vv'T - u, u, v, v')) = Spec (A[T]/ (u, v, v')) = Spec k[T].

On a de même f_3^{-1} (x) $\cap$ Spec A[vv'/u] $\simeq$ Spec k[T], et après recollement, f_3^{-1} (x) $\simeq P^1(k)$.

Supposons pour simplifier k algébriquement clos.

L' idéal d' un point de $f_3^{-1}(x) \cap$ Spec A[u/vv'] s' écrit donc (u, v, v', u/vv' - α). Or, on a: u = (u/vv' - α).vv' + αvv', de sorte que l' idéal est engendré par (v, v', u/vv' - α) et que tous les points considérés sont réguliers.

De même, l' idéal d' un point de $f_3^{-1}(x) \cap$ Spec A[vv'/u] s' écrit (u, v, v', vv'/u - α). Si $\alpha \neq 0$, on a: u = -1/α [(vv'/u - α)u - vv'], de telle sorte que le point considéré est régulier (on le savait déja). Mais l' idéal (u, v, v', vv'/u) ne peut être engendré par trois éléments, comme on peut le vérifier par le critère jacobien. Ainsi X_3 est partout régulier sauf en un point que nous désignerons par y_o. (Il est clair que par changement de base fidèlement plat, on aurait pu se passer de l'hypothèse k algébriquement clos.)

<u>- Existence de morphismes canoniques</u> $X_1 \dashrightarrow X_3$ <u>et</u> $X_2 \dashrightarrow X_3$.

Construisons donc des morphismes h_1 et h_2 respectivement de X_1 dans X_3 et de X_2 dans X_3 rendants le diagramme suivant commutatif.

$$\begin{tikzcd} X_1 \arrow[r, "h_1"] \arrow[dr, "f_1"'] & X_3 \arrow[d, "f_3"] & X_2 \arrow[l, "h_2"'] \arrow[dl, "f_2"] \\ & X & \end{tikzcd}$$

Il suffit clairement pour cela de construire un morphisme de f_1^{-1}(Spec A) dans f_3^{-1}(Spec A). Or, celui ci se déduit de l' isomorphisme $A[u/vv'] = A[u/vv']$ et des inclusions $A[vv'/u] \to A[u/v, vv'/u]$ et $A[vv'/u] \longrightarrow A[v/u]$, car ces trois applications induisent trois morphismes de chacun des ouverts affines recouvrant f_1^{-1}(Spec A) dans f_3^{-1}(Spec A) et ces trois morphismes se recollent.

<u>-</u> h_1 <u>est un isomorphisme en dehors de</u> $h_1^{-1}(y_o)$.

En effet, il est clair que la restriction de h_1 à Spec $A[u/vv']$ est un isomorphisme. Il en est de même de la restriction de h_1 au complémentaire de $f_1^{-1}(x)$. Or, y_o est le seul point de $f_3^{-1}(x)$ n' appartenant pas à Spec $A[u/vv']$, ce qui prouve l' assertion précédente.

<u>- Etude de</u> $h_1^{-1}(y_o)$. On a : $h_1^{-1}(y_o) \cap \operatorname{Spec} A[u/v, vv'/u]$ $\simeq \operatorname{Spec} A[T\eta Y]/(vT-u,\ uY-vv') \otimes k(y_o) = \operatorname{Spec} A[T,Y]/(vT-u, uY-vv', u, v, v', Y)$ $= \operatorname{Spec} k(y_o)[T]$.

De même, $h_1^{-1}(y_o) \cap \operatorname{Spec} A[v/u] \simeq \operatorname{Spec} A[T]/(uT-v, u, v, v', v'T)$ $\simeq \operatorname{Spec} k(y_o)[T]$. Après recollement, on obtient donc: $h_1^{-1}(y_o) \simeq P^1(k(y_o))$.

<u>- Etude de</u> h_2. De même, on voit que h_2 est un isomorphisme en dehors de $h_2^{-1}(y_o)$ et que $h_2^{-1}(y_o)$ est isomorphe à $P^1(k(y_o))$.

<u>-</u> X_1 <u>et</u> X_2 <u>ne sont pas isomorphes .</u>

Puisque X_1 et X_2 sont séparés, pour montrer que X_1 et X_2 ne sont pas isomorphes, il suffit, d' aprés ce que nous avons vu, de montrer que l' un des anneaux locaux de $h_1^{-1}(y_o)$ dans X_1 n'est pas un anneau local de $h_2^{-1}(y_o)$ dans X_2. Considérons par exemple l' anneau local $B = A[u/v,vv'/u]_{(u,v,v',vv'/u,u/v)}$. C' est un anneau local de dimension 3, dont l' idéal maximal est engendré par $(v,vv'/u,u/v)$ car $u = u/v \cdot v$ et $v' = vv'/u \cdot u/v$. Supposons que u/v' appartienne à B. On aurait alors $v = vv'/u \cdot u/v'$, de sorte que l' idéal maximal de B serait engendré par deux éléments, à savoir vv'/u et u/v, ce qui est impossible. Donc, si B est isomorphe à un anneau local d' un point de $h_2^{-1}(y_o)$, ce ne peut être qu' à celui du point de $h_2^{-1}(y_o)$ n' appartenant pas à Spec $A[u/v',vv'/u]$, soit $C = A[v'/u]_{(u,v,v',vv'/u,v'/u)} = A[v'/u]_{(u,v,v'/u)}$. Or, u/v, qui appartient à B, n' appartient pas à C, sans quoi l' idéal maximal de C serait engendré par v et v'/u, puisque l' on aurait $u = u/v \cdot v$, et cela est impossible puisque C est un anneau local de dimension 3. Ainsi, X_1 et X_2 ne sont pas isomorphes.

Deplus, si l' on suppose X noethérien, irréductible et projectif, X_1 et X_2 ont les mêmes propriétés. De plus, si la fibre spéciale X_s est irréductible et non réglée, et si L_1 et L_2 ne sont pas incluses dans X_s, X_{1s} et X_{2s} sont aussi irréductibles et non réglées. Enfin, comme on l' a vu, les fibres génériques $X_{1\eta}$ et $X_{2\eta}$ sont isomorphes. Ceci prouve bien que l' on ne peut se passer de l' hypothèse de polarisation dans le théorème 1.

Si dans l' exemple précédent, on suppose maintenant L_1 et L_2 incluses dans X_s, X_1 et X_2 appartiennent à la même classe de polarisation au sens du théorème 1, d' après E.G.A. II 8.1.7 et II 4.4.10ii puisque $X_{1\eta}$ et $X_{2\eta}$ sont tous deux isomorphes à X_η. De plus, les fibres spéciales X_{1s} et X_{2s}, bien qu' ayant des composantes irréductibles réglées, sont birationnellement équivalentes puisque

$h_1^{-1}(y_o)$ et $h_2^{-1}(y_o)$ sont de codimension 2. Ceci prouve qu' on ne peut se passer de l' hypothèse '' X_{1s} et X_{2s} irréductibles '' dans le théorème 1.

2- Surfaces relatives de type général en caractéristique zéro.

2.1- Théorèmes préliminaires

Dans ce paragraphe, on rappelle quelques théorèmes plus ou moins classiques.

Théorème A: Soit X une surface algébrique propre non singulière sur un corps de caractéristique zéro, D un diviseur effectif sur X, connexe et tel que $(D)^2 > 0$. Alors, $H^1(X,O(-D)) = 0$.

Le théorème A est du à Ramanujan. On en trouve une démonstration dans [5] p. 178.

Théorème B: Soit X une surface algébrique propre non singulière sur un corps de caractéristique zéro, L un faisceau inversible tel que pour n assez grand, $L^{\otimes n}$ soit engendré par ses sections et ait trois sections algébriquement indépendantes. Alors, on a: $H^1(X,L^{-1}) = 0$.

Le théorème B est du à Mumford. C' est le théorème principal de [9] (cf. p. 95).

Rappelons la démonstration du théorème B dans le cas où $L = O(D)$, D étant un diviseur effectif sur X (le cas général s' y ramène aisément).

≪ Montrons tout d' abord que D est connexe. Nous notons φ le morphisme associé à $L^{\otimes n}$, n étant pris assez grand, Y l' image $\varphi(X)$ et M le faisceau inversible très ample sur Y tel que $L^{\otimes n} = \varphi^*(M)$. Soit H une section hyperplane de Y dans l' injection définie par M. Alors, puisque dim $Y > 1$, H est connexe et $\varphi^{-1}(H)$ aussi. Mais puisque le morphisme $i\circ\varphi$ de X dans P_n est défini par le faisceau $L^{\otimes n}$, le diviseur mD est égal à $\varphi^*(H)$ pour une section hyperplane H de Y. D est donc connexe.

De plus, on a la suite exacte $0 \to L^{-1} \to O_X \to O_D \to 0$, et donc $H^o(O_X) \to H^o(O_D) \to H^1(L^{-1}) \to H^1(O_X) \to H^1(O_D)$. De plus, puisque D est réduit et connexe, $H^o(O_D)$ est de dimension 1, et l'application de $H^o(O_X)$ dans $H^o(O_D)$ est surjective. Il suffit donc de montrer que l' application de $H^1(O_X)$ dans $H^1(O_D)$ est injective. Notons α cette application. Si l' on identifie $H^1(O_X)$ et $H^1(O_D)$ aux espaces tangents de Zariski à l' origine aux composantes connexes de l' origine $\mathrm{Pic}^o(X)$ et $\mathrm{Pic}^o(D)$ des schémas de Picard de X et D, α est la différentielle de l' homomorphisme canonique β de $\mathrm{Pic}^o(X)$ dans $\mathrm{Pic}^o(D)$. Supposons que α ne soit pas injectif. Alors, puisque la caractéristique est 0, le noyau de β est réduit et est donc de dimension positive. Or, tout sous schéma en groupe non trivial a des points non triviaux d' ordre fini. Donc, il existe δ appartenant à $\mathrm{Pic}^o(X)$ d' ordre fini n, $n > 1$, tel que $\beta(\delta) = 0$. De plus, δ définit un revêtement galoisien non ramifié $X' \xrightarrow{\pi} X$, avec $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ pour groupe. De plus, puisque $\beta(\delta) = 0$, $\pi^{-1}(D)$ est la réunion de n diviseurs disjoints et isomorphes à D. Soit $L' = \pi^*(L)$. Alors, X' et L' satisfont aux conditions imposées à X et L. Ainsi, le raisonnement utilisé pour montrer que D est connexe, montre que $D' = \pi^{-1}(D)$ est connexe, ce qui est une contradiction. >>

<u>Théorème C:</u> <u>Soit $f: X \to Y$ un morphisme propre de schémas noethériens, où $Y = \mathrm{Spec}\, A$, et F un faisceau cohérent plat sur Y. Alors, il existe un complexe fini $K^\bullet$ $0 \to K^o \to K^1 \to \dots \to K^n \to 0$ de A-modules projectifs de type fini et un isomorphisme de foncteurs $H^p(X \times_Y \mathrm{Spec}\, B, F \otimes_A B) \cong H^p(K^\bullet \otimes_A B), p \geq 0$, sur la catégorie des A-algèbres B.</u>

<u>Corollaire:</u> <u>Soient X,Y,f, et F comme précédemment (sauf que Y n' a pas besoin d' être affine). Supposons Y réduit et connexe. Alors, pour tout p, les propositions suivantes sont équivalentes:</u>

<u>(i) $y \to \dim_{k(y)} H^p(X_y, F_y)$ est une fonction constante,</u>

<u>(ii) $R^p f_*(F)$ est un faisceau localement libre E sur Y, et pour</u>

tout y, l' application $E \otimes_{O_Y} k(y) \longrightarrow H^p(X_y, F_y)$ est un isomorphisme.

Le théorème C et son corollaire sont dus à Grothendieck. On en trouve une démonstration simple dans [12] pp.47-51.

Théorème D (de l' index): Soit X une surface algébrique propre sur un corps k, et D et E deux diviseurs sur X tels que $(D)^2 > 0$ et $(D.E) = 0$. Alors $(E)^2 < 0$.

Ce théorème classique est démontré par exemple dans [11] Lecture 18.

2.2- Surfaces minimales de type général sur un corps

Dans ce paragraphe, nous rappelons la démonstration du théorème 2 de [5].

2.2.1- Définition et caractérisation des surfaces minimales de type général sur un corps de caractéristique zéro.

Définition 5: Soit X une surface algébrique, propre et non singulière sur un corps k de caractéristique zéro. Soit K son fibré canonique et mK la m-ème puissance tensorielle de K. Soit φ_m l' application rationnelle associée à mK, $\varphi_m : X \to P^{P_m}(k)$, où $P_m = \dim_k H^0(O(mK))$ est le m-ème plurigenre de X. Alors, X est une surface de type général si, pour m assez grand, $\varphi_m(X)$ est de dimension supérieure ou égale à 2. X est une surface minimale si elle ne contient aucune courbe exceptionnelle de première espèce.

Dans la suite du paragraphe 2.2, nous considérerons une surface algébrique minimale de type général X et nous conserverons les notations de la définition 5.

Théorème 2. Une surface minimale X est de type général si et seulement si $(K)^2 > 0$ et $P_2 \geq 1$.

Le théorème 2 est démontré dans [7] et est du à Kodaira.

2.2.2- Courbes de degré zéro sur une surface de type général.

La proposition suivante est due à Mumford ([10]).

Proposition 3. Si C est une courbe irréductible sur X, alors $(K.C) \geqq 0$, et si $(K.C) = 0$, alors $(C)^2 = -2$ et C est une courbe rationnelle non singulière. De plus, les courbes irréductibles E telles que $(K.E) = 0$ sont en nombre fini et sont numériquement indépendantes sur X.

Nous appellerons les courbes telles que $(K.E) = 0$ les courbes de degré zéro, et nous désignerons par W l' ensemble de ces courbes.

2.2.3- Cycle fondamental

Dans ce numéro, nous suivons Artin ([2], [3])

Définition 6. Soit W_λ une composante connexe maximale de W, $W = E_1 + E_2 + \dots + E_r$. On appelle cycle fondamental associé à W_λ le plus petit diviseur $m_1 E_1 + \dots + m_r E_r = Z$ ($m_i > 0$) tel que $(Z.E_i) \leqq 0$ pour $i = 1, \dots, r$. On dira qu' un diviseur Z sur X est un cycle fondamental si c' est le cycle fondamental associé à une composante connexe maximale de W.

Les cycles fondamentaux sont caractérisés par la proposition suivante.

Proposition 4. Un diviseur effectif Z sur S est un cycle fondamental si et seulement si c' est un cycle maximal tel que $(K.Z) = 0$, $(Z)^2 = -2$.

2.2.4- Quelques lemmes techniques.

Lemme 4. Si D est un diviseur effectif linéairement équivalent à mK ($m > 0$), si $D = D_1 + D_2$, alors $(D_1.D_2) \geqq 2$, sauf dans le cas où $(K)^2 = 1$, $m = 2$, D_1 et D_2 étant tous deux linéairement équivalent à K. (les D_i sont supposés effectifs).

≪ Si $(K.D_1) = 0$, d' après le théorème de l' index et le fait que $(K.D_1) + (D_1)^2$ est pair, on a: $(D_1)^2 \leqq -2$. On a alors $(D_1.D_2) = (D_1.mK-D_1) = -(D_1)^2 \geqq 2$. On peut donc supposer $(K.D_i) > 0$, $i = 1, 2$.

Posons $F = (K.D_1)\,K - (K)^2\,D_1$. Puisque $(K.F) = 0$, d' après le théorème de l' index, on a: $(F)^2 \leqq 0$, l' égalité ne pouvant avoir lieu que si F est linéairement équivalent à zéro. On a donc: $((K)^2)^2\,(D_1)^2 - (K.D_1)^2\,(K)^2 \leqq 0$, ce qui s' écrit encore, d' après la relation $m\,(K.D_1) = (D_1)^2 + (D_1.D_2)$, et après simplification par $(K)^2$, $m\,(K)^2\,(K.D_1) - (K.D_1)^2 \leqq (K)^2\,(D_1.D_2)$, soit $(K.D_1)\,(K.D_2) \leqq (K)^2(D_1.D_2)$, ce qui s' écrit encore $m(K.D_1)(K.D_2)/(K.D_1)+(K.D_2) \leqq (D_1.D_2)$.

Ceci prouve dans tous les cas que $(D_1.D_2) \geqq 1$, et même que si $m \geqq 2$, $(D_1.D_2) \geqq 2$, sauf dans le cas où $m = 2$, $(K.D_1) = (K.D_2)$ et F est linéairement équivalent à zéro, ce qui est le cas d' exception annoncé. Enfin, si $m = 1$, le résultat découle de ce que $(D_1.D_2) = 2\,(K.D_1) - ((D_1)^2+(K.D_1))$ est un nombre pair. »

<u>Lemme 5.</u> <u>Soit Z un cycle fondamental de X. Si D est linéairement équivalent à $mK - Z$, $m > 0$, et si $D = D_1+D_2$, D_1 et D_2 étant effectifs, alors $(D_1.D_2) > 0$.</u>

« Supposons que l' on ait soit $(K)^2 \neq 1$, soit $m \neq 2$, soit D_1 et D_2 tous deux non linéairement équivalents à K. Alors, d'après le lemme 4, on a: $(D_1.(D_2+Z)) \geqq 2$ et $(D_2.(D_1+Z)) \geqq 2$. Le résultat s'obtient en ajoutant ces deux inégalités et en utilisant le fait que d' après la proposition 4, $(D.Z) = -\,(Z)^2 = 2$. »

<u>Lemme 6.</u> <u>Soit $\pi : X' \to X$ l' éclatement de X en un point fermé x de X n' appartenant pas à W, et soit $L = \pi^{-1}(x)$ la courbe exceptionnelle de première espèce de X'. Soit D un diviseur effectif sur X' linéairement équivalent à $m\pi^*K - 2L$, $m > 0$. Alors, si $D = D_1+D_2$, D_1 et D_2 étant effectifs, $(D_1.D_2) > 0$, sauf si $(K)^2 = 1$, $m = 2$, et si D_1 et D_2 sont tous2linéairement équivalents à $\pi^*K - L$.</u>

« Pour $i = 1, 2$, posons $F_i = D_i + (D_i.L)\,L$. Les F_i sont encore des diviseurs effectifs, même si $(D_i.L) < 0$, et on a: $(F_i.L) = 0$. Par conséquent, il existe des diviseurs effectifs C_i sur X tels que

$\pi^*[C_i] = [F_i]$. Puisque $F_1 + F_2$ est linéairement équivalent à $m\pi^*K$, $C_1 + C_2$ est linéairement équivalent à mK, et si C_1 et C_2 sont non nuls, le résultat découle du lemme 4, de la relation $(D_1.L) + (D_2.L)=2$, et de l' égalité $(D_1.D_2) =(F_1.F_2)-(D_1.L)(D_2.L)=(C_1.C_2)-(D_1.L)(D_2.L)$. Enfin, si $C_1= 0$, $D_1= -(D_1.L)L$, et $(D_1.D_2) = -(D_1.L)(D_2.L) \geqq 3$, car $(D_1.L) < 0$, et $(D_1.L) + (D_2.L) = 2$. »

2.2.5- Diviseurs pluricanoniques engendrés par leurs sections globales

On note p_g le genre géométrique de la surface X, et q son irrégularité.

Théorème 3: Soit X une surface minimale de type général. Alors, $(m+1)$ K est engendré par ses sections globales si:

(i) $m \geqq 3$

(ii) $m = 2$, $(K)^2 \geqq 3$ ou $(K)^2 = 2$, $p_g \geqq 1$

(iii) $m = 1$, $(K)^2 \geqq 5$, $p_g \geqq 3$ ou $p_g \geqq 3$, $q = 0$.

« Soit x un point fermé de X n' appartenant pas à W, et I_x son faisceau d' idéaux. On a la suite exacte

$0 \to O((m+1)K)\otimes I_x \to O((m+1)K) \to F \to 0$, où F est un faisceau de support x et de fibre k(x) en x, et il est clair que x n' est pas un point de base de $[(m+1)K]$ si et seulement si $\dim_k H^0(X,O((m+1)K\otimes I_x)) = P_m - 1$. Soit $\pi: X' \to X$ l' éclatement de X en x, et soit $L = \pi^{-1}(x)$. On a alors la suite exacte $0\to O((m+1)\pi^*K-L)\to O((m+1)\pi^*K)\to O_L \to 0$ et la suite de cohomologie associée à cette suite montre que x ne peut être un point de base de $[(m+1)K]$ si $H^1(X',O((m+1)\pi^*K-L)) = 0$.

Si x est un point de W, soit Z le cycle fondamental de la composante connexe contenant x. Puisque $(K.Z) = 0$, et que les faisceaux inversibles sont classifiés par le degré d' après [3], on a $O_Z\otimes O((m+1)K) = O_Z$, et donc la suite exacte:

$0 \to O((m+1)K-Z) \to O((m+1)K)\to O_Z \to 0$

De plus, $H^o(Z,O_Z) = k$ puisque Z est connexe d' après [3] Lemme 3. Par conséquent, x ne peut être un point de base de $[(m+1)K]$ si $H^1(X,O((m+1)K-Z)) = 0$.

Supposons qu' il existe un diviseur effectif D appartenant à $[m\pi^*K-2L]$. D' après le lemme 6, D est connexe sauf dans le cas $(K)^2= 1$, $m = 2$, et on a aussi $(D)^2> 0$ pourvu que $m^2(K)^2 \geqq 5$. Ainsi, si $m^2(K)^2 \geqq 5$, on peut appliquer le théorème A, et on obtient: $H^1(X',O(-D)) = 0$. Le fibré canonique de X' étant π^*K+L, par dualité $H^1(X',O((m+1)\pi^*K-L)) = 0$.

Un argument similaire montre que s' il existe un diviseur effectif D appartenant à $[mK-Z]$, alors $H^1(X,O(m+1)K-Z) = 0$, pourvu que $m^2(K)^2 \geqq 3$ (on utilise ici le lemme 5).

Pour étudier les conditions d' existence du diviseur D, on peut supposer, en raisonnant par l' absurde,que le point x est un point de base de $[m+1)K]$, sans quoi il n' y a rien à prouver.

Si x n' appartient pas à W, puisque$O(m\pi^*K)\otimes O_L = O_L$, on a la suite exacte: $0 \to H^o(X',O(m\pi^*K-2L))\to H^o(X',O(m\pi^*K))\to H^o(2L,O_{2L})$ et puisque $\dim_k H^o(2L,O_{2L}) = 3$, l' existence de D est assurée dès que $P_m \geqq 4$. Supposons maintenant $p_g > 0$. Soit s une section non triviale de K, s^{m+1} est une section non triviale de $(m+1)K$, donc s' annule en x, et donc, si $m \geqq 2$, s^m appartient à $H^o(X,O(mK)\otimes I_x^2)$ de sorte que $(\pi^*s)^m$ est une section de $m\pi^*K$ s' annulant sur L à l' ordre au moins 2. Ainsi, D existe si $m \geqq 2$, $p_g > 0$.Un raisonnement analogue prouve l' existence de D si $m = 1$, $p_g > 2$.

De même si x appartient à W, on obtient l' existence de D si $P_m \geqq 2$, et si $m = 1$, $p_g > 0$.

Enfin, le théorème de Riemann-Roch et l' inégalité $\chi(O) > 0$ (qui résulte de la classification des surfaces [13]) montrent que $P_m \geqq 1/2\ m(m-1)(K)^2 + 1$ si $m > 1$. Ceci complète la démonstration. »

2.2.6- Evaluation des plurigenres.

Proposition 5. Si $m \geqq 2$, le m-ème plurigenre P_m de X est donné par la formule $P_m = 1/2\, m(m-1)(K)^2 + \chi(0)$, et $\chi(0) \geqq 1$.

≪ Le fait que $\chi(0) > 0$ découle de la classification des surfaces (cf.[13]). Puisque X est de type général, mK a trois sections algébriquement indépendantes si m est assez grand. Par conséquent, d' après le théorème 3, on peut appliquer le théorème B, et on obtient $H^1(X,O(-mK)) = 0$ pour $m \geqq 1$, et par dualité $H^1(X,O(m+1)K) = 0$, si $m \geqq 1$. Le résultat découle alors du théorème de Riemann-Roch. ≫

2.2.7- Isomorphisme modulo W.

Définition 7. On dit qu' une application f de X dans une surface Y est un isomorphisme modulo W si la restriction de f à X - W est un isomorphisme et si $f^{-1}f(z) = W_\lambda$, pour tout z appartenant à W_λ.

Théorème 4. Soit X une surface minimale de type général. Alors, l' application φ_m est un isomorphisme modulo W si:

(i) $m \geqq 5$

(ii) $m = 4$, $(K)^2 \geqq 2$

(iii) $m = 3$, $(K)^2 \geqq 6$, ou $(K)^2 \geqq 3$, $p_g \geqq 4$.

La démonstration de ce théorème se fait selon la méthode de la démonstration du théorème 3 (cf. [5] p. 188)

2.3- Surfaces minimales de type général sur une base connexe de caractéristique zéro.

Dans ce paragraphe, on considère un schéma S connexe et de caractéristique zéro. Soit X une surface lisse sur S, f le morphisme canonique de X dans S. On note, pour tout point s de S, X_s la fibre $f^{-1}(s)$, et on suppose que pour tout s, X_s est une surface minimale de type général sur k(s). On note W^s l' ensemble des courbes de degré zéro de X_s et W la réunion des W^s.

2.3.1- Spécialisation des W^s..

Proposition 6: Soit s un point de S, et s' une spécialisation de s dans S. Alors, l' adhérence de W^s dans $X_{s'}$ est contenue dans $W^{s'}$.

<< Nous désignerons par K_y le fibré canonique de X_y. Soit C une courbe de degré zéro de X_s et $C' = \sum_{i=1}^{n} m_i C_i$ son adhérence dans $X_{s'}$. Il faut donc montrer que les C_i sont des courbes de degré zéro dans $X_{s'}$. Or d' aprés la proposition 3, on a: $(C_i.K_{s'}) \geqq 0$, et $(C.K_s) = (C'.K_{s'}) = \Sigma\, m_i\ (C_i.K_{s'}) = 0$. Puisque les m_i sont tous strictement positifs, on en déduit que pour tout i, on a $(C_i.K_{s'}) = 0$. >>

2.3.2- Diviseurs pluricanoniques relatifs engendrés par leurs sections globales.

Théorème 5. Avec les notations précédentes, et si l' on note K le fibré canonique de X, alors (m+1)K est engendré par ses sections globales si:

(i) $m \geqq 3$

(ii) $m = 2$, et pour tout s appartenant à S, $(K_s)^2 \geqq 3$, ou $(K_s)^2 = 2$, $p_g(X_s) \geqq 1$

(iii) $m = 1$, et pour tout s appartenant à S, $(K_s)^2 \geqq 5$, $p_g(X_s) \geqq 3$.

<< D' après la proposition 5, si $m \geqq 2$, on a la relation $P_m(X_s) = 1/2\ m(m-1)(K_s)^2 + \chi(O_{X_s})$. Or, puisque $(K_s)^2$ et $\chi(O_{X_s})$ ne dépendent pas de s, il en résulte que $P_m(X_s)$ est une fonction constante en s. Donc, si S est réduit, d' après le corollaire du théorème C, $R^0 f_*(mK)$ est un faisceau localement libre E sur S, et pour tout s,

l' application $E \otimes_{O_S} k(s) \longrightarrow H^o(X_s, mK_s)$ est un isomorphisme. Dès lors, pour regarder si mK est engendré par ses sections globales, on peut le faire fibre par fibre et le résultat découle du théorème 3. Si S n' est pas réduit, on remarque que d' après la démonstration du théorème 3, pour tout point fermé x de X et tout point fermé s de S, on a $H^1(X_s, O((m+1)K_s) \otimes_{O_{X_s}} I_x) = 0$, ce qui implique d' après E.G.A. III 7, que l' on a: $H^1(X, O((m+1)K) \otimes_{O_X} I_x) = 0$. On en déduit comme dans la démonstration du théorème 3 que l' on a une surjection de $H^o(X, O((m+1)K))$ dans k(x), ce qui prouve le résultat. »

2.3.3- Contraction des courbes de degré zéro.

Théorème 6. Avec les notations précédentes, l' application φ_m associée à mK est un isomorphisme en dehors de W, et pour tout s, contracte chaque composante connexe de W^s en un point si

(i) $m \geqq 5$

(ii) $m = 4$, et pour tout s appartenant à S, $(K_s)^2 \geqq 2$

(iii) $m = 3$, et pour tout s appartenant à S, $(K_s)^2 \geqq 6$ ou $(K_s)^2 \geqq 3$, $p_g(X_s) \geqq 4$.

De plus, sous ces conditions, $\varphi_m(X)$ est plat sur S.

« La première assertion du théorème découle des théorèmes 4 et 5. Enfin, $\varphi_m(X)$ est plat sur S car c' est le spectre homogène de $T = \bigoplus_{n \geqq 0} \Gamma(X, O(mK)^{\otimes n})$ qui est une O_S Algèbre plate. »

Remarque. On pourrait déduire la proposition 6 du théorème 6 au lieu de faire une démonstration directe.

BIBLIOGRAPHIE

[1] S. Abhyankar On the valuations centered in a local domain American Journal of Maths., 78, 1956, pp. 321-348.

[2] M. Artin Some numerical criteria for contractibility of curves on algebraic surfaces American Journal of Maths., 84, 1962, pp.485-496.

[3] M. Artin Onisolated rational singularities of surfaces American Journal of Maths, 88, 1966, pp. 129-136.

[4] E. Bombieri The pluricanonical map of a complex surface Springer Lecture Notes, 155, 1970, pp. 35-87.

[5] E. Bombieri Canonical models of surfaces of general type Publication I.H.E.S. 42, 1973, pp.171-219.

[6] A. Grothendieck Elèments de gèomètrie algèbrique III Publications I.H.E.S. 4, 8,11,17, 20, 24, 28, 32.

[7] K. Kodaira Pluricanonical systems on algebraic surfaces of general type Journal Math. Soc. Japan, 20, 1968, pp.170-192.

[8] T. Matsusaka,D. Mumford Two fundamental theorems on deformations of polarized varieties American Journal of Maths., 86, 1964, pp. 668-684.

[9] D. Mumford Pathologies III American Journal of Maths. 89, 1967, pp.94-104.

[10] D. Mumford The canonical ring of an algebraic surface Annals of Maths., 76, 1962, pp. 612-615.

[11] D. Mumford Lectures on curves on an algebraic surface Annals of Mathematical studies 59, Princeton.

[12] D. Mumford Abelian varieties Tata Institute of Fundamental Research Studies in Mathematics, 5, Oxford University Press.

[13] I.R. Safarevic Algebraic Surfaces Moskva, 1965