

PUBLICATIONS

MATHEMATIQUES

D'ORSAY

n° 81-02

**ENSEIGNEMENT ET RECHERCHE
MATHEMATIQUES
DANS LE MAGHREB DES XIII^e - XIV^e SIECLES**

(étude partielle)

A. DJEBBAR

Université de Paris-Sud
Département de Mathématique

Bât. 425

91405 **ORSAY** France

Code matière AMS (1980) : 01A30

PUBLICATIONS

MATHEMATIQUES

D'ORSAY

n° 81-02

35.176



ENSEIGNEMENT ET RECHERCHE

MATHEMATIQUES

DANS LE MAGHREB DES XIII^e-XIV^e SIECLES

(étude partielle)

A. DJEBBAR

Université de Paris-Sud

Département de Mathématique

Bât. 425

91405 ORSAY France

**ENSEIGNEMENT ET RECHERCHE
MATHÉMATIQUES
DANS LE MAGHREB DES XIII^e—XIV^e SIÈCLES
(étude partielle*)**

A. Djebbar

(*)- L'étude traite des équations quadratiques, du symbolisme et de la combinatoire. Son contenu a fait l'objet de deux exposés à Paris, le 18 Avril et le 6 Juin 1980, dans le cadre du séminaire d'histoire des sciences et de la philosophie arabes (E.R.A. 651) , animé par MM. J. Jolivet et R. Rashed .

Ce travail est, en grande partie, le résultat d'une mission de recherche effectuée, en Mai 1979, dans différentes bibliothèques maghrébines. Accordée par le ministère des universités français, grâce à la demande de Mlle S. Bachelard et de M. R. Rashed, cette mission a été grandement facilitée par l'accueil chaleureux et l'aide efficace des personnels des bibliothèques nationales de Tunis et d'Alger. Que toutes et tous en soient vivement remerciés.

Aux femmes et aux hommes de nos pays
qui, en ces temps de grande cécité,
par leurs refus et leurs audaces, par
leurs veilles obstinées de vigies de
haute mer, révèlent chaque jour, les
signes d'un Maghreb différent.

Table des matières

Introduction	p.1
Chapitre I : Quelques aspects de l'algèbre	p.6
I.1-Classification des équations	p.9
I.2-Résolution des équations quadratiques	p.11
Chapitre II : Symbolisme et algèbre	p.41
II.1-La symbolique du XIV ^e siècle	p.46
II.2-Exemples d'utilisation des symboles	p.50
Chapitre III : Théorie des nombres et combinatoire.	
III.1-La combinatoire avant le XIII ^e siècle	p.55
III.2-La combinatoire au Maghreb	p.67
III.3-Exemples de problèmes combinatoires	p.99
Notes et références	p.113
Index des noms d'auteurs	p.138

INTRODUCTION

D'abord en tant que marches éloignées et plus ou moins consolidées d'un empire naissant, puis comme province à part entière soumise au pouvoir central et enfin, comme villes-états, principautés ou royautes autonomes, le Maghreb a participé à toutes les phases de la civilisation arabo-musulmane et en a vécu les aspects essentiels : Conquêtes territoriales, contrôle du commerce méditerranéen et des sources africaines de l'or et des esclaves, développement d'une puissante économie marchande, diversification de l'agriculture et multiplication de centres industriels de tous genres ¹ (avec tout ce que cela a comporté comme rapports de production et d'échange ²), luttes politiques enfin, avec leurs multiples facettes idéologiques ³.

Le Maghreb ne pouvait donc rester extérieur à ces composantes particulières de l'activité économique et sociale que sont les sciences et les techniques dont le développement, à partir du IX^e siècle a été incontestable dans l'aire géopolitique musulmane.

D'autre part, on ne peut concevoir, sans tomber dans un européocentrisme que rien ne justifie, une Histoire de la Science européenne qui ne tiendrait pas compte de toutes les composantes humaines du bassin méditerranéen ou qui les réduirait à des agents accidentels d'une Histoire faite par d'autres.

Ces deux évidences ne semblent pourtant pas avoir effleuré l'esprit de certains historiens des sciences comme Montucla, Tannery, ou plus récemment Bourbaki ⁴ dont les jugements sur la Science arabe en gé-

néral et sur les mathématiques en particulier sont beaucoup plus le résultat d'un ensemble d'a priori idéologiques que d'une simple ignorance des faits historiques ⁵.

Quant à ceux qui ont évoqué la contribution des maghrébins à la science médiévale, ils l'ont fait, en général, selon des points de vues qui ne permettent pas de dégager un aperçu clair de leur activité scientifique. Dans le domaine des mathématiques, l'exemple en est fourni par Dickson pour l'Arithmétique ⁶, Neugebauer pour l'Astronomie ⁷ et Cajori pour le symbolisme ⁸. Des auteurs sont cités, des résultats brièvement exposés, sans aucune indication sur le contexte qui a permis leur production. D'autres ouvrages contiennent, il est vrai, des informations plus détaillées puisées d'ailleurs en grande partie dans les travaux de Woepcke ⁹, de Suter ¹⁰ et de Sédillot ¹¹; mais, outre leur caractère fragmentaire, elles sont parfois accompagnées d'affirmations non fondées et de jugements de valeur sur la nature de la production mathématique au Maghreb, sur son importance et sur son niveau ¹².

Ces affirmations, venant après d'autres que des spécialistes de l'Histoire du Maghreb ont longtemps érigées en postulats ¹³, ne sont pas étrangères à un certain désintérêt observé chez les chercheurs pour ce sujet. Il n'est qu'à voir la rareté des publications et des communications concernant l'activité scientifique de cette région ¹⁴. Pourtant, depuis les travaux de Woepcke sur al-Qalṣādī, de Suter sur al-Haṣṣār, de Sédillot sur al-Marrākušī et enfin de Marre et de Souissi sur Ibn al-Bannā' ¹⁵, une chose est maintenant certaine : A partir du XI^e siècle (ou peut-être bien avant), et jusqu'au XVI^e, l'activité mathématique en tant qu'enseignement, recherche et application à la résolution de problèmes concrets, n'a jamais cessé malgré les aléas de la politique intérieure et les contrecoups de l'offensive européenne inaugurée à l'Ouest de l'Empire musulman par les premières Croisades d'Occident et poursuivies par les incursions "pacifiques" des Pisans, des Vénitiens et des Génois ¹⁶. Mais, en dehors de cette certitude, que de zones d'ombre et que d'interrogations.

On peut se demander, en particulier, quelles ont été les conditions

économiques, sociales et politiques qui ont permis l'éclosion puis le développement de cette activité. Quel a été l'apport des travaux entrepris au centre de l'Empire en tant que foyer scientifique principal. Quelle a été la nature des échanges scientifiques -si échanges il y eut- entre l'Est et l'Ouest. Quelles ont été les préoccupations des maghrébins dans le domaine de l'enseignement et de la recherche et quelle y a été leur contribution. Quelles ont été, enfin, les causes internes et externes qui ont provoqué ou favorisé le processus de crise qui n'épargnera pas l'activité scientifique et que déjà, en 1377, Ibn Khaldūn présentait comme la caractéristique de son siècle ¹⁷.

Ces questions et d'autres, plus spécifiques, doivent être posées (si elles ne l'ont déjà été). Des réponses doivent être cherchées et des hypothèses formulées si l'on souhaite appréhender, un jour, l'Histoire du Maghreb dans sa globalité, afin de "saisir, dans leurs plus larges écarts tous les temps divers du passé, d'en suggérer la coexistence, les interférences, les contradictions, la multiple épaisseur", comme le dit Fernand Braudel ¹⁸.

Il va sans dire que, dans l'état actuel des recherches, il est impossible de répondre à ces questions qui relèvent pour la plupart de la Sociologie de la Science et qui nécessiteraient des investigations de longue haleine dans des domaines aussi différents que ceux de l'Histoire, du Droit, de la Linguistique de l'Astrologie, de la Physique et des Mathématiques.

Pour ne se limiter qu'à cette dernière discipline, on constate que les analyses et les études comparatives systématiques des nombreux traités maghrébins ou andalous existants font cruellement défaut. Or, sans elles, il est non seulement illusoire de vouloir déceler l'évolution des idées et les mutations internes qu'a connues l'activité mathématique, mais il est même impossible de se faire une idée exacte de ce qui a été produit et de ce qui a subsisté dans l'enseignement.

Tout en se situant dans cette perspective de travail, le présent exposé ne prétend pas présenter l'étude de toute une branche ou de toute une école. Nous nous sommes contentés, à travers des exemples

empruntés à l'Algèbre et à l'Arithmétique, de fournir quelques éléments nouveaux, tirés de manuscrits inédits, qui aideront peut-être à mieux apprécier l'état de l'enseignement et de la recherche mathématiques dans le Maghreb des XIII^e-XIV^e siècles.

L'importance de cette période pour l'Histoire politique et économique du Maghreb a été déjà soulignée : Main-mise européenne sur toute la Méditerranée occidentale et contrôle accru du commerce maghrébin par les Pisans et les Gênois, dislocation de l'empire almohade et processus de différenciation régionale. Son importance est encore plus grande dans le domaine culturel où l'on entrevoit les éléments essentiels qui vont désormais caractériser la vie sociale et l'activité intellectuelle ¹⁹ : Retour en force de l'orthodoxie malékite, radicalisée sur le plan des moeurs et des comportements individuels par l'expérience almohade déjà plus que séculaire, renouveau du courant mystique qui s'appuie désormais sur des bases populaires de plus en plus larges, réactivation des sciences occultes.

Dans le domaine des sciences et en particulier des mathématiques, elle constitue l'aboutissement d'une longue activité qui a débuté au centre de l'Empire dès le VIII^e siècle et qui a été assumée, à l'Ouest, à partir du X^e siècle, par l'importante école de Cordoue et poursuivie, avec une intensité variable selon les époques et les lieux, par des villes comme Séville et Tolède en Espagne, Fès et Marrakech dans le Maghreb extrême, Bougie et Tlemcen dans le Maghreb central, enfin Kairouan et Tunis en Ifriqya.

Mais c'est également l'époque où se manifeste puis se confirme un ralentissement de certaines activités scientifiques au profit, semble-t-il, d'un développement des études juridiques. Parallèlement, et en liaison avec ce phénomène, on voit se mettre en place de nouvelles méthodes d'enseignement qui, malgré certaines résistances, finiront par s'imposer. Ces méthodes n'épargneront pas les mathématiques favorisant ainsi un appauvrissement des programmes d'enseignement et une sclérose de la recherche dans beaucoup de domaines surtout à partir de la seconde moitié du XIV^e siècle ²⁰.

Des chapitres entiers comme l'extraction des racines d'ordre supé-

rieur à trois ou l'étude plus approfondie des nombres premiers voient leur enseignement réduit et parfois abandonné par certains professeurs²¹. Une théorie importante comme celle de la résolution géométrique des équations cubiques semble ignorée par les mathématiciens maghrébins ou connue seulement par ouïe-dire²².

Parallèlement, on observe une floraison de commentaires ou de résumés d'ouvrages classiques, souvent sans originalité dans le contenu et dans l'exposé²³.

Mais cela ne concerne pas encore le XIII^e siècle au cours duquel l'activité mathématique paraît garder une certaine vitalité ; et pendant longtemps, grâce à sa spécificité, à son statut ou peut-être à une forte tradition d'enseignement, ce secteur résistera au processus de crise.

* * * * *

I. QUELQUES ASPECTS DE L'ALGÈBRE

Grâce à une série d'études et d'éditions comme celles de Rosen²⁴, de Woepcke²⁵ et de Hochheim²⁶ au XIX^e siècle, de Suter²⁷ et de Karpinski²⁸ au début du vingtième et, à partir des années soixante celles de Juschkewitsch²⁹, de R. Rashed³⁰ et de A. Anbouba³¹, on a une idée plus nette de l'évolution de l'Algèbre depuis le traité d'al-Khawārizmī³², date de naissance d'une discipline nouvelle qui ne cessera dès lors d'étendre son champ d'action et de renforcer son autonomie vis-à-vis des autres branches des mathématiques classiques.

On assiste en effet, avec les travaux d'Abū-Kāmil³³ et de son école à une extension du domaine de l'algèbre par l'utilisation systématique de nombres réels positifs, comme coefficients et racines dans la résolution des équations du second degré et par l'application, aux inconnues et aux monômes de degré quelconque qui en découlent, de toutes les opérations arithmétiques appliquées auparavant aux nombres rationnels. Cela devait ouvrir la voie à l'élaboration de l'algèbre des polynômes qui sera l'oeuvre des successeurs d'Abū-Kāmil, en particulier al-Karajī³⁴ et plus tard as-Samaw'al³⁵.

Munis, dès le début du XI^e siècle, de ces instruments nouveaux, les mathématiciens vont pouvoir orienter leurs recherches dans plusieurs directions : Théorie des nombres et analyse indéterminée par al-Karajī et son école, théorie des équations cubiques par al-Khayyām³⁶ et Šaraf ad-dīn aṭ-Ṭūsī, théorie de l'approximation par al-Khayyām et surtout as-Samaw'al et aṭ-Ṭūsī³⁷.

On sait aussi que l'un des mérites de ces mathématiciens a été de dégager l'algèbre de l'emprise de la géométrie qui a constitué, à

un certain moment, un frein à l'extension des opérations algébriques. Commencée par Abū Kāmil qui ne tenait plus compte de l'homogénéité dans la représentation des différentes grandeurs géométriques, cette entreprise, même si elle allait se heurter à la résistance de la tradition, devait permettre à al-Karajī -grâce, en particulier, à une relecture du Livre II des Eléments d'Euclide³⁸ - d'introduire, dans le chapitre des équations et en complément à des démonstrations géométriques déjà classiques, d'autres de nature algébrique. Cet effort sera poursuivi, dans un autre domaine, par Š. aṭ-Ṭūsī qui, en raisonnant sur les expressions algébriques des courbes, abstraction faite de leurs représentations géométriques, inaugurerà les premiers pas d'une discipline qui portera, beaucoup plus tard en Europe, le nom de géométrie algébrique.

Les questions qui ne manquent pas alors de venir à l'esprit sont les suivantes : Quel a été le sort de ces travaux en Occident musulman et plus particulièrement au Maghreb ? Ont-ils fait l'objet d'un enseignement ? Ont-ils favorisé de nouvelles recherches³⁹ ?

Parmi les voies ouvertes à l'algèbre après al-Khawarizmī, celle que suivra Abū-Kāmil et après lui al-Karajī fera le plus école en Espagne et au Maghreb. C'est du moins ce qui ressort des informations fournies par les biographes ou par les mathématiciens eux-mêmes : L'algébriste andalou du XIII^e siècle Ibn Badr se réfère explicitement au livre d'Abū-Kāmil, à l'occasion de la résolution d'un problème aboutissant à une équation du second degré⁴⁰. Par ailleurs dans le chapitre d'application, de nombreux problèmes sont équivalents à ceux traités par Abū-Kāmil et parfois identiques. D'autres aussi nombreux, s'apparentent aux problèmes indéterminés du livre al-Fakhrī d'al-Karajī⁴¹.

Après Ibn al-Bannā', les travaux d'al-Khawārizmī et d'Abū-Kāmil continueront à être étudiés au Maghreb, comme le laisse entendre Ibn Haydūr dans son Tuḥfat aṭ-Ṭullāb⁴². Nous pouvons même supposer, après une comparaison entre différents ouvrages, que le contenu de certains travaux de l'école d'al-Karajī -si ce n'est des siens propres- étaient connus des mathématiciens andalous ou maghrébins.

Ibn Khaldūn quant à lui rapporte dans sa Muqaddima que de "nombreux

auteurs andalous avaient donné de bons commentaires" du livre d'al-gèbre d'Abū Kāmil, en précisant que "l'un des meilleurs est celui d'al-Qurašī"⁴³. Ce commentaire n'a pas encore été retrouvé mais, si l'on en croit certaines sources⁴⁴, le Kitāb al-Jabr d'Ibn al-Bannā', son élève, en serait une adaptation autorisée par le professeur qui enseignait à Bougie, vraisemblablement dans la seconde moitié du XIII^e siècle⁴⁵. En tout cas, le contenu de l'ouvrage ne laisse aucun doute quant à sa filiation.

Cela dit, les mathématiciens de cette région ne se sont pas contentés de commenter les travaux qui leurs sont parvenus, pour les mettre à la portée de leurs étudiants ou de certains utilisateurs comme les comptables, les architectes et les juristes. Leurs réflexions sur la nature des opérations qui constituaient alors l'algèbre et leur utilisation intensive de ces opérations ont abouti à des résultats non négligeables parmi lesquels on peut citer : L'affranchissement total de l'algèbre de toute représentation géométrique avec l'apparition de nouvelles démonstrations pour des problèmes classiques, l'extension des opérations de l'algèbre au zéro qui est manipulé désormais comme n'importe quel nombre réel⁴⁶, l'intervention plus systématique de cette même discipline en géométrie par le biais des équations et enfin l'élaboration d'un symbolisme mathématique relativement perfectionné. Cet instrument nouveau sera, non seulement un moyen de représentation et donc un moyen d'expression beaucoup plus concis et plus économique que le langage traditionnel mais, l'enseignement aidant, il deviendra un instrument de résolution rapide pour les problèmes d'algèbre et pour les opérations du calcul en général.

Nous allons à présent aborder, à titre d'exemples, certains aspects de cette algèbre.

* * * * *

1.1. Classification des équations

Au début de son traité⁴⁷, al-Khawārizmī donne, pour les six équations canoniques, la classification suivante :

$$A_2 \left\{ \begin{array}{l} \text{(I)} \quad ax^2 = bx \\ \text{(II)} \quad ax^2 = c \\ \text{(III)} \quad bx = c \end{array} \right. \quad A_3 \left\{ \begin{array}{l} \text{(IV)} \quad ax^2 + bx = c \\ \text{(V)} \quad ax^2 + c = bx \\ \text{(VI)} \quad bx + c = ax^2 \end{array} \right.$$

On remarque que l'énumération suit exactement deux relations d'ordre : La première permet de grouper les équations suivant le nombre de monômes de chacune d'elles, d'où les deux sous-ensembles A_2 et A_3 dont les équations sont respectivement à deux et trois éléments. La seconde ordonne les équations de chaque sous-ensemble selon l'ordre décroissant des degrés intervenant dans leurs premiers membres. Les six équations seront ensuite résolues dans cet ordre.

Tous les successeurs d'al-Khawārizmī adopteront la première relation d'ordre qui sera étendue par al-Khayyām⁴⁸ et par Š. at-Tūsī⁴⁹ aux vingt cinq équations cubiques.

Cela n'est pas le cas pour la seconde : Que ce soit dans l'énumération ou dans la résolution, on note des permutations dans l'ordre des équations qui ne peuvent s'expliquer que par des préoccupations, des orientations et une pratique nouvelles chez les mathématiciens postérieurs à Abū Kāmil. C'est ainsi que le groupe A_2 subit chez al-Missīsī⁵⁰, al-Bīrūnī⁵¹, al-Khayyām et Š. at-Tūsī, une permutation qui donne :

$$A_2' \left\{ \begin{array}{l} \text{(I)} \quad bx = c \\ \text{(II)} \quad ax^2 = c \\ \text{(III)} \quad ax^2 = bx \end{array} \right.$$

Une seconde et dernière permutation aboutit chez al-Karajī⁵² et as-Samaw'al⁵³ à :

$$A_2'' \left\{ \begin{array}{l} \text{(I)} \quad bx = c \\ \text{(II)} \quad ax^2 = bx \\ \text{(III)} \quad ax^2 = c \end{array} \right.$$

C'est ainsi qu'on la retrouvera chez al-Kāšī⁵⁴ et chez al-Āmilī⁵⁵. En Occident, et jusqu'au XIII^e siècle, la tradition semble avoir été plus forte : Malgré la maîtrise de toutes les opérations de l'algèbre et la manipulation courante des polynômes et des équations associées, on retrouve la classification inchangée. C'est le cas, par exemple chez Ibn Badr⁵⁶ et chez Ibn al-Yāsamin⁵⁷.

Mais al-Qurašī, dans son commentaire du livre d'Abū Kāmil, adopte l'ordre A_2 ⁵⁸ ; et Ibn al-Bannā', tout en respectant la présentation traditionnelle, résout les équations dans l'ordre A_2'' , c'est-à-dire celui adopté par as-Samaw'al, avec une formulation qui ramène, en fait, les trois équations à une seule : $bx = c$, (suivie, dans (III), d'une extraction de racine carrée).

L'argument qui justifie ces permutations est partout le même : Dans A_2'' on passe de (I) à (II) par division par x , et de (I) à (III) par changement de variable : $x \longrightarrow X = x^2$.

Quant aux trois autres équations canoniques, la plupart des mathématiciens du centre de l'Empire s'en tiendront à l'exposé et à l'ordre de résolution A_3 d'al-Khawārizmī.

Šaraf ad-Dīn aṭ-Ṭūsī constitue pourtant une exception : Sa résolution suit l'ordre suivant :

$$A_3' \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{(IV)} \quad ax^2 + bx = c \\ \text{(V)} \quad bx + c = ax^2 \\ \text{(VI)} \quad ax^2 + c = bx \end{array} \right.$$

qui s'explique par une démarche nouvelle à caractère plus analytique qu'algébrique. En introduisant la transformation affine :

$$x \longrightarrow X = x - b/a$$

l'équation (V) se ramène à :

$$aX^2 + bX = c$$

qui est du type (IV).

Comme cela a été montré ailleurs⁵⁹, cette démarche d'aṭ-ṭūsī est systématique dans son traitement des équations cubiques.

A l'Ouest, Ibn al-Bannā' aboutira au même résultat, mais par une voie différente : Tout en gardant, au niveau de la présentation l'ordre consacré par la tradition, il résoudra les équations dans l'ordre A_3 , après avoir dégagé les opérations algébriques communes aux trois équations trinômes⁶⁰. Il sera suivi dans cette voie par bon nombre de ses commentateurs maghrébins comme Ibn Haydūr⁶¹, al-Qalṣādī⁶² et Ibn Ghāzī⁶³.

Si nous avons éprouvé le besoin de dégager ces classifications c'est moins pour elles-mêmes que pour ce qu'elles révèlent comme jalons dans l'enseignement de l'algèbre au Maghreb : Vulgarisation de l'algèbre des polynômes qui devient un chapitre essentiel de l'enseignement mathématique, manipulation courante des nombres réels algébriques, grâce en particulier au symbolisme des radicaux et des fractions, dépouillement des démonstrations des dernières séquelles géométriques.

Tous ces éléments vont favoriser l'élaboration de démonstrations algébriques nouvelles comme celles que nous allons maintenant aborder.

1.2. Résolution des équations quadratiques

Pour permettre une appréciation plus concrète de l'état de l'algèbre au Maghreb, à l'époque considérée, nous avons jugé utile de suivre sur un exemple -la résolution de l'équation (V)- certains progrès déjà faits dans ce domaine par différents auteurs qui se sont succédé du IX^e au XIII^e siècle dans les autres régions.

1.2.a. Preuve d'al-Khawārizmī⁶⁴

On considère l'équation :

$$x^2 + c = bx$$

Soit (AD) un carré de côté inconnu x (fig.1, p.38), (ED) le rectangle de côtés EN, CE vérifiant :

$$EN = x \quad ; \quad CE = b$$

Soit H le milieu de CE et I sur DN tel que :

$$HI = CD$$

Soit K sur le prolongement de HI tel que :

$$HK = CH - HI$$

[Soit M sur le prolongement de EN tel que :

$$ME = HK]$$

On a : $IK = KM$

et (MI) est un carré. Mais : $IK = b/2$. Donc : $(IM) = (b/2)^2$

Par construction , on a :

$$(EB) = c \quad \text{et} \quad (EB) - (IE) = (IA)$$

Soit L sur KM tel que :

$$KL = HK$$

[et $LG \parallel ME$; G sur HE]

donc :

$$IH = ML \quad \text{et} \quad (MG) = (IA)$$

donc :

$$(EI) + (MG) = (EB) = c$$

mais,

$$(MI) = (b/2)^2$$

donc :

$$(GK) = (MI) - [(EI) + (MG)] = (MI) - c$$

donc :

$$HA = GH = \sqrt{(b/2)^2 - c}$$

donc :

$$x = AC = CH - HA = (b/2) - \sqrt{(b/2)^2 - c}$$

La seconde solution est :

$$GC = CH + HA = (b/2) + \sqrt{(b/2)^2 - c}$$



REMARQUES :

(1)- L'auteur suppose implicitement que : $(b/2) > x$. L'analyse géométrique aboutira donc nécessairement à la petite solution ; ce qui exige une seconde démonstration pour le cas : $(b/2) < x$, et une troisième pour le cas : $(b/2) = x$ (qui correspond à $c = (b/2)^2$). Ces deux démonstrations ne sont pas données, mais seulement les résultats correspondants.

(2)- Le carré de la solution que les algébristes arabes ont toujours mentionné s'obtient, chez al-Khawārizmī par le calcul de :

$$\left[(b/2) \pm (b/2)^2 - c \right]^2$$

l.2.b. Preuves d'Abū Kāmil⁶⁵Première méthode donnant la racine.

Soit :

$$(ABCD) = x^2 \quad \text{et} \quad (ABEL) = c$$

1° Cas : Supposons : $x^2 < c$, (fig.2).

Alors :

$$(ABEL) > (ABCD)$$

d'où :

$$BL > BD$$

on a :

$$(ED) = bx$$

donc :

$$LD = b \quad \text{et} \quad (EB) = c = LB.BD$$

Soit H, milieu de LD.

Alors, d'après Euclide Livre II [proposition 5] (E.II;5), on a :

$$LB.BD + HB^2 = HD^2$$

mais,

$$HD^2 = (b/2)^2 \quad \text{et} \quad LB.BD = c$$

donc :

$$HB^2 = (b/2)^2 - c \quad \text{et} \quad HB = \sqrt{(b/2)^2 - c}$$

d'où :

$$x = BD = HD - HB = (b/2) - \sqrt{(b/2)^2 - c}$$

et

$$x^2 = \left[(b/2) - \sqrt{(b/2)^2 - c} \right]^2$$

2° Cas : Supposons : $x^2 > (b/2)^2 > c$ (fig.3).

Soit

$$x^2 = (ABCD) \quad \text{et} \quad (ABLE) = c$$

alors,

$$(AD) > (BE)$$

d'où :

$$BD > BL$$

et, en suivant une démarche absolument identique à celle du 1° cas, il aboutit aux valeurs de HB^2 et de HD , avec cette fois :

$$x = BD = HD + HB \quad \text{et} \quad x^2 = BD^2.$$

Deuxième méthode donnant la racine

1° Cas : $x^2 < c$

Soit (KHDN) le carré de côté HD , (fig.2) :

$$(KD) = HD^2$$

on a :

$$(HC) = (HE) \quad \text{car} \quad LH = HD$$

et

$$(AH) = (AN)$$

donc

$$(AH) + (AD) + (AN) = (EB) = LB \cdot BD = c$$

donc

$$(KA) = (KD) - (EB) = (b/2)^2 - c$$

et KA est un carré car :

$$KN = KH \quad \text{et} \quad HS = NM$$

d'où :

$$KM = KS = \sqrt{(b/2)^2 - c} = HB$$

d'où :

$$x = BD = (b/2) - \sqrt{(b/2)^2 - c} \quad \text{et} \quad x^2 = BD^2.$$

$$\underline{2^\circ \text{ Cas}} : x^2 > (b/2)^2 > c$$

Soit (LHNM) le carré de côté LH, (fig.3).

On prolonge HN jusqu'au point K sur CE.

Puis, par un raisonnement analogue au précédent, il aboutit à :

$$x = BD = BH + HD$$

Méthode donnant le carré de la racine :

$$1^\circ \text{ Cas} : x^2 < c$$

Soit : $AB = x^2$ et $AC = bx$, (fig.4) $[\Rightarrow BC = c]$

Soit : (ACED) un carré [de côté AC]

donc :

$$(ACED) = b^2 \cdot AB$$

Soit : (AH) un rectangle [de côtés AM et AB] et tel que :

$$(AH) = (ACED) = b^2 \cdot AB$$

[On complète le rectangle (ACNM)]

on a :

$$AM = CN = b^2$$

Soit F sur NC tel que (FM) soit un carré. Comme $BC = c$, on a :

$$(BN) = (AF) = CF \cdot FN$$

Posons :

$$(BN) = cb^2$$

Soit L milieu de CN. Alors :

$$CF \cdot FN + LF^2 = LC^2 \quad (\text{Euclide II;5})$$

comme :

$$LC^2 = [(b^2)/2]^2$$

on en déduit :

$$LF^2 = [(b^2)/2]^2 - cb^2 \quad \text{et} \quad LF = \sqrt{(b^2)/2^2 - cb^2}$$

mais

$$LN = b^2/2$$

d'où :

$$FN = LN - LF = (b^2/2) - LF \quad (1)$$

comme : $CB = c$, on a :

$$AB = (b^2/2) - c - \sqrt{(b^2/2) - cb^2}$$

2° Cas : $x^2 > c$ (fig.5).

La démonstration donnée par l'auteur est identique à la précédente, à ceci près que dans ce cas de figure la relation (1) devient :

$$FN = LN + LF$$

Méthode donnant la racine dans le cas : $c = (b/2)^2$.

Exemple :

$$x^2 + 25 = 10x$$

Soit $(ABCD) = x^2$ et $(ABEF) = 25$ (fig.6).

Alors :

$$(CF) = 10x$$

donc

$$DF = 10$$

soit H milieu de DF. Alors, on a trois possibilités :

(1) H à gauche de B; (2) H à droite de B; (3) H sur B.

(1) H à gauche de B :

Alors d'après Euclide[II;2]:

$$DB.BF + HB^2 = HF^2$$

mais

$$FH^2 = 25 = BF.BD \quad [\text{par construction}]$$

donc :

$$BH^2 = 0 \quad \text{et} \quad BH = 0$$

donc H est sur B.

(2) H est à droite de B :

L'auteur aboutit par la même démarche au résultat : H sur B.

(3) H est sur B :

Alors : $x = DB = 5$

REMARQUES :

(1)-Pour $c < (b/2)^2$, Abu Kāmil démontre l'existence des deux solutions en traitant séparément les cas : $x < b/2$ et $x > b/2$. Pour chacun de ces cas, il fournit deux démonstrations, l'une semblable à celle d'al-Khawārizmi, mais plus complète, et l'autre qui s'en distingue nettement par l'utilisation explicite de la proposition 5 du Livre II des Eléments.

Pour $c = (b/2)^2$, il donne une démonstration par l'absurde de l'existence de la solution $x = b/2$.

(2)-Une démonstration différente est donnée pour le calcul de x^2 directement. Son intérêt réside dans le fait que la représentation traditionnelle de x^2 comme surface disparaît. Il est représenté désormais par un segment comme les inconnues et les coefficients. Cette démarche n'est pas particulière à cette équation, on la retrouve dans la résolution de (IV) et (VI). Elle est encore plus nette dans son livre sur le pentagone et le décagone⁶⁶.

1.2.C. Preuves d'al-Karajī⁶⁷

On considère l'équation :

$$ax^2 + c = bx$$

[On note, pour simplifier l'écriture : $(b/2)^2 - ac = d$].

Premier cas : $a = 1$

Si $c < (b/2)^2$, le problème est impossible.

Si $c = (b/2)^2$, $x = b/2$

Si $c > (b/2)^2$, on a deux solutions :

$$x_1 = (b/2) + \sqrt{d} \quad \text{et} \quad x_2 = (b/2) - \sqrt{d}$$

Soit : $AD = b$ et $CD = x$ (fig.7).

d'où :

$$AD \cdot CD = bx$$

mais,

$$CD^2 = x^2$$

donc :

$$AC \cdot CD = c$$

Soit: B milieu de AD. Donc AD est partagé en C [en deux parties inégales]; donc :

$$AC \cdot CD + BC^2 = BD^2 \quad [E.II;5]$$

mais,

$$BD^2 = (b/2)^2$$

donc :

$$AC \cdot CD = c$$

donc :

$$BD^2 - AC \cdot CD = BC^2 = (b/2)^2 - c = d$$

donc :

$$AC = BD + BC = (b/2) + \sqrt{d}$$

ou bien :

$$AC = BD - BC = (b/2) - \sqrt{d}$$

Deuxième cas : $a > 1$

Alors :

$$x = [(b/2) \pm \sqrt{d}] / a$$

En effet, soit :

$$AE = b \quad \text{et} \quad AC = ax \quad (\text{fig.8})$$

soit :

$$AS \perp AE \quad ; \quad AS = x \quad \text{et} \quad AG = AC$$

on a :

$$AE \cdot AS = bx$$

mais :

$$AS.AC = ax^2$$

donc :

$$CK = c \quad \text{et} \quad CI = ac = EC.CA = EC.AG$$

Soit D milieu de AE ; donc :

$$AD^2 = (b/2)^2$$

d'où :

$$AD^2 - ac = AD^2 - CE.CA = CD^2 \quad [II;5]$$

donc :

$$CD = \sqrt{d}$$

mais,

$$AD = b/2$$

donc :

$$AC = (b/2) - \sqrt{d} = ax$$

d'où x .

Troisième cas: $a < 1$

La démarche est identique et repose sur E.II;5.

Recherche de x^2 :

On a :

$$x^2 = (b^2/2) \pm \sqrt{(b^2/2) - b^2c}$$

La démonstration est identique à celle d'Abū Kāmil ; mais il ne traite que le cas : $x < b/2$.

Méthode diophantienne :

On cherche x sous la forme :

$$x = (b/2) \pm X$$

d'où :

$$x^2 = (b/2)^2 + X^2 - bX = (b/2)^2 - c$$

donc :

$$(b/2) - x = \sqrt{d} \quad \text{ou} \quad x - (b/2) = \sqrt{d}$$

REMARQUES :

(1)- Dans les preuves des trois premiers cas, al-Karajī reprend les démarches d'Abū Kāmil basées sur la cinquième proposition du Livre II des Eléments, mais l'aspect géométrique n'est déjà plus, pour son raisonnement, qu'un simple support (en particulier dans le premier cas). Un autre indice de cette algébrisation progressive est l'absence d'étude systématique de tous les cas de figures.

(2)- Par rapport aux autres preuves, la dernière est de nature différente. Elle est inspirée par une lecture algébrique de l'Arithmétique de Diophante et permet d'éviter complètement le langage géométrique. On la retrouve dans la résolution des autres équations.

l.2.d. Preuves d'as-Samaw'al⁶⁸

Après avoir donné, comme al-Karajī, la condition d'existence des solutions et leurs expressions, il donne les démonstrations suivantes que nous continuons de transcrire avec des coefficients quelconques.

Recherche des racines :

On considère l'équation :

$$ax^2 + c = bx$$

Première méthode :

Soit :

$$(ABCD) = ax^2 \quad \text{et} \quad BD = x \quad (\text{fig.9}).$$

$$\Rightarrow AB = ax$$

Soit :

$$(ACEG) = c \quad ; \quad \text{d'où} : (ED) = bx$$

mais,

$$BD = x$$

d'où :

$$EB = b$$

Soit H sur BE tel que : $BH = x$.

Soit I sur BE tel que :

$$\frac{BH}{HA} = \frac{BI}{IE}$$

d'où :

$$IB = b/a$$

comme :

$$\frac{(ED)}{(DI)} = \frac{BE}{BI} = \frac{AB}{BH} = \frac{(AD)}{(DH)}$$

$$\frac{(EC)}{(IK)} = \frac{(AD)}{(DH)} = \frac{AB}{BH}$$

$$(EC) = a \cdot (IK)$$

mais,

$$(EC) = c$$

donc :

$$(IK) = c/a$$

et :

$$(IK) = IH \cdot HB$$

d'où :

$$IH \cdot HB = c/a$$

On est donc ramené à diviser b/a en deux parties : X et Y tels que

$$\begin{cases} X + Y = b/a \\ XY = c/a \end{cases}$$

On obtient :

$$X = \frac{X+Y}{2} + \sqrt{\left(\frac{X+Y}{2}\right)^2 - XY}$$

$$Y = \frac{X+Y}{2} - \sqrt{\left(\frac{X+Y}{2}\right)^2 - XY}$$

d'où le résultat d'après II;5 des Eléments⁶⁹.

Deuxième méthode :

Soit :

$$BL = AB = ax$$

et LMNS // AB.

On a :

$$\frac{(EL)}{(ED)} = \frac{BL}{BD}$$

mais : $BL = a \cdot BD$

donc :

$$(EL) = a \cdot (ED) \quad \text{et} \quad (EC) = c$$

d'où :

$$(EM) = ac$$

et

$$(EM) = EA \cdot AB = XY$$

Cela revient donc à trouver X et Y tels que :

$$\begin{cases} X + Y = b \\ XY = ac \end{cases}$$

On obtient :

$$X = (b/2) + \sqrt{d} \quad ; \quad Y = (b/2) - \sqrt{d}$$

d'où les solutions :

$$x = X/a \quad ; \quad y = Y/a$$

Recherche de x^2 :

Soit :

$$x^2 = AB \quad ; \quad BC = c \quad (\text{fig.10}).$$

$$\Rightarrow AC = b$$

Soit (AD) le carré de côté AC :

$$\Rightarrow (AD) = b^2 x^2$$

Soit : $(AE) = (AD)$. On complète le rectangle (AG) .

On a :

$$BE = b^2 \quad \text{et} \quad (BG) = cb^2$$

Soit H sur CG tel que :

$$GH = CA = bx$$

et $HKI \perp AF$, avec K sur BE et I sur AF .

Alors :

$$(IG) = b^2 x^2 = (AE)$$

donc :

$$(KG) = (IG) - (IE) = (AE) - (IE) = (AK)$$

$$(AK) + (BH) = (KG) + (BH)$$

$$(AH) = (BG)$$

$$(AH) = cb^2$$

mais,

$$(AH) = AC \cdot CH = HG \cdot CH$$

Donc cela revient à partager CG qui est b^2 en deux parties [X et Y] tels que :

$$\begin{cases} X + Y = b^2 \\ XY = cb^2 \end{cases}$$

D'où :

$$X = HG = \frac{CG}{2} - \sqrt{\left(\frac{CG}{2}\right)^2 - HG \cdot CH}$$

et

$$x^2 = AB = AC - BC = HG - BC = (b^2/2) - \sqrt{(b^2/2)^2 - cb^2} - c$$

On a aussi :

$$Y = CH = \frac{CG}{2} + \sqrt{\left(\frac{CG}{2}\right)^2 - HG \cdot CH}$$

Donc, si on substitue CH à HG ⁷⁰, on a :

$$CH = AC \quad \text{et} \quad BC = c$$

d'où :

$$x^2 = AB = AC - BC = HC - BC = (b^2/2) - \sqrt{(b^2/2)^2 - cb^2} - c$$

REMARQUES :

As-Samaw'al adopte la démarche globale d'Abū Kāmil : Exposé des algorithmes donnant x et x^2 , puis justification géométrique sur des exemples numériques qui n'altèrent pas la généralité de la démonstration. Mais il se distingue de lui sur plusieurs points :

(1)- Pour $a=1$ et $a \neq 1$, il fournit des démonstrations distinctes de l'existence des solutions ; et, dans les deux cas, il ne fait plus la distinction préalable entre $x < b/2$ et $x > b/2$, et obtient ses deux solutions simultanément.

(2)- Dans la démonstration de l'existence du carré de la racine, les x^2 sont, comme chez Abū Kāmil, représentés par des segments mais l'allusion aux unités de mesure disparaît complètement.

(3)- Comme chez Abū Kāmil, les démonstrations reposent sur E.II;5 (pour la V) et E.II;6 (pour la IV et la VI) ; mais un point de vue nouveau apparaît ici introduisant, malgré la diversité apparente des démonstrations géométriques, une certaine unité algébrique: les six problèmes traités (recherche de x puis de x^2 dans IV, V et VI) se ramènent à l'une des deux équations diophantiennes :

$$\begin{cases} X - Y = b \\ XY = c \end{cases}$$

pour IV et VI et :

$$\begin{cases} X + Y = b \\ XY = c \end{cases}$$

pour V.

C'est là encore le résultat d'une lecture algébrique de l'Arithmétique de Diophante.

(4)- Dans les trois équations, le raisonnement d'as-Samaw'al aboutit explicitement à la recherche de deux nombres réels positifs

ce qui permet, dans l'équation V où les deux nombres sont les deux solutions, d'exhiber les relations entre coefficients et racines d'une équation quadratique.

Dans les équations IV et VI, les couples de nombres correspondent, au signe près, aux racines de chacune d'elles. En effet, dans IV :

$$\begin{cases} X - Y = b \\ XY = c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} Y + (-X) = -b \\ Y \cdot (-X) = -c \end{cases}$$

et $-X$ est la solution négative. Dans VI :

$$\begin{cases} X - Y = b \\ XY = c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} X + (-Y) = b \\ X \cdot (-Y) = -c \end{cases}$$

et $-Y$ est, ici, la solution négative⁷¹.

Mais, du fait de la non-reconnaissance des nombres négatifs comme nombres réels, il n'a pas été possible peut-être, à as-Samaw'al, de trouver une signification à certains de ces nombres qui devaient rester, pour ainsi dire, parasites. C'est du moins ce que laisse supposer son silence.

l.2.e. Preuves d'Ibn al-Bannā'

Proposition :

Si a et b sont deux nombres positifs et $a > b$, on a⁷² :

$$ab = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a-b}{2}\right)^2 \quad (1)$$

ou :

$$ab + \left(\frac{a-b}{2}\right)^2 = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \quad (2)$$

ou :

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - ab = \left(\frac{a-b}{2}\right)^2 = \left[a - \left(\frac{a+b}{2}\right)\right]^2 \quad (3)$$

et ces trois identités sont équivalentes.

Preuve :

Elle découle du produit par décomposition :
a et b étant donnés, quelconques et $a > b$, on a :

$$\frac{a+b}{2} = b + \frac{a-b}{2}$$

alors :

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 = \left(\frac{a+b}{2}\right)b + \left(\frac{a-b}{2}\right)^2 + \left(\frac{a-b}{2}\right)b$$

mais,

$$a = \frac{a+b}{2} + \frac{a-b}{2}$$

d'où :

$$ab = \frac{a+b}{2} b + \frac{a-b}{2} b$$

d'où :

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - ab = \left(\frac{a-b}{2}\right)^2$$

Corollaire 1. :

Si c est partagé en deux parties inégales et en deux moitiés, on a,
[en écrivant : $c = u+v$; $u > v$ et $c = \frac{c}{2} + \frac{c}{2}$],

$$uv + \left[u - \frac{c}{2}\right]^2 = \left(\frac{c}{2}\right)^2$$

car il suffit d'appliquer (2) avec $u = a$ et $v = b$.

Corollaire 2. :

Si c est partagé en deux moitiés et augmenté d'une quantité d, alors on a :

$$(c+d)d + \left(\frac{c}{2}\right)^2 = \left(\frac{c}{2} + d\right)^2$$

car il suffit d'appliquer (2) avec : $a = c+d$, $b = d$ et $a-b = c$.

Application : Existence et calcul des solutions des trois équations canoniques (IV, V, VI).

(I)- Calcul des racines :

1° Cas : $a = 1$

1- Résolution de IV : $x^2 + bx = c$.

a)-Première méthode⁷³ :

On utilise l'identité (1) : $uv = \left(\frac{u+v}{2}\right)^2 - \left(\frac{u-v}{2}\right)^2$

avec : $u = c$ et $v = x^2$

d'où :

$$cx^2 = \left(\frac{c+x^2}{2}\right)^2 - \left(\frac{c-x^2}{2}\right)^2$$

mais : $c-x^2 = bx$ par hypothèse. Donc :

$$cx^2 + \left(\frac{bx}{2}\right)^2 = \left(\frac{c+x^2}{2}\right)^2$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \left[\sqrt{c+(b/2)^2} \right] \cdot x &= \frac{c+x^2}{2} = \frac{(x^2+bx)+x^2}{2} \\ &= x^2 + \frac{bx}{2} \end{aligned} \quad (4)$$

$$\Rightarrow \left[\sqrt{c+(b/2)^2} - b/2 \right] x = x^2$$

et on aboutit à une équation de type (I).

On peut également ajouter $(bx/2)$ aux deux membres de (4) :

$$\begin{aligned} \left[\sqrt{c+(b/2)^2} \right] \cdot x + \frac{b}{2}x &= \frac{c+x^2}{2} + \frac{bx}{2} \\ &= \frac{c+(x^2+bx)}{2} = c \end{aligned}$$

d'où :

$$\left[\sqrt{c+(b/2)^2} + \frac{b}{2} \right] \cdot x = c$$

et on aboutit à une équation de type (III).

b)- Deuxième méthode :

On écrit :

$$bx = \frac{bx}{2} + \frac{bx}{2}$$

d'où :

$$x^2+bx = \left(x^2+\frac{bx}{2}\right) + \frac{bx}{2}$$

alors, [d'après le corollaire 2, avec : $c = bx$ et $d = x^2$] :

$$(x^2+bx)x^2 + \left(\frac{bx}{2}\right)^2 = \left(x^2+\frac{bx}{2}\right)^2$$

$$\Rightarrow \left(c + \left(\frac{b}{2}\right)^2\right)x^2 = \left(x^2+\frac{bx}{2}\right)^2$$

car : $c = x^2+bx$

d'où :

$$\left[\sqrt{c+\left(\frac{b}{2}\right)^2}\right].x = x^2 + \frac{bx}{2}$$

Alors, suivant que l'on retranche ou que l'on ajoute $\frac{bx}{2}$ aux deux membres, on aboutit respectivement à (I) ou à (III).

c)-Troisième méthode :

On a :

$$x^2+bx+\left(\frac{b}{2}\right)^2 = \left(x+\frac{b}{2}\right)^2$$

car

$$(a+b)^2 = a^2+b^2+2ab$$

d'où :

$$\left(x+\frac{b}{2}\right)^2 = \left(\frac{b}{2}\right)^2+c$$

et :

$$x+\frac{b}{2} = \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2+c}$$

d'où le résultat.

2- Résolution de VI : $x^2 = bx + c$ (5)

a)- Première méthode :

On procède comme pour (IV), avec ici :

$$\frac{x^2+c}{2} = c + \frac{b}{2}x \quad [d'après (5)].$$

et :

$$\frac{x^2+c}{2} = \left[\sqrt{c+(b/2)^2} \right] \cdot x$$

donc, si on ajoute ou on retranche aux deux membres $\frac{bx}{2}$, on aboutit respectivement à (I) ou à (III).

b)- Deuxième méthode :

On a, d'après le corollaire 2 :

$$c(bx+c) + \left(\frac{bx}{2}\right)^2 = \left(\frac{bx}{2} + c\right)^2$$

mais : $bx+c = x^2$, d'où :

$$\left[\sqrt{c+(b/2)^2} \right] \cdot x = \frac{bx}{2} + c$$

et on aboutit à (III).

Ou bien on écrit :

$$\left[\sqrt{c+(b/2)^2} \right] \cdot x + \frac{bx}{2} = x^2$$

et on aboutit à (I).

c)- Troisième méthode :

$$x^2 - bx = c$$

$$\Rightarrow x^2 - bx + (b/2)^2 = \left(x - \frac{b}{2}\right)^2 = c + (b/2)^2$$

$$\Rightarrow x - \frac{b}{2} = \sqrt{c + (b/2)^2}$$

d'où le résultat.

3- Résolution de V : $x^2 + c = bx$.

a)- Première méthode :

$$\left(\frac{b}{2}x\right)^2 = \left(\frac{x^2 + c}{2}\right)^2$$

$$\left(\frac{x^2 + c}{2}\right)^2 - cx^2 = \left(\frac{x^2 + c}{2} - c\right)^2 \quad (1)$$

$$= \left(\frac{x^2 + c}{2} - x^2\right)^2 \quad (2)$$

[d'après le corollaire 1].

Si on extrait la racine carrée des deux membres et qu'on ajoute à chacun d'eux $\frac{bx}{2}$, alors :

d'après (1) :

$$\left(\frac{b}{2}\right)^2 - c \cdot x + \frac{bx}{2} = x^2$$

et on aboutit à (I) ;

et, d'après (2), on a :

$$\left(\frac{b}{2}\right)^2 - c \cdot x + \frac{bx}{2} = c$$

et on aboutit à (III).

Si on retranche le radical de $\frac{bx}{2}$, alors (2) aboutit à (I) et (1) aboutit à (III).

b)- Deuxième méthode :

c et x^2 étant deux parties inégales de bx , on a d'après le corollaire 1 :

$$\left(\frac{bx}{2}\right)^2 - cx^2 = \left(x^2 - \frac{bx}{2}\right)^2 \quad (1)$$

$$= \left(c - \frac{bx}{2}\right)^2 \quad (2)$$

Si on ajoute $\frac{bx}{2}$ au radical, la relation (1) aboutit à (I) et la relation (2) à (III). Si on le retranche, dans (1) et (2), on aboutit respectivement à (III) et à (I).

c)- Troisième méthode :

Soit $e > 0$, tel que :

$$x^2 + c - bx + e = (x - \frac{b}{2})^2 = e$$

[c'est-à-dire : $e = (b/2)^2 - c$].

Donc :

$$x - \frac{b}{2} = \sqrt{(b/2)^2 - c}$$

d'où le résultat.

2° Cas : $a \neq 1$

a)- Première méthode :

On divise par a et on se ramène au 1° cas.

b)- Deuxième méthode :

On applique les relations de la proposition et de ses corollaires, avec ax^2 , au lieu de x^2 , et on aboutit aux formulations (A) et (B) suivantes⁷⁴ :

$$(A) \left\{ \begin{array}{l} \sqrt{(\frac{bx}{2})^2 + c(ax^2)} + \frac{bx}{2} = c \quad \text{pour (IV)} \\ \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad = ax^2 \quad \text{pour (VI)} \\ \sqrt{(\frac{bx}{2})^2 - c(ax^2)} + \frac{bx}{2} = \left\{ \begin{array}{l} \text{ou } ax^2 \Rightarrow x_1 \\ c \Rightarrow x_2 \end{array} \right\} \quad \text{pour (V)} \end{array} \right.$$

$$(B) \left\{ \begin{array}{l} \sqrt{(\frac{bx}{2})^2 + c(ax^2)} - \frac{bx}{2} = ax^2 \quad \text{pour (IV)} \\ \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad = c \quad \text{pour (VI)} \\ (\frac{bx}{2}) - \sqrt{(\frac{bx}{2})^2 - c(ax^2)} = \left\{ \begin{array}{l} ax^2 \Rightarrow x_2 \\ c \Rightarrow x_1 \end{array} \right\} \quad \text{pour (V)} \end{array} \right.$$

(II)- Calcul du carré de la racine⁷⁵ :

Les opérations à suivre indiquées par Ibn al-Bannā' sont :

$$(bx)^2 = (x^2 + c)^2 \quad \text{pour (V).}$$

$$= (x^2 - c)^2 \quad \text{pour (VI).}$$

$$= (c - x^2)^2 \quad \text{pour (IV).}$$

On développe les deux membres et on fait le changement d'inconnue :

$$x^2 = X$$

On aboutit alors, dans les trois cas, à une équation de type V. On démontre l'existence des solutions X_1 et X_2 comme on l'a déjà indiqué. On aboutira, enfin, à la solution cherchée x^2 après vérification car, on a soit X_1 seule, soit X_2 seule, soit X_1 et X_2 solutions du problème considéré.

REMARQUES :

(I)- L'écriture symbolique que nous avons utilisée ici n'est qu'une simple transcription qui ne s'écarte à aucun moment de la formulation de l'auteur : Ce dernier manipule des coefficients quelconques et des expressions algébriques sans support ni références géométriques, ce qui lui permet d'aboutir à une grande concision dans les démonstrations⁷⁶. Cette concision, toute algébrique, est à distinguer de celle qui caractérise le Talkhīs dont le contenu a été volontairement limité à un recueil d'algorithmes et de résultats sans réflexions ni justifications théoriques.

C'est bien ainsi, d'ailleurs, que devaient être perçus les deux ouvrages d'Ibn al-Bannā' par les étudiants de l'époque comme Ibn Khaldūn par exemple qui lie étroitement la solidité des raisonnements du Raf' al-Hijāb (et non leur concision) à leur caractère hermétique aux yeux des débutants⁷⁷.

D'une façon plus précise, nous pouvons dégager, à partir du paragraphe que nous avons exposé, les éléments suivants :

(1)- Dans la première méthode, les démonstrations concernant l'existence de la solution découlent, pour les trois équations canoniques, d'une seule identité (celle de la proposition). Cette identité que l'on retrouve dans le Talkhīs sous le nom de "produit par quadrature" ⁷⁸, est démontrée par un procédé purement algébrique.

(2)- Dans la seconde méthode, les corollaires 1 et 2 utilisés sont en fait l'expression algébrique des propositions 5 et 6 du Livre II des Eléments. Il est à remarquer que, chez Ibn al-Bannā', elles deviennent une conséquence de sa proposition.

(3)- Si la troisième méthode est une algébrisation de la méthode géométrique de complétion ou de réduction du carré, les deux premières sont des démonstrations nées des techniques de l'algèbre et suggérées par elles.

(4)- Lorsqu'on compare les opérations algébriques qui ont permis, à partir de la proposition, d'aboutir aux solutions de (IV) et de (VI), on constate qu'à l'exclusion de la dernière (soustraire $b/2$ dans (IV) et l'ajouter dans (VI)), toutes les autres sont identiques. D'autre part, la recherche du carré de la racine pour (IV) et pour (VI) aboutit à une même équation (V) dont les deux racines sont respectivement les solutions de (IV) et de (VI). Ce sont ces deux arguments qui, à notre avis, ont dû permettre le rapprochement entre les deux équations dans la classification de l'auteur.

(II)- On peut se demander, au vu de ces progrès dans la formulation, dans l'écriture et dans la symbolisation (que nous abordons dans le chapitre suivant), si cela n'a pas incité des mathématiciens du Maghreb, en liaison avec ceux de l'Espagne, à repenser des problèmes anciens selon des points de vue apparemment nouveaux et à s'attaquer à des problèmes encore non résolus, avec peut-être quelque succès. Les éléments dont nous disposons nous incite, malgré leur caractère fragmentaire, à répondre par l'affirmative.

(1)- En Géométrie et en Arithmétique, l'instrument algébrique,

combiné à une vision ensembliste des éléments d'une figure ou d'une série numérique, aboutit à une mise en équation de problèmes classiques, favorisant ainsi, par delà le cloisonnement traditionnel, une classification algébrique des problèmes : Ceux du premier ou du second degré qui sont résolubles et ceux qui ne le sont pas.

Des remarques dans ce sens avaient déjà été formulées, à l'Est par as-Samaw'al à propos des suites arithmétiques⁷⁹, mais chez Ibn al-Bannā' la démarche est à la fois plus explicite et plus systématique : Dans son petit opuscule intitulé Fī -t-Taksīr, les éléments de chaque figure géométrique élémentaire -côtés, hauteurs, diagonales, diamètre, surface- sont considérés comme inconnues dans des équations du premier ou du second degré⁸⁰. Dans son étude des suites arithmétiques, la démarche est analogue, les inconnues étant u_1, u_n, n , la raison r , ou la somme S ⁸¹. Ibn al-Majdī l'étendra aux séries géométriques⁸² et Ibn Haydūr complètera l'étude en considérant les problèmes aboutissant à des systèmes d'équations à trois inconnues⁸³.

Il est enfin à remarquer que cette démarche algébrique est inséparable d'une autre à caractère combinatoire qui permet la classification⁸⁴.

(2)- La maîtrise des techniques algébriques se manifeste également dans le domaine de l'approximation et en particulier dans le calcul approché de la racine $n^{\text{ième}}$ d'un nombre ($n = 2$ ou 3) : C'est ainsi que dans le Raf' al-Hijāb, Ibn al-Bannā' est amené à introduire, pour l'étude d'équations polynomiales de la forme :

$$(a + x)^n = b \quad ; \quad n = 2 \text{ ou } 3,$$

l'équivalent d'un développement limité à l'ordre 2.

Sa démarche pour $n = 3$ est la suivante⁸⁵ :

Soit à calculer :

$$\sqrt[3]{b}, \text{ pour } b \in \mathbb{Q}^+.$$

Il existe $a \in \mathbb{N}$, tel que :

$$a \leq \sqrt[3]{b} < a+1 .$$

On pose :

$$\sqrt[3]{b} = a + x$$

[avec, par conséquent : $x < 1$].

Le problème revient à chercher l'inconnue x , donc à résoudre :

$$(a + x)^3 = b$$

mais :

$$(a + x)^3 = a^3 + 3a^2x + 3ax^2 + x^3$$

Si on supprime x^3 qui est donc considéré comme négligeable par rapport aux autres éléments du second membre, on aboutit à l'équation canonique :

$$3ax^2 + 3a^2x + a^3 = b$$

qui est du type (IV).

[D'où :

$$x = \left[\sqrt{3a(4b-a^3)} - 3a^2 \right] \cdot \frac{1}{6a}$$

et on est ramené à l'approximation d'une racine carrée par la méthode du Talkhīs, itérée autant de fois que l'exige la précision recherchée].

Pour $n = 2$, l'auteur laisse entendre que la méthode ne donne rien, à cause de son caractère algébrique (en tant qu'elle utilise une des équations canoniques). En effet, si l'on explicite son idée, on a :

$$b = (a + x)^2 = a^2 + 2ax + x^2 \quad (1)$$

$$x = \sqrt{a^2 + (b-a^2)} - a = \sqrt{b} - a$$

$$a + x = \sqrt{b}$$

et l'on est ramené à la définition.

En fait, le cas $n = 2$ est le résultat d'une démarche basée également sur un développement limité :

Si on supprime x^2 dans (1), en le considérant comme négligeable, on a :

$$x \approx \frac{b-a^2}{2a} \quad \text{et} \quad \sqrt{b} \approx a + \frac{b-a^2}{2a}$$

qui est précisément la première formule du Talkhīs. On peut également poser :

$$b = (a+1-x)^2 \approx (a+1)^2 - 2(a+1)x$$

d'où :

$$x \approx \frac{(a+1)^2 - b}{2(a+1)}$$

$$\Rightarrow \sqrt{b} \approx (a+1) - \frac{(a+1)^2 - b}{2(a+1)}$$

$$\Rightarrow \sqrt{b} \approx a + \frac{(b-a^2)+1}{2(a+1)}$$

qui est la seconde formule du Talkhīs⁸⁶.

(3)- Nous avons signalé dans l'introduction que, parmi les voies ouvertes à l'algèbre, après Abū Kāmil, celle qui a abouti à l'élaboration d'une théorie géométrique des équations cubiques par al-Khayyām et, plus tard, à la résolution numérique des équations de degré quelconque par aṭ-Ṭūsī, ne semble pas avoir eu de suite au Maghreb. Du XII^e au XVI^e siècle aucun mathématicien connu n'y fait allusion, du moins dans les livres d'enseignement qui nous sont parvenus. Mais cela ne signifie pas que la résolution, par radicaux (analogue à celle des équations quadratiques), ou par approximation n'ait pas préoccupé des chercheurs à l'Ouest.

Le silence d'Ibn al-Bannā', à l'occasion de sa résolution de l'équation $(a+x)^3 = b$, par approximation, laisse à penser que le problème général n'avait pas encore trouvé de solution algébrique mais, compte tenu des progrès en algèbre déjà évoqués, cela n'exclut pas qu'il y eut, dans ce domaine, des travaux ponctuels concernant des équations particulières comme celle que discute longuement Ibn al-

Majdī et qui aurait été résolue par Ibn al-Faḥḥām⁸⁷.

Il s'agit du problème suivant : Trouver X et Y positifs tels que :

$$\begin{cases} X + Y = 10 \\ Y \cdot \sqrt{X} = 12 \end{cases}$$

En posant : $X = x^2$ et $Y = 10 - X$, on est ramené à l'équation :

$$x^3 + 12 = 10x$$

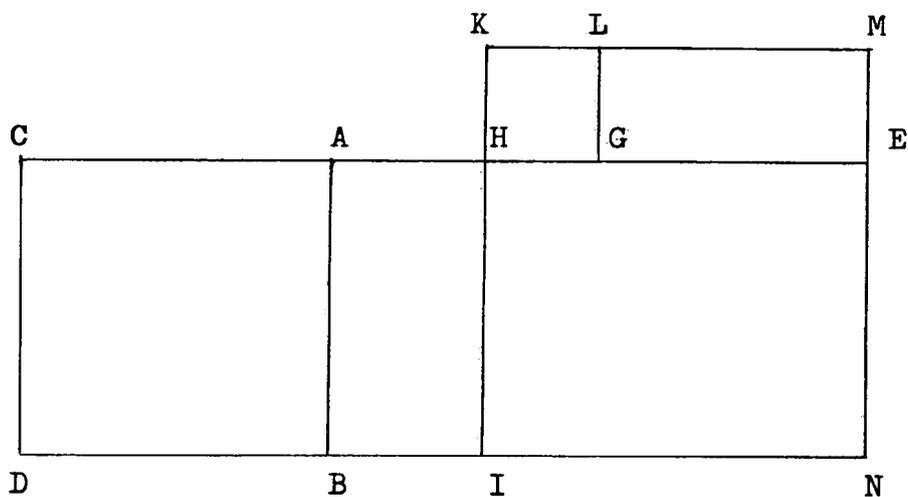
Selon cette information, le mathématicien en question était andalou et enseignait du vivant d'Ibn al-Hā'im, probablement dans la seconde moitié du XIV^e siècle. Il n'est donc pas impossible qu'il s'agisse d'Abū-l-Ḥasan 'Alī ibn Aḥmad Ibn al-Faḥḥām qui vivait à Tlemcen à l'époque de Yaḥyā Ibn Khaldūn et que ce dernier qualifie de plus savant de son temps en sciences mathématiques⁸⁸.

Quoi qu'il en soit, il se dégage, à travers le récit d'Ibn al-Hā'im, que des tentatives de résolution algébrique des équations cubiques se sont poursuivies au moins jusqu'à la fin du XIV^e siècle à l'Ouest (et au delà, en Egypte).

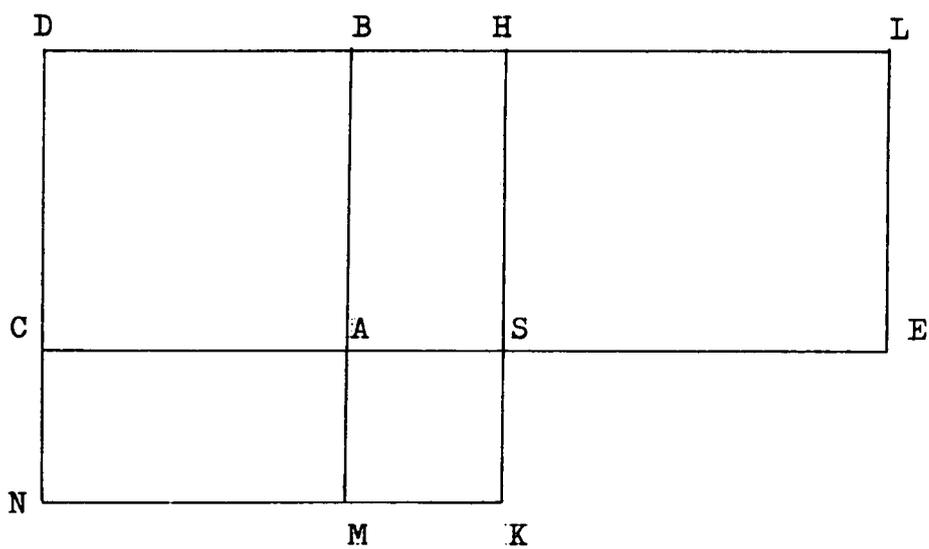
Il nous semble que ce renouveau d'intérêt pour des problèmes non résolus classiques s'explique, en partie, par cette plus grande maîtrise de l'outil algébrique que va permettre l'introduction puis l'extension du symbolisme.

* * * * *

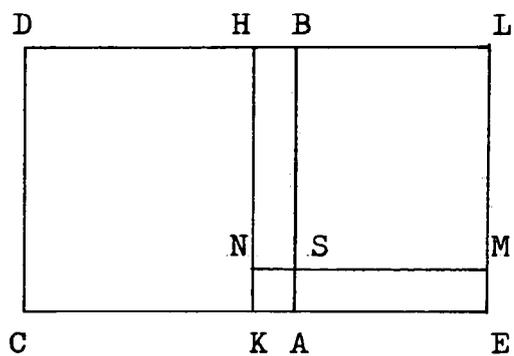
Figures du chapitre I



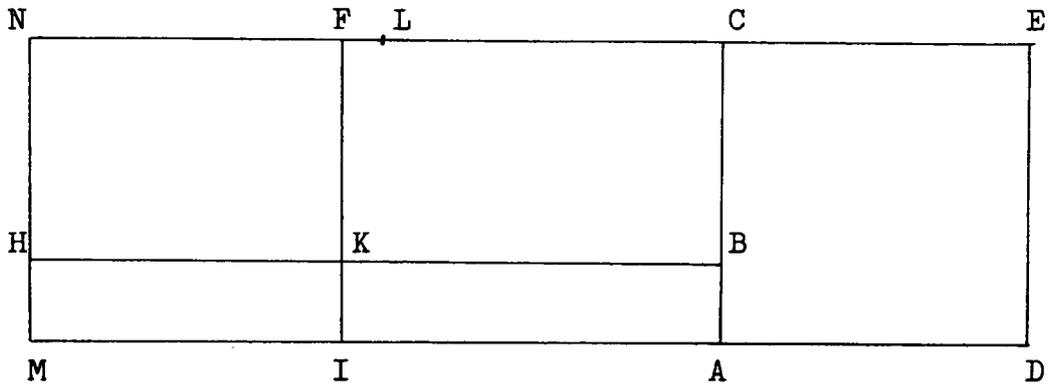
(fig 1)



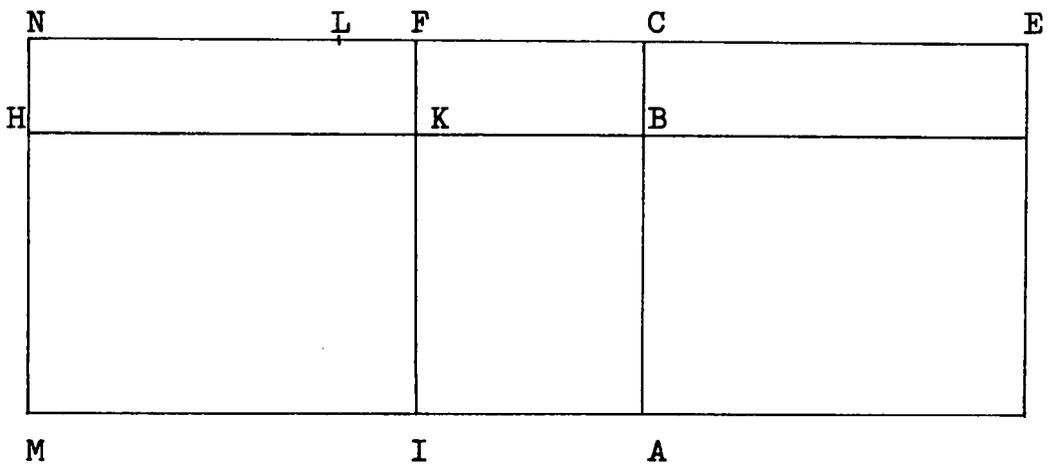
(fig 2)



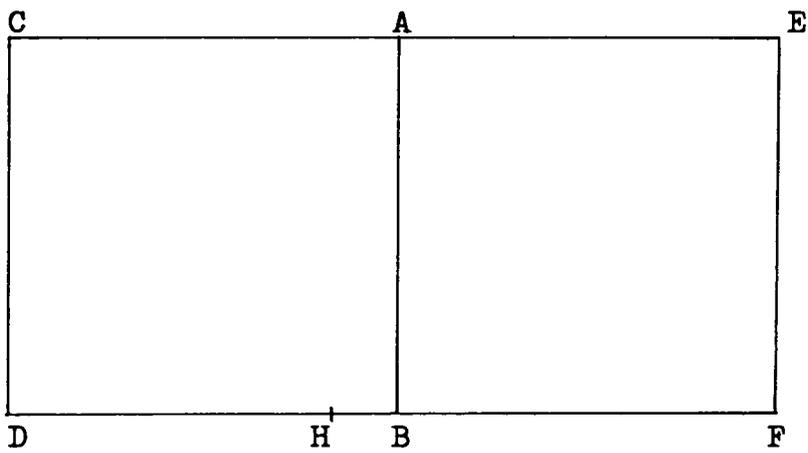
(fig 3)



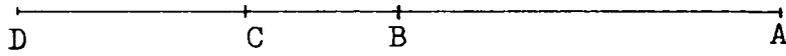
(fig 4)



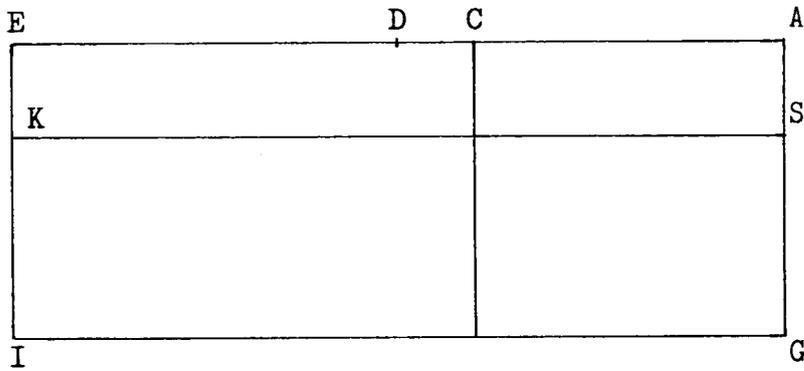
(fig 5)



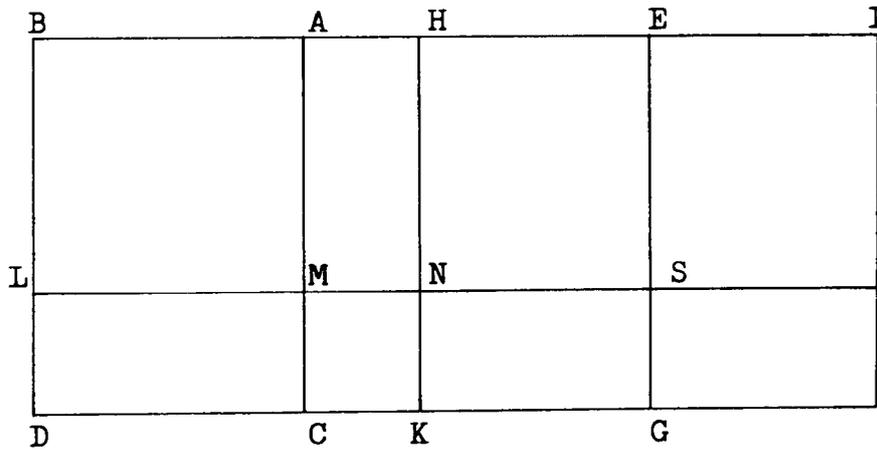
(fig 6)



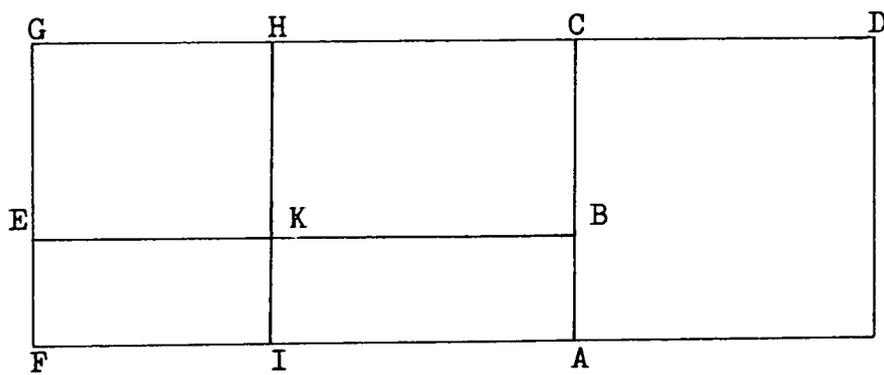
(fig 7)



(fig 8)



(fig 9)



(fig 10)

II. SYMBOLISME ET ALGÈBRE

Le symbolisme dans les ouvrages mathématiques arabes conçus au centre et à l'est de l'Empire a, contrairement à certaines affirmations⁸⁹, bel et bien existé et son histoire reste à faire⁹⁰. En attendant, nous allons nous intéresser à celui que l'on rencontre dans les ouvrages maghrébins, dans le but de préciser et de compléter son contenu, et d'avancer des hypothèses concernant son rôle et son importance.

On sait, par Ibn Khaldūn encore, que bien avant l'époque d'Ibn al-Bannā', un certain symbolisme était en usage dans les livres maghrébins de calcul et d'algèbre. L'auteur de la Muqaddima cite, à ce propos, le *Fiqh al-Ḥisāb* d'Ibn Mun'im et le *Kāmil* d'al-Aḥḍab⁹¹. Malheureusement, ces deux ouvrages sont toujours introuvables et les témoignages que fournissent des auteurs postérieurs ne permettent pas de confirmer l'information et surtout de l'explicitier. La question concernant les débuts de ce symbolisme reste donc posée et, avec elle, celle des causes et des conditions qui ont permis son apparition car, là encore, les documents sont terriblement silencieux.

Pourtant, depuis la publication de l'article de Woepcke sur al-Qal-ṣādī, on sait que de nombreux symboles étaient utilisés au Maghreb, au XV^e siècle, en arithmétique et en algèbre⁹²; les chapitres les plus concernés étant ceux des opérations dans l'ensemble des entiers et des rationnels positifs (addition, soustraction, multiplication, division, extraction de racines n^{ième} pour n pair), ceux des nombres réels algébriques, des polynômes de degré quelconque et enfin des équations quadratiques.

On sait également qu'al-Qalṣādī a utilisé cette écriture dans la plupart de ses traités sans, à aucun moment, en revendiquer la paternité ; ce qui, ajouté au caractère très élaboré de ce symbolisme, plaide manifestement en faveur d'une origine plus ancienne. C'est bien ce que confirme -du moins en partie- la lecture du traité d'al-Haṣṣār⁹³ et du Liber Abaci de Léonard de Pise⁹⁴ : L'écriture symbolique des fractions simples, des fractions composées et des fractions continues que l'on trouve chez al-Qalṣādī était déjà utilisée par ces deux auteurs à la fin du XII^e ou au début du XIII^e. Quant aux symboles algébriques, pour l'écriture des polynômes et des équations, on les trouve également dans des traités maghrébins antérieurs à ceux d'al-Qalṣādī comme le Ḥaṭṭ an-Niqāb d'Ibn Qunfūdh ou le commentaire du Talkhīs de Ya'qūb al-Mawāḥidī dont la rédaction se situe vraisemblablement dans la seconde moitié du XIV^e siècle⁹⁵.

Comme on le voit, dans ce domaine aussi le XIII^e-XIV^e siècle est important : On y découvre un symbolisme déjà élaboré qui amène naturellement à s'interroger sur sa véritable fonction, sur les améliorations qu'il a connues et sur les progrès qu'il était susceptible de provoquer ou de favoriser dans certains domaines.

L'analyse des traités que nous avons pu consulter laisse à penser que ce symbolisme a évolué d'une fonction de support de la pensée comme l'a été, par exemple, la notation alphabétique en géométrie, à un véritable instrument d'exécution des calculs et de résolution des équations.

Mais ce ne sont pas les traités mathématiques connus, où le symbolisme est absent, rare ou bien cantonné à un rôle d'illustration, qui permettent d'apprécier à la fois cette évolution et l'importance qu'il a pu avoir⁹⁶. Nous pensons, en effet, que son domaine privilégié a été l'enseignement et que, après les enseignants et les étudiants, d'autres utilisateurs comme les comptables et les spécialistes de droit appliqué, n'ont pas tardé à l'adopter pour les raccourcis conceptuels qu'il permet, pour son économie d'écriture et pour la sûreté d'exécution qu'il introduit dans les calculs et dans les raisonnements.

La rareté de ce symbolisme dans les plus importants traités connus du XIII^e-XIV^e siècle ne constitue donc pas un argument contre ce que nous venons de dire. L'explication de ce fait doit être cherchée soit dans le statut de ce nouveau langage, soit dans les conceptions en vigueur à l'époque pour la rédaction d'ouvrages scientifiques⁹⁷. Mais du coup cela rend illusoire toute tentative d'estimation de l'importance quantitative de ce symbolisme dont les traces ont, en grande partie, disparu avec les instruments qui permettaient de le fixer, c'est-à-dire la planche du calculateur et la fine poussière qui la recouvrait.

Pourtant, si l'on veut avoir une certaine idée de ce que pouvait être son utilisation, il nous reste les ouvrages d'initiation et les commentaires d'ouvrages classiques rédigés par des enseignants, anonymes pour la plupart. On y découvre en effet, sans pouvoir affirmer que cela ait correspondu à une évolution dans le temps, plusieurs formes d'intervention de ce symbolisme.

Voici celles que nous avons rencontrées le plus souvent :

(1)- L'écriture symbolique accompagne l'expression verbale du calcul ou du raisonnement et résume leurs étapes essentielles (Problème I). Elle n'est pas indispensable au texte mais n'est pas toujours intelligible sans lui. C'est la forme la plus fréquente dans les manuscrits que nous avons consultés où elle semble jouer un rôle pédagogique d'illustration et d'initiation.

(2)- Cette écriture est indispensable à la compréhension du texte qui se cantonne dans la formulation des méthodes et des étapes du calcul (Problème II).

(3)- Le texte, réduit au strict minimum, annonce ou définit l'opération écrite en symboles (Problème III), le tout constituant une sorte de tableau récapitulatif. Cette méthode s'apparente à celle qu'utilisait déjà as-Samaw'al dans son livre d'algèbre al-Bāhir et que l'on retrouvera beaucoup plus tard chez al-Kāšī, dans son Miftāḥ al-Ḥisāb, avec une formulation encore discursive.

(4)- Le texte de liaison disparaît et il ne subsiste que l'enchaînement des opérations en écriture symbolique (Problème IV). C'est bien là la forme qui a dû être la plus utilisée car la plus

pratique pour mener à bien calculs et raisonnements, à condition toutefois d'avoir acquis une certaine maîtrise dans la manipulation de ces symboles ; ce que confirme les nombreuses résolutions d'exercices d'algèbre.

Il semble d'ailleurs que, très tôt, des enseignants (suivant en cela la voie inaugurée peut-être par Ibn Mun^{im}), non contents d'utiliser cette forme dans leur enseignement quotidien, l'aient étendue à leurs ouvrages. C'est bien ce que suggèrent des allusions faites par certains auteurs maghrébins⁹⁸.

Mais il est vraisemblable, compte tenu des pesanteurs de la tradition, que ce soit à travers la première forme que s'est réalisée la diffusion de cet instrument en direction de l'Est ; diffusion faite d'ailleurs avec une certaine rapidité surtout lorsqu'on songe qu'aucune institution à l'échelle de l'Empire ou même d'une province ne définissait et n'imposait les programmes d'enseignement et leurs contenus. On constate ainsi, à la lecture de son *Ḥawī al-Lubāb* que, non seulement Ibn al-Majdī connaissait tous les aspects de ce symbolisme, mais qu'il en a utilisé une bonne partie dans différents chapitres de son livre⁹⁹.

Il est donc difficile d'admettre que la diversité de ce symbolisme, l'importance de sa diffusion et la maîtrise qu'y ont acquis ses utilisateurs n'aient pas eu une certaine influence dans un ou deux domaines des mathématiques arabes surtout lorsqu'on a à l'esprit les sérieux handicaps auxquels se sont heurtés - par absence de symbolisme précisément - des mathématiciens des X^e-XI^e siècles en particulier les algébristes de l'école d'al-Karajī, les géomètres infinitésimalistes comme al-Kūhī et Ibn al-Haytham¹⁰⁰ et enfin les précurseurs de la géométrie algébrique comme al-Khayyām et surtout Šaraf ad-Dīn aṭ-Ṭūsī.

Nous pensons, pour notre part, que même si elle a été limitée par l'état global de l'activité scientifique caractérisé par un ralentissement général et, parfois, une régression sectorielle, cette influence a quand même eu des effets réels, grâce à l'introduction d'un plus grand automatisme dans les opérations, à une visualisation plus nette des objets mathématiques et, par conséquent, à une

plus grande mémorisation. Cela s'est traduit, en arithmétique pratique et en algèbre, par un développement quantitatif des différents aspects du calcul et le traitement plus aisé de problèmes qui, sans sortir du cadre classique, étaient techniquement complexes.

En Combinatoire enfin (domaine moins développé que les précédents) le symbolisme permettra la manipulation plus aisée de fractions nouvelles dont les éléments sont des factorielles et donnera un caractère général au procédé de démonstration par énumération. Il aidera ainsi à dégager, par l'intermédiaire de l'induction, de véritables règles combinatoires.

Nous allons tenter, à présent, d'illustrer ce que nous avons dits par quelques exemples significatifs, en commençant par un rappel des éléments connus de ce symbolisme. Nous y ajouterons, quand cela sera possible, les différentes variantes, les améliorations ou les compléments qui lui ont été apportés au cours de la période considérée.

* * * * *

II.1. La symbolique du xiv^e siècle

I. Les nombres entiers en chiffres ghubār¹⁰¹ :

9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1, 0

II. Les fractions.

II.1- Fractions élémentaires.

(1)-Fractions simples :

Exemple¹⁰² :

$$\frac{1}{2} , \frac{1}{11} , \frac{3}{17}$$

(2)- Fractions continues :

Exemple¹⁰³ :

$$\frac{3 \ 5 \ 2}{8 \ 6 \ 7} , \frac{3 \ 0 \ 0}{8 \ 6 \ 7}$$

(3)- Fractions discontinues :

Exemple¹⁰⁴ :

$$\frac{3 \ | \ 5 \ | \ 2}{8 \ | \ 6 \ | \ 7}$$

II.2- Fractions hétérogènes :

Exemple¹⁰⁵ :

$$\frac{1 \ | \ 2}{3 \ | \ 5} \quad \frac{7 \ 5}{8 \ 9} \quad \frac{3}{7}$$

II.3- Fractions soustractives :

(1)- Fractions continues :

Exemple¹⁰⁶ :

a)
$$\frac{1 \ | \ 4 \ | \ 1}{6 \ | \ 5 \ | \ 3} \ \vee \ \frac{1 \ 3 \ 5}{3 \ 4 \ 7}$$

b)
$$\frac{1}{3} \ \vee \ \frac{1}{2} \ \vee \ \frac{3}{4} \ \vee \ \frac{1}{2}$$

(2)- Fractions discontinues :Exemples¹⁰⁷ :

a) $\frac{1}{3} \text{ و } \frac{3}{4} \text{ و } \frac{7}{8} \text{ و } \frac{1}{3}$

b) $\frac{1}{3} \text{ و } \frac{3}{4} \text{ و } \frac{7}{8} \text{ و } \frac{9}{11}$

II.4- Combinaison de fractions simples et d'entiers :Exemples¹⁰⁸ :

a) : $\frac{3}{5} 2$; b) : $2 \frac{3}{5}$; c) : $\frac{3}{5} 2 \frac{7}{9}$

II.5- Opérations sur les groupes de fractions.

Elles sont symbolisées par les articles de liaison qui sont utilisés dans la définition de chaque opération :

Plus : الى . Moins : من . Divisé par : على

Multiplié par : في . Conversion: كم .

Restauration : حتى

Les trois premiers articles devaient servir essentiellement à poser le problème. Dans le cours du calcul, on leur préférait respectivement :

Pour l'addition : و ; la soustraction : لا ou لا

la division : في

Quant au signe de l'égalité, noté : ل , il semble avoir servi exclusivement à l'écriture des équations¹⁰⁹. Pour les opérations sur les fractions, ou même pour les identités, on se contentait de l'expression verbale.

III. Les puissances fractionnaires.Exemples¹¹⁰ :

$\frac{1}{8} , \frac{2}{7} , \frac{2}{8} , \frac{1}{5}$

D'une façon générale, pour écrire $a^{\frac{1}{2n}}$, on superpose verticalement des \rightarrow en nombre égal à n .

Quant aux puissances fractionnaires de la forme $a^{\frac{1}{2n+1}}$ et même $a^{p/q}$, on continuait, au Maghreb, à les exprimer d'une manière discursive. Cela est peut-être dû au peu d'utilisation de ces puissances dans les opérations algébriques, comme ce fut le cas, par exemple pour les racines $2n^{\text{ième}}$ dans le chapitre des binômes et des apotomes¹¹¹.

IV. Polynômes et équations.

(1)- Les monômes :

La chose est notée : \sim ou bien : \therefore . Le carré : \curvearrowright . Le cube¹¹² : ζ . Pour les puissances supérieures à 3, on n'utilise que les deux derniers symboles en respectant, par souci de concision, la règle suivante : Si le degré n vérifie

$$n \equiv 1 \pmod{3}$$

on le transforme en :

$$n = 3(p-1) + 2 \times 2$$

pour n'utiliser que des \curvearrowright et des ζ .

Si :

$$n \equiv 2 \pmod{3} \equiv 0 \pmod{2}$$

ou bien :

$$n \equiv 0 \pmod{3} \equiv 0 \pmod{2}$$

on l'écrit : $\zeta \dots \zeta$ et non pas : $\curvearrowright \dots \curvearrowright$

car on aurait alors :

$$n = 3(2k) + 2 = 2(3k+1)$$

ou bien :

$$n = 3(2k) = 2(3k)$$

et, dans les deux cas, on économiserait k signes.

(2)- Les coefficients numériques :

Il n'y a pas de symbole qui représente, seul, un nombre en général. Même lorsque les équations étaient exprimées sous une forme généra-

le, leur traitement se faisait avec des coefficients numériques, sans que cela n'altérât d'ailleurs le caractère général du raisonnement. On a vu pourtant qu'Ibn al-Bannā' opérait avec des coefficients quelconques, mais rien ne permet de dire que cela reposait sur un symbolisme nouveau¹¹³.

Mais comme on avait besoin dans les calculs algébriques de distinguer entre inconnues et coefficients, en particulier dans les opérations sur les puissances, on utilisait pour les nombres la première lettre du mot 'adad : ع surmontant le coefficient numérique et parfois surmontée elle-même d'un zéro indiquant la valeur de sa puissance en tant que quantité algébrique, de la même façon que la lettre ك de la chose est surmontée d'un 1, le ع d'un 2, le ع d'un 3 et ainsi de suite comme on le voit sur les exemples suivants¹¹⁴ :

$$\begin{array}{c} 4 \\ \text{ع} \\ \hline 8 \end{array} \quad \begin{array}{c} 7 \\ \text{ك} \\ \hline 1 \end{array} ; \quad \begin{array}{c} 0 \\ \text{ع} \\ \hline 64 \end{array} \quad \begin{array}{c} 6 \\ \text{ك} \\ \hline 1 \end{array} ; \quad \begin{array}{c} 0 \\ \text{ع} \\ \hline 24 \end{array} \quad \begin{array}{c} 3 \\ \text{ك} \\ \hline 3 \end{array}$$

$$\begin{array}{c} 0 \quad 1 \\ \text{ع} \quad \text{ع} \\ \hline 15 \quad 10 \end{array} \quad \begin{array}{c} 2 \quad 3 \\ \text{ع} \quad \text{ك} \\ \hline 2 \quad 1 \end{array} ; \quad \begin{array}{c} 0 \\ \text{ع} \\ \hline 12 \end{array} \quad \begin{array}{c} 2 \quad 3 \\ \text{ع} \quad \text{ك} \\ \hline 1 \quad 1 \end{array}$$

Il faut cependant remarquer que si al-Qalsādī et d'autres auteurs anonymes signalent explicitement l'utilisation du ع pour les nombres, à aucun moment ils ne font allusion à cette écriture des puissances¹¹⁵. Toutefois, son utilisation répétée aux côtés d'autres éléments du symbolisme maghrébin laisse à penser que cette écriture, sans être répandue, était peut-être connue au Maghreb et en Egypte, à la fin du XIV^e siècle ou au début du XV^e.

II.2. Exemples d'utilisation des symboles

Problème I :

Combien s'est écoulé de la nuit de telle sorte qu'il en reste trois septièmes de ce qui reste ajouté au neuvième de ce qui s'est écoulé ?

Résolution :

Tu comptes la nuit 12 heures et tu prends pour la chose la partie écoulée. Le reste est alors 12 moins la chose ainsi :

$$\overset{\cdot\cdot}{1} \text{ y } 12 \quad (1)$$

Tu prends les trois septièmes du reste et c'est cinq plus un septième moins trois septièmes d'une chose, ainsi :

$$\frac{\overset{\cdot\cdot}{3}}{7} \text{ y } \frac{1}{7} 5 \quad (2)$$

Puis, tu ajoutes à ce reste un neuvième de la chose, ainsi :

$$\frac{\overset{\cdot\cdot}{3}}{7} \text{ y } \frac{1}{7} 5 \frac{\overset{\cdot\cdot}{1}}{9} \quad (3)$$

Tu effectues lamuqābala [groupement des monômes de même degré] et on obtient cinq plus un septième moins vingt soixante troisième égal le reste qui est égal à douze en nombre moins une chose, ainsi:

$$\overset{\cdot\cdot}{1} \text{ y } 12 \Big| \frac{20}{63} \text{ y } \frac{1}{7} 5 \quad (4)$$

Puis tu effectues le jabr, c'est-à-dire qu'on ôte le moins et ce qui le suit que l'on remet de l'autre côté avec le membre équivalent. Le problème devient une chose plus cinq et un septième en nombre égale douze en nombre et deux neuvièmes et six septièmes d'un neuvième, ainsi :

$$\frac{\overset{\cdot\cdot}{62}}{7:9} 12 \Big| \frac{1}{7} 5 \overset{\cdot\cdot}{1} \quad (5)$$

Puis effectue la muqābala en ôtant le genre de son semblable et il te reste quarante trois soixante troisième d'une chose égale six et six septièmes en nombre, ainsi :

$$\frac{6}{7} \quad \varepsilon \quad \left| \quad \frac{43}{63} \quad (6)$$



qui est la troisième des équations simples. Divise le second membre par les choses, tu obtiens l'inconnue demandée et c'est dix et deux quarante troisième et c'est la partie la plus grande ; la partie la plus petite est un et quarante et un quarante troisième¹¹⁶.

Problème II :

Il s'agit de partager un capital hérité, entre quatre fils et le bénéficiaire d'une donation qui vaut la part de l'un des quatre fils moins le tiers de ce qui reste après avoir retranché une part du tiers du capital¹¹⁷.

Résolution :

Quant à sa résolution par la méthode de l'algèbre, tu retranches la part de $\frac{1}{3}$ du capital, il reste¹¹⁸ :

$$\overline{1} \quad \text{ألا} \quad \frac{\overline{1}}{3} \quad (1)$$

Tu prends son tiers, ce qui donne :

$$\frac{\overline{1}}{3} \quad \text{ألا} \quad \frac{\overline{1}}{9} \quad (2)$$

Tu as alors deux façons de résoudre : (...). L'une d'elle consiste à le soustraire de la part et le reste est la donation. Tu dis :

$$\overline{1} \quad \text{من} \quad \frac{\overline{1}}{3} \quad \text{ألا} \quad \frac{\overline{1}}{9} \quad (3)$$

Tu ôtes le moins et tu ajoutes le tiers à la part, il reste :

$$\frac{\overline{1}}{3} \quad 1 \quad \text{من} \quad \frac{\overline{1}}{9} \quad (4)$$

c'est-à-dire :

$$\frac{1}{9} \text{ مالا } \frac{1}{3} \text{ مالا } \quad (5)$$

et c'est la donation (...).

Si tu veux l'ôter du capital, tu dis :

$$1 \text{ من } \frac{1}{9} \text{ مالا } \frac{1}{3} \text{ مالا } \quad (6)$$

Si tu veux l'ôter de $\frac{1}{3}$ du capital et ajouter le reste au $\frac{2}{3}$, tu auras :

$$\frac{1}{3} \text{ من } \frac{1}{9} \text{ مالا } \frac{1}{3} \text{ مالا } \quad (7)$$

Tu effectues le jabr et tu auras :

$$\frac{4}{9} \text{ من } \frac{1}{3} \text{ مالا } \quad (8)$$

c'est-à-dire :

$$\frac{1}{3} \text{ مالا } \frac{4}{9} \text{ مالا } \quad (9)$$

auquel on ajoute $\frac{2}{3}$ du capital qui est $\frac{6}{9}$, ajouté à $\frac{4}{9}$. Tu auras :

$$\frac{4}{4} \left| \frac{1}{3} \text{ مالا } \frac{1}{9} \text{ مالا } \right. \quad (10)$$

(...) Puis, tu effectues le jabr et la muqābala et tu auras :

$$\frac{1}{3} \left| \frac{5}{9} \text{ مالا } \right. \quad (11)$$

Divise les parts par les carrés, il vient :

$$\frac{4}{5} \text{ مالا } 4$$

qui est la part de chaque fils, (...)¹¹⁹.

Problème III :Calcul de la racine carrée des trois premiers binômes¹²⁰.

Les plus petits nombres d'où sortent les trois premiers :	6	9	4
Obtention de chacun d'eux :	$\sqrt{6}$ $\sqrt{8}$	3 $\sqrt{12}$	3 2
Le carré de chacun d'eux :	6 8	9 12	3 4
Le quart de chacun des carrés :	$\frac{1}{2}$ 1 2	$\frac{9}{4}$ 3	$\frac{3}{4}$ 1
Le reste après la soustraction :	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{4}$
La racine du reste :	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{2}$
Le résultat de la somme :	$\frac{1}{2}$ 4	$\frac{3}{4}$ 6	$\frac{1}{2}$ 1
Le résultat de la différence :	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{2}$
Addition de la racine de la somme et de la racine de la différence :	$\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}$ 4	$\frac{3}{4}$, $\frac{3}{4}$ 6	$\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}$ 1
Le carré pour la preuve :	$\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}$ 4 $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}$ 4	$\frac{3}{4}$, $\frac{3}{4}$ 6 $\frac{3}{4}$, $\frac{3}{4}$ 6	$\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}$ 1 $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}$ 1
Le résultat du produit de chacun par lui-même :	$\frac{1}{2}$ $\frac{1}{2}$ 4	$\frac{3}{4}$ $\frac{3}{4}$ 6	$\frac{1}{2}$ $\frac{1}{2}$ 1
Le résultat du produit des éléments opposés :	$\frac{1}{2}$ 1 $\frac{1}{2}$ 1	2 $\frac{1}{4}$ 2	$\frac{3}{4}$ $\frac{3}{4}$
Le résultat de la somme des produits opposés qui donne le plus petit terme :	$\sqrt{6}$	3	$\sqrt{3}$

Problème IV :

Il s'agit de trouver x tel que : $1^3 + 3^3 + \dots + x^3 = 1225$

Ibn Ghāzī ramène cette équation du 4^e degré à une équation canonique de type IV, en utilisant le résultat suivant¹²¹ :

$$\sum_1^n (2k-1)^3 = S(2S-1) ; S = \sum_1^n (2k-1) = n^2$$

Voici sa résolution et sa traduction en symbolisme actuel :

$$\left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\right) \left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\right) \quad \frac{1}{2} \quad \overset{\text{ش}}{\frac{1}{2}} \quad \text{في} \quad \frac{1}{2} \quad \overset{\text{ش}}{\frac{1}{2}}$$

$$\left(\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\right) \left(\frac{1}{2}x^2 + x + \frac{1}{2} - 1\right) \quad 1 \quad \text{الا} \quad \frac{1}{2} \quad \overset{\text{ش}}{1} \quad \overset{\text{م}}{\frac{1}{2}} \quad \text{في} \quad \frac{1}{4} \quad \overset{\text{ش}}{\frac{1}{2}} \quad \overset{\text{م}}{\frac{1}{4}}$$

$$\left(\frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\right) \left(\frac{1}{2}x^2 + x - \frac{1}{2}\right) \quad \frac{1}{2} \quad \text{الا} \quad \overset{\text{ش}}{1} \quad \overset{\text{م}}{\frac{1}{2}} \quad \text{في} \quad \text{وان شئت في}$$

$$\left(\frac{1}{8}x^4 + \frac{1}{2}x^3 + \frac{3}{4}x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{8}\right) - \left(\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\right) \quad \frac{1}{4} \quad \overset{\text{ش}}{\frac{1}{2}} \quad \overset{\text{م}}{\frac{1}{4}} \quad \text{الا} \quad \frac{1}{8} \quad \frac{1}{2} \quad \overset{\text{م}}{\frac{3}{4}} \quad \overset{\text{ك}}{\frac{1}{2}} \quad \overset{\text{م}}{\frac{1}{8}}$$

$$\frac{1}{8}x^4 + \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{8} = 1225 \quad \underbrace{1225} \quad \frac{1}{8} \quad \text{الا} \quad \overset{\text{م}}{\frac{1}{2}} \quad \overset{\text{ك}}{\frac{1}{2}} \quad \overset{\text{م}}{\frac{1}{8}}$$

$$\frac{1}{8}x^4 + \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{2}x^2 = 1225 + \frac{1}{8} \quad \underbrace{\frac{1}{8} \quad 1225} \quad \overset{\text{م}}{\frac{1}{2}} \quad \overset{\text{ك}}{\frac{1}{2}} \quad \overset{\text{م}}{\frac{1}{8}}$$

$$x^4 + 4x^3 + 4x^2 = 9801 \quad \underbrace{9801} \quad \overset{\text{م}}{4} \quad \overset{\text{ك}}{4} \quad \overset{\text{م}}{1}$$

$$x^2 + 2x = 99 \quad \underbrace{99} \quad \overset{\text{ش}}{2} \quad \overset{\text{م}}{1}$$

$$(b/2)^2 = 1 \quad 1$$

$$(b/2)^2 + ac = 100 = d \quad 100$$

$$\sqrt{d} = 10 \quad 10$$

$$\sqrt{d} - (b/2) = 9 \quad 9$$

III THEORIE DES NOMBRES ET COMBINATOIRE

III.1. La combinatoire avant le XIII^e siècle

Si on ne réduit pas la combinatoire à ses formules classiques et qu'on la considère dans son sens général d'étude des configurations, on constate que plusieurs de ses aspects sont apparus, très tôt et un peu partout, dans la science médiévale arabe¹²² : En astrologie, l'utilisation du dénombrement des conjonctions des différentes planètes¹²³ et surtout la recherche de configurations planes inconnues vérifiant les propriétés de cercles ou de carrés magiques¹²⁴ ; en linguistique, l'énumération et le dénombrement exact de configurations de lettres de l'alphabet soumises à certaines contraintes¹²⁵, puis la confection de lexiques correspondant à différents types de configurations¹²⁶ ; en arithmétique, l'étude des configurations linéaires ou planes connues, constituées de suites arithmétiques (tableau des nombres polygones), ou géométriques (procédé de l'échiquier)¹²⁷. Mais le champ dans lequel s'est exercée la combinatoire, avant le XIII^e siècle, ne s'est pas réduit à ces trois disciplines. En plus de certains domaines, non mathématiques, comme la chimie, la médecine et la grammaire¹²⁸, il faudrait ajouter la musique¹²⁹ et surtout l'astronomie et l'algèbre.

Si l'on excepte les carrés magiques qui ont constitué, dès le IX^e siècle, un sujet de recherche autonome et qui ont fait l'objet, à l'extérieur du Maghreb, d'écrits consacrés exclusivement à eux, comme ceux des Ikhwān aş-Şafā¹³⁰, d'Abū-l-Wafā¹³¹ et d'Ibn al-Haytham¹³², on constate que les autres aspects de la combinatoire sont apparus

souvent, dans les travaux mathématiques, au cours de la résolution de problèmes plus vastes et de nature totalement différente. C'est le cas, par exemple, des configurations linéaires qui interviennent en arithmétique avec le dénombrement des diviseurs d'un nombre et, en géométrie, avec l'énumération de tous les partages d'un entier n en m parts entières¹³³. Mais c'est surtout le cas de la combinatoire classique (permutations, arrangements, combinaisons) dont certains aspects se manifestent en astronomie et en algèbre.

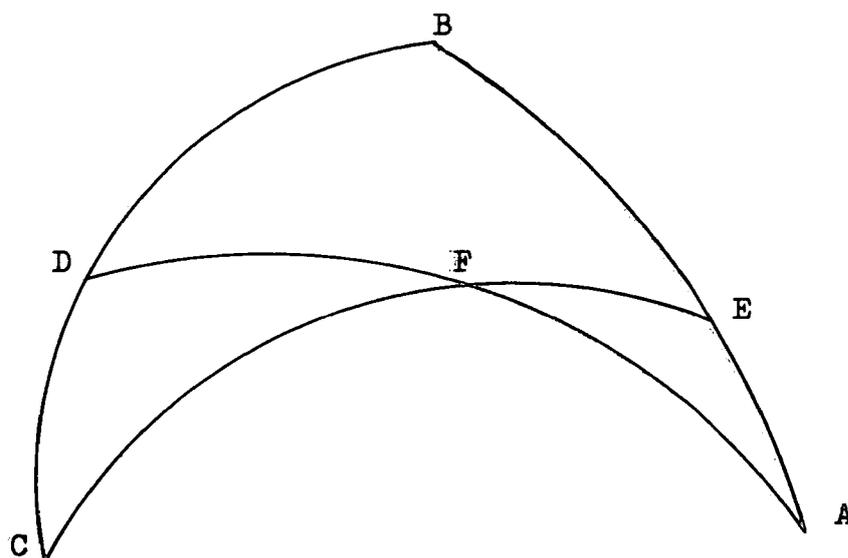
Dans tous ces domaines, la combinatoire n'apparaît pas d'une manière fortuite. Elle participe étroitement à la résolution de problèmes nouveaux en y introduisant, d'une façon encore timide il est vrai, des démarches originales qui préfigurent les modes de raisonnement combinatoires. Cela est déjà visible en astronomie où la combinatoire apparaît très tôt à travers plusieurs de ses aspects (énumération, dénombrement, classification). Mais son domaine privilégié semble avoir été l'algèbre où son intervention marquera, à chaque fois, les progrès réalisés par cette discipline dans l'extension de son domaine d'application, dans l'acquisition d'instruments nouveaux et dans l'amorce, puis le développement, d'une réflexion sur l'algèbre elle-même et sur les objets mathématiques qu'elle considérait alors.

III.1.a- Combinatoire et astronomie :

En astronomie, c'est par l'intermédiaire de problèmes trigonométriques que des éléments de combinatoire interviennent (à la fois au niveau des démarches et des résultats) dans un but de classification de ces problèmes, en fonction de leur résolubilité, et de généralisation des méthodes de calcul ; le dénombrement permettant, alors, de déterminer tous les cas soumis aux mêmes conditions de résolubilité et aux mêmes méthodes de résolution. Des passages de deux ouvrages célèbres des IX^e-X^e siècles nous en fournissent une illustration suffisante : Il s'agit du Kitāb fī-š-Šakl al-Qaṭṭā' de Thābit Ibn Qurra et du Kitāb Maqālīd 'Ilm al-Hay'a d'al-Bīrūnī. Au-delà de ses préoccupations astronomiques, le traité d'Ibn Qurra, qui repose sur les rapports composés, est essentiellement consacré,

en fait, à la résolution du problème combinatoire suivant : Dénombrer, énumérer et justifier toutes les écritures possibles de la formule issue de la "figure sécante" et que l'auteur exprime ainsi :

$$\frac{\text{corde}(2\widehat{AE})}{\text{corde}(2\widehat{EB})} = \frac{\text{corde}(2\widehat{AF})}{\text{corde}(2\widehat{FD})} \times \frac{\text{corde}(2\widehat{DC})}{\text{corde}(2\widehat{CB})}$$



Si nous notons a_1, a_2, \dots, a_6 , respectivement, les six éléments de cette égalité, on a donc :

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{a_3}{a_4} \times \frac{a_5}{a_6} \quad (1)$$

A partir de (1); Ibn Qurra montre que l'on peut déduire plusieurs autres relations dont il démontre la validité et qu'il dénombre du même coup. Il obtient d'abord 18 permutations pour lesquelles il prouve l'existence d'une relation analogue à (1), et qu'il énumère ensuite dans des tableaux¹³⁴, puis 18 autres déduites des premières en permutant numérateurs et dénominateurs dans chaque fraction. Il conclut en montrant que seules les 36 permutations obtenues répondent au problème. Pour cela, il considère les combinaisons des six

éléments a_1, a_2, \dots, a_6 , deux à deux¹³⁵. Neuf ayant été étudiées par lui, il en reste six :

$$(a_1, a_4) ; (a_1, a_6) ; (a_2, a_3)$$

$$(a_2, a_5) ; (a_3, a_5) ; (a_4, a_6)$$

Il démontre qu'elles sont à exclure car elles fournissent des relations qui ne sont pas celles issues de la "figure sécante"¹³⁶.

C'est encore un problème de trigonométrie sphérique qui permet à al-Bīrūnī d'avoir recours à des méthodes combinatoires. Comme Ibn Qurra, il résoudra des problèmes particuliers, sans aucune référence à des règles ou des résultats déjà établis ; mais, comme lui, il utilisera explicitement le concept général de combinaison avec, d'ailleurs, une formulation identique malgré la différence de nature des combinaisons traitées par l'un et par l'autre¹³⁷. Voici comment il procède :

Après avoir exposé sa propre démonstration de la relation issue de la "figure qui dispense", l'auteur des *Māqālīd* se propose "d'établir une classification des triangles sphériques puis d'indiquer comment en calculer des éléments inconnus à partir des éléments connus"¹³⁸, le but étant de déterminer, quand cela est possible, tous les éléments (côtés et angles) d'un triangle sphérique, à partir de la donnée d'un, de deux ou de trois de ces éléments.

Il commence par dénombrer les triangles selon la nature des angles formés intérieurement par leurs trois côtés. Pour cela, il détermine les combinaisons avec répétition de trois angles, trois à trois, en utilisant l'énumération suivante¹³⁹ :

- | | | | |
|-----|-----------|------|-----------|
| (1) | (a, a, a) | (6) | (d, d, a) |
| (2) | (d, d, d) | (7) | (d, d, o) |
| (3) | (o, o, o) | (8) | (o, o, a) |
| (4) | (a, a, d) | (9) | (o, o, d) |
| (5) | (a, o, o) | (10) | (a, d, o) |

Puis ces combinaisons sont regroupées par "classes" selon les deux critères "d'association" et de "réflexion"¹⁴⁰ ; ce qui donne :

(1,8) ; (3,5) ; (4,9) ; (2) ; (6) ; (7) ; (10)

Pour la résolution des triangles sphériques, le nombre de ces groupes est réduit à quatre :

(2) ; (6,7) ; (4,9,10) ; (1,8,3,5)

compte tenu des conditions de résolubilité suivantes :

(a)-Premier groupe :

Tous les éléments sont connus.

(b)-Second groupe :

Si l'angle non droit (ou son côté opposé) est connu, tous les éléments sont connus.

(c)-Troisième groupe :

Si deux éléments (autres que l'angle droit) sont connus, tous les autres sont connus. Comme les trois classes se ramènent à la quatrième, l'étude est faite pour cette dernière: L'auteur montre qu'elle contient quinze cas possibles et ce, "après énumération des combinaisons obtenues en associant, de toutes les façons possibles, deux des trois côtés ou des trois angles d'un triangle (...) de la quatrième classe"¹⁴¹. Le résultat est ensuite exposé dans un *Ṭaylasān*, configuration triangulaire non dénuée d'esthétique, qui reproduit le procédé lexicographique de l'énumération . Puis l'auteur passe à l'étude des cinq triangles non résolubles, correspondant aux cinq combinaisons avec angle droit et enfin à celle des dix triangles restants qui sont tous résolubles.

(d)-Quatrième groupe :

Si trois éléments sont connus, tous les autres le sont. Il s'agit, ici, d'examiner, parmi les vingt cas correspondant aux combinaisons des six éléments, trois à trois, ceux qui sont résolubles. L'auteur ne fait ni un dénombrement ni une étude systématiques, mais il s'intéresse aux cas suivants :

- (1)- Deux angles et un côté adjacent connus (3 cas).
- (2)- Deux angles et un côté non adjacent connus (6 cas).
- (3)- Deux côtés et un angle opposé connus (6 cas).
- (4)- Deux côtés et leur angle intérieur (3 cas)¹⁴².

Les deux cas restants (trois côtés ou trois angles connus) ne sont pas étudiés dans ce livre. Ils seront traités par Naṣīr ad-Dīn aṭ-Ṭūsī dans son Kitāb aṣ-Šakl al Qaṭṭā^c qui contient une étude plus systématique et plus détaillée des triangles sphériques, avec des considérations combinatoires supplémentaires comme, par exemple, les combinaisons avec répétition des trois types de côtés d'un triangle trois à trois, ainsi que le tableau des combinaisons compatibles des dix classes suivant les angles (déjà étudiées par al-Bīrūnī) et des dix classes suivant les côtés¹⁴³.

III.1.b- Combinatoire et algèbre :

(1)- L'exemple d'Abū Kāmil :

En écrivant son traité intitulé aṭ-Ṭarā'if fī-l-Ḥisāb qui traite de six problèmes d'oiseaux, Abū Kāmil, tout en exposant des méthodes de résolution pour les systèmes d'équations à plusieurs inconnues, avait en vue un problème de classification de ces types d'équations lorsque le domaine des solutions était réduit à l'ensemble des entiers positifs. Chacun de ces problèmes aboutit, après qu'il ait été exprimé en langage algébrique, à une équation de la forme :

$$x = f(y, z, u)$$

dont la résolution (dans \mathbb{N}) équivaut à un problème de dénombrement avec contrainte. En effet, il s'agit, à chaque fois, de calculer le nombre d'éléments de A (qu'on notera $\text{card}(A)$), avec :

$$A = \left\{ (x, y, z, u) \in \mathbb{N}^4 ; \left\{ \begin{array}{l} y = ak ; z = bm ; u = cn \\ x = g(y, z, u) ; x+y+z+u < d \end{array} \right. \right\}$$

où a, b, c, d sont des rationnels positifs, k, m, n , des entiers posi-

tifs et g une application linéaire affine.

Dans les trois cas où le résultat n'est pas immédiat (c'est-à-dire les problèmes III, IV et VI), le dénombrement s'obtient en considérant A comme une réunion de sous-ensembles A_i disjoints, à calculer $\text{card}(A_i)$, pour $1 \leq i \leq n$ et à aboutir à :

$$\text{card}(A) = \text{card}\left(\bigsqcup_1^n A_i\right) = \sum_1^n \text{card}(A_i)$$

Dans le problème III, par exemple, où il s'agit d'acheter, avec 100 dirhams (100d), 100 volatiles de quatre sortes, des oies à 4d l'une, des poulets à 1d l'un, des pigeons à 1d les deux et des moineaux à 1d les 10, l'auteur aboutit à la résolution, en nombres entiers, de l'équation indéterminée¹⁴⁴ :

$$x = \frac{3}{10}y + \frac{1}{6}z$$

D'où :

$$A = \left\{ (x, y, z, t) \in \mathbb{N}^4 ; x = \frac{3}{10}y + \frac{1}{6}z ; t = 100 - x - y - z \right\}$$

Il partage A en deux sous-ensembles :

$$A = B \sqcup C$$

avec :

$$B = \left\{ (x, y, z, t) \in A ; y = 10n ; z = 6k \right\}$$

$$C = \left\{ (x, y, z, t) \in A ; y = 10\left(n + \frac{1}{2}\right) ; z = 6\left(k + \frac{1}{2}\right) \right\}$$

Comme : $B \cap C = \emptyset$, on a :

$$\text{card}(A) = \text{card}(B) + \text{card}(C)$$

mais,

$$B = \bigsqcup_1^{12} B_k$$

avec :

$$B_k = \left\{ n \in \mathbb{N} ; (3n + k) + 10n + 6k < 100 \right\}$$

$$= \left\{ n \in \mathbb{N} ; n < \frac{100 - 7k}{13} \right\}$$

et :

$$C = \bigsqcup C_k$$

avec :

$$C_k = \left\{ n \in \mathbb{N} \cup \{0\} ; 3(n + \frac{1}{2}) + (k + \frac{1}{2}) + 10(n + \frac{1}{2}) + 6(k + \frac{1}{2}) < 100 \right\}$$

$$= \left\{ n \in \mathbb{N} \cup \{0\} ; n < \frac{90 - 7k}{13} \right\}$$

Pour déterminer $\text{card}(B_k)$ et $\text{card}(C_k)$, pour $1 \leq k \leq 12$ et $0 \leq k \leq 11$, respectivement, l'auteur procède par énumération à la manière d'Abū Kāmil. Il obtient finalement :

$$\begin{aligned} \text{card}(A) = \text{card}(B) + \text{card}(C) &= \sum_1^{12} \text{card}(B_k) + \sum_1^{11} \text{card}(C_k) \\ &= 45 + 53 = 98 \end{aligned}$$

et il conclut en donnant, dans un tableau, le procédé d'énumération qui lui a permis de déterminer le nombre des solutions. C'est le même procédé qu'il appliquera aux problèmes IV et VI.

La résolution de ces équations se ramène, en fait, au dénombrement avec contrainte de combinaisons de n objets deux à deux (pour III et IV) ou trois à trois (pour VI). C'est la présence de ces contraintes qui complique le dénombrement et éloigne Abū Kāmil du procédé lexicographique familier aux linguistes¹⁴⁵.

(2)- L'exemple d'as-Samaw'al :

Après Abū Kāmil, la combinatoire concrétisera des progrès réalisés dans deux domaines, celui de l'élaboration d'instruments algébriques comme le tableau des coefficients du binôme d'al-Karajī¹⁴⁶,

et celui de l'approfondissement de la réflexion sur les équations, que ce dernier avait abordé dans son livre al-Badī' ¹⁴⁷ et que poursuivra as-Samaw'al dans son Bāhir : Après avoir classé les problèmes à résoudre en problèmes nécessaires, possibles et impossibles, il subdivise ceux qui sont nécessaires en tenant compte du nombre de solutions et des conditions de compatibilité ; ce qui l'amène aux dénombrements suivants ¹⁴⁸ :

(I)- Classification selon le nombre de solutions :

Si on note S l'ensemble des solutions d'une équation, N l'ensemble des entiers positifs et \square , un carré rationnel, on a :

1. Tout nombre est solution ($\text{card}(S) > \text{card}(N)$).

Exemples :

$$\text{a)- } \frac{z}{x} + \frac{z}{y} = \frac{z \times z}{x \times y} \quad \text{et} \quad z = x + y$$

$$\text{b)- } x(4x) = \quad \text{ou} \quad x(9x) =$$

2. Les nombres ne sont pas tous solution, mais le nombre de solutions est infini ($\text{card}(S) = \text{card}(N)$).

Exemples :

$$\text{a)- } x + 10 = \square$$

$$x - 10 = \square$$

Si a et b vérifient :

$$x + 10 = a^2$$

$$x - 10 = b^2$$

$$\Rightarrow 20 = a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$$

Alors, pour tout $c \in \mathbb{Q}^+$ et $d \in \mathbb{Q}^+$ vérifiant :

$$c \times d = 20 \quad (1)$$

on a :

$$a + b = c \quad \text{et} \quad a - b = d$$

d'où :

$$a = \frac{c + d}{2} \quad \text{et} \quad b = \frac{c - d}{2}$$

donc :

$$x = \left(\frac{c + d}{2}\right)^2 - \frac{cd}{2} \quad \text{ou} \quad x = \left(\frac{c - d}{2}\right)^2 + \frac{cd}{2}$$

Comme il y a une infinité de couples (c,d) vérifiant (1), le problème a une infinité de solutions.

b)- Décomposer un carré c^2 en somme de deux carrés.

Il ne donne pas le procédé qui devait être classique à l'époque, mais renvoie à la proposition suivante qui est, en même temps, son troisième exemple : Construire un triangle, rectangle en nombre, dont on connaît l'un des côtés de l'angle droit. Cela équivaut à résoudre dans Q^+ :

$$x^2 + a^2 = c^2 ; a \in Q^+, \text{ donné. (2)}$$

Les solutions d'as-Samw'al sont de la forme :

$$x = \frac{a^2 - b^2}{2b} ; b \in Q^+ \text{ et } b < a.$$

Elles sont donc en nombre infini (dénombrable)¹⁴⁹. Il déduit de cela la décomposition de c^2 d'une infinité de manières¹⁵⁰.

3. Le nombre des solutions est grand, mais fini:
($\text{card}(S) < \text{card}(N)$).

Exemple :

$$\begin{cases} x + y + z = 100 \\ 2x + \frac{y}{2} + \frac{z}{3} = 100 \end{cases}$$

On a dans ce cas : $\text{card}(S) = 6$, avec :

$$x \in \{k ; 34 \leq k \leq 39\}$$

$$y \in \dot{0} \text{ mod}(10) \cap \{k ; 10 \leq k \leq 60\}$$

$$z \in \dot{6} \text{ mod}(9) \cap \{k ; 6 \leq k \leq 51\}$$

4. Le problème a une seule solution ($\text{card}(S) = 1$)

Exemple :

a et b étant donnés, trouver $x \in Q^+$ tel que :

$$xa = u \text{ et } xb = u^2 ; u \in Q^+, \text{ quelconque.}$$

D'où :

$$xa = x^2 b^2 \text{ et } x = \frac{a}{b^2}$$

(II)- Classification selon le nombre de conditions de compatibilité :

1. Une condition¹⁵¹ :

Exemples :

a)- Etant donné a et b, trouver x et y tels que :

$$x^2 + y^2 = a$$

$$xy = b$$

La condition est : $a \geq 2b$.

b)- Etant donné a_1, a_2, a_3 dans \mathbb{Q}^+ , trouver x,y,z solutions du système :

$$x + y = a_1$$

$$x + z = a_2$$

$$y + z = a_3$$

La condition est : $a_j < \frac{1}{2} \left(\sum_1^3 a_i \right)$; $1 \leq j \leq 3$.

2. Plusieurs conditions :

Il s'agit de trouver dix nombres (entiers) tels que la somme de six d'entre eux soit égale à un nombre donné¹⁵².

Cela permet à l'auteur d'effectuer trois dénombrements en procédant à des énumérations d'objets de natures différentes : Des équations, des conditions de compatibilité et des solutions. Le nombre d'équations qu'il obtient est 210, c'est-à-dire C_{10}^6 (qui correspond à C_p^n dans le cas général). Il aboutit à ce résultat en procédant à l'énumération systématique de toutes les équations, énumération grandement facilitée d'ailleurs par l'écriture symbolique des équations et des inconnues.

Le nombre de conditions de compatibilité, obtenu également par énumération vaut $9 \times C_8^5$ (qui correspond à $(n-1)C_{n-2}^{p-1}$ dans le cas général). En imposant une condition supplémentaire au problème, il montre que l'on peut réduire considérablement le nombre des équations et des conditions de compatibilité. Il aboutit ainsi à un système de 9 équations à 10 inconnues (avec une seule condition de compatibilité)

qui fournit une infinité de solutions dans \mathbb{R}^+ ou dans \mathbb{Q}^+ , mais seulement quatre, différentes de zéro, dans \mathbb{N} . D'ailleurs, ce résultat est également de nature combinatoire dans la mesure où il correspond au partage de l'entier 5 en somme de deux entiers.

3. Aucune condition :

Il s'agit de trouver x, y, z dans \mathbb{R}^+ tels que :

$$xy = 10$$

$$yz = 20$$

$$xz = 30$$

L'auteur résoud ce système de trois manières différentes¹⁵³.

REMARQUES :

(1)- Au-delà de leurs diversités et de leurs degrés de complexité, les problèmes de nature combinatoire résolus dans les quatre exemples, tirés de l'astronomie et de l'algèbre, ont tous un point commun : L'absence de référence explicite à des résultats combinatoires extérieurs à ces domaines et pouvant servir de modèles ou simplement d'exemples. Mais, contrairement à l'astronomie, aucun élément de la terminologie combinatoire n'accompagne ces manipulations dans les problèmes d'Abū Kāmil et d'as-Samaw'al que nous avons exposés. Cela pourrait être une conséquence, à la fois de la spécialisation poussée de ces mathématiciens, et du cloisonnement entre les disciplines qui étaient susceptibles d'aborder ce type de problèmes.

(2)- Les exemples que nous avons donnés ne sont pas particuliers au centre et à l'est de l'Empire. Ils ne visent qu'à illustrer l'apparition de préoccupations combinatoires dans divers secteurs de l'activité mathématique arabe, indépendamment du lieu où elle s'est exercée. Cela est particulièrement vrai en astronomie où des problèmes semblables ont suscité le même intérêt et fait l'objet de recherches parallèles en Orient et en Occident musulman. Les travaux d'al-Jayyānī, de Jābir Ibn Aflah, entre autres, en offrent quelques exemples¹⁵⁴. C'est également vrai en arithmétique, comme nous avons l'intention de le montrer dans la suite de cette étude.

III.2. La combinatoire au Maghreb

Nous n'avons pas suffisamment d'éléments pour pouvoir affirmer que les problèmes de nature combinatoire apparus dans le cadre de l'astronomie et de l'algèbre, et dont nous venons d'évoquer quelques aspects, étaient connus des mathématiciens maghrébins avant le XIII^e siècle et, s'ils l'étaient, rien ne permet de dire que la nature combinatoire de chacun d'eux ait été perçue et dégagée. Cela paraît en tout cas très improbable pour les dénombrements associés à l'analyse indéterminée d'Abū Kāmil, et à fortiori pour les coefficients du binôme, dont l'obtention, strictement algébrique et basée sur la commutativité du produit, cache complètement l'aspect combinatoire¹⁵⁵.

Par contre, deux domaines extérieurs aux mathématiques ont constitué sans aucun doute un champs d'initiation à des exercices de même nature : Il s'agit de la linguistique et de l'astrologie. Ces deux activités ne sont ni nouvelles ni propres au Maghreb¹⁵⁶. Mais, au cours des siècles qui nous intéressent, elles bénéficieront d'un réel dynamisme. On assiste ainsi à un regain d'intérêt tel pour la première, que même des mathématiciens se consacreront à son étude. Ce n'est pas un hasard d'ailleurs que ce soit Ibn al-Bannā', l'auteur de plusieurs ouvrages sur le sujet, qui aura, en mathématiques, les préoccupations combinatoires les plus conséquentes¹⁵⁷. Quant à la seconde, elle bénéficiera, grâce en particulier à son succès dans les classes dirigeantes, d'un développement et d'une extension prodigieux, essentiellement à travers un de ses domaines que l'on pourrait appeler l'astrologie des signes (par opposition à celle qui puise dans l'astronomie) et qui repose précisément sur des manipulations variées et complexes de nombres et de lettres, ces dernières symbolisant elles-mêmes des valeurs numériques précises. On fait allusion, ici, à la géomancie (khaṭṭ ar-raṃl), à l'onomatomancie arithmétique (ḥisāb an-nīm), aux tableaux divinatoires circulaires (zāyrija), à la simiyyā et enfin aux divers types de carrés magiques : numériques ou alphabétiques, avec ou sans contrainte, d'ordre pair ou impair¹⁵⁸.

L'aspect rationnel de cette astrologie utilise d'une manière essentielle des manipulations arithmétiques ou combinatoires. C'est ainsi que l'on se sert de la partition de l'alphabet en classes modulo 4 pour la *simiyyā*, en classes modulo 9 pour le *ḥisāb an-nīm* et en classes modulo 12 pour les *zāyrija*, et cela en substituant aux opérations sur les entiers celles sur les classes d'équivalence¹⁵⁹. Les autres aspects de cette astrologie puisent plutôt dans une pratique combinatoire : Dénombrement de suites de pairs et d'impairs pour le *khatt ar-raml*¹⁶⁰, permutations d'éléments d'une configuration pour en obtenir d'autres de même ordre dans la confection des carrés magiques¹⁶¹.

Mais si l'astrologie n'a fait qu'utiliser des résultats et des opérations arithmétiques connus et maîtrisés depuis longtemps, on ne peut rien affirmer de tel lorsqu'il s'agit de la combinatoire. Il est difficile en effet de décider laquelle des deux a pu influencer l'autre, et de quelle manière.

En tout cas, une chose est sûre : Au XIII^e siècle, et peut-être bien avant, des préoccupations combinatoires apparaissent chez des mathématiciens maghrébins. Des problèmes sont posés et résolus par des raisonnements à caractère combinatoire, une terminologie, née des besoins de la linguistique, acquiert un statut mathématique, un formulaire nouveau est établi pour devenir un instrument opérant sur des objets mathématiques.

Mais, à défaut d'une connaissance détaillée des différents aspects de cette activité depuis ses débuts, nous nous contenterons, ici, de dégager à grands traits certains faits saillants et d'avancer quelques conjectures :

I. Dès la fin du XII^e siècle ou le début du XIII^e, les opérations et les résultats obtenus en linguistique sont intégrés à un chapitre des "opérations du calcul". C'est ce que fera Ibn Mun'im dans son *Fiqh al-Ḥisāb* ou dans un autre ouvrage dont le titre nous est inconnu. L'information qui est donnée par Ibn al-Bannā' dans son *Tanbīh al-Albāb* mentionne en effet la confection par Ibn al-Mun'im d'un tableau donnant les combinaisons des vingt huit lettres de l'alphabet, p à p¹⁶². Pour des raisons matérielles évidentes -sans par-

ler du peu d'intérêt de l'opération- il est difficile d'admettre que ce tableau consistait en une énumération des combinaisons p à p des 28 lettres, avec $2 \leq p \leq 28$; un livre entier n'y aurait pas suffi¹⁶³. D'ailleurs, un travail similaire mais plus utile avait déjà été fait par les lexicographes. Il est plus raisonnable de penser que le tableau contenait les différentes valeurs des C_n^p , pour $n = 28$ et pour $2 \leq p \leq 5$ (ou pour $2 \leq n \leq 28$ et $1 \leq p < n$)¹⁶⁴. C'est en tout cas l'hypothèse que suggère la remarque d'Ibn al-Bannā'.

II. On peut dater de la fin du XIII^e siècle au plus tard, le nouveau pas franchi dans l'activité combinatoire au Maghreb. Les formules exprimant le nombre de permutations de n objets, celui des combinaisons et des arrangements de n objets p à p sont, non seulement données, mais leurs démonstrations sont établies. Ibn al-Bannā', en revendiquant explicitement une partie de ces résultats, en fournit les preuves dans au moins deux de ses ouvrages : Le Tanbīh al-Albāb et le Raf' al-Hijāb.

Dans le premier (qui est un recueil de problèmes provenant, en grande partie de domaines extérieurs aux mathématiques), l'auteur n'aborde que les permutations et les combinaisons : Dans le problème n° 14, intitulé "question tirée de la linguistique", il énonce, pour les 28 lettres de l'alphabet, mais dans une formulation générale, les règles permettant le calcul des P_n et des C_n^p , pour $n \geq 2$ et $2 \leq p < n$ ¹⁶⁵.

Mais c'est dans le Raf' al-Hijāb, ouvrage mathématique conçu par son auteur, à la fois comme un commentaire partiel et un complément du Talkhīs, que l'on trouve le plus d'éléments sur ce sujet. Les résultats y sont rattachés à la théorie des nombres par l'intermédiaire des nombres-polygones qui sont exposés dans le chapitre de l'addition, juste après les résultats sur les séries de puissances¹⁶⁶. Comme pour les séries, une correspondance est établie entre certaines valeurs des combinaisons -les C_n^p pour $1 \leq p \leq 3$ et $n \geq 2$ - et certains éléments du tableau des nombres-polygones¹⁶⁷.

Cette démarche arithmétique n'est pas fortuite. Elle exprime, selon nous, la perception nette qu'a eu l'auteur de la liaison étroite, à la fois au niveau des résultats et des démonstrations, entre

méthodes arithmétiques et méthodes combinatoires.

On peut préciser, à ce sujet, que si, au niveau des résultats, c'est le tableau des nombre-polygones qui assure la liaison entre les deux disciplines, au niveau des démonstrations, ce sont les différentes méthodes d'induction -utilisées d'ailleurs avec beaucoup de maîtrise- qui justifient l'intégration des résultats combinatoires au vaste chapitre de la théorie des nombres. Cette utilisation est systématique dans le chapitre du Raf^c al-Hijāb que nous analyserons plus bas, et elle n'est abandonnée par l'auteur qu'au profit de raisonnements arithmétiques généraux sur des propositions $P(n)$ à indice n quelconque. D'une façon plus précise et, pour reprendre les termes de M. Freudenthal¹⁶⁸, complétés par R. Rashed¹⁶⁹, Ibn al-Bannā' utilise une définition récurrente de type R_1 pour le tableau des nombres-polygones, une récurrence primitive dite "regression" pour établir les sommes de séries finies à n termes et, enfin, une induction de type "quasi-générale" mais opérant, cette fois, sur des propositions à double indice $P(i, j)$, j étant absolument quelconque. Sur un plan plus général, il faut remarquer que ces démarches d'Ibn al-Bannā' illustrent parfaitement le rôle complémentaire que jouent deux traditions arithmétiques, l'une découlant des Livres VII, VIII et IX des Éléments d'Euclide et reposant sur des raisonnements généraux, et l'autre, issue de l'Introduction Arithmétique de Nicomaque qui fait grand usage des méthodes inductives à la fois dans les définitions et dans les démonstrations.

Quant à la manière dont l'auteur du Talkhīs utilise le tableau des nombres-polygones, on ne peut s'empêcher de la comparer à la démarche que suivra Pascal, trois siècles plus tard, dans son petit traité sur les combinaisons¹⁷⁰. Dans les deux cas, une configuration de nombres est étudiée. Les relations internes sont dégagées sous forme de règles qui serviront, au moyen de bijections appropriées, à établir des résultats de natures mathématiques différentes. Mais là s'arrête le parallèle, car si Pascal, délaissant le raisonnement direct (jugé par lui difficile)¹⁷¹, exploitera complètement son tableau de nombres, Ibn al-Bannā' lui, ne pourra pas pousser très loin cette démarche et s'arrêtera à $p = 3$. La raison à cela doit être

cherchée dans la nature même du tableau des nombres-polygones qui, comparé à celui des coefficients du binôme, ne permet pas les développements féconds auxquels a abouti Pascal. Cela pourrait expliquer d'ailleurs, en partie, la recherche et l'établissement par Ibn al-Bannā' d'une démonstration directe pour $p > 3$, celle-là même qui rebutera Pascal.

III. Le caractère général de la formulation et du raisonnement, et surtout l'utilisation des résultats montrent, à l'évidence, que pour Ibn al-Bannā' et d'autres mathématiciens après lui, les opérations et les formules combinatoires ne se réduisent plus à des manipulations de lettres de l'alphabet ; elles sont désormais conçues comme des instruments opérant dans différents domaines : Astronomie, algèbre, géométrie, arithmétiques, pour reformuler des résultats anciens ou pour en établir d'autres.

C'est ainsi que, dans le Raf^c al-Hijāb, s'il se contente d'évoquer les carrés magiques qu'il ne juge pas utile d'insérer dans son livre, à cause de leur longueur et de leur peu d'utilité (en Mathématique)¹⁷², il traite par contre dans le détail l'aspect combinatoire lié aux rapports composés, en reprenant sans le citer le travail de Thābit Ibn Qurra sur la "Figure Sécante" qu'il devait vraisemblablement connaître : Toutes les propositions de l'ouvrage sont ramenées à une seule :

$$a_1 a_4 a_6 = a_2 a_3 a_5 \quad (1)$$

qui lui permet de déduire toutes les autres relations équivalentes en raisonnant sur les arrangements issus de (1)¹⁷³.

Dans ce même traité, il dénombre les différentes équations qui découlent d'une progression géométrique ou arithmétique lorsqu'on considère chacune d'elles comme un ensemble d'éléments la caractérisant. Une progression arithmétique est ainsi identifiée à l'ensemble à cinq éléments composé de u_1 , de n , de u_n , de la raison r , et de la somme S . Les différentes partitions de cet ensemble en deux sous-ensembles A et B d'éléments respectivement connus et inconnus correspondent au nombre d'équations cherchées. Pour déterminer ce

nombre, il utilise (sans le dire) la formule donnant les combinaisons de n objets p à p ¹⁷⁴. C'est exactement la même démarche qu'il adopte dans son petit opuscule de géométrie élémentaire rédigé en 692 H. et destiné à ses étudiants ; mais, ici, ce sont des figures géométriques classiques qui sont identifiées à l'ensemble de leurs éléments constitutifs¹⁷⁵. Enfin, dans son livre connu sous le titre de "Arba^c Maqālāt", il dénombre les différentes combinaisons d'entiers et de fractions liés par les opérations arithmétiques élémentaires¹⁷⁶.

Ces dénombrements d'objets très différents ont été possibles grâce à une perception nette de la bijection qui s'établit entre un ensemble fini de nature quelconque et un sous-ensemble de l'alphabet jouant, de fait, le rôle d'ensemble abstrait¹⁷⁷. C'est là un pas de plus dans la symbolisation mathématique puisque, désormais, pour opérer sur des objets quelconques, on se contentera de manipuler des lettres. Ibn al-Bannā' dans Raf^c al-Hijāb et, plus tard, Ibn Haydūr dans son Jāmi^c le diront explicitement¹⁷⁸.

Les exemples que nous venons de donner et d'autres encore plus variés que nous exposerons plus loin, laissent deviner une préoccupation commune, malheureusement non formulée, concernant le but assigné aux manipulations combinatoires et aux dénombrements d'une manière générale : Contrairement à leur utilisation en linguistique où le but se limitait au résultat du dénombrement, en mathématique ces opérations ont toujours accompagné l'idée d'extension du champs d'application de certaines propositions, aboutissant ainsi à une classification de fait de ces propositions en fonction de leurs domaines d'application, c'est-à-dire selon le nombre plus ou moins grand d'objets sur lesquels elles opèrent. Cela est nettement suggéré dans le chapitre des Arba^c Maqālāt où Ibn al-Bannā' traite des fractions¹⁷⁹.

IV. Sans que l'on puisse en préciser le processus, on assiste, à partir d'Ibn al-Bannā' au moins, à une prise de conscience vis-vis des problèmes de dénombrement en général et ce, dans des domaines très variés et pas toujours mathématiques. Ainsi, l'auteur du Tal-khīs consacre une partie de son Tanbīh al-Albāb à des problèmes de

ce type : Énumération des différents cas d'héritage possibles lorsque les héritiers sont n garçons et p filles (problème n° 1). Énoncé de toutes les situations où l'ablution, avec de l'eau, est nécessaire et de celles où elle est permise sans eau, c'est-à-dire par le tayammum (problème n° 2). Dénombrement, selon les exigences du rite malékite, des prières à effectuer pour compenser l'oubli de certaines d'entre elles (problème n° 4). Réduction à un nombre fini de figures d'un ensemble infini dénombrable de cas possibles concernant un contrat de vente entre six associés et un vendeur (problème n° 11). Dénombrement des 272160 lectures possibles d'une même phrase selon les règles de la grammaire arabe (problème n° 15)¹⁸⁰.

C'est la même préoccupation qui semble l'avoir motivé pour la rédaction de son opuscule sur l'héritage intitulé " Fī-l-Farā'id " qui se réduit à un dénombrement et une classification méthodique de tous les cas possibles dans ce domaine¹⁸¹.

V. Cette démarche sera poursuivie, au XIV^e siècle, par certains de ses commentateurs comme Ibn Haydūr et Ibn Qunfūdh au Maghreb ou comme Ibn al-Majdī en Egypte. Le travail antérieur est assimilé et d'autres résultats viennent le généraliser ou le compléter : Dénombrement de systèmes d'équations chez Ibn Haydūr, par exemple¹⁸², résultats sur les arrangements avec répétition et sur le dénombrement des équations polynomiales de degré supérieur à trois, chez Ibn al-Majdī¹⁸³.

La présence chez ces différents auteurs d'un même vocabulaire combinatoire et le fait qu'aucun d'eux n'ait revendiqué explicitement ces résultats, renforcent le caractère de continuité des préoccupations combinatoires depuis Ibn Muḥim au moins.

VI. Or, à notre avis, cela n'a pu se réaliser sans que cette activité ait été intégrée dans l'enseignement mathématique de l'époque, ou du moins dans celui de certains professeurs. L'existence d'éléments combinatoires dans plusieurs commentaires du Talkhīs est un premier argument en faveur de cette hypothèse. Ibn Khaldūn nous en offre un second: Il s'agit des éléments mathématiques contenus dans la paragraphe de la Muqaddima qui traite de la linguistique. En même temps que les résultats classiques (transmis depuis Khalīl¹⁸⁴) concernant les combinaisons et les arrangements des lettres de l'al-

phabet, l'auteur y reproduit les démonstrations (enseignées, peut-être, par son professeur al-Ābilī, lui-même élève d'Ibn al-Bannā') qui permettent d'établir C_n^2 et C_n^3 . Mais, dans la seconde preuve, s'introduit une erreur de raisonnement -et non de calcul- qui révèle, à notre avis, la difficulté d'assimilation du raisonnement comparée par exemple à l'aisance acquise dans les manipulations algébriques¹⁸⁵.

VII. Les éléments que nous venons d'exposer montrent à l'évidence que dès la fin du XII^e siècle, on assiste à un début d'élaboration d'un chapitre nouveau en Mathématique. Des opérations, des relations et des ensembles différents d'objets sont appréhendés à travers leur unité combinatoire. Des résultats sont établis. Un raisonnement de type combinatoire vient s'ajouter à ceux déjà existants tels que l'analyse et la synthèse, le raisonnement par l'absurde ou les méthodes inductives.

Une question vient alors naturellement à l'esprit : Toutes ces conditions, renforcées peut-être par une activité combinatoire extérieure au domaine mathématique traditionnel, ont-elles permis l'apparition dans certains manuels d'enseignement du XIV^e siècle d'un chapitre supplémentaire distinct de celui traitant des séries numériques finies et présenté d'une manière plus systématique que la partie consacrée à ce sujet dans le Raf^e al-Hijāb ?

Cela ne nous paraît pas impossible, compte tenu de tous les éléments que nous venons d'évoquer et des informations dont nous disposons concernant l'activité mathématique dans le Sud de la France, à la même époque.

On sait en effet qu'en 1321, c'est-à-dire exactement l'année de la mort d'Ibn al-Bannā', le mathématicien français de Provence Lévi Ben Gerson rédigeait son livre intitulé "Sefer Ma'aseh Ḥosab" dans lequel il incluait un court chapitre (le quatrième) sur la combinatoire¹⁸⁶. Or le contenu des autres parties de ce traité et leur disposition, comparés à la matière du Talkhīs ou au livre d'al-Ḥaṣṣār, militent en faveur d'une connaissance directe, de la part de son auteur, de certains aspects des mathématiques arabes de l'époque¹⁸⁷.

D'autre part, il est difficile d'admettre que l'activité cabalisti-

que propre à son environnement ait été l'unique facteur qui lui aurait permis, non seulement l'établissement de formules combinatoires, mais également leur insertion -comme formules et opérations mathématiques- dans un chapitre autonome de l'arithmétique pratique. Ce sont tous ces éléments qui nous font penser que Lévi Ben Gerson était également au courant de certains aspects de l'activité combinatoire au Maghreb ; ce qui n'exclut pas, évidemment, qu'il ait pu avoir, dans ce domaine et indépendamment des maghrébins une contribution personnelle dans l'établissement de certains résultats et dans la mise en évidence de ce chapitre nouveau.

Si ces hypothèses se confirmaient, les débuts de la combinatoire en Europe apparaîtraient à la fois comme un aboutissement et un prolongement d'une longue activité commencée, un siècle plus tôt, sur la rive sud de la Méditerranée.

Quoi qu'il en soit, les résultats que nous allons maintenant exposer dans le détail suggèrent, à eux seuls, un réexamen de l'histoire de cette discipline, en particulier celle de ses débuts en Europe et même celle de sa réactivation à partir du XVI^e siècle, avec les travaux de Mersenne et de Frénicle.

* * * * *

NOMBRES-POLYGONES, SERIES ET COMBINAISONS.

1. Définition :

Soit n et m , des entiers positifs quelconques, mais fixés. On notera:

$$P_2^j, P_3^j, P_4^j, \dots, P_m^j; \quad 1 \leq j \leq n.$$

des suites d'entiers, appelés respectivement côtés de longueur j , nombre-trigones, nombres-tétragones, nombres-polygones à m côtés, et qui sont définis ainsi¹⁸⁸ :

$$P_i^1 = 1 \quad ; \quad 2 \leq i \leq m.$$

$$P_3^j = j + P_3^{j-1} \quad ; \quad 2 \leq j \leq n.$$

$$(1) \quad P_i^j = P_3^{j-1} + P_{i-1}^j \quad ; \quad 3 < i \leq m \quad \text{et} \quad 2 \leq j \leq n.$$

L'ensemble de ces suites constitue le tableau suivant, à $(m-1)$ lignes et à n colonnes (que nous réduisons, comme Ibn al-Bannā' à $n=5$ et $m=6$)¹⁸⁹ :

	P_i^1	P_i^2	P_i^3	P_i^4	P_i^5
P_2^j	1	2	3	4	5
P_3^j	1	3	6	10	15
P_4^j	1	4	9	16	25
P_5^j	1	5	12	22	35
P_6^j	1	6	15	28	45

2. Propriétés des colonnes :

$(P_i^1)_i$: Suite de raison 0 [et commençant par 1]¹⁹⁰

$(P_i^2)_i$: Suite de raison P_3^1 et commençant par 2

$(P_i^3)_i$: Suite de raison P_3^2 et commençant par 3

⋮

(2) $(P_i^j)_i$: Suite de raison P_3^{j-1} [commençant par j]¹⁹¹

[En effet :

$$P_{i+1}^j - P_i^j = (P_3^{j-1} + P_i^j) - P_i^j = P_3^{j-1}, \text{ d'après (1)].}$$

Et toutes les colonnes sont des suites arithmétiques.

3. Propriétés des lignes :

$(P_2^j)_j$: Suite de raison 1

$(P_3^j)_j$: Suite de raison U_3^{j+1} , avec $U_3^{j+1} - U_3^j = 1$

(3) $(P_4^j)_j$: Suite de raison U_4^j ; avec $U_4^{j+1} - U_4^j = 2$

⋮

(4) $(P_i^j)_j$: Suite de raison U_i^j , avec $U_i^{j+1} - U_i^j = i-2$

[En effet :

$$\begin{aligned} P_i^{j+1} - P_i^j &= (P_3^j + P_{i-1}^{j+1}) - (P_3^{j-1} + P_{i-1}^j), \text{ d'après (1)} \\ &= (P_3^j - P_3^{j-1}) + (P_{i-1}^{j+1} - P_{i-1}^j) \\ &= j + U_{i-1}^j \end{aligned}$$

et U_{i-1}^j est de raison $(i-1)-2$ ¹⁹¹.

Corollaire I.

[Soit (u_k) la suite des entiers naturels, avec $u_1 = 1$. Soit (u_{2k}) et (u_{2k-1}) respectivement les suites d'entiers pairs et impairs].

Alors :

$$1) - \sum_1^j u_k = P_3^j$$

[En effet :

$$u_k = 1 + \sum_1^j (P_3^{k+1} - P_3^k) = P_3^j]$$

$$2) - j^2 = \sum_1^j u_{2k-1} = P_4^j$$

$j^2 = \sum_1^j u_{2k-1}$ sera démontrée dans le corollaire III-2 ; et :

$$\sum_1^j u_{2k-1} = 1 + \sum_1^{j-1} (P_4^{k+1} - P_4^k) = P_4^j, \text{ d'après (2) .}$$

3) - Si (v_k) est une suite de raison 3 et $v_1=1$:

$$\sum_1^j v_k = P_5^j$$

[d'après (3) pour $i=5$].

4) - Si (w_k) est une suite de raison 4 et $w_1=1$:

$$\sum_1^j w_k = P_6^j$$

[d'après (3) pour $i=6$].

Et ainsi de suite pour tous les cas :

$$\left[1 + \sum_1^{j-1} (p_{k+1}) = P_{p+2}^j \right]^{192}$$

Corollaire II.

1) - $\left(\frac{1}{j}P_3^j\right)$ est une suite de raison $\frac{1}{2}$

$\left(\frac{1}{j}P_4^j\right)$ est une suite de raison $2 \times \frac{1}{2}$

⋮

$\left(\frac{1}{j}P_i^j\right)_j$ est une suite de raison $(i-2) \times \frac{1}{2}$ (5)

2) - $\left(\frac{1}{j}P_i^j\right)_i$ est une suite de raison $(j-1) \times \frac{1}{2}$ et de premier terme égal à 1. (6)

3)- $\sum_1^n P_i^j / \sum_1^n j$, pour i fixé, est une suite (u_n) de raison $(i-2)/3$; $i \geq 3$ [et $u_1=1$].

Ainsi :

$$\sum_1^n P_3^j / \sum_1^n j \text{ est une suite de raison } \frac{1}{3}$$

⋮

$$\sum_1^n P_6^j / \sum_1^n j \text{ est une suite de raison } 1 + \frac{1}{3}$$

4)- $\sum_1^n P_i^j / \sum_1^n j$, pour n fixé, est une suite (v_i) de raison $(n-1)/3$, avec $v_1=1$

Exemples :

1)- Recherche de P_8^5 :

a)- $P_8^{j+1} - P_8^j = u_j$ est une suite de raison $r=6$, avec $u_1=1$, d'après (3). Donc, $u_5 = 25$, par la formule du Talkhis: $[u_n = u_1 + r(n-1)]$; donc, $P_8^5 = 65$, par la formule du Talkhis :

$$[P_8^5 = \sum_1^5 u_j \text{ et } \sum_1^n u_j = \frac{n}{2}(u_1 + u_n)]$$

b)- D'après (4), P_8^5 est le 7^e élément de la suite commençant par 5 et de raison $P_3^4 = 10$; d'où :

$$P_8^5 = 5 + P_3^4(7-1) = 65$$

par la formule.

c)- D'après (5), $\frac{1}{j}P_8^j$ est une suite de raison $(8-2)\frac{1}{2} = 3$

d'où : $\frac{1}{5}P_8^5 = 1 + 3(5-1) = 13$ et $P_8^5 = 65$

d)- D'après (6), $\frac{1}{5}P_1^5$ est une suite de raison $(5-1)\frac{1}{2}$, donc :

$$\frac{1}{5}P_8^5 = 1 + 2(7-1) = 13$$

2)- Recherche de P_i^j , pour i et j donnés, quelconques.

a)- Par la i^e suite horizontale : On calcule le plus grand terme: $[1+(i-2)(j-1)]$, et la somme : $[(j/2)(1+(1+(i-2)(j-1)))]$.

b)- Par la j^e suite verticale, de raison P_3^{j-1} : On calcule le plus grand terme : $[j + P_3^{j-1}(i-2)]$.

c)- Par les suites (5) et (6), puis par multiplication par le dénominateur $[j]$. [Donc :

$$j(1 + \frac{(i-2)}{2}(j-1)) = j(1 + \frac{(j-1)}{2}(i-2))]$$

3)- Calcul de : $\sum_1^n j^2$

a)- D'après le corollaire II.3, $\frac{\sum_1^m P_4^j}{\sum_1^m j}$ est une suite de raison $\frac{2}{3}$ et de premier terme 1. Donc¹⁹³:

$$\frac{\sum_1^n P_4^j}{\sum_1^n j} = 1 + \frac{2}{3}(n-1)$$

D'où :

$$\begin{aligned} \sum_1^n j^2 &= \sum_1^n P_4^j = (1 + \frac{2}{3}(n-1))(\sum_1^n j) \\ &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \end{aligned}$$

b)- On calcule $(u_{2k})^2$ et $(u_{2k-1})^2$ selon le procédé qui va suivre et on aura :

$$\sum_1^n j^2 = \sum_1^n (u_{2j})^2 + \sum_1^n (u_{2j-1})^2$$

Corollaire III.

1)- Si (u_k) , (u_{2k}) , (u_{2k-1}) sont les suites d'entiers respectivement successifs, pairs et impairs, on :

$$P_3^n = \left(\frac{1}{2}u_n\right)u_{n+1} \quad \text{et} \quad 2P_3^n = u_{n+1}(u_{n+1} - 1)$$

car :
$$P_3^n = u_n + P_3^{n-1} .$$

[Donc, par récurrence descendante :

$$\begin{aligned} P_3^n &= u_n + u_{n-1} + \dots + u_1 \\ &= \frac{1}{2}(u_n u_{n-1}) \end{aligned}$$

$$2) - \sum_1^{2n-1} P_3^j = \sum_1^n (u_{2k-1})^2 \quad \text{et} \quad \sum_1^{2n} P_3^j = \sum_1^n (u_{2k})^2$$

Preuve de 2). :

En effet, d'après la propriété d'une série arithmétique et d'après la relation :

$$j(u_{j+k} + u_{j-k})/2 = j^2$$

on a :

$$j^2 = P_3^{j-1} + P_3^j \quad ; \quad j > 1$$

[car :
$$j^2 = j(u_{j+k} + u_{j-k})/2 = \sum_1^j u_{2k-1} = P_4^j = P_3^{j-1} + P_3^j$$

d'après (1) et le corollaire I.2.

D'où :

$$\sum_1^{2n-1} P_3^j = 1 + \sum_1^{n-1} (P_3^{2k} + P_3^{2k+1}) = \sum_1^n (u_{2k-1})^2$$

De même :

$$\sum_1^{2n} P_3^j = \sum_1^n (P_3^{2k-1} + P_3^{2k}) = \sum_1^n (u_{2k})^2 \quad | .$$

Exemple :
$$\sum_1^5 P_3^j = 1^2 + 3^2 + 5^2 \quad \text{et} \quad \sum_1^4 P_3^j = 2^2 + 4^2$$

$$3) - \sum_1^n P_3^j = \left(\frac{n-1}{3} + 1\right)P_3^n = \left(\frac{n+2}{3}\right)P_3^n$$

[car, d'après le corollaire II.4. :

$$\sum_1^n P_3^j / \sum_1^n j = 1 + \frac{1}{3}(n-1)$$

C'est la règle qui permet de calculer les sommes des carrés des entiers pairs et impairs.

[En effet :

$$\begin{aligned} \sum_1^n (u_{2k-1})^2 &= \sum_1^{2n-1} P_3^j && \text{(corollaire III.2.)} \\ &= \left(\frac{2n+1}{3}\right) P_3^{2n-1} = \left(\frac{2n+1}{3}\right) \frac{1}{2}(2n+1)2n \end{aligned}$$

d'après le corollaire III.3.].

Corollaire IV.

Il est clair que [pour $n \geq 2$] :

$$\begin{aligned} (P_4^j)_{1 \leq j \leq n} &= (P_3^j)_{1 \leq j \leq n} + (P_3^j)_{1 \leq j \leq n-1} \\ (P_5^j)_{1 \leq j \leq n} &= (P_4^j)_{1 \leq j \leq n} + (P_3^j)_{1 \leq j \leq n-1} \\ \vdots & \\ (P_i^j)_{1 \leq j \leq n} &= (P_{i-1}^j)_{1 \leq j \leq n} + (P_3^j)_{1 \leq j \leq n-1} \end{aligned}$$

Donc $(\sum_1^n P_i^j)_i$ est une progression arithmétique, de raison $\sum_1^{n-1} P_3^j$, de premier terme¹⁹⁴ : $\sum_1^n P_3^j$

Donc, pour i fixé :

$$\sum_1^n P_i^j = (i-3) \times \sum_1^{n-1} P_3^j + \sum_1^n P_3^j$$

APPLICATION (I) : Séries de nombres-polygones.

$$(1) : \sum_1^5 P_7^j = 115, \text{ d'après les corollaires III.2 et IV, ou II.3.}$$

$$(2) : \sum_1^{10} P_1^3 = 405, \text{ d'après la propriété des colonnes et la formule du Talkhīs.}$$

(3) : Calcul de¹⁹⁵ $\sum_{i=2}^m \sum_{j=1}^n P_i^j$.

$$\sum_{j=1}^n P_m^j / \sum_{j=1}^n j = 1 + \frac{(m-2)}{3} \times (n-1) = u_m ,$$

d'après le corollaire II.3. D'où :

$$\sum_{i=2}^m \left(\sum_{j=1}^n P_i^j / \sum_{j=1}^n j \right) = (1 + u_m)(m-1)/2$$

d'après le Talkhīs. Donc :

$$\begin{aligned} \sum_{i=2}^m \sum_{j=1}^n P_i^j &= \left(\sum_{j=1}^n j \right) (1 + u_m)(m-1)/2 \\ &= \frac{n(n+1)}{2} \times \left(2 + \frac{(m-2)}{3} \times (n-1) \right) \frac{(m-1)}{2} \end{aligned}$$

[Donc :

$$\sum_{i=2}^m \sum_{j=1}^n \frac{j}{2} \times \left(2 + (i-2)(j-1) \right) = \frac{n(n+1)}{2} \times \frac{(m-1)}{2} \times \left(2 + \frac{(m-2)(n-1)}{3} \right)]$$

REMARQUES :

(1)- Dans la représentation géométrique classique, les P_i^1 sont dits des polygones en puissance et les P_i^j , pour $i > 2$, des polygones en acte à i angles et à i côtés, chaque côté étant de longueur égale à j .

Les références aux angles ont totalement disparu dans l'exposé de l'auteur et, des autres aspects géométriques, il ne subsiste qu'un vocabulaire consacré par la tradition : Côté, figure, polygone.

(2)- Les définitions adoptées par Ibn al-Bannā' correspondent aux propositions du Livre II, chapitre XII de l'Introduction arithmétique de Nicomaque¹⁹⁶, et les définitions de ce dernier, que l'on retrouve d'ailleurs chez al-Bīrūnī¹⁹⁷ et chez Ibn Sīnā¹⁹⁸, deviennent dans le Raf' al-Hijāb des corollaires arithmétiques.

(3)- L'arithmétisation du tableau est manifeste dans la démarche globale de l'auteur : Qu'il s'agisse d'éléments isolés, de lignes ou de colonnes, l'étude est faite suivant le même point de vue, celui des suites numériques. Plus précisément, chaque ligne, chaque

colonne et même chaque rectangle du tableau est interprété à l'aide de suites arithmétiques ou de séries finies ; ces dernières étant, à leur tour, engendrées par des suites arithmétiques ou des séries finies. Cela permet de ramener tous les calculs à une seule formule, celle donnant la somme ou le dernier élément d'une série arithmétique de premier terme et de raison connus.

(4)- Ce point de vue permet d'établir, par l'intermédiaire du tableau, une correspondance entre deux types de séries finies qui ne sont pas directement lisibles dans les lignes ou dans les colonnes: Des séries de puissance d'un côté, et des séries arithmétiques de l'autre. Ce qui fournit des démonstrations plus simples pour le calcul de ces séries de puissance (lorsqu'on ne dispose pas de l'outil symbolique). Pour s'en convaincre, il est utile de comparer deux démonstrations de la proposition :

$$\sum_1^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

celle qu'expose Ibn al-Bannā' et celle qu'établit as-Samaw'al dans son livre al-Bāhir¹⁹⁹.

APPLICATION (II) : Sommes des séries de cubes.

Soit (u_k) , la suite des entiers naturels, avec $u_1=1$.

Proposition 1. :

$$\sum_1^n (u_k)^3 = \left(\sum_1^n u_k\right)^2 = (P_3^n)^2$$

Preuve :

Cela découle :

a)- Du calcul du carré de P_3^k , décomposé ainsi :

$$P_3^k = u_k + P_3^{k-1} ; k \geq 2 ,$$

comme cela a été montré dans la méthode du "produit sans translation", dans le chapitre de la multiplication [du Talkhīs]²⁰⁰.

b)- De la décomposition suivante :

$$(u_k)^3 = (u_k)^2 + (u_k - 1)(u_k)^2 \quad (1)$$

car :

$$1^3 = 1 \times 1^2$$

$$2^3 = 2 \times 2^2$$

$$3^3 = 3 \times 3^2$$

et ainsi de suite :

$$[(u_k)^3 = u_k(u_k)^2 = (u_k - 1)(u_k)^2 + (u_k)^2] .$$

Le raisonnement d'Ibn al-Bannā' peut-être ainsi rétabli :

$$\begin{aligned} [(P_3^n)^2 &= (n + P_3^{n-1})^2 \quad , \text{ par définition.} \\ &= n^2 + 2n P_3^{n-1} + (P_3^{n-1})^2 \\ &= n^2 + 2n \frac{n(n-1)}{2} + (P_3^{n-1})^2 \quad ; \text{ (corollaire III.1)} \\ &= \left(n^2 + n^2(n-1) \right) + (P_3^{n-1})^2 \\ &= n^3 + (P_3^{n-1})^2 \quad , \text{ d'après (1) ;} \end{aligned}$$

et, par récurrence descendante, on a :

$$(P_3^n)^2 = \sum_1^n (u_k)^3 \quad] .$$

Proposition 2. :

$$\sum_1^n (u_{2k})^3 = 2 \left(\sum_1^n u_{2k} \right)^2$$

Preuve :

Par la correspondance : $u_{2k} \longrightarrow u_k = \frac{u_{2k}}{2}$

on voit que le nombre d'éléments de la somme est $\frac{u_{2n}}{2}$; donc 201 :

$$8\left(\sum_1^n u_k\right)^2 = 8\left(\sum_1^n \left(\frac{u_{2k}}{2}\right)^3\right)^3$$

mais,

$$(u_{2k})^3 = \left(\frac{u_{2k}}{2}\right)^3 \times 2^3$$

et,

$$8\left(\sum_1^n u_k\right)^2 = 2\left(\sum_1^n 2u_k\right)^2 = 2\left(\sum_1^n u_{2k}\right)^2 .$$

Proposition 3. :

$$\sum_1^n (u_{2k-1})^3 = 2\left(\sum_1^n u_{2k-1}\right)^2 - \sum_1^n u_{2k-1}$$

Preuve :

[Nous noterons, pour la simplicité de l'écriture :

$$\begin{aligned} S &= \sum_1^n k & ; & & S_1 &= \sum_1^n (2k-1) & ; & & S_2 &= \sum_1^n 2k \\ Q &= \sum_1^n k^3 & ; & & Q_1 &= \sum_1^n (2k-1)^3 & ; & & Q_2 &= \sum_1^n (2k)^3 \end{aligned}$$

On a :

$$Q_1 = Q - Q_2$$

et :

$$Q = S^2 = (S_1 + S_2)S_1 + (S_1 + S_2)S_2$$

Alors, suivant la parité de n, on a :

a)- Si n est pair [donc $S_1 < S_2$] :

$$\begin{aligned} Q_2 &= (2S_2)S_2 = (S_2 + S_1)S_2 + (S_2 - S_1)S_2 \\ &= (S_2 + S_1)S_2 + (S_2 - S_1)S_1 + (S_2 - S_1)^2 \end{aligned}$$

D'autre part :

$$(S_2 - S_1)^2 = S_1$$

$$[\text{car : } S_1 = \sum_1^n (2k-1) = n^2 = (S_2 - S_1)^2]$$

Donc :

$$\begin{aligned} Q_1 = Q - Q_2 &= (S_1 + S_2)S_1 - (S_2 - S_1)S_1 + S_1 \\ &= 2S_1^2 - S_1 \\ &= S_1(2S_1 - 1) \end{aligned}$$

b)- Si n est impair [donc $S_1 > S_2$] :

$$(2S_2)S_2 = S_2(S_1 + S_2) - S_2(S_1 - S_2)$$

D'où :

$$\begin{aligned} Q - Q_2 &= S_1(S_1 + S_2) + S_2(S_1 - S_2) \\ &[= S_1(S_1 + S_2) + S_1(S_1 - S_2) - (S_1 - S_2)^2] \\ &= 2(S_1)^2 - S_1 \end{aligned}$$

REMARQUES :

(1)- L'auteur ne juge pas utile de donner les preuves concernant les expressions de :

$$\sum_1^n k ; \quad \sum_1^n 2k ; \quad \sum_1^n (2k-1) .$$

Il se contente de dire que ce sont des séries arithmétiques (de raisons 1 et 2 respectivement)²⁰²

(2)- La proposition 1. repose sur une méthode de récurrence (dite "régression") qui est fortement suggérée par l'auteur, comme le confirment les développements de ses commentateurs²⁰³.

La concision d'Ibn al-Bannā' s'expliquerait alors par le fait que ce résultat et sa preuve étaient considérés comme classiques au Maghreb, à cette époque. On sait, en effet, que les séries de puissances avaient été déjà traitées en particulier par al-Ḥaṣṣār qui ne revendique d'ailleurs aucune originalité dans ce domaine²⁰⁴.

(3)- Les propositions 2. et 3. sont, non seulement énoncées dans une formulation générale mais leurs démonstrations sont également générales, à la fois dans l'expression et dans la démarche. D'autre part, ces démonstrations utilisent, d'une manière explicite, les deux bijections associant les pairs et les impairs aux entiers correspondants :

$$k \longrightarrow v_k = 2k \quad \text{et} \quad k \longrightarrow u_k = 2k-1 .$$

(4)- Ibn haydūr dans son Jāmi' ²⁰⁵ et, après lui, Ibn Ghāzī dans son Bughyat aṭ-Ṭullāb ²⁰⁶ ajoutent à ces résultats, mais sans démonstration, l'expression de la série finie des puissances quatrièmes d'entiers qui est donnée ainsi par les deux auteurs :

$$\sum_1^n k^4 = (n + \frac{1}{2})n(n+1) \times \left(\left(\frac{n}{5} + \frac{1}{5} \right)n - \frac{1}{3} \times \frac{1}{5} \right)$$

(5)- Les propositions donnant les expressions des différentes séries de puissances ne sont pas nouvelles. Elles ont toutes été établies avant le XI^e siècle, mais dans des contextes et selon des procédés souvent différents :

C'est ainsi que Thābit Ibn Qurra, dans son traité sur le calcul de la surface de la parabole intitulé "Kitāb fī Misāhat Qaṭ' al-Makhrūṭ al-ladhī yusammā al Mukāfī", démontre que ²⁰⁷ :

$$S = \sum_1^n (2k-1) = n^2 \quad \text{et} \quad \sum_1^n (2k-1)^2 + \frac{n}{3} = \frac{2}{3} \times S(2n) .$$

Dans son traité sur le calcul du volume du parabolofide intitulé "Kitāb fī Misāhat al-Mujassamāt al-Mukāfi'a", le résultat final repose sur la formule :

$$\frac{1}{3} \left(\sum_1^n 2k+1 \right) \times \left((2k+2)^2 + (2k)^2 + 2k(2k+2) \right) + \frac{2}{3} \left(\sum_0^n 2k+1 \right) = \frac{1}{2} \times \left(\sum_1^n (2k+1) \right) \times (2n+2)^2$$

qui est elle-même une conséquence de ²⁰⁸ :

$$\sum_1^n (2k-1)^3 + S = 2S^2$$

qu'il a établie auparavant.

Après lui, Ibn al-Haytham donne et justifie l'expression de ces séries et d'autres dans des études traitant également de déterminations infinitésimales qui simplifient ou qui prolongent celles de Thābit : Dans son traité sur le volume de la sphère -Qawl fī Misāḥat al-Kura²⁰⁹ - il démontre que :

$$\sum_1^n k^2 = \left(\frac{n}{3} + \frac{1}{3}\right)n\left(n + \frac{1}{2}\right)$$

pour en déduire des inégalités qui lui servent à estimer, grâce un choix approprié de la subdivision de l'axe de la sphère, le volume cherché. Dans son traité sur la mesure du volume du parabolôïde, intitulé "fi Misahat al-Mujassam al-Mukafi' ", il justifie les expressions de :

$$\sum_1^n k^p ; \text{ pour } 1 \leq p \leq 4 .$$

par un procédé de récurrence valable, en fait, pour les séries de puissance entière quelconque. Le résultat pour $p=4$ interviendra ensuite, d'une manière essentielle, dans la détermination du volume d'un parabolôïde de révolution que ni les mathématiciens grecs ni ses prédécesseurs arabes n'avaient résolue avant lui²¹⁰.

Dans un tout autre cadre enfin, as-Samw'al retrouvera, dans la première moitié du XII^e siècle, l'expression de $\sum_1^n k^3$, par un procédé identique à celui du Raf' al-Hijāb²¹¹.

Cela dit, les éléments que nous venons d'évoquer sont loin de suffire pour conclure à un passage de cette tradition du Centre vers l'Ouest. Après tout, as-Samaw'al lui-même, en revendiquant la démonstration de l'un de ces résultats, donne l'impression que l'on pouvait être chercheur à Bagdad ou à Damas, au XII^e siècle et ignorer certains travaux d'Ibn Qurra ou d'Ibn al-Haytham sur les déterminations infinitésimales. C'est pourquoi, et à défaut de témoignages décisifs, l'hypothèse que nous retenons est celle d'une recherche arithmétique autonome qui aurait permis aux mathématiciens de l'Occident musulman d'aboutir relativement tôt à ces résultats. Cela expliquerait d'ailleurs la présence au Maghreb, dès le XII^e siècle, de la plupart de ces propositions dans les ouvrages d'enseignement comme celui d'al-Haṣṣār.

APPLICATION (III) : Propositions combinatoires.Proposition 1. :

$$C_n^3 = \sum_{j=1}^{n-2} P_3^j = \frac{n(n-1)(n-2)}{6}$$

et [pour $3 \leq p < n$] 212 :

$$C_n^p = \frac{n - (p-1)}{p} \times C_n^{p-1}$$

Preuve :

$$C_n^2 = \sum_1^{n-1} k \quad [= \frac{n(n-1)}{2}] \quad (1)$$

[En effet : Soit a_1, a_2, \dots, a_n , les n éléments à combiner. a_1 associé à a_2, \dots, a_n , donne $n-1$ combinaisons. a_2 " " " a_3, \dots, a_n , " " $n-2$ " " " \vdots a_{n-2} " " a_{n-1} et a_n , " " 2 " " " a_{n-1} associé à a_n , donne 1 combinaison.

D'où le résultat] .

D'autre part, à chaque élément de C_n^2 , on associe un des $[n-2]$ éléments restants. On obtient donc :

$$(n-2)C_n^2$$

mais comme :

$$C_3^2 = 3 \quad [\text{d'après (1)}],$$

il a été nécessaire de répéter, dans $(n-2)C_n^2$, trois fois chaque combinaison de trois éléments, elle et [deux de] ses permutations. En effet, la combinaison :

$$\{ a, b, c \}$$

provient de :

$\{(a,b), c\}$, de $\{(a,c), b\}$, ou de $\{(b,c), a\}$

Ces trois permutations correspondent donc à une seule combinaison.
D'où :

$$C_n^3 = (n-2) \left(\frac{1}{3} \times C_n^2 \right) = \frac{n-2}{3} \times C_n^2 \quad (2)$$

De même :

$$C_4^3 = 4$$

car,

$$C_4^2 = 6 \quad \text{d'après (1), pour } n=4 ,$$

et

$$C_4^3 = \left(\frac{4-2}{3} \right) C_4^2 \quad \text{d'après (2), pour } n=4 .$$

Donc chaque combinaison de trois éléments est répétée quatre fois,
selon quatre permutations différentes. D'où :

$$C_n^4 = \left(\frac{n-3}{4} \right) C_n^3$$

On aura de même :

$$C_n^5 = \left(\frac{n-4}{5} \right) C_n^4$$

Et, d'une façon générale :

$$C_n^p = \frac{n(n-1) \dots (n-p+1)}{1 \times 2 \times \dots \times p}$$

On obtient un entier en simplifiant la fraction par élimination des
facteurs communs au numérateur et au dénominateur ²¹³.

Corollaire : .

$$C_{2n}^3 = \sum_{j=1}^{2n-2} P_3^j = \sum_{k=1}^{n-1} (2k)^2 = \frac{2n(2n-1)(2n-2)}{6}$$

$$C_{2n-1}^3 = \sum_{j=1}^{2n-3} P_3^j = \sum_{k=1}^{n-1} (2k-1)^2 = \frac{(2n-1)(2n-2)(2n-3)}{6}$$

[d'après (2) et le corollaire III.2.] .

Proposition 2. :

Le nombre de permutations $[P_n]$ d'un ensemble à n éléments est :

$$P_n = 1.2.3 \dots (n-1)n$$

Preuve :

$$P_2 = 2$$

car $\{a,b\}$ fournit : (a,b) et (b,a) .

Si on leur adjoint une troisième lettre c , alors :

$$(a,b) \Rightarrow \begin{cases} (c,a,b) \\ (a,c,b) \\ (a,b,c) \end{cases} \quad (b,a) \Rightarrow \begin{cases} (c,b,a) \\ (b,c,a) \\ (b,a,c) \end{cases}$$

Donc : $P_3 = 2.3$

Si on ajoute une quatrième lettre $[d]$, alors chaque permutation précédente en donnera quatre, suivant que d est premier, second, troisième ou quatrième [dans la suite des quatre éléments]. Donc :

$$P_4 = 2.3.4$$

et le procédé est identique pour $n > 4$.

Corollaire 1. :

Le nombre d'arrangements A_n^p de n objets p à p est :

$$A_n^p = n(n-1) \dots (n-p+1)$$

Preuve :

Par définition, A_n^p est le nombre de combinaisons de n objets p à p , avec toutes leurs permutations. [Donc :

$$A_n^p = (p!)C_n^p$$

d'où le résultat d'après les deux propositions précédentes].

Proposition 3. :

Une combinaison de n objets étant donnée, déterminer le type de configuration et sa longueur minimale qui englobe les P_n permutations de la combinaison donnée²¹⁴.

Preuve :

Soit a_1, a_2, \dots, a_n , l'une quelconque des P_n permutations. Alors la configuration cherchée contient $n(n-1)+1$ éléments disposés ainsi:

$$(a_1 a_2 \dots a_n)(a_1 a_2 \dots a_n) \dots (a_1 a_2 \dots a_n) a_1$$

(n-1) fois

Cela se voit par induction²¹⁵.

Application :

Chaque jour, pendant quatre jours, une personne [musulmane] oublie de faire une prière [les prières oubliées étant toutes différentes]. Voulant rattraper le retard, mais ignorant l'ordre, dans le temps, des prières oubliées [et ne voulant pas, manifestement, faire plus de prières que ne l'exige le dogme], elle voudrait connaître le nombre minimal de prières à faire et l'ordre de leur exécution pour qu'elle soit assurée de faire une et une seule fois ses quatre prières dans l'ordre de leur oubli.

Réponse : Elle doit faire, dans ce cas, 13 prières [d'après la proposition 3.] .

REMARQUES :

(1)- Les raisonnements de type combinatoire qui interviennent pour établir les expressions des combinaisons (proposition 1.) et des permutations (proposition 2.) sont associés à des raisonnements arithmétiques de deux types : Raisonnement général et méthodes inductives. Ces dernières apparaissent sous deux formes : La régression utilisée selon une démarche quasi-générale pour l'indice p , et tout à fait générale pour l'indice n , et une seconde induction d'un type assez proche de l'axiome de récurrence, tout en étant plus

complexe : assez proche dans la mesure où le résultat de l'étape k s'exprime en fonction de celui supposé vrai de l'étape $k-1$ et où (P_k étant la proposition d'ordre k) la démonstration de l'implication : $P_{k-1} \longrightarrow P_k$ utilise les P_j pour $1 \leq j \leq k-1$; plus complexe par le fait qu'elle opère sur des expressions à double indices, n qui est quelconque et k sur lequel porte la récurrence.

(2)- L'exposé des résultats combinatoires fait par Lévi Ben Gerson se distingue de celui d'Ibn al-Bannā' à la fois par l'ordre de présentation et par le contenu : Dans la première partie de son livre, il démontre les propositions dans l'ordre suivant ²¹⁶ :

$$(1) \quad P_n = nP_{n-1}$$

$$(2) \quad A_n^2 = n(n-1)$$

$$(3) \quad A_n^{p+1} = (n-p)A_n^p$$

$$(4) \quad A_n^p = (p!)C_n^p$$

$$(5) \quad C_n^{n-p} = C_n^p$$

et, dans le chapitre 4, il explicite les résultats (1), (3) et (4):

$$(1') \quad P_n = 1 \times 2 \times 3 \dots \times n$$

$$(2') \quad A_n^p = n(n-1) \dots (n-p+1)$$

$$(3') \quad C_n^p = \frac{n(n-1) \dots (n-p+1)}{1 \times 2 \times 3 \dots \times p}$$

La proposition (5) n'est évoquée ni par Ibn al-Bannā' ni par ses commentateurs et, contrairement à Lévi Ben Gerson, les maghrébins établissent d'abord l'expression des C_n^p pour en déduire celle des A_n^p , à l'aide de la relation (4)

(3)- La proposition 2., donnant les C_n^p en fonction des C_n^{p-1} , n'a

pas d'équivalent chez Lévi Ben Gerson. Comme l'a déjà signalé E. Coumet²¹⁷, ce résultat a longtemps été attribué à Pascal qui l'exprime ainsi dans sa proposition V du traité des combinaisons :

$$\frac{C_n^{p-1}}{C_n^p} = \frac{p}{n-p+1} \quad (1)$$

et qu'il explicite dans son problème II, sous la forme²¹⁸ :

$$C_n^p = \frac{n(n-1) \dots (n-p+1)}{1 \ 2 \ \dots \ p}$$

En 1950, C.B. Boyer²¹⁹ montrait que, dans la première moitié du XVI^e siècle, Cardan utilisait déjà la relation (1). Les éléments que nous avons exposés montrent donc, d'une manière indiscutable que, deux siècles avant Cardan, la proposition (1) était non seulement connue et utilisée, mais exprimée dans sa généralité et démontrée selon une méthode générale qui ne se réduit pas à une identification entre les C_n^p et les éléments d'une configuration plane.

(4)- L'importance des résultats combinatoires établis et utilisés aux XIII^e-XIV^e siècles tant par les maghrébins que par les français de Provence, tient beaucoup plus à leur caractère achevé et à leurs liaisons internes qu'à leur nombre et à la diversité de leurs domaines d'application. Les démarches qui les fondent paraissent plus élaborées que celles qui caractérisent les travaux combinatoires des mathématiciens européens de la renaissance comme Stifel, Maurolico, Cardan et Clavius, ou même du XVII^e siècle comme Mersenne. En effet, chez ces derniers, la résolution d'une multitude de problèmes concrets n'aboutit pas à l'élaboration de propositions libérées du particularisme de ces problèmes et intervenant comme des lois générales. De ce point de vue, la combinatoire des XIII^e-XIV^e siècles était en avance sur celle des XV^e-XVI^e siècles, même si, pour des raisons plus sociales et culturelles que mathématiques, elle s'est trouvée limitée dans ses applications.

La différence que l'on observe entre ces deux états de la combinatoire ne signifie pourtant pas qu'il y eut, dans ce domaine, une totale rupture de la transmission des connaissances dans les sens Sud-Nord et Est-Ouest. En fait, si la tradition que l'on pourrait appeler "mathématique", semble avoir connu des difficultés de diffusion, cela n'a pas été le cas pour la tradition "astrologique" ou "théologique" véhiculée par les utilisateurs européens des *zayrija* maghrébines²²⁰, par certains écrits célèbres de cabalistes juifs²²¹ et par les héritiers de la pensée de Ramon Lull²²².

(5)- La proposition 3. présente, à notre avis, un double intérêt: Le premier est de confirmer la démarche d'Ibn al-Bannā' qui consiste, à partir de problèmes concrets, d'établir ou d'exprimer des résultats combinatoires généraux qu'il applique, dans un troisième temps, aux problèmes rencontrés. Cela est d'autant plus manifeste que, dans ce cas précis, la généralité ne provient ni de l'importance du domaine d'application, ni de la démonstration (qui se réduit à des essais successifs), mais de la seule formulation du problème.

Le second intérêt de cette proposition réside dans le fait qu'elle concerne également le domaine de l'optimisation. En effet, il s'agit, ici, non seulement de résoudre un problème, mais d'en donner la meilleure solution, c'est-à-dire celle qui nécessite le moins d'opérations possible. De ce point de vue, la proposition est à rapprocher d'un autre problème (de nature combinatoire d'ailleurs), que l'auteur résout dans le *Raf' al-Hijāb* pour illustrer le chapitre des progressions géométriques²²³ :

Il s'agit de déterminer n mesures de poids, différentes et entières pour que l'on puisse peser toute charge dont le poids (supposé entier) est compris entre la plus petite des mesures et leur somme. Cela équivaut à montrer qu'il existe des suites (u_k) , $1 \leq k \leq n$, telles que, pour tout entier m , vérifiant :

$$1 \leq m \leq \sum_{k=1}^n u_k \quad ,$$

il existe une suite (a_k) , $1 \leq k \leq n$ et a_k valant 0, 1 ou -1, telle

que :

$$m = \sum_1^n a_k u_k$$

En ne donnant que la solution : $(u_k) = (3^k)$, $0 \leq k \leq n$,

et "pas d'autres", comme il le précise lui-même, l'auteur sous-entendait que c'était la seule progression géométrique qui permettait de peser le maximum de charge avec le minimum de poids ²²⁴.

Ce souci d'optimisation se retrouve chez l'auteur à propos des opérations du calcul, en particulier dans le chapitre du Talkhīs traitant du produit :

En exposant, dans le détail, pas moins de seize algorithmes de calcul d'un produit, Ibn al-Bannā' ne visait pas le recensement de tous les procédés connus, ou la simple illustration de règles arithmétiques et algébriques. Comme il le dit lui-même plus tard²²⁵, son but était de donner à la fois des algorithmes généraux et d'autres plus optimaux dans telle ou telle situation particulière. Pour justifier cette démarche, son commentateur Ibn al-Majdī va jusqu'à dénombrer les opérations élémentaires qui interviennent dans les produits par translation et par semi-translation, lorsque les deux nombres à multiplier sont identiques :

Si (T) et (ST) sont les opérations en question et n le nombre de chiffres du nombre à multiplier par lui-même, alors le nombre de produits élémentaires est de n^2 dans (T) et de $\frac{n(n+1)}{2}$ dans (ST) ; soit un gain de $(n^2-n)/2$ opérations. D'autre part, le gain dans les translations effectuées est de moitié quand on passe de l'une à l'autre : De $n(n-1)$ dans (T), ce nombre se réduit à $n(n-1)/2$ dans (ST) ²²⁶.

(6)- Dans son commentaire relatif à ces propositions, Ibn al-Majdī donnera un complément et une généralisation ^{226bis}.

1.- Au corollaire sur les arrangements, il ajoute la remarque suivante : Il y a deux espèces d'arrangements avec répétition, la première est celle où une seule lettre est répétée dans une combinaison, la seconde est celle où la répétition concerne toutes les let-

tres à la fois :

a)- Répétition d'une seule lettre.

Soit (a_1, a_2, \dots, a_n) une combinaison de n éléments ; alors le nombre d'arrangements que l'on peut en déduire lorsqu'on répète une seule lettre p fois, $n-1 \leq p \leq n$, est de $:n(n-1)+1$. L'auteur le montre pour $n=4$ (et donc $3 \leq p \leq 4$), en énumérant les 13 figures. Chacune des $(n-1)$ lettres répétées pouvant prendre n positions dans la combinaison, on a bien $n(n-1)$ figures auxquelles on ajoute celle où toutes les lettres sont identiques. Finalement, comme on peut répéter l'opération pour chacune des n lettres, le nombre total de figures de ce type est de $n[n(n-1)+1]$.

b)- Répétition de toutes les lettres.

Il s'agit du dénombrement des arrangements de n objets p à p , avec répétition. L'auteur donne la formule : $A_n^p = n^p$, pour $n=4$, $1 \leq p < 4$ et pour $n=28$, $2 \leq p \leq 3$, en disant qu'elle est vraie pour $4 < p \leq n$.

2.- Quant à la proposition 3., l'auteur en explicite d'abord la preuve en montrant que, étant donné la permutation (a_1, a_2, \dots, a_n) , il faut raisonner comme si le résultat cherché correspondait à la permutation la plus défavorable, c'est à dire $(a_n, a_{n-1}, \dots, a_2, a_1)$. Puis il généralise le résultat en supposant que la personne a, cette fois-ci, oublié de faire p prières sur les n , en ignorant à la fois quelles p prières parmi les n ont été oubliées et dans quel ordre. La question se ramène alors aux combinaisons de n objets p à p , chaque combinaison exigeant $p(p-1)+1$ prières, soit au total :

$$(p(p-1)+1) \times C_n^p .$$

* * * * *

III.3. Exemples de problèmes combinatoires

I. Combinaisons de fractions et d'entiers.

1. Chez Ibn al-Bannā'.

a)- Dans son livre cité sous le titre de *Arba' Maqālāt*, il considère les différentes combinaisons de fractions et d'entiers liés par les opérations arithmétiques et dont le calcul est soumis, pour chaque opération, à une seule règle. Il dénombre 75 formes de sommes qu'il obtient ainsi : Si on note (f_i) , $1 \leq i \leq 5$, les cinq types de fractions définies par l'auteur (voir chapitre II), e , un entier et $g_i = e + f_i$, alors on a :

$$\text{card}\{(f_i + f_j)\} + \text{card}\{(g_i + g_j)\} + \text{card}\{(f_i + g_j)\} = 75$$

De la même manière, il obtient 85 écritures pour les soustractions de fractions et d'entiers, 85 pour les produits, 96 pour les divisions, 96 pour les dénominations et enfin 10 pour la réduction et la restauration ²²⁷.

b)- Lorsqu'il s'agit de fractions élémentaires (de la forme $\frac{1}{n}$), il dénombre toutes les écritures ou formulations possibles de leur produit, pour montrer l'utilité de les ramener, grâce à la commutativité à une expression unique. Il procède ainsi, (a_i) , $1 \leq i \leq 4$ étant des entiers : $\frac{1}{a_1 a_2}$ fournit une deuxième figure $\frac{1}{a_2 a_1}$, tandis

que $\frac{1}{a_1 a_2 a_3}$ fournit 6 figures et $\frac{1}{a_1 a_2 a_3 a_4}$, 24 figures, "comme

tu as appris dans la combinaison des lettres avec permutation dans le chapitre de l'addition" précise-t-il ²²⁸.

Dans son commentaire du *Raf' al-Hijāb*, Ibn Haydūr explicite ces résultats par l'énumération, dans des tableaux, des différentes permutations pour $n=3$ et $n=4$, en précisant que $24=1 \times 2 \times 3 \times 4$ ²²⁹.

Certains de ces dénombrements seront repris et explicités par Ibn Qunfūdh dans *Ḥaṭṭ an-Niqāb* et dans *Taḥṣīl al-Munā* ²³⁰.

2. Chez Ibn Haydūr.

Dans le Tamḥīṣ, il commence par dénombrer les combinaisons des cinq types de fractions, p à p , $2 \leq p \leq 5$:

"Dans ces cinq fractions, (...) il y a 26 combinaisons dont 10 pour les combinaisons deux à deux, [10] aussi pour les combinaisons trois à trois, 5 pour les combinaisons quatre à quatre et une pour les combinaisons cinq à cinq. Donc le nombre de figures simples et composées de leurs questions est 31" ; ce qui correspond donc à $\sum_1^5 C_5^p$. Puis, il détermine les arrangements deux à deux, avec répétition de ces 31 combinaisons, soit 231 :

$$A_{31}^2 = (31)^2 = 961 ,$$

en y distinguant trois catégories, 31 de la forme (f_i, f_i) , 465 de la forme (f_i, f_j) , $i \neq j$, correspondant à C_{31}^2 et 465 de la forme (f_j, f_i) et qui sont les permutées des précédentes.

3. Dans le manuscrit de Tunis n° 534.

Il s'agit de dénombrer les écritures distinctes d'une somme d'entiers et de fractions, ces dernières appartenant, cette fois, à 6 types différents (au lieu de 5).

Chaque fraction associée à deux entiers fournit trois figures :

$$\{e, f, e\} \quad \{f, e, e\} \quad \{e, e, f\}$$

Mais comme il y a 6 types de fractions, on a 18 figures.

Si on associe les fractions deux à deux, alors :

a)- Si les fractions sont de même type, on a :

$$\begin{aligned} & \{e, f_i, e, f_i, e\} \\ & \{e, f_i, f_i\} \quad ; \quad \{f_i, e, f_i\} \quad ; \quad \{f_i, f_i, e\} \\ & \{e, f_i, e, f_i\}; \quad \{e, f_i, f_i, e\}; \quad \{f_i, e, f_i, e\} \end{aligned}$$

soit 7 figures ; et comme il y a 6 types de fractions, on a 42 figures.

b)- Si les deux fractions sont de types différents, alors il y a

$$15 \times 7 = C_6^2 \times 7 = 105$$

figures. Le nombre total de figures est donc 165.

Il conclut en faisant remarquer que si on combinait les fractions trois à trois et p à p , avec $p > 3$, le nombre de figures augmenterait beaucoup²³².

4. Dans le manuscrit de Tunis n° 561.

Le commentateur anonyme du Talkhīs se propose de dénombrer les produits de fractions et d'entiers.

a)- Les produits simples de fractions et d'entiers sont de trois sortes :

$$e \times e, f \times f, e \times f$$

b)- Comme il y a 5 types de fractions et que chacune d'elle peut s'associer à l'entier [par addition], alors, compte tenu de la présence ou non de l'entier avec elles, on a 10 combinaisons :

[En effet, si on note (f_i) , $1 \leq i \leq 5$, les fractions, on a :

$$A = \{ e \times (e + f_i); 1 \leq i \leq 5 \} \cup \{ e \times f_i; 1 \leq i \leq 5 \}$$

d'où $\text{card}(A) = 10$].

c)- Chacune de ces 10 figures est multipliée par elle-même et par toutes les autres ainsi que par l'entier seul. On a finalement 110 figures les 10 premières et les 100 arrangements de 10 figures deux à deux, avec répétition :

L'auteur conclue en remarquant que "ces espèces sont celles qu'a longuement traitées le livre du professeur Abū Bakr 'Ayyāš al-Ḥaṣṣār ainsi que d'autres auteurs en mathématique, aucun d'eux ne les ayant épuisées ; et elles atteignent un [nombre] plus grand que celui-ci, par leurs combinaisons l'une à l'autre, surtout si on considère leurs figures obtenues avec la duplication et l'addition. Elles atteignent alors des milliers en nombre illimité" ²³³.

Puis l'auteur conclut en exposant quatre méthodes de calcul de ces différents produits.

II. Dénombrement de rapports simples et composés.

A.- Rapports simples.

1. Chez Ibn al-Bannā'

Etant donné (a_1, a_2, a_3, a_4) , des entiers positifs vérifiant :

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{a_3}{a_4}$$

[que l'on désignera par la relation (P)]. L'auteur énumère les différentes opérations f_i qui, appliquées à (P), fournissent des images (P_i) , différentes de (P), mais équivalentes à elle.

Il part des quatre opérations élémentaires : L'interversion (f_1), la permutation (f_2), la composition (f_3) et la différentiation (f_4) qui sont définies ainsi :

$$\begin{array}{l} f_1(P) \Rightarrow \frac{a_1}{a_3} = \frac{a_2}{a_4} \quad f_2(P) \Rightarrow \frac{a_2}{a_1} = \frac{a_4}{a_3} \\ f_3(P) \Rightarrow \frac{a_1+a_2}{a_i} = \frac{a_3+a_4}{a_j} \\ f_4(P) \Rightarrow \frac{a_2-a_1}{a_i} = \frac{a_4-a_3}{a_j} \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{l} f_1(P) \\ f_3(P) \\ f_4(P) \end{array}} \right\} \begin{array}{l} \\ \\ i = 1 \text{ ou } 2; j = 3 \text{ ou } 4. \end{array}$$

Puis il énumère, d'une façon incomplète d'ailleurs, les opérations obtenues par composition des f_i , deux à deux et trois à trois (la composition étant entendue, ici, dans son sens fonctionnel), pour conclure à l'équivalence de toutes les relations obtenues²³⁴.

2. Chez Ibn al-Majdī.

C'est, à notre connaissance, le seul commentateur d'Ibn al-Bannā' qui a explicité l'aspect combinatoire de ce problème dont l'intérêt réside dans la manipulation d'objets abstraits ne bénéficiant pas encore de symboles propres.

Voici comment il procède : Après avoir écrit les images $f_i(P)$, sous forme de suites ordonnées de 4 éléments chacune²³⁵ :

$$\begin{array}{ll} \{a_1, a_3, a_2, a_4\} & \{a_2, a_1, a_4, a_3\} \\ \{a_1+a_2, a_1, a_3+a_4, a_3\} & \{a_2-a_1, a_2, a_4-a_3, a_4\} \end{array}$$

il dénombre ce qu'il appelle les "combinaisons 2 à 2" qui sont ici les arrangements des f_i 2 à 2, soit 12 figures qu'il énumère ainsi :

$$\begin{array}{l} f_2 \circ f_1, f_3 \circ f_1, f_4 \circ f_1 \\ f_1 \circ f_2, f_3 \circ f_2, f_4 \circ f_2 \\ f_1 \circ f_3, f_2 \circ f_3, f_4 \circ f_3 \\ f_1 \circ f_4, f_2 \circ f_4, f_3 \circ f_4 \end{array} \quad (1)$$

Puis il considère les "combinaisons 3 à 3" qui donnent 36 (soit, $3 \times A_4^2$) éléments car chaque élément de (1) permet trois compositions. En effet, aux A_4^3 arrangements, il faut ajouter les éléments de la forme :

$$f_i \circ f_j \circ f_i \quad ; \quad i \neq j$$

Donc chaque $f_i \circ f_j$ fournit :

$$f_k \circ f_i \circ f_j, f_i \circ f_j \circ f_i, f_j \circ f_i \circ f_j \quad ; \quad i \neq j \neq k.$$

Il dénombre enfin les "combinaisons 4 à 4" et obtient 108 éléments soit, $3^2 \times A_4^2$.

REMARQUE :

Les arrangements de la forme $f_i \circ f_i$, $f_i \circ f_i \circ f_j$ et les autres du même type ont été volontairement négligés dans le dénombrement car, précise l'auteur, "ils [les mathématiciens] ont interdit absolument que se succèdent deux éléments d'une même espèce parce que cela est possible pour certaines d'entre elles, comme la composition [car $f_3 \circ f_3(P) = P$] et, parmi elles, il en est pour lesquelles cela n'est pas possible comme la permutation car sa [propre] permutation est

un retour à l'origine" [c'est à dire $f_2 \circ f_2(P) = P$].

B.- Rapports composés.

Ibn al-Bannā' reprend, pour l'étendre, le dénombrement des rapports découlant de la figure sécante.

Soit a_1, a_2, \dots, a_{2n} , ($n \geq 3$), une suite d'entiers positifs vérifiant la relation :

$$\frac{a_1}{a_2} = \prod_3^{2n-1} \frac{a_i}{a_{i+1}} \quad (2)$$

et soit $A = \{a_1; a_{2j+2}, 1 \leq j \leq n-1\}$ et $B = \{a_2; a_{2j+1}, 1 \leq j \leq n-1\}$

Premier cas : $n = 3$.

L'auteur dénombre les 36 écritures de (2), compte tenu de toutes les permutations possibles. Sa formulation du dénombrement revient à calculer :

$$C = 2 \times P_2 \times \text{card}(A) \times \text{card}(B)$$

D'autre part, lorsque (2) est issue de la figure sécante, il dénombre 288 rapports composés ($2 \times 4 \times C$), justifiés par le fait que cette figure est définie par l'intersection de quatre grands cercles de la sphère, d'où 144 rapports, chacun de ces rapports pouvant être obtenus de deux manières, par "composition" ou par "différenciation".

Second cas : n quelconque.

On généralise le procédé en partant de la relation suivante, équivalente à (2) :

$$a_1 \prod_4^{2n} a_j = a_2 \prod_3^{2n-1} a_i$$

Puis, après avoir déterminé les rapports correspondant aux combinaisons (a_{2i-1}, a_{2i}) , $1 \leq i \leq n$, on obtient les autres par permutation des $(n-2)$ fractions du second membre de chaque rapport composé semblable à (2) ²³⁶.

III. Dénombrement d'équations polynomiales.

A.- Séries et équations.

1. Chez Ibn al-Bannā'

a)- Les séries géométriques fournissent 16 équations différentes car, il y a 8 espèces de séries et deux sortes d'inconnues dans chaque série (un de ses éléments et sa somme)²³⁷. En effet, dans :

$$S = \sum_{k=p}^{k=n} a^k$$

on peut avoir : $p = 0$ ou $p \neq 0$; $a = 2$ ou $a \neq 2$; $n = 2^m$ ou $n \neq 2^m$.

b)- Les séries arithmétiques fournissent 15 équations résolubles, car il y a cinq espèces d'inconnues : Le nombre d'éléments (n), le premier terme (u_1), le dernier terme (u_n), la raison (r) et la somme (S). Si l'une d'elle est inconnue, on a 5 équations [soit C_5^1]. Si deux d'entre elles sont inconnues, on a 10 équations [soit C_5^2]. Parmi ces 15 équations, 13 sont résolubles par la méthode du Tal-khīs et les deux dernières par l'algèbre²³⁸. Si on n'en connaît qu'une ou deux, les équations [respectivement à 4 ou 3 inconnues] ne sont pas résolubles²³⁹.

2. Chez Ibn Haydūr.

Après avoir rappelé le résultat ci-dessus, en le rattachant explicitement à la formule des combinaisons, il complète le troisième cas en introduisant des conditions de résolubilité :

Si on ignore trois éléments de la série et que l'on connaisse leurs sommes deux à deux, ou leurs différences deux à deux, le nombre d'équations est égal à 60, 30 avec les sommes et 30 avec les différences. [En effet, $2 \times C_3^2$ est le nombre d'équations de la forme :

$$x_i + x_j = a \quad \text{ou} \quad x_i - x_j = b ,$$

et C_5^3 le nombre d'équations à trois inconnues issues de la série. Le nombre total est donc $2 \times C_3^2 \times C_5^3 = 60$].

L'auteur conclut en rappelant que pour déterminer le nombre de combinaisons de n objets quelconques p à p , on procède ainsi: On prend les éléments du problème, on écrit au dessus d'eux : a, b, c, d, \dots [c'est à dire $1, 2, 3, 4, \dots$], jusqu'au dernier élément . Alors :

$$C_n^1 = \frac{n}{1} ; C_n^2 = \frac{n(n-1)}{1 \times 2} ; C_n^3 = \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \times 2 \times 3}$$

et cette règle est toujours valable pour déterminer toutes les combinaisons²⁴⁰.

B.- Géométrie et équations.

Dans son petit opuscule intitulé Fī-t-Taksīr et datant de 1291, Ibn al-Bannā' semble viser deux buts : La classification des figures traditionnelles du plan et de l'espace et le dénombrement des équations issues de chacune de ces figures lorsqu'elles sont identifiées à l'ensemble des éléments qui peuvent les caractériser. Il commence par donner une double classification (non exhaustive d'ailleurs), la première en fonction de la nature du bord de chaque figure (c'est à dire en fonction du nombre de portions différentiables qui composent le bord) et la seconde en fonction de la nature de la surface (et donc des angles pour les figures planes). Puis il dénombre de la façon suivante les équations associées à certaines de ces figures²⁴¹ :

1. Le carré :

Trois éléments (côté, diagonale, surface). D'où 6 équations [soit $\sum_1^2 C_3^k$]. Il en est de même pour le cercle (diamètre, périmètre, surface).

2. Le rectangle :

Quatre éléments (longueur, largeur, diagonale, surface). D'où 14 équations [soit $\sum_1^3 C_4^k$]. Il en est de même pour le losange (côté, diagonales, surface).

3. Le triangle :

Cinq éléments (3côtés, hauteur, surface). D'où 30 équations [soit $\sum_1^4 C_5^k$]. Il en est de même pour le parallélogramme, l'arc de cercle

4. La portion de sphère :

Six éléments (ceux du cercle, hauteur, surface latérale, volume) .
D'où [62 équations correspondant à $\sum_1^5 C_6^k$].

5. Le quadrilatère quelconque :

Sept éléments (4côtés, 2 diagonales, surface). D'où 126 équations
[soit $\sum_1^6 C_7^k$].

6. La pyramide de base quelconque B :

On aura n éléments (ceux de B, la hauteur de la pyramide, son arête,
sa surface latérale, son volume. [D'où $\sum_1^{n-1} C_n^k$]. Il en est de même du
polyèdre régulier de base B.

L'auteur conclut son opuscule en rappelant les formules donnant les
éléments d'un triangle en fonction des autres et les aires ou sur-
faces latérales des autres figures, en se référant explicitement à
Euclide, Archimède et au grand géomètre andalou du XI^e siècle al-
Mu'tamin.

REMARQUES :

(1)- L'auteur précise que les équations obtenues, dont le nombre
peut être augmenté en augmentant le nombre d'éléments de la figure,
ne sont pas toutes résolubles.

(2)- Pour dénombrer ces équations, il a nécessairement calculé
tous les éléments du tableau d'ordre 7 (au moins) des coefficients
d'al-Karajī. Malheureusement, aucun élément de ses écrits ne permet
de dire qu'il a fait le rapprochement entre les deux catégories de
nombres pour aboutir à leur identification.

C.- Dénombrement des équations de degré supérieur à 2.

En dehors de la remarque rapide d'Ibn Khaldūn dans sa Muqaddima ,
nous n'avons encore rencontré aucun traité maghrébin qui fait allu-
sion, d'une manière globale, aux équations de degré supérieur ou
égal à trois, soit pour évoquer la difficulté ou l'impossibilité
de leur résolution algébrique, soit pour les dénombrer. Mais nous
avons déjà signalé les tentatives de l'école égyptienne des XIV^e -
XV^e siècles pour résoudre certaines de ces équations. Il n'est donc
pas étonnant qu'ils se soient préoccupés de leur classification et

de leur énumération. En fait, on fera mieux puisque s'aidant des premiers outils combinatoires, on établira des formules générales donnant le nombre d'équations de degré inférieur ou égal à n (avec n quelconque) et composées de 2, 3, 4, 5 monômes (ou même plus si on poursuit la récurrence qui est utilisée).

Voici cette démarche telle qu'elle est exposée, dans le détail, par Ibn al-Majdī dans la conclusion de son Ḥāwī - l-Lubāb²⁴² :

Le nombre des équations ne se limite pas aux six canoniques. Elles ne s'y limitent que si l'on considère seulement les trois espèces : Les nombres, les choses et les carrés . Si on les considère avec celles qui leur sont supérieures, on aboutit à des équations en nombre illimité à cause du nombre infini des espèces.

1)- Si on considère 4 espèces de monômes, les cubes avec les degrés inférieurs, leurs équations se limitent à 25 figures : 6 équations binômes (une espèce égale une espèce), 12 trinômes (une espèce égale deux espèces), 4 quadrinômes (1,3), 3 autres quadrinômes (2,2)²⁴³ .

2)- Si on considère 5 espèces, le nombre de figures est 90 : 10 binômes, 30 trinômes, 20 quadrinômes (1,3), 15 quadrinômes (2,2), 10 à cinq monômes (2,3) et 5 autres à cinq monômes (1,4).

3)- Si on considère n espèces, n quelconque :

a)- Equations binômes :

Leur nombre est égal à celui des combinaisons de n objets 2 à 2 :

$$N(1,1) = \frac{(n-1)n}{2} \quad (1)$$

b)- Equations trinômes :

On multiplie le nombre des équations simples par $(n-2)$. [Cela revient à combiner chaque couple de (1) aux $(n-2)$ monômes restants]:

$$N(1,2) = (n-2) \times N(1,1)$$

c)- Equations quadrinômes :

Si le nombre de monômes est 3, le dénombrement s'achève là. Sinon, on sait que les équations quadrinômes sont de deux types : (1,3) et (2,2). D'où :

$$N(1,3) = \frac{(n-3)}{1 \times 3} \times N(1,2)$$

[Cela revient à combiner les deux éléments du second membre de chaque équation de type (1,2) à un des (n-3) éléments restants. D'où le produit par (n-3). Mais comme les équations :

$$\left. \begin{aligned} a_p x^p &= a_q x^q + a_r x^r \\ a_p x^p &= a_q x^q + a_s x^s \\ a_p x^p &= a_r x^r + a_s x^s \end{aligned} \right\} \begin{aligned} p &\neq q \neq r \neq s ; \\ 0 &\leq p, q, r, s \leq n-1 . \end{aligned}$$

fournissent la même combinaison :

$$a_p x^p = a_q x^q + a_r x^r + a_s x^s$$

lorsqu'on leur ajoute respectivement $a_s x^s$, $a_r x^r$, $a_q x^q$, il est nécessaire de diviser par 3].

D'autre part :

$$N(2,2) = \frac{(n-3)}{2 \times 2} \times N(1,2)$$

[car cela revient à combiner l'élément du premier membre de chaque équation de type (1,2) aux (n-3) éléments restants. Mais comme les équations :

$$\begin{aligned} a_p x^p &= a_q x^q + a_r x^r \\ a_q x^q &= a_p x^p + a_s x^s \\ a_r x^r &= a_p x^p + a_s x^s \\ a_s x^s &= a_q x^q + a_r x^r \end{aligned}$$

fournissent la même équation :

$$a_p x^p + a_s x^s = a_q x^q + a_r x^r ,$$

il est nécessaire de diviser par 4].

d)- Equations à cinq monômes :

Elles sont de deux types : (1,4) et (2,3). D'où :

$$N(1,4) = \frac{(n-4)}{4} \times N(1,3)$$

[car cela revient à combiner les éléments du second membre de chaque équation de type (1,3), aux (n-4) éléments restants. Mais comme les équations :

$$\left. \begin{aligned} a_p x^p &= a_q x^q + a_r x^r + a_s x^s \\ a_p x^p &= a_q x^q + a_r x^r + a_t x^t \\ a_p x^p &= a_q x^q + a_s x^s + a_t x^t \\ a_p x^p &= a_r x^r + a_s x^s + a_t x^t \end{aligned} \right\} \begin{aligned} p \neq q \neq r \neq s \neq t ; \\ 0 \leq p, q, r, s, t \leq n-1 . \end{aligned}$$

fournissent la même équation :

$$a_p x^p = a_q x^q + a_r x^r + a_s x^s + a_t x^t$$

il est nécessaire de diviser par 4].

D'autre part :

$$N(2,3) = \frac{2}{3} \times (n-4) \times N(2,2)$$

[car cela revient à ajouter au premier membre de chaque équation de type (1,3) ou aux membres de chaque équation de type (2,2) un des (n-4) éléments restants. L'auteur choisit de porter la récurrence sur les équations de type (2,2) : Comme le cinquième élément peut se combiner à l'un ou l'autre membre de chaque équation et que :

$$a_p x^p + a_q x^q = a_r x^r + a_s x^s$$

$$a_p x^p + a_q x^q = a_r x^r + a_t x^t$$

$$a_p x^p + a_q x^q = a_s x^s + a_t x^t$$

fournissent la même équation :

$$a_p x^p + a_q x^q = a_r x^r + a_s x^s + a_t x^t$$

il est nécessaire de multiplier par 2 et de diviser par 3].
Si l'auteur avait porté la récurrence sur les équations de type (1,3), il aurait eu :

$$N(2,3) = \frac{(n-4)}{2} N(1,3)$$

car comme :

$$a_p x^p = a_q x^q + a_r x^r + a_s x^s$$

$$a_t x^t = a_q x^q + a_r x^r + a_s x^s$$



fournissent la même équation :

$$a_p x^p + a_t x^t = a_q x^q + a_r x^r + a_s x^s$$

il aurait été nécessaire de diviser par 2. D'où le résultat.
Pour conclure, Ibn al-Majdī applique ces formules aux cas :

$$3 \leq n \leq 5 \quad ; \quad 2 \leq p \leq n$$

en précisant que ce chapitre est vaste et que le nombre de figures de ses combinaisons est sans limite, compte tenu de la multiplication des espèces ²⁴⁴.

REMARQUE :

Pour résoudre les différents problèmes que nous venons d'évoquer, leurs auteurs ont introduit, en mathématique, une terminologie combinatoire empruntée peut-être, à l'origine, aux linguistes du VIII^e siècle et enrichie plus tard de quelques termes. Mais, compte tenu des différents concepts combinatoires, cet enrichissement ne s'est pas fait, semble-t-il, dans le sens d'une spécialisation de certains éléments de ce vocabulaire. C'est ainsi qu'en dehors des combinaisons sans répétition, nous n'avons pas rencontré de termes

distincts pour désigner les permutations, les arrangements avec ou sans répétition et les combinaisons avec répétition. Il y a bien une exception, celle du commentaire du Kašf al-Asrār ‘an Ḥurūf al-Ghubār d'al-Qalṣādī, rédigé au XIX^e siècle par Muhammad Ṭfayyaš, où chacun des concepts de combinaison, permutation, arrangement est désigné par un mot différent. Mais, n'ayant pas analysé son contenu, nous ne pouvons pas affirmer qu'il se rattache à la tradition combinatoire dont nous venons d'exposer quelques aspects²⁴⁵.

Orsay, Novembre 1980.

Université Paris-Sud
B^t. 425.
91405 ORSAY Cedex
FRANCE.

* * * * *

Notes et Références

- (1)- M. Hadj-Sadok, Description du Maghreb et de l'Europe au IX^e siècle. Edit. et trad. de textes d'Ibn Khurdadhbah, Ibn al-Faqih et Ibn Rustah, Alger, 1949. Cf. également Ch. Pellat, al-Muqaddasi, Description de l'Occident musulman au X^e siècle, Alger, 1950.
- (2)- A. Laroui, L'Histoire du Maghreb, un essai de synthèse, Maspéro, Paris, 1970. Trad. arabe par D. Dhūqān Qarqūṭ, Beyrouth, 1977. Cf. également H. Al-Janhanī, al-Maghrib al-islāmī (IX^e-X^e siècle), Tunis, 1978.
- (3)- H. Laoust, Les schismes dans l'Islam, Paris, 1965; pp.213-22 et pp.235-40. Cf. également A. al-Majdoub, aṣ-Ṣirā' al-Madhhabī bi Ifriqya, Tunis, 1975. Les courants d'idées non-orthodoxes y sont schématiquement présentés et sévèrement jugés.
- (4)- J.F. Montucla, Histoire des Mathématiques, Paris, 1799, t.I; pp.351-412.
- P. Tannery, la géométrie grecque, Paris, 1887, p.6.
- N. Bourbaki, Eléments d'Histoire des Mathématiques, Paris, 1960.
- (5)- Sur les présupposés idéologiques encore en cours en Histoire des Sciences, cf. R. Rashed, La notion de Science occidentale, XV th.Int.Cong.Hist.Sci.Edinburg, 1977. Paru également dans Fundamenta Scientiae, v.1, n°1; pp 7-21.
- (6)- L.E. Dickson, History of the Theory of Numbers, New York, 1952, t.I,II.
- (7)- O. Neugebauer, A History of Ancient Mathematical Astronomy, Berlin, 1975, t.II; pp. 741-45.
- (8)- F. Cajori, A History of Mathematical Notations, Chicago, 1952.
- (9)- F. Woepcke, Traduction du traité d'arithmétique d'Abūl Haṣan Ali ben Mohamed Alkalçadi, Atti del' Accad. Pontif. de Nuovi Lincei (A.A.P.N.L.), XII, 1859; pp.230-75 et pp. 399-438. Cf. également, Journal Asiatique (J.A), 1854, II; p. 348 et 1863, I; pp. 27-79.
- (10)- H. Suter, Das Rechenbuch des Abu-Zakariyya al-Hassar, Biblioteca Mathematica (B.M.), II,1901; pp.12-40. Cf. également, J.A. (7), vol.16, 1880; p 469.
- (11)- L.A. Sédillot, Traité des instruments astronomiques des arabes (d'Abu-l-Hasan al-Marrakūši), trad. de J.J. Sédillot, Paris, 1835.
- (12)- M. Cantor, Vorlesugen über Geschichte des Mathematik, Stuttgart, 1965, t.I; pp. 792-817.
- A.P. Juschkewitsch, Geschichte der Mathematik im Mittelalter, Leipzig, 1964; pp. 175-325. Traduction française partielle : Les mathématiques arabes (VIII^e-XV^e siècles), par M. Cazenave et K. Jaouiche, Paris 1976 (à laquelle nous nous référons).

(13)- E.F. Gautier, Les siècles obscurs du Maghreb, Paris 1927. Le maghrébin, ce "traînard de l'Histoire" comme le qualifie l'auteur, y est marqué d'une incapacité congénitale à assumer son destin.

- Ch. André Julien, Histoire de l'Afrique du Nord, 2^e édition (Le Tourneau), Paris 1969. Toute entreprise maghrébine d'envergure y a pour finalité l'échec.

(14)- Car enfin, de deux choses l'une : Ou bien on admet comme hypothèse de travail que, depuis le VIII^e siècle, et en liaison étroite avec l'Espagne, le Maghreb a participé activement à l'élaboration et à l'enseignement des mathématiques arabes et, dans ce cas, rien ne doit nous décourager dans notre tentative de reconstituer, sans préjugé, les aspects essentiels de cette activité ; ou bien, on convient que l'activité scientifique n'a jamais atteint au Maghreb le niveau qu'on lui a connu dans les provinces du centre et de l'est de l'empire et, du coup, la question devient plus importante car plus fondamentale. En effet, dépassant le cadre étroit de cette activité, elle se situerait alors sur le triple plan économique, politique et culturel et équivaldrait à rechercher les causes et les conditions qui ont permis un développement inégal, dans le cadre d'une même civilisation. Dans les deux cas, l'indifférence est anormale.

(15)- A. Marre, Le Talkhis d'Ibn al-Banna, Rome, 1865.

- M. Souissi, Talkhīṣ A^cmāl al-Ḥisāb, Publication de l'université de Tunis, 1969 ; (auquel nous nous référons sous le titre : Le Talkhis). Cf. également, du même auteur : Un texte d'Ibn al-Bannā' sur les nombres parfaits abondants déficients et amiables, International Congress of Mathematical Sciences, Karachi, Juillet 1975.

(16)- A. Laroui, op.cit. pp. 186-206.

(17)- A. Ibn Khaldūn, al-Muqaddima, Beyrouth, 1967. Traductions françaises : De Slane, Prolégomènes, Paris, 1844-62. V. Monteil, Discours sur l'Histoire universelle, Paris, 1978. Nous nous référons à cette dernière édition ainsi : La Muqaddima ...

(18)- F. Braudel, La Méditerranée et le Monde méditerranéen à l'époque de Philippe II, Paris, 1979, t.II; p.515.

(19)- Pour un aperçu des conséquences culturelles, à partir du XV^e siècle, cf. J. Berque, L'intérieur du Maghreb, Paris, 1978.

(20)- La Muqaddima, op.cit. pp. 888-901 et 1215-30.

(21)- Ibn al-Bannā', Raf^c al-Ḥijāb^c an Wujūh A^cmāl al-Ḥisāb, mss. Tunis n°9722, où on peut lire : "L'extraction de la racine cubique est une opération longue et de peu d'utilité ; c'est la raison pour laquelle nous avons renoncé à l'extraction de la racine cubique [dans le Talkhis]". C'est la même raison qu'il invoque pour justifier la suppression, dans le chapitre de l'addition, de la recherche des carrés magiques et des nombres amiables (f.17a). Cf. également le mss. Tunis, n° 561, f. 115a. où le commentateur anonyme du Talkhis ne semble pas du même avis puisqu'il s'oppose à la suppression de telle ou telle méthode malgré le fait "qu'on ne lui trouve presque pas d'utilité dans l'Art pratique".

(22)- La Muqaddima, op.cit. p. 1057.

(23)- C'est le cas, par exemple, de l'Urjūza d'Ibn al-Yāsamin et de nombreux commentaires du Talkhīs d'Ibn al-Bannā', Il faut remarquer que ce phénomène n'est pas spécifiquement maghrébin, comme en témoigne la nature de la production mathématique au XV^e et au XVI^e siècle, en Egypte par exemple. Il n'est pas non plus spécifique aux mathématiques. D'autres secteurs, scientifiques ou non, sont concernés à un degré plus élevé encore.

(24)- F. Rosen, The algebra of Mohammed ben Musa, ed. and trans. London, 1831. Cf. également A.M. Mashrafa et M. Mursi Ahmad, Kitāb al-Jabr wa-l-Muqābala, Le Caire, 1939 (auquel nous nous référons). Pour une bibliographie détaillée, cf. F. Sezgin, Geschichte des Arabischen Schriftums (G.A.S.), V, Leiden, 1974, pp. 228-241.

(25)- F. Wepcke, Extraits du Fakhri, traité d'algèbre par... Al-Karkhi, Paris, 1853. Cf. également l'Algèbre d'Omar Alkhayyāmī, Paris, 1851.

(26)- A. Hochheim, Al-Kāfī fil Hisāb des Abu Bekr Muhammed ben Alhusein Alkarkhi, 1-3, Halle, 1877-80.

(27)- H. Suter, Das Buch der Seltenheiten der Rechenkunst von Abu Kāmil el Misri, Bibl. Math. 3. Folge, 11, 1911.

(28)- L.C. Karpinski, The Algebra of Abu Kāmil Šoja ben Aslam, Bibl. Math. 3. Folge, 12, 1912.

(29)- Les Mathématiques arabes..., op.cit. pp. 177-91 où l'on trouve une liste de ses travaux et de ceux de l'école soviétique.

(30)- R. Rashed, L'arithmétisation de l'algèbre au XI^e siècle, Actes du XIII^e congrès d'Histoire des Sciences, Moscou, 1971, sections III et IV, 1974; pp. 63-9. Cf. également, Recommencement de l'algèbre aux XI^e et XII^e siècles, in J.E. Murdoch and E.D. Sylla, The Cultural Context of Medieval Learning, 1975; pp. 33-60.

(31)- A. Anbouba, l'algèbre arabe aux IX^e et X^e siècles : aperçu général, Journal for the History of Arabic Science (J.H.A.S.), vol.2, n°1, 1978.

(32)- Kitāb al-Jabr..., op.cit.

(33)- M. Levey, The Algebra of Abū Kāmil, in a Commentary by Mordecai Finzi. Hebrew Text, Translation and Commentary, Madison-Milwaukee and London, 1966. Pour le reste de ses travaux, cf. F. Sezgin, G.A.S., op.cit. p. 278.

(34)- F. Sezgin, G.A.S., op.cit. pp. 325-29.

(35)- A. Anbouba, As-Samaw'al ibn Yahya al-Maghribī, in al-Machrek, Beyrouth, Janvier, 1961. Pour l'édition complète de son traité d'algèbre, cf. S. Ahmad et R. Rashed, al-Bāhir fi-l-Jabr d'as-Samaw'al, Damas, 1972; qui est accompagnée d'une introduction en arabe et d'une longue analyse en français. Nous nous référons à cette édition ainsi : al-Bāhir ...

(36)- A. Djebbar et R. Rashed, L'oeuvre algébrique de 'Umar al-Khayyām, actuellement sous presse aux éditions de l'I.H.A.S., Université d'Alep.

(37)- R. Rashed, Résolution des équations numériques et Algèbre : Šaraf-al-Dīn al-Ṭūsī, Viète. Archives for History of Exact Sciences (A.H.E.S.), vol. 12, n°3, 1974; pp. 244-90. Cf. également du même auteur : L'extraction de la racine n-ème et l'invention des fractions décimales (XI^e-XII^e siècles), A.H.E.S., vol. 18, n°3, 1978; pp. 191-243.

(38)- F. Peyrard, Les Oeuvres d'Euclide, Paris, 1966; pp. 41-56.

(39)- Ayant à l'esprit les multiples relations économiques et culturelles qui se sont tissées, très tôt, entre l'Orient et l'Occident musulman et qui se sont renforcées par la suite malgré les divisions politiques, la question des échanges scientifiques et du rôle joué par Bagdad, le foyer initial, dans la diffusion des sciences se posent naturellement. Pour ce qui est des mathématiques, elles n'ont sûrement pas bénéficié d'une vitesse de propagation analogue à celle des idées politiques : A la mort d'al-Khawārizmī, alors que Bayt al-Ḥikma, construite sur décision d'al-Ma'mūn, fonctionnait déjà depuis presque vingt ans accueillant étudiants, enseignants et chercheurs, à Kairouan -le plus grand centre intellectuel du Maghreb à cette époque- la tendance était plutôt au développement des sciences juridiques stimulé par le conflit entre le hanafisme et le malékisme.

(40)- J.A. Sanchez Perez, Compendio de Algebra de Abenbéder, Madrid, 1916, texte arabe, pp. 39-40. Il s'agit du problème n° 31 d'al-Khawārizmī (n°18 chez Abū Kāmil) :

$$(x - (x/3 + x/4 + 4))^2 = x + 12$$

et que ce dernier résout en posant : $x = X^2 - 12$.

(41)- Mss. Paris n° 2459, ff.67b et sq.

(42)- Mss. Vatican n° 1403, f. 126a.

(43)- La Muqaddima, op.cit., p. 1057. Sur Abū-l-Qāsim al-Qurašī, nous ne disposons encore que de très peu d'éléments. En plus du passage cité de la Muqaddima, cf. Ibn al-Qaḍī, Durrat al-Hijāl, Rabat, 1934, p.5, n° 17 ; et Hājjī-Khalīfa, édit. Fluegel, t.II, p. 585 et t.IV, p. 10 où il ne fait que reprendre ce qu'en dit Ibn Khaldun.

(44)- Mss. Tunis n° 561, f. 61a. L'auteur renvoie également au propre livre d'al-Qurašī (f. 146a).

(45)- Mss. Leyde n° OR2818 dont le contenu ne correspond pas tout à fait à la description qu'en a faite Carlo Landberg dans son "catalogue des manuscrits arabes provenant d'une bibliothèque privée à El-Medina, appartenant à la maison E.J. Brill" (Leyde 1883). Nous en avons informé la bibliothèque de l'Université de Leyde. Une édition critique de ce traité sera insérée dans une thèse (en préparation) sur l'oeuvre mathématique d'Ibn al-Bannā'.

(46)- Le zéro qui intervenait déjà chez al-Karajī comme second membre d'une équation (cf. par exemple al-Fakhrī, mss. Paris n° 2459, f.40a), devient, par la suite, soumis, au même titre que les autres réels positifs, aux opérations classiques :

$$a+0 ; a-0 ; 0 \times a ; \frac{0}{x} ; \sqrt{0} .$$

Cf. Ibn al-Bannā'. Fī-t-Taksīr, mss. Tunis n°9002, f.130b. Egalement : Ibn-Ghāzī, Bughyat at-Ṭullāb fī Šarḥ Munyat al-Ḥussāb, mss. Brit. Mus. n° add 9625, f. 80b.

(47)- A.M. Mashrafa et M. Mursi Ahmad, op.cit., pp. 17-21.

(48)- L'oeuvre algébrique de 'Umar al-Khayyām, op.cit. L'auteur distingue six équations binômes, douze trinômes et sept quadrimômes, chacun de ces groupes étant divisé en deux sous-groupes : Les équations dont les solutions sont constructibles et les autres, c'est-à-dire celles dont les solutions sont obtenues par intersections de sections coniques.

(49)- R. Rashed, Résolution des équations..., op.cit., p. 272. Ce n'est plus le critère de constructibilité qui définit les sous-classes, mais celui de l'existence de solutions réelles (positives).

(50)- Comme le précise Ibn al-Majdī dans son commentaire du Talkhīs d'Ibn al-Bannā' Cf. Ḥawī-l-Lubāb wa Šarḥ Talkhīs A'māl al-Ḥisāb, mss. Brit. Mus.n°7469, f. 147b.

(51)- al-Bīrūnī, Kitāb at-Tafhīm li Awā'il Šinā'at at-Tanjīm, mss. Brit. Mus. n° Or. 8349, pp. 38-39.

(52)- al-Fakhrī, op.cit. ff. 26b-36a.

(53)- al-Bāhir, op.cit., pp. 75-78. (Texte arabe).

(54)- A.S. Damirdash et M. Hamdi, Miftāh al-Ḥisāb, Le Caire, 1967; pp. 199-202.

(55)- J. Shawky, al-Khulāṣa fī 'Ilm-al-Ḥisāb wa-l-Jabr wa-l-Muqābala, in Mathematical Works of Bahā' al-Dīn al-Āmilī, Alep, 1976.

(56)- J.A. Sanchez Perez, Compendio de algebra..., op.cit., pp. 6-10.

(57)- Nous avons consulté le mss. Brit. Mus. n° Stow Or.10, ff.20-27, où le célèbre poème mathématique est commenté par Sibṭ al-Māradīnī.

(58)- Mss. Tunis n° 561, f.148a où l'auteur donne cette information.

(59)- R. Rashed, Résolution des équations..., op.cit., p.273.

(60)- Le Talkhīs, op.cit., p.75.

(61)- Ibn Haydūr, al-Jāmi' li Uṣūl 'Ilm al-Ḥisāb, mss. Tunis, n° 9722, f.63b.

(62)- al-Qalṣādī, Kaṣf al-Jilbāb ʿan ʿilm al-Ḥisāb, mss. Tunis, n°561, f.46b.

(63)- Ibn Ghāzī, Buḡhyat at-Ṭullāb fi Ṣarḥ Munyat al-Ḥussāb, mss. Brit. Mus., n° add 9625, ff.77b et 78a.

(64)- A.M. Mashrafa et M. Mursi Ahmad, op.cit. pp. 23-25.

(65)- M. Levey, The Algebra of Abū Kāmil, op.cit. pp. 38-47.

(66)- H. Suter, Die Abhandlung des Abū Kāmil Šojā b. Aslam, über das fünfeck und zehneck, Bibl. Math., 3. folge, 10, 1910. Cf. également : M. Levey, Abu Kāmil, in Dictionary of scientific biography, 1970, p 30-32.

(67)- al-Fakhrī, op.cit. ff. 31b-34a.

(68)- al-Bāhir, op.cit. pp. 82-85. (Texte arabe).

(69)- En effet, l'écriture algébrique de E.II;5 donne :

$$XY + \left(X - \frac{X+Y}{2}\right)^2 = \left(\frac{X+Y}{2}\right)^2$$

ou bien,

$$XY + \left(\frac{X+Y}{2} - Y\right)^2 = \left(\frac{X+Y}{2}\right)^2$$

(70)- On prend $CH = bx$ et dans tout le raisonnement, on substitue CH à GH .

(71)- al-Bāhir, op.cit. pp. 78-82 et 85-88. (Texte arabe).

(72)- Raf ʿ al-Hijāb ..., op.cit. ff. 24b-25a.

(73)- Pour les trois équations, les deux premières méthodes sont extraites du Raf ʿ al-Hijāb, op.cit. ff. 43a-44b ; la troisième, de son Kitāb al-Jabr, op.cit. ff. 22b-26b.

(74)- Raf ʿ al-Hijāb, op.cit. f.44a.

(75)- Op.cit. f. 44b.

(76)- Voici, à titre d'exemple, comment il procède pour résoudre l'équation IV:

$$x^2 + bx = c$$

en utilisant la première méthode :

" Tu considères toujours le nombre et le carré comme étant les deux nombres multipliés [dans le produit par quadrature]. Leur différence est les choses dans la quatrième équation. Leur produit est [égal] à des carrés auxquels tu ajoutes le carré de la moitié de leur différence qui est égal à des carrés. Cela est égal au carré de leur somme. Tu prends sa racine carrée qui est leur demi-somme et qui est égale à des choses. Tu la conserves. Puis tu considères leur demi-somme ; elle est égale au carré et à la moitié des choses qui sont [données

dans l'équation | car le nombre est égal au carré et aux choses ; et si on l'ajoute au carré, il vient deux carrés et des choses et la moitié de cela est [égal] à un carré et à la moitié des choses. Tu l'égalises alors aux [choses] conservées ; il reste des choses qui égalent un carré et c'est la première équation ".
Cf. Raf^c al-Hijāb, op.cit. f. 43a.

(77)- La Muqaddima, op.cit. pp. 897-98.

(78)- Le Talkhīṣ, op.cit. p. 60.

(79)- al-Bāhir, op.cit. p. 120. (Texte arabe).

(80)- Mss. Tunis, n° 9002, ff. 130b-132b.

(81)- Raf^c al-Hijāb, op. cit. f. 9a.

(82)- Ḥawī-1-Lubāb, op.cit. ff. 11b-12a. L'auteur précise qu'il n'a vu cette question traitée par personne avant lui.

(83)- al-Jāmi^c ..., op.cit. f. 49b.

(84)- C'est d'ailleurs la raison pour laquelle nous renvoyons au chapitre III l'exposé détaillé des problèmes que nous venons d'évoquer.

(85)- Raf^c al-Hijāb, op.cit. f. 12a. Pour la recherche de \sqrt{b} , lorsque $b = n^3$, $n \in \mathbb{N}$, Ibn al-Bannā' donne deux méthodes arithmétiques, la première utilisant les nombres trigones qui sont de la forme :

$$P_3^n = \frac{n(n-1)}{2}$$

et la relation :

$$\sqrt{n^3 + (P_3^n)^2} - P_3^n = P_3^{n+1} - P_3^n = n$$

La seconde utilise la décomposition de b en produits de facteurs premiers. Une troisième méthode, dite "racine, point, point de racine", était également utilisée.

(86)- Le Talkhīṣ, op.cit. pp. 78-79.

(87)- Ḥawī-1-Lubāb, op.cit. f. 199a. où il reproduit un extrait d'un ouvrage d'Ibn al-Hā'im. Si l'on se réfère aux indications fournies par Ḥājji Khalīfa, il s'agirait soit de son commentaire sur l'urjūzā d'Ibn al-Yāsamin, soit du Musmi^c fī Šarḥ al-Muqni^c où il commente son propre poème algébrique.

(88)- Yahyā Ibn Khaldūn, Bughyat ar-Ruwād fī Akhbār Banī 'Abd al-Wād, Alger, 1903, t.I, p. 56.

(89)- F. Woepcke, Notations algébriques employées par les Arabes, J.A. 1854, II, p. 348-49.

(90)- Si on entend par symbolisme tout ce qui représente un objet, un concept ou une opération mathématiques et qui, par sa concision simplifie l'expression, l'enchaînement des propositions et la succession des opérations, alors les écrits mathématiques arabes n'en manquent pas. Bien plus, certains aspects comme l'utilisation des tableaux dans les problèmes d'approximation (pour ne citer que cet exemple), sont suffisamment élaborés pour mériter qu'on en suive la genèse et l'évolution.

(91)- La Muqaddima, op.cit. p. 1054.

(92)- F. Woepcke, Notations algébriques..., op.cit. pp. 352-73.

(93)- H. Suter, Das Rechenbuch des Abū Zakariyyā al Haṣṣār, op.cit. pp.19 et sq

(94)- B. Boncompagni, Il Liber Abbaci di Leonardo Pisano, Rome 1867.

(95)- Ibn Qunfūdh, Ḥaṭṭ an-Niqāb 'an Wujūh al-Ḥisāb, mss. Rabat, n° D.1678. Pour la vie de cet auteur, cf. l'article de M. Hadj Sadok in Encyclopédie de l'Islam nouvelle édition, p. 867. Pour ses écrits mathématiques, cf. Durrat al-Ḥijāl, Rabat, 1934, p. 60, n° 150. Pour al-Mawāḥidī, nous reprenons l'information donnée par Sarton, Introduction to the history of science, 3, II. p. 1765.

(96)- Le symbolisme des fractions est absent du Talkhīṣ d'Ibn al-Bannā' et du Jami' d'Ibn Haydūr, mais on le trouve dans des ouvrages plus accessibles du XIV^e siècle, comme le Ḥaṭṭ an-Niqāb d'Ibn Qunfūdh, le Kitāb d'al-Huwari' (mss. India Office, n° Loth 770) ou les Arba' Maqālāt d'Ibn al-Bannā' lui-même. Pour ce dernier traité, cf. mss. Tunis, n° 9722, ff. 96a-131a.

(97)- De ce point de vue, le Talkhīṣ d'Ibn al-Bannā', véritable concentré de toutes les opérations du calcul arithmétique et algébrique, peut être considéré, à travers la concision excessive de son expression littérale, comme une réaction "traditionaliste" à ce qui était jugé, peut-être, comme un excès de symbolisme dans les traités qui l'ont précédé. C'est en tout cas une des interprétations possibles du fameux passage de la muqaddima (op.cit. pp. 1054-55).

(98)- Talkhīṣ al-'Ibārāt wa Idāḥ al-Iṣārāt 'alā Dhawāt al-Asmā' wa-l-Munfaṣilāt (résumé des expressions et explicitation des signes sur les nombres à deux noms et les apotomes), est le titre d'un opuscule sur le calcul par radicaux qui utilise abondamment le symbolisme. Cf. mss. Alger, n° 1450, ff. 1a-9a. al-Qalsādī, quant à lui, justifie son commentaire sur l'urjuza d'Ibn al-Yāsamin par "l'hermétisme de l'expression" de certains commentateurs qui "se contentent du symbole et du signe". Cf. mss. Alger, n° 2193, f. 20b.

(99)- Ḥawī-l-Lubāb, op.cit. ff. 16a et 146a pour le symbolisme des équations, ff. 61a-77a pour les fractions, ff. 183a et sq. et ff. 91b-105a pour les racines. La seule différence à signaler entre ce symbolisme et celui en cours au Maghreb, à la même époque, concerne les chiffres. Chez Ibn al-Majdī, on trouve les signes suivants :

٩, ٨, ٧, ٦, ٥, ٤, ٣, ٢, ١, ٠

que l'auteur surnomme "chiffres indiens".

(100)- F. Sezgin, op.cit. pp. 314-21 pour al-Kūhī et pp. 358-74 pour Ibn al-Haytham.

(101)- Pour leur origine, cf. Encyclopédie de l'Islam au mot Ghobar. Cf. également Ibn al-Bannā', al Arba' Maqālāt, op.cit. f. 100a. Par la suite, nous transcrirons le quatre et le cinq en symboles actuels.

(102)- Plus généralement, toutes les fractions de la forme :

$$\frac{m}{n} ; 1 \leq m < n \text{ et } n > 1.$$

Quant au zéro, il a désormais, dans les calculs et les résultats, une écriture rationnelle de la forme :

$$\frac{0}{n} ; n > 1.$$

(103)- Respectivement :

$$\frac{2}{7} + \frac{5}{6} \times \frac{1}{7} + \frac{3}{8} \times \frac{1}{6} \times \frac{1}{7} \quad \text{et} \quad \frac{0}{7} + \frac{0}{6} \times \frac{1}{7} + \frac{3}{8} \times \frac{1}{6} \times \frac{1}{7}$$

Plus généralement :

$$\frac{\frac{a_n}{b_n} \frac{a_{n-1}}{b_{n-1}} \dots \frac{a_1}{b_1}}{\frac{a_1 + \frac{a_2 + \dots + \frac{a_{n-1} + \frac{a_n}{b_n}}{b_2}}{b_1}}{b_1}}$$

(104)- Qui signifie :

$$\frac{2}{7} \times \frac{5}{6} \times \frac{3}{8}$$

C'est cette même écriture que l'on trouve à la fois chez al-Huwari', dans son commentaire du Talkhīs, et chez al-Qalṣādī, un siècle plus tard ; mais ce dernier signale l'existence de deux autres notations moins utilisées que la première :

$$\frac{3}{8} \frac{5}{6} \frac{2}{7} \quad \text{et} \quad \frac{3}{8} \frac{5}{6} \frac{2}{7}$$

Cf. mss. Tunis, n° 8607, f. 120b. Dans Tuḥfat aṭ-Ṭullāb, on trouve: $\frac{3}{8} \frac{5}{6} \frac{2}{7}$

(105)- Qui signifie :

$$\frac{3}{7} + \left(\frac{5}{9} + \frac{7}{8} \times \frac{1}{9} \right) + \left(\frac{2}{5} \times \frac{1}{3} \right)$$

Cela se généralise à toute somme de fractions de l'un des trois types précédents.

(106)- Si $A = \frac{1}{3} \frac{3}{4} \frac{5}{7}$ et $B = \frac{1}{6} \frac{4}{5} \frac{1}{3}$

la première signifie : $A - B.A$; la seconde :

$$\frac{1}{2} - \left[\frac{3}{4} - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \right) \times \frac{1}{4} \right] \times \frac{1}{2}$$

(107)- Respectivement : $(\frac{1}{3} + \frac{3}{4}) - (\frac{7}{8} + \frac{1}{3})$ et $\frac{9}{11} - \frac{7}{8} - \frac{3}{4} - \frac{1}{3}$.

(108)- On a :
a) : $2 + \frac{3}{5}$; b) : $\frac{3}{5} \times 2$.

Quant au troisième, il peut avoir deux significations :

$$\frac{7}{9} \times (2 + \frac{3}{5}) \quad (1) ; \text{ ou bien : } \frac{7}{9} \times 2 + \frac{3}{5} \quad (2).$$

(La troisième lecture est exclue grâce à la convention faite dans b)-).
Pour éviter la confusion entre les deux écritures restantes, les symboles suivants, proches des parenthèses actuelles, ont été utilisés :

$$\frac{3}{5} \ 2 \ | \ \frac{7}{9} \quad \text{pour (1)} ; \text{ et } \frac{3}{5} \ | \ 2 \ \frac{7}{9} \quad \text{pour (2)}.$$

Cf. Kašf al-Jilbāb..., op.cit. f. 32a. Dans une copie d'un autre ouvrage d'al-Qalṣādī, on trouve :

$$\frac{3}{5} \ 2 \] \ \frac{7}{9} \quad \text{pour (1)} ; \text{ et } \frac{3}{5} \ [\ 2 \ \frac{7}{9} \quad \text{pour (2)}.$$

Cf. Kašf al-Aṣrār 'an 'Ilm Ḥurūf al-Ghubār, mss. Alger, n° 2209, ff. 1b-23b.

(109)- Le ف et le ج sont respectivement la première lettre de Qisma (division) et la dernière lettre de 'Adala (égalier). Dans toutes ces notations et dans celles qui suivront les points diacritiques sont négligés par les utilisateurs.

(110)- Respectivement : $\sqrt{8}$, $\sqrt{\sqrt{7}}$, $2 \times \sqrt{8}$, $\frac{1}{2} \times \sqrt{5}$.

(111)- F. Peyrard, Les Oeuvres d'Euclide, op.cit. Livre X, pp. 258-395.

(112)- Ces lettres sont les premières dans les mots Šay' (chose), Māl (carré), Ka'ab (cube). x est également dit Jidhr (racine), mais on a réservé le ج première lettre de ce mot aux racines carrées.

(113)- On peut penser, toutefois, que la manipulation plusieurs fois séculaire des équations d'al-Khawārizmī, par exemple, avec les mêmes coefficients, avait fini par transformer, dans la pratique des mathématiciens, ces coefficients particuliers en symboles généraux.

(114)- Mss. Istanbul, Laleli n° 2734, ff. 1-18. Il est classé anonyme, mais nous l'avons identifié comme étant le dernier chapitre du Ḥawī - l-Lubāb d'Ibn al-Majdī et nous en avons informé la bibliothèque Nur Usmanyé d'Istanbul. Dans ce manuscrit, on trouve, entre autre, un tableau de multiplication des puissances de x et de leurs inverses. Ces derniers ont, pour les représenter, un symbole que nous n'avons pas rencontré ailleurs, par exemple :

$$\frac{6}{x^5} \quad \text{est noté : } \frac{\text{ج}}{6}$$

(le ج étant, ici, la première lettre de Juz').

(115)- Ce symbolisme des puissances est d'autant plus important qu'il accompagne, dans le cas précis que nous évoquons, une factorisation polynomiale qui est une généralisation de celle que l'on utilise dans le calcul décimal ou à base a . Ainsi, pour approcher la solution de l'équation :

$$P_n(x) = b, \text{ avec : } P_n(x) = \sum_{k=1}^n a_k x^k$$

on ne calcule pas directement $P_n(x_0)$, pour x_0 donné, mais plutôt :

$$(\dots((a_n x_0 + a_{n-1})x_0 + a_{n-2})x_0 + \dots + a_1)x_0$$

D'où l'utilité de la visualisation des puissances de x . Cf. Le Talkhīs, op.cit. p. 51, où cet algorithme est utilisé pour la base 7.

(116)- Tuḥfat an-Nāsi'īn 'alā Urjūzat Ibn al Yāsamin d'al-Qalsādī, mss. Tunis, n° 16450, ff. 52 et sq. En symbolisme actuel, on a :

$$(1) \quad 12-x; \quad (2) \quad 5 + \frac{1}{7} - \frac{3}{7}x; \quad (3) \quad \frac{1}{9}x + (5 + \frac{1}{7}) - \frac{3}{7}x;$$

$$(4) \quad (5 + \frac{1}{7}) - (\frac{2}{9} + \frac{6}{7} \frac{1}{9})x = 12-x; \quad (5) \quad x + (5 + \frac{1}{7}) = 12 + (\frac{2}{9} + \frac{6}{7} \frac{1}{9})x$$

$$(6) \quad \frac{43}{63}x = 6 + \frac{6}{7}$$

Pour d'autres exemples, traités de manière identique, cf. Ibn Ghāzī, Bughyat aṭ-Ṭullāb, op.cit. ff. 75 et sq.

(117)- Mss. Tunis, n° 9002, f. 120b. Le problème est traité avec le capital valant le carré de la part de chaque fils. Si x est cette part, on a :

$$(118)- \text{On a : } (1) \quad \frac{1}{3}x^2 - x; \quad (2) \quad \frac{1}{9}x^2 - \frac{1}{3}x; \quad (3) \quad \frac{1}{9}x^2 - \frac{1}{3}x \text{ ôtés de } x;$$

$$(4) \quad \frac{1}{9}x^2 \text{ de } (1 + \frac{1}{3})x; \quad (5) \quad (1 + \frac{1}{3})x - \frac{1}{9}x^2;$$

$$(6) \quad (1 + \frac{1}{3})x - \frac{1}{9}x^2 \text{ de } x^2; \quad (7) \quad (1 + \frac{1}{3})x - \frac{1}{9}x^2 \text{ de } \frac{1}{3}x^2;$$

$$(8) \quad (1 + \frac{1}{3})x \text{ de } \frac{4}{9}x^2; \quad (9) \quad \frac{4}{9}x^2 - \frac{1}{3}x;$$

$$(10) \quad (1 + \frac{1}{9})x^2 - (1 + \frac{1}{3})x = 4x; \quad (11) \quad (1 + \frac{1}{9})x^2 = (5 + \frac{1}{3})x.$$

(119)- Pour un autre exemple de ce type, cf. mss. Tunis, n° 9722, f. 266b, où il s'agit de résoudre l'équation classique (n° 8) d'Abū Kamil :

$$\frac{x}{10-x} + \frac{10-x}{x} = 4 + \frac{1}{4}$$

(120)- Talkhīs al-'Ibārāt wa Idāh al-Iṣārāt..., op.cit. f. 6b. Il s'agit de calculer $\sqrt{x+y}$ de la forme :

$$(1) : (a + \sqrt{b})^{1/2} ; (2) : (\sqrt{a} + b)^{1/2} ; (3) : (\sqrt{a} + \sqrt{b})^{1/2} .$$

avec :

$$a^2 > b \text{ dans (1) ; } a > b^2 \text{ dans (2) .}$$

et, dans les trois cas :

$$\left(\left| x^2 - y^2 \right|_{\times \text{Sup}(x^2, y^2)} \right)^{1/2} \in \mathbb{Q} .$$

Le calcul repose sur la relation :

$$(x + y)^{1/2} = \sqrt{A} + \sqrt{B}$$

avec :

$$A = \frac{x}{2} + \left(\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{4} \right)^{1/2} ; \quad B = \frac{x}{2} - \left(\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{4} \right)^{1/2} .$$

Les opérations sont toujours suivies d'une preuve. Ici, on vérifie que :

$$(A + B) = x \quad \text{et} \quad 2 \times \sqrt{A} \times \sqrt{B} = y .$$

(121)- Ibn Ghāzī Bughyat at-Tullāb, op.cit. 99a. D'après l'auteur, ce problème, posé à l'origine par al-Ḥaṣṣār, était connu au Maghreb sous le nom de "Sabtiyya", en référence à la ville marocaine de Sabta (Ceuta) dont les mathématiciens avaient échoué dans la résolution de l'équation du 4^e degré qui découle du problème (et qui sera finalement résolue par ceux de Fès). Mais ces faits qui semblent remonter à la fin du XII^e siècle ou au début du XIII^e, sont trop isolés pour permettre de porter un jugement sur la différence de niveau mathématique entre une ville étroitement liée à l'Espagne et subissant, par conséquent, les contrecoups de la Reconquista, et une métropole de l'intérieur du Maghreb.

Cf. également f. 100b. pour la résolution de ce problème avec les outils symboliques. D'autre part, dans la citation faite par Ibn Ghāzī d'un passage du livre d'al-Ḥaṣṣār où cette résolution est suggérée, deux autres méthodes sont décrites. La première utilise des complétions de carrés :

$$\begin{aligned} \frac{x^4}{8} + \frac{x^3}{2} + \frac{x^2}{2} &= 2 \left(\frac{x^2}{4} + \frac{x}{2} \right)^2 = 2 \left[\left(\frac{x^2}{4} + \frac{x}{2} + \frac{1}{4} \right) - \frac{1}{4} \right]^2 = 2 \left[\left(\frac{x+1}{2} \right)^2 - \frac{1}{4} \right]^2 \\ &= 1225 + \frac{1}{8} \end{aligned}$$

d'où x, après deux extractions de racines. La seconde repose sur le changement d'inconnue :

$$X = \left(\frac{x+1}{2} \right)^2$$

$$\Rightarrow \quad X(2X - 1) = 1225 \quad \Rightarrow \quad X = 25 \quad \Rightarrow \quad x = 2\sqrt{25} - 1 = 9 .$$

Pour ce même problème et celui utilisant la série des cubes d'entiers pairs, cf. H. Suter, Das Rechenbuch des Abū Zakariyyā al-Ḥaṣṣār, op.cit. pp. 33-34.

(122)- La définition que nous adoptons ici est explicitée et justifiée dans : C. Berge, Principes de combinatoire, Paris 1968, pp. 1-10. Elle est à la fois plus générale et plus féconde que celle donnée, par exemple, par Papy dans Mathématiques modernes, Paris 1966, t.V, p.VI, ou celle utilisée par Bourbaki dans Eléments de Mathématiques, Paris 1963, Fascicule XX, Livre I, Chapitre 3, pp. 62-66.

(123)- Ibn Haydūr, Tuḥfat at-Tullāb wa Ummyyat al-Ḥussāb fī Šarḥ mā Aškala min Raf' al-Ḥijāb, mss. Vatican n° 1403, f. 52b. , où l'auteur donne, comme exemple classique de combinaisons, les conjonctions des sept planètes, 2 à 2, 3 à 3, ..., 6 à 6.

(124)- Les carrés magiques d'ordre n , classiques, sont des configurations planes constituées des n^2 premiers entiers disposés sur n lignes (ou n colonnes) et vérifiant :

$$\sum_{i=1}^n a_{ij} = \sum_{j=1}^n a_{ij} = \sum_{i=1}^n a_{ii} = \sum_{i+j=n+1} a_{ij} = \frac{n}{2} (n^2 + 1)$$

Pour les cercles magiques, cf., en particulier, al-Būnī, Šams al-Ma'ārif al-Kubrā, Beyrouth (édition non datée).

(125)- Dès le VIII^e siècle, Khalīl Ibn Aḥmad avait dénombré les combinaisons p à p ($2 \leq p \leq 5$) des 28 lettres de l'alphabet arabe. Après lui, Sībawayh déterminait le nombre d'arrangements p à p ($2 \leq p \leq 5$) de ces mêmes lettres, mais en tenant compte des incompatibilités de prononciation. Cf. R. Rashed, Algèbre et Linguistique : L'analyse combinatoire dans la science arabe, Philosophical Foundation of Science, Dordrecht (Reidel) 1974, pp. 383-99.

(126)- La Muqaddima, op. cit., pp. 1250-56.

(127)- Le tableau des nombres-polygones sera étudié en détail dans III. 2. Le procédé de l'échiquier servait, en l'absence d'un symbolisme efficace, à calculer les nombres de la forme 2^n et $\sum 2^k$, connaissant n , ou bien le nombre n connaissant 2^n . D'après Ibn an-Nadīm (S. 281), al-Miṣṣiṣī aurait écrit un livre intitulé Kitāb taḍ'īf Buyūt as-Siṭranj (livre de la duplication des cases de l'échiquier). Cf. également le Taikhīs, op. cit. p. 45.

(128)- Les quatre qualités élémentaires (chaleur, froideur, sécheresse, humidité) qui sont à la base de la chimie et de la médecine arabes, ont vu leurs combinaisons traditionnelles multipliées par l'introduction, dans chaque qualité, de la notion de degré. Chez Jābir Ibn Ḥayyān, les degrés comportent à leur tour sept divisions (minutes, secondes, etc...). Enfin, par la classification de l'alphabet arabe en quatre catégories correspondant aux quatre qualités, une relation étroite (et souvent abusive) est établie entre les combinaisons des lettres et celles des qualités. Jābir va jusqu'à identifier le langage, en tant que composition de mots, à l'alchimie qu'il considère comme une morphologie des métaux. Pour tous ces aspects, cf. P. Kraus, Jābir Ibn Ḥayyān : Contribution à l'histoire des idées scientifiques dans l'Islam, Le Caire 1942-43. Pour la grammaire, voire note 180, ci-dessous, relative au dénombrement de toutes les possibilités de lecture d'une phrase, compte tenu des règles grammaticales.

Four d'autres problèmes combinatoires traités par les mathématiciens de l'Inde et qui ont peut-être été portés à la connaissance des arabes, cf. N.L. Biggs, *The roots of combinatorics*, *Historia Mathematica*, 6, 1979, pp. 109-136.

(129)- En musique, la manipulation des notes et des games amenait tout naturellement certains savants à étudier les combinaisons de rapports composés. Ce fut le cas d'al-Fārābī dans son *Kitāb al-Mūsīqā al-Kabīr*. Voici, par exemple, ce qu'il écrivait au sujet des intervalles : "Dans le cas où deux des intervalles du genre sont équivalents et le troisième différent, il nous est donné de combiner ces intervalles de deux façons seulement, suivant qu'on place le plus grand intervalle à l'extrémité ou au milieu. Dans le cas où les intervalles du genre sont tous inégaux, nous pouvons faire trois combinaisons : dans la première le plus grand des trois intervalles se place à l'une des deux extrémités de la quarte, le plus petit à l'autre ; dans la seconde, le plus grand à l'une des extrémités du genre, le plus petit au centre ; dans la troisième, le plus grand intervalle est au centre ; et pour chacune de ces combinaisons, on peut arranger les intervalles soit du grave à l'aigu, soit de l'aigu au grave". (Trad. R. D'Erlanger, Paris 1930, pp. 59-60). Pour les autres aspects combinatoires de ce livre, cf. A.K. Kubesov, *Matematicheskoye nosledye al-Fārābī*, ch.7 ; cité par J.H.A.S., vol.2, n°1, Mai 1978, ainsi que E.S. Kennedy, *Math. Reviews*, 56 # 2733. Ibn Sīnā, de son côté, a également perçu les aspects combinatoires de la musique et il y a fait allusion dans son *Kitāb aš-Šifā*.

(130)- *Rasā'il Ikhwān aṣ-Ṣafā*, Beyrouth 1957.

(131)- *Risāla fī Tarkīb 'Adad al-Wafq fī-l-Murabba'āt*, mss Ayasofya n° 4843/3°, ff. 23b-56b. (citée par F. Sezgin, op.cit. V, p. 324).

(132)- *Maqāla fī A'ḍād al-Wafq*, citée par F. Sezgin, op.cit. V, p. 372 (d'après Ibn Abī Usaybi'a).

(133)- Dans son traité sur la construction de l'heptagone, Ibn al-Haytham, voulant généraliser les démarches de ses prédécesseurs, est amené à dénombrer et à décrire tous les partages de l'entier 7 en trois entiers et en obtient 4 :

$$(1,3,3) \ ; \ (2,3,2) \ ; \ (1,5,1) \ ; \ (1,4,2)$$

Cf. R. Rashed, La construction de l'heptagone régulier par Ibn al-Haytham, J.H.A.S., vol.3, n° 2, 1979, p. 322.

(134)- *Kitāb fī-š-Šakl al-Mulaqqab bi-l-Qaṭṭā'*, mss. Alger n° 1446, ff. 83b-94a. Ce problème est repris par l'auteur dans un opuscule sur les rapports composés. Cf. mss. Paris n° 2457/15°, ff. 60b-75b. Il faut noter que dans son énumération des 18 premières permutations, l'auteur distingue les deux relations :

$$\frac{a_i}{a_j} = \frac{a_k}{a_n} \times \frac{a_l}{a_m} \quad \text{et} \quad \frac{a_i}{a_j} = \frac{a_l}{a_n} \times \frac{a_k}{a_m}$$

(135)- "Si nous combinons une des six grandeurs à chacune des grandeurs restantes en la rapportant à elle et que nous dénombrons tout cela, le résultat est de quinze combinaisons". Op.cit. f. 92b.

(136)- "L'ensemble des figures est [au nombre] de 18 et leurs permutées [en plus], c'est tout ; ni plus ni moins que cela, car les six combinaisons sont éliminées comme nous l'avons montré dans ce qui précède". Op.cit. f. 94a.

(137)- M.-Th. Debarnot, La trigonométrie sphérique chez les arabes de l'Est à la fin du X^e siècle. Thèse de 3^e cycle, Paris 1980, pp. 160-202.

(138)- Op.cit. pp. 160-62.

(139)- Op.cit. p. 163. Nous avons simplifié le tableau d'al-Bīrūnī en remplaçant les mots aigu, droit, obtus respectivement par a, d, o.

(140)- Si \hat{ABC} et \hat{DCE} sont deux triangles sphériques opposés par le sommet, (n) et (m) seront dites classes associées lorsque, étant donné \hat{ABC} dans (n), \hat{DCE} est alors dans (m). (n) est réflexive si, \hat{ABC} étant de cette classe, \hat{DCE} l'est aussi.

(141)- Op.cit. p. 176.

(142)- Ce cas n'est pas dans le manuscrit des *Māqālīd* étudié par M.-Th. Debarnot, mais il semble que ce soit une omission de copiste.

(143)- A. Pacha. Carathéodory, *Traité du Quadrilatère*, Constantinople 1891, p. 93-105, cité par M. Th. Debarnot qui reproduit le tableau des combinaisons suivant une configuration différente (op. cit. p. 77).

(144)- Mss. Paris n° 4946, ff. 7b-10a. Nous avons corrigé les différentes erreurs du copiste sans les signaler.

(145)- Aucun élément ne nous permet d'affirmer que le traité d'Abū-Kāmil était connu des mathématiciens maghrébins qui se sont occupés de combinatoire. Ils ont eu pourtant à résoudre bon nombre de problèmes d'oiseaux, donc de systèmes d'équations, en combinant la méthode d'induction avec les méthodes de substitution ou des plateaux ; mais aucun des problèmes que nous avons pu examiner n'a été étudié selon le point de vue combinatoire. Il subsiste toutefois une interrogation au sujet d'une épître qu'Ibn Haydūr dit avoir consacrée entièrement à des problèmes d'oiseaux et qu'il a intitulée "*Māqāla fī Mas'alat aṭ-Ṭuyūr*". Très familier des problèmes combinatoires, cet auteur n'aurait pas eu de difficulté à les déceler dans une étude des systèmes d'équations à solutions entières. Cf. *Tuhfat aṭ-Ṭullāb...*, op.cit. f. 115b.

(146)- Cette question est amplement traitée par R. Rashed, *Algèbre et linguistique*, op.cit.

(147)- A. Anboubā, *L'algèbre al-Badī' d'al-Karajī*, Beyrouth 1964, p. 46 ainsi que pp. 72-79.

- (148)- Nous suivons ici l'analyse contenue dans al-Bāhir, op.cit. pp.75-84.
(Texte français).
- (149)- Op.cit. pp. 148-50. En rappelant le résultat partiel d'Ibn al-Haytham, donnant pour ce problème la seule solution correspondant à $b=1$, as-Samaw'al marque la différence de préoccupation des deux mathématiciens : Problème d'existence chez le premier, problème de dénombrement chez le second.
- (150)- La méthode qui n'est pas donnée devait être celle-ci : $d = \frac{xc}{z}$; $e = \frac{yc}{z}$ avec $y \in \mathbb{Q}^+$, quelconque et x, z solutions de (2).
- (151)- al-Bāhir, op.cit. p. 230. (Texte arabe).
- (152)- Op.cit. pp. 232-46. (Texte arabe).
- (153)- Op.cit. pp. 246-47. (Texte arabe).
- (154)- Nous pensons en particulier au Kitāb al-Majhūlāt d'Ibn Mu'adh al-Jayyānī et au Kitāb al-Hay'a de Jābir Ibn Aflah qui étaient étudiés au Maghreb au XIV^e comme en témoigne Ibn Haydūr dans sa Tuḥfat aṭ-Ṭullāb (op. cit. f. 123a).
- (155)- Rien ne permet encore d'affirmer que les mathématiciens maghrébins ont établi, ou simplement connu à travers les travaux d'al-Karajī, tout le tableau des coefficients des binômes en tant que résultats algébriques ; mais, même si cela eut lieu, nous pensons qu'ils ne pouvaient découvrir la correspondance entre chaque coefficient et le C_p^n qui lui est égal, sans avoir au préalable déterminé les lignes de ce tableauⁿ comme résultats purement combinatoires. Les seuls éléments dont nous disposons et qui vont dans ce sens sont les résultats très partiels et donc insuffisants que donne Ibn Haydūr : Dans le Tamḥiṣ, il calcule les C_p^p , pour $1 \leq p \leq 5$ (cf. Aqwāl Wajīza fi Ma'ānī al-Kasr wa-l-Baṣṭ (anonyme), mss.⁵ Alger n°2101, f. 10a.). Dans Tuḥfat aṭ-Ṭullāb (op.cit. f. 52b), il donne comme exemple de combinaisons les C_p^p , pour $2 \leq p < 7$. Quant à Ibn al-Bannā', il a eu l'occasion de calculer effectivement une bonne partie du tableau (cf. Remarque (2), p.106), mais rien n'indique qu'il ait rassemblé ses résultats dans une configuration plane.
- (156)- Pour la linguistique, cf. R. Rashed, Algèbre et linguistique..., op.cit. Ibn Khaldūn situe la renaissance des études linguistiques, en Espagne et au XIV^e siècle. Cf. La Muqaddima, op.cit. p. 1288.
- (157)- Ahmad Bābā at-Tambuktī cite dans Nayl al-Ibtihāj plusieurs ouvrages du mathématicien qui traitent plus ou moins de la langue , en particulier : al-Kulliyāt fī-l-'Arabiyya et Risāla fi Ṭabā'i' al-Ḥurūf wa Munāsabatihā li-l-Ma'nā. Cf. H. P.-J. Renaud, Notes critiques d'histoire des sciences chez les musulmans, II, Hesperis XXV 1938, pp. 39-49.
- (158)- Dans sa Muqaddima Ibn Khaldūn aborde longuement certains de ces aspects; cf., en particulier, pp. 224-40 et pp. 1103-53.
- (159)- A titre d'exemple, voici comment procède l'astrologue lorsqu'il utilise le Ḥisāb an-Nīm : Soit (x_1, x_2, \dots, x_n) et (y_1, y_2, \dots, y_m) les lettres com-

posant respectivement les noms de deux personnes X et Y qui sont supposées être en conflit. Soit :

$$f(x_1), \dots, f(x_n) \quad \text{et} \quad f(y_1), \dots, f(y_m)$$

les valeurs numériques correspondantes. On calcule alors les classes modulo 9 de :

$$a = \sum_1^n f(x_i) \quad \text{et} \quad b = \sum_1^m f(y_i)$$

en utilisant la relation :

$$\sum_1^n \overset{\circ}{f(x_i)} = \sum_1^n \overset{\circ}{f(x_i)} = \sum_1^n \overset{\circ}{f(x_i)}$$

Alors, chaque relation d'égalité ou d'inégalité entre $\overset{\circ}{a}$ et $\overset{\circ}{b}$ combinée avec les parités de ces deux nombres fournit, selon une convention précise, la victoire à X ou à Y.

(160)- Cette technique divinatoire consiste à écrire toutes les suites de quatre nombres composées de pairs et d'impairs ; il y en a 16 correspondant à toutes les possibilités de quatre tirages simultanés, avec répétition, de quatre urnes contenant chacune n entiers pairs et n entiers impairs. Pour plus de détails astrologiques, cf. La Muqaddima, op.cit. pp. 224-30.

(161)- Cf. W. Ahrens, Die magischen Quadrate al-Bunis, Der Islam, vols 12, 157, 1922. Egalement Carra de Vaux, Une solution arabe du problème des carrés magiques, Revue d'histoire des sciences, 1948, n°1, pp. 206-12; ainsi que M. Souissi, Hisab al-Wafq, Publication de l'université de Tunis n°16, 1978.

(162)- Mss. Alger n° 613/6°, f.73b.

(163)- En effet, même s'il s'était restreint à $2 \leq p \leq 5$, cela aurait exigé l'énumération de 378 couples de lettres, 3276 triplets, 20475 quadriplets et 98280 quintuplets, soit 122409 figures différentes. Même rassemblées par deux sur chaque ligne, cela aurait nécessité plus de 2000 pages. Trois siècles plus tard ce travail laborieux sera partiellement réalisé par le français Mersenne dans sa table de "Tous les chants qui se peuvent faire de 8 notes (octave) par la combinaison ordinaire à sçavoir 40320" (mss. Paris, Fond français n° 24256). Mais cette énumération qui nécessitera un livre de 674 pages s'avérera inutile. Pour la contribution de Mersenne à la combinatoire, cf. E. Coumet, Mersenne, Frénicle et l'élaboration de l'analyse combinatoire dans la première moitié du XVII^e siècle, Thèse de 3^o cycle, Paris 1968.

(164)- Si la parenthèse était vraie, on serait alors en présence du tableau des coefficients des binômes, mais obtenu cette fois par une démarche strictement combinatoire. Il est toutefois étonnant que ce résultat ait laissé indifférents des mathématiciens qui se sont préoccupés de dénombrement comme les maghrébins Ibn al-Bannā', Ibn Qunfūdh et Ibn Haydūr ou l'égyptien Ibn al-Majdī.

(165)- Tanbīh al-Albāb, op.cit. f. 73a et b.

(166)- C'était, à l'origine, le contenu des chapitres VII à XII du livre de Nicomaque de Gérase, "l'Introduction arithmétique". Nous savons par les références des mathématiciens eux-mêmes que ce livre était bien connu au Maghreb, peut-être à travers la célèbre traduction de Thābit Ibn Qurra ou à travers le commentaire qu'en aurait fait le mathématicien d'Espagne Rabī^ʿ Ibn Yahya al-Usqf. Pour plus de détails, cf. F. Sezgin, op.cit. t.V, p. 164.

(167)- Raf^ʿ al-Hijāb, mss. Tunis, op.cit. ff. 12a.

(168)- H. Freudenthal, Zur Geschichte der vollständigen Induction, in A.I.H.S., 6, 1953, pp. 17-37.

(169)- R. Rashed, L'induction mathématique : al-Karajī, as-Samaw'al, in A.I.H.S. 9, n°1, 1972, pp. 1-21.

(170)- B. Pascal, Oeuvres complètes, Gallimard, Paris 1976, pp. 110-15 et pp. 1415-21.

(171)- Op.cit. p. 1421. Sur la combinatoire dans l'oeuvre mathématique de Pascal, cf. P. Raymond, De la combinatoire aux probabilités, Maspero, Paris, 1975, pp. 67-107.

(172)- Raf^ʿ al-Hijāb, op.cit. f. 17a.

(173)- Op.cit. f. 42a et b.

(174)- Op.cit. f. 5a et ff. 8b-9a.

(175)- Mss. Tunis n° 9002, ff. 130a-132b.

(176)- Mss. Tunis n° 9722, ff. 116a-121a.

(177)- C'est bien ce qui a manqué, semble-t-il, à Mersenne dans ses recherches combinatoires. Cf. E. Coumet, Mersenne, Frénicle ..., op.cit. p. 9 où il est dit de cet auteur que "ses calculs, ses dénombrements sont étroitement mêlés aux usages qu'il en veut tirer, ou adhèrent fortement à certains exemples-types (...). En acquérant plus de savoir, Mersenne n'a pas changé de style".

(178)- Raf^ʿ al-Hijāb, op.cit. f. 42b, où l'auteur renvoie au résultat déjà établi avec les lettres de l'alphabet, ainsi qu'al-Jami^ʿ..., op.cit. f. 49b. où Ibn Haydūr utilise la correspondance entre n objets et le sous ensemble de \mathbb{N} , (1, 2, ..., n).

(179)- Arba^ʿ Maqālāt, op. cit. ff. 116a-121a.

(180)- Tanbih al-Albāb, op.cit. ff. 69a-74a. Cette question concerne la phrase suivante :

ضرب الضارب الشاتم التاتل محبك وادك تصادك محبيا خالد

où chacun des mots peut, sans changer de place, prendre un certain nombre de

fonctions grammaticales (7 pour le 7^e mot de la phrase, 6 pour le 6^e, 4 pour le 5^e, 6 pour le 4^e, 6 pour le 3^e, 5 pour le 8^e et enfin 9 pour le dernier mot).

(181)- Mss. Tunis n° 17956, ff. 44a-50b.

(182)- al-Jāmi^c ... , op.cit. f. 49b.

(183)- Hāwī-l-Lubāb ..., op.cit. ff. 193b-194a.

(184)- Cette tradition combinatoire va se maintenir, avec des variantes et dans le cadre de préoccupations nouvelles, chez les linguistes des siècles suivants. On peut citer, en particulier, Ḥamza al-Isfahānī qui reprendra, dans son Kitāb al-Khaṣā'iṣ wa-l-Muwāzana bayna-l-ʿArabiyya wa-l-Fārisiyya, les dénombrements effectués par Khalīl (cf. F. Rosenthal, *An Introduction to History*, 1958, III, p. 327, note n° 1260). Après lui, Ibn Jinnī intégrera, dans sa théorie de la dérivation, les différents arrangements des lettres dans la langue arabe, en tentant d'associer à chaque combinaison trilitère un sens originel d'où dériverait les sens de toutes les permutations possibles de la dite combinaison (cf. A. Mehiri, *Les théories grammaticales d'Ibn Jinnī*, Tunis 1973, pp. 250-67). En Espagne, az-Zubaydī résumera dans son Mukhtaṣar le Kitāb al-ʿAyn de Khalīl. Les dénombrements qu'il y considérera tiennent compte des contraintes liées à la prononciation et à l'usage. Cet ouvrage sera étudié par les maghrébins du XIV^e siècle, comme le confirme Ibn Khaldūn (cf. *La Muqaddima*, op.cit. pp. 1252) ainsi qu' Ibn Haydūr (*Tuhfat at-Tullāb*, op.cit. f. 50b). Beaucoup plus tard, le polygraphe égyptien as-Suyūṭī rassemblera la plupart de ces éléments dans son *Muzhir fī ʿIlm al-Lughā*.

(185)- *La Muqaddima*, op.cit. pp. 1250-51. Nous reproduisons plus loin (note n° 213) le raisonnement qui y est suivi.

(186)- Levi Ben Gerson, *Sefer Maassei Choscheb*, *Die Praxis des Rechners*, édit. et trad. par Gerson Lange, Frankfurt am-Main, 1909, pp. 84-85.

(187)- Il est probable que Lévi Ben Gerson qui connaissait malgré tout quelques rudiments d'arabe, ait pu accéder directement au contenu des plus importants ouvrages mathématiques de l'époque. En tout cas, il pouvait difficilement ignorer l'existence de la traduction du livre d'al-Ḥaṣṣār que son compatriote Moses Ibn Tibbon avait réalisée, à Montpellier, en 1271.

(188)- Raf^c al-Hijāb, op.cit. f. 12a. Dans tout ce qui suit, nous nous contentons de transcrire, en écriture symbolique actuelle, les propres formulations de l'auteur, les phrases entre crochets étant les développements que nous avons jugé utile d'ajouter.

(189)- Dans le tableau que donne Ibn al-Majdī (pour $n = m = 10$, et $1 \leq i \leq m$), il y a une ligne supplémentaire constituée par les P_1^j , $1 \leq j \leq n$ qui sont tous égaux à 1. Elle permet, d'après l'auteur, de déduire les P_2^j :

$$P_2^j = P_1^j + P_2^{j-1}$$

Il obtient ainsi un tableau à n^2 éléments. L'auteur précise qu'il n'a vu cette

généralisation écrite nulle part ailleurs. Cf. Ḥawī - l-Lubāb, op. cit. f. 22a.

(190)- Ibn al-Bannā' dit exactement : bilā Tafāḍul (sans raison) . Dans son commentaire (op.cit. f. 23b) Ibn al-Majdī précise que les nombres égaux constituent aussi une suite arithmétique dont la particularité est que $u_n = u_1$ et qu'elle ne possède pas de raison.

(191)- "Et de même chaque colonne a pour raison le trigone de la colonne qui est avant elle". Cf. Raf^c al-Hijāb, mss Leyde n°OR 2818 , p. 91. La phrase est manquante dans mss Tunis n° 9722. Pour les lignes, l'auteur s'exprime d'une manière identique : "Et ces nombres [les U_j^j] ont pour raison un nombre égal au nombre de côtés de cette figure moins deux". Cf. mss. Tunis, op.cit. f. 13a.

(192)- Ces résultats qui étaient des définitions chez Hypsiclès sont démontrés par Diophante à l'aide de sa proposition 4 qui n'a pas d'équivalent chez Ibn al-Bannā'. Cf. Le Livre des nombres polygones, in Diophante d'Alexandrie, introd. et notes par P. Ver Eecke, Paris 1959, p. 287.

(193)- Selon as-Samaw'al, une expression équivalente avait déjà été donnée, sans démonstration, par al-Karajī dans un ouvrage qui nous est encore inconnu. Cf. al-Bāhir, op.cit. p. 120. (Texte arabe).

(194)- Raf^c al-Hijāb, op. cit. f. 14a et b. L'auteur utilise ici, implicitement la proposition suivante : Si $(u_k)_1, (u_k)_2, \dots, (u_k)_n$ est une suite de suites avec $(u_k)_j$ de raison a_j , alors $(\sum_1^n u_{kj})_k$ est une suite de raison $\sum_1^n a_j$.

Ibn al-Majdī énonce cette proposition pour $n=2$. Cf. Ḥawī - l-Lubāb, op.cit. f. 23b.

(195)- L'énoncé est général et la démonstration qui est faite pour $n=4$ et $m=6$, suit aussi une démarche générale. Quant à l'écriture symbolique que nous avons utilisée, elle n'est pas abusive comme le prouve la formulation de l'auteur : "Si nous voulons additionner horizontalement n'importe quel nombre de figures-lignes successives, nous additionnons les trigones successifs jusqu'au nombre donné; ce sera le plus petit élément [de la suite] , puis nous additionnons les trigones qui sont inférieurs [en nombre] aux premiers de leur [terme] extrême; ce sera la raison. On multipliera alors cette raison par la différence en nombre entre la figure du trigone et cette figure, et qui est le nombre de figures en colonnes moins une. On ajoute le résultat du produit au plus petit élément, il vient le plus grand élément [de la suite]; et c'est la somme demandée de ces figures-lignes".

(196)- Nicomaque de Gérase, Introduction arithmétique, trad. J. Bertier, Paris 1978, pp. 109-11.

(197)- al-Bīrūnī, Kitāb at-Tafhīm, op.cit. pp. 29-30.

(198)- A. Lotfi, Kitāb aš-Šifā, Arithmétique, Le Caire 1975, pp. 53-58.

(199)- al-Bāhir, op.cit. pp. 122-26. (Texte arabe).

(200)- Le Talkhiṣ, op.cit. p. 54.

(201)- "Tu substitues les entiers pairs aux entiers successifs, le 4 au 2, le 6 au 3 et ainsi chaque entier pair à sa moitié; le nombre des entiers pairs successifs est donc égal à la moitié du dernier". Cf. Raf' al-Hijab, op. cit. f. 15a.

(202)- Op.cit. f. 10b.

(203)- Dans son exposé rédigé pour $n=4$, Ibn Haydūr suit exactement cette démarche. Cf. Tuḥfat at-Ṭullāb..., op.cit. ff. 47b-48a. Ibn al-Majdī donne également une preuve récurrente (pour $n=4$), mais en partant d'une autre décomposition du produit :

$$\begin{aligned}
 (P_3^n)^2 &= (u_n + P_3^{n-1})P_3^n = u_n P_3^n + P_3^{n-1} P_3^n \\
 &= u_n (P_3^n + P_3^{n-1}) + (P_3^{n-1})^2 \\
 &= u_n (u_n)^2 + (P_3^{n-1})^2 \\
 &= (u_n)^3 + (P_3^{n-1})^2 \\
 &= (u_n)^3 + \dots + (u_1)^3
 \end{aligned}$$

Cf. Ḥawī - l-Lubāb, op.cit. ff. 17b-18a.

(204)- H. Suter, Das Rechenbuch des Abu Zakariyya al-Hassar, op.cit. pp. 33-34.

(205)- al-Jāmi'..., op.cit. f. 50a.

(206)- Bughyat at-Ṭullāb, op.cit. f. 16b.

(207)- Mss. Paris n° 2457/25^e, f. 123b et ff. 125b-126a.

(208)- Mss. Paris n° 2457/24^e, ff. 97a et 99a.

(209)- Mss. Alger n° 1446, ff. 113a-119b, qui porte le titre de "Troisième des intermédiaires; ce dont on a besoin du livre de la sphère et du cylindre d'Archimède et qui est le volume de la sphère. Nous rapportons cela d'après le résumé du Maître Abū 'Ali Ibn al-Haytham et son commentaire".

(210)- A.P. Juschkevitch, Les mathématiques arabes ..., op.cit. p. 128.

(211)- al-Bāhir, op.cit. pp. 143-44. (Texte arabe).

(212)- Raf' al-Ḥijāb, op.cit. ff. 15b-17a. Le résultat est exprimé ainsi :
 "Tu multiplies le nombre de combinaisons $[C_n^{p-1}]$ qui précède le nombre des combinaisons demandées $[C_n^p]$ par le nombre inférieur [à n] dont la distance à n est égale au nombre d'éléments combinés [p] ". Soit :

$$C_n^p = \frac{q}{p} \times C_n^{p-1}$$

avec : $(n - q + 1) = p$.

(213)- Comme pour d'autres propositions, Ibn al-Bannā' ne juge pas utile d'écrire la preuve pour $p=2$. On la trouve exposée pour $n=28$, mais selon un procédé général, par Ibn Haydūr, dans Tuḥfat at-Ṭullāb (op.cit. f. 51a-51b), ainsi que dans le Tamḥiṣ, comme il le précise lui-même. Ibn Khaldūn la reproduit à son tour dans sa Muqaddima, pour conclure avec l'expression des arrangements

$$A_n^2 = 2 \times C_n^2$$

Il calcule ensuite les arrangements des 28 lettres p à p , en raisonnant sur $p=3$, mais en précisant que la démarche est valable pour $p=4$ et $p=5$. Voici comment il procède :

$$C_n^3 = \left(\sum_1^n k \right) \times C_n^2 \quad ; \quad (n=28)$$

car chaque bilitère auquel on ajoute une lettre devient un trilitère. Le bilitère joue donc le rôle d'une seule lettre que l'on combine avec chacune des lettres restantes qui sont au nombre de 26. On somme ces nombres successifs de 1 à 26 et on multiplie cette somme par le nombre de bilitères. Puis on multiplie le résultat par 6, le nombre des permutées d'un mot trilitère, et l'on obtient l'ensemble des arrangements des lettres de l'alphabet. (Op.cit. pp.1250-51). Soit :

$$A_n^3 = (3!) \frac{(n-1)(n-2)}{2} \times \frac{n(n-1)}{2}$$

qui est beaucoup plus grand que le nombre d'arrangements possibles, comme l'avait déjà remarqué F. Rosenthal (op.cit. III, p. 327.). On voit que cette démarche (qui est différente de celle d'Ibn al-Bannā') est une tentative de généralisation du procédé d'énumération utilisé pour le cas $p=2$, sans la correction nécessaire exigée par la répétition de certaines figures.

(214)- Ce problème est repris par Ibn Haydūr, dans Tuḥfat at-Ṭullāb (op.cit. f. 53a et b, et par Ibn al-Majdī, dans le Ḥawī-l-Lubāb (op.cit. f. 31a) où il est généralisé (voir Remarque (6), ci-dessous). L'application qui illustre ce corollaire est reprise, seule, dans le Tanbīh al-Albāb (op.cit. f. 70a).

(215)- Le mot Istiqrā' est utilisé, ici, dans le sens d'essais successifs pour $n \geq 1$, entier.

(216) - Levi Ben Gerson, op.cit. pp. 47-55.

- (217)- E. Coumet, Mersenne, Frénicle ..., op.cit. p. 300.
- (218)- B. Pascal, Oeuvres complètes, op.cit. p. 157 et trad. p.1420.
- (219)- C.B. Boyer, Cardan and the Pascal Triangle, The American Mathematical Monthly, vol. 57, 1950, pp. 387-90.
- (220)- Ces zayrija étaient non seulement connues en Europe, mais elles ont même eu une certaine vogue pendant la Renaissance française. Transmises par les milieux cabalistes, elles seront suffisamment connues au XVII^e siècle pour susciter l'intérêt de personnes se préoccupant de combinatoire comme Mersenne qui en parle ainsi, dans un de ses livres : Passant en revue les différentes méthodes combinatoires des cabalistes, il dit en particulier : "La seconde façon est appelée Themurah, qui fait les changemens matériels ; la troisième Ziruph, laquelle fait les mutations, & combinaisons formelles, & n'est guere esloignée du Zairagia des Mores". Cf. L'Impiété des Déistes, athées et libertins de ce temps, ..., Paris 1624, I, pp. 163-66. (cité par E. Coumet, op.cit.).
- (221)- Le plus connu de ces traités semble avoir été le Sefer Yesirah qui sera traduit au XVI^e siècle, en latin, par G. postel et repris, en 1623, par Mersenne dans son livre "Observationes, ..., vindicantur". Cf. E. Coumet, Mersenne, Frénicle, ..., op.cit. I, p. 44, n.1 et II, p. 577.
- (222)- A. Rashed, Raison et Métaphore selon Raymond Lulle, Thèse d'état, Paris III, 1976, p. 309, pp. 472-86, pp. 516-20. Nous dégageons de la riche étude de l'auteur les éléments suivants qui concernent notre propos :
- 1.- Dans la pensée de Ramon Lull, la combinatoire intervient sous forme de configurations planes (carrés, triangles, cercles concentriques) constituées de lettres symbolisant des principes bien définis tels que bonté, grandeur, éternité puissance, sagesse, etc... Ces configurations utilisent en fait des combinaisons de 9 ou 16 lettres 2 à 2 (dans la figure A) et de 9 lettres 3 à 3 (dans la figure IV qui permet, grâce à la mobilité de ses deux cercles intérieurs, d'obtenir mécaniquement toutes ces combinaisons). Certaines de ces figures sont reproduites dans Scientific Biography, Ramon Lull, p. 547.
 - 2.- La figure A de l'Ars Magna de Lull est une reprise de la configuration déjà utilisée par Ibn 'Arabī dans son Insā' ad-Dawa'ir. Quant aux "chambres" qui constituent cette figure elles font penser aux "cases" dont parle as-Sabṭī dans son poème sur les zayrija (cf. La Muqaddima, op. cit. p. 1115). Enfin, le procédé de Lull qui consiste à considérer six séries de neuf lettres symbolisant respectivement les neuf principes absolus, les neuf principes relatifs, les neuf questions, etc..., est identique à celui d'al-Būnī qui manipule des séries de sept lettres symbolisant parfois les mêmes notions (comme, par exemple, la série des lettres et celle des noms divins).
 - 3.- Le passage de ces méthodes du milieu culturel musulman vers le milieu européen se traduit par un double appauvrissement : Disparition des aspects mathématiques qui les structuraient et de l'idéologie qui les justifiait.
- (223)- Raf' al-Ḥijāb, op. cit. f. 8a.
- (224)- N'ayant pas en vue l'idée d'optimisation, Ibn haydūr, quant à lui, proposera plusieurs solutions, la plus optimale restant celle donnée par Ibn al-

Bannā'. Les exemples qu'il donne dans son *Jāmi*^c (op.cit. f. 49a), correspondent aux suites suivantes :

$$1.- (u_n)_n = (3^n)_n ; n > 0.$$

$$2.- (v_n)_n = (2^n)_n ; n > 0.$$

$$3.- (w_n)_n = (w_{2n})_n \cup (w_{2n-1})_n ; \text{ avec : } w_{2n-1} = v_{n-1} \cdot u_{n-1} ; w_{2n} = v_n \cdot u_{n-1}$$

$$4.- (y_n)_n = (y_{2n})_n \cup (y_{2n-1})_n ; \text{ avec : } y_{2n-1} = w_{2n-1} ; y_{2n} = v_{n-1} \cdot u_n$$

Il achève le paragraphe en donnant (d'une manière incomplète) une méthode de construction de suite qui correspond en fait à la solution optimale :

$$u_1 = 1 ; u_2 = 2 \times 1 + 1 ; u_n = 2(u_{n-1} + 1) + 1 , \text{ pour } n \geq 3.$$

Dans *Tuhfat aṭ-Ṭullāb*, il reprend ces exemples après avoir commenté le propos d'Ibn al-Bannā' en ces termes : "Son affirmation qu'elle [la suite] doit être selon le rapport du tiers n'est pas claire, car elle peut être selon le rapport du demi, du tiers, et, du demi et du tiers à la fois, en commençant par l'un quelconque des deux". Il conclut en donnant une cinquième suite dont le rapport des éléments successifs n'est pas cyclique :

$$u_1 = 1 ; u_2 = 2 ; u_3 = 4 ; u_4 = 7 ; u_5 = 14 .$$

et qui permet d'exprimer tous les entiers de 1 à 28. (Cf. *Tuhfat aṭ-Ṭullāb*, op.cit. f. 30a et b.).

Quant à Ibn al-Majdī, il donne un commentaire qui, tout en épousant le point de vue d'Ibn al-Bannā' sur l'optimisation, semble intégrer le problème traité au chapitre de l'arithmétique qui concerne la numération en base non décimale. En effet, il établit une analogie entre, d'un côté les unités de la base 10 et les 10^n , $n \geq 1$ (qui permettent d'exprimer tous les nombres inférieurs à $\sum a_n 10^n$) et, de l'autre côté, les unités de la base 3 (c'est à dire 1 et 2, avec $2 = 3-1$) et les 3^n , $n \geq 1$. (Cf. *Ḥawī-l-Lubāb*, op.cit. f. 11b.). A vrai dire, l'auteur n'explique pas suffisamment ce dernier aspect, mais une remarque, faite au début de l'ouvrage, laisse à penser qu'il n'en ignorait pas les détails : Dans le paragraphe traitant de la numération décimale, il réfute l'argumentation cosmogonique d'Ibn al-Bannā' concernant les neuf éléments (différents de zéro) de la base 10, en lui opposant la simple convention dans le choix d'une base à n éléments, avec $n < 10$ ou bien $n > 10$, comme font les astronomes qui utilisent $n=60$. (Op.cit. f.3b. où l'auteur renvoie, pour plus de détails, semble-t-il, à un de ses traités intitulé "*al-Jāmi al-Mufīd fī-l-Kašf an Usūl at-Taqwīm wa-l-Mawālīd*".

Pour conclure, signalons l'existence de ce problème chez Bachet qui donne la solution optimale pour le même nombre de poids que celui considéré par Ibn al-Bannā' et ses commentateurs. Cf. *Problèmes plaisants et délectables qui se font par le nombre*, par Claude Gaspar Bachet sieur de Méziriac, 5^e édition, Paris 1959, pp. 154-56.

- (225)- Raf^c al-Ḥijāb, op.cit. f. 22a et b.
- (226)- Ḥawī- l-Lubāb, op.cit. ff. 41b-42a.
- (226bis)- Op.cit. ff. 30b-32a.
- (227)- Arba^c Maqālāt, op.cit. ff. 116a-119a.
- (228)- Raf^c al-Ḥijāb, op.cit. f. 41b.
- (229)- Tuḥfat at-Ṭullāb, op.cit. f. 119.
- (230)- Mss. Alger n° 2101, f. 16a où cette information est donnée.
- (231)- Op.cit f. 10a.
- (232)- Mss. Tunis n° 534, f. 128b.
- (233)- Mss. Tunis n° 561, f. 40b.
- (234)- Raf^c al-Ḥijāb, op.cit. f. 37a.
- (235)- Ḥawī- l-Lubāb, op.cit. ff. 106a-107a.
- (236)- Raf^c al-Ḥijāb, op.cit. f.42a et b.
- (237)- Op.cit. f.5a et b.
- (238)- Les deux dernières correspondent à $x = u_1$ ou u_n et $y = S$.
- (239)- Op.cit. f. 9a. Ibn al-Majdī fera un dénombrement identique pour une série géométrique en partant des éléments u_1, u_n, n, r et S . Il aboutit à 5 équations à une inconnue et à 10 à deux inconnuesⁿ qu'il énumère et dont il donne les méthodes de résolution, en précisant que personne avant lui n'avait traité complètement ce problème. Cf. Ḥawī al-Lubāb, op.cit. ff. 11b-15a.
- (240)- al-Jāmi^c, op.cit. ff. 49b-50a.
- (241)- Mss. Tunis n° 9002, 130a-132b.
- (242)- Ḥawī- l-Lubāb, ff. 193b-194b. Comme l'auteur a pris l'habitude dans ce traité de signaler chacun de ses apports personnels, il est possible que les formules qu'il rapporte ici aient été établies par quelqu'un d'autre ; mais, en dehors d'Ibn al-Bannā' et d'Ibn Haydūr qui n'y font pas allusion, nous ne connaissons pas d'autres mathématiciens maghrébins ou égyptien ayant traité de manière étendue de problèmes combinatoires.
- (243)- L'auteur écrit : 1 égale 3 et 2 égale 2.
- (244)- Op.cit. f. 194a.
- (245)- M. Souissi, La langue des mathématiques en arabe, Tunis 1968, pp.81,278 et 292.

Index des noms d'auteurs

Les abréviations utilisées dans cet index sont
p. (pour page), n. (pour note), b. (pour Ibn).
Les dates sont rapportées à l'ère chrétienne.

- Ābilī (al-), Muḥammad b. Ibrāhīm, (1282-1356). p.74.
- Abū Kāmil, Šujā^C b. Aslam b. Muḥammad b. Šujā^C al-Hāsib al-Misrī, (850-930). p.6,7,8,9,10,13,17,19,20,24,36,60,62,66,67; n. 27,28,33,40,65,66,119,145.
- Abū-l-Wafā, Muḥammad b. Muḥammad b. Yaḥyā b. Ismā^Cīl b.al-^CAbbās al-Būzajānī, né à Buzjān (Iran) en 940, mort à Bagdad en 997. p.55.
- Aḥḍab (al-), aurait vécu entre le XII^e et le XIII^e siècle. p.41.
- Ahmad, S. n.35.
- Ahrens, W. n.161.
- ^CĀmilī (al-), Muḥammad b. Ḥusayn b. ^CAbdallah aṣ-Ṣamad Bahā' ad-dīn al-Ḥārithī al-Jab^Cī al-Hamadhānī, né en 1547 à Baalbeck (Liban), mort en 1622 à Ispahan. p.10; n.55.
- Anbuba, A. p.6; n.31,35,147.
- Archimède, né à Syracuse (Grèce) en 287 av. J.C., aurait été tué lors de la prise de Syracuse par l'armée romaine en 212. p.107; n.209.
- Bachet, Claude Gaspar De Méziriac, né à Bourg-en-Bresse (France) en 1581, y meurt en 1638. n.224.
- Bengerson, (voir Lévi...).

- Berge, C. n.122.
- Berque, J. n.19.
- Bertier, J. n.196.
- Biggs, N.L. n.128.
- Bīrūnī (al-), Abū-r-Rayḥān Muḥammad b. Aḥmad, né en 973 à Bīrūn (Turkestan), mort en 1050 à Ghazna(Afghanistan). p. 9,56,58,60,83; n.51,139,197.
- Boncompagni, B. n.94.
- Bourbaki, N. p.1; n.4,122.
- Boyer, C.B. p.95; n.219.
- Braudel, F. p.3; n.18.
- Būnī (al-), Abū-l-^cAbbās Aḥmad b. ^cAli b. Yūsuf al-Qurašī né à ^cAnnaba (Algérie), mort en 1225 au Caire.n.124,161,222.
- Cajori, F. p.2; n.8.
- Cantor, M. n.12.
- Cardan, Girolamo, né en 1501 à Pavia (Italie), mort en 1576 à Rome. p.95; n.219.
- Carra de Vaux, n.161.
- Cazenave, M. n.12.
- Clavius, Christoph, né en 1537 à Bamberg (Allemagne), mort en 1612 à Rome. p.95.
- Coumet, E. p.95; n.163,177,217,220,221.
- Damirdash, A.S. n.54.
- Debarnot, M-Th. n.137,142,143.
- D'erlanger, R. n.129.
- De Slane, n.17.
- Dhuqan, Q. n.2.
- Dickson, L.E. p.2; n.6.
- Diophante, d'Alexandrie (seconde moitié du III^e siècle ap. J.C.), p.20,24; n.192.
- Djebbar, A. n.36.
- Euclide, (III^e siècle av. J.C.), p.7,13,15,16,18,19,20,22,24,33, 70,107; n.69,111.
- Fārābī (al-), Abū Nasr Muḥammad b. Muḥammad b. Ṭarkhān, né vers 874 à Fārāb (Kazakhstan), mort en 950 à Damas. n.129.
- Fibonacci, Léonardo Pisano, né vers 1179 à Pise (Italie), mort après 1240. p.42; n.94.

- Finzi, Mordecai, mort dans la seconde moitié du XV^e siècle. n.33.
- Frenicle, De Bessy Bernard, né en 1605 à Paris, y meurt en 1675.
p.75; n.163,177,217,221.
- Freudenthal, H. p.70; n.168.
- Gautier, E.F. n.13.
- Hadj-Sadok, M. n.1,95.
- Hājji Khalīfa, Šalabī, né en 1608 à Istanbul, y meurt en 1657.
n.43,87.
- Hamdi, M. n.54.
- Ḥaṣṣār (al-), Abū Bakr Muḥammad b. ^cAbdallah b. ^cAyyāš aurait vécu au Maghreb entre le milieu du XII^e siècle et le début du XIII^e. p.2,42,74,87,89,101; n.10,93,121,187,204.
- Hocheim, A. p.6; n.26.
- Huwarī (al-), ^cAbd al-^cAzīz b. ^cAli b. Dāwūd al-Misratī ; originaire de Misrata (Libye); a été élève d'Ibn al-Bannā'.
- Hypsioclès, d'Alexandrie (II^e siècle av. J.C.). n.192.
- Ibn Abī Uṣaybi^ca, Muwaffaq ad-Dīn Abū-l-^cAbbās Aḥmad b. al-Qāsim, né vers 1203 à Damas, mort à Ṣarkhad (Syrie) en 1270. n.132.
- Ibn Aflaḥ, Abū Muḥammad Jābir, a vécu à Séville dans la première moitié du XII^e siècle. p.66; n.154.
- Ibn ^cArabī, Abū Bakr Muḥammad b. ^cAli b. Muḥammad b. Aḥmad b. ^cAbdallah Muḥyī-d-Dīn, né en 1165 à Murcie (Espagne), mort, assassiné, en 1240 à Damas. n.222.
- Ibn Badr, Abū ^cAbdallah Muḥammad b. ^cUmar b. Muḥammad, a vécu en Espagne entre la fin du XII^e siècle et le milieu du XIII^e. p.7,10; n.40.
- Ibn al-Bannā', Abū-l-^cAbbās Aḥmad b. Muḥammad b. ^cUthmān al-Azdī al-Marrākušī, né en 1256 à Marrakech (Maroc), y meurt en 1321. p.2,7,8,10,11,25,32,33,34,36,41,49,67,68,69,70,71,72,74,76,83,84,85,87,94,96,97,99,102,104,105,106; n.23,45,46,50,85,96,97,101,155,161,164,190,192,213,224,242.
- Ibn al-Faḥḥām, Abu-l-Ḥasan ^cAli b. Aḥmad, a vécu à Tlemcen (Algérie) dans la seconde moitié du XIV^e siècle. p.37.

- Ibn al-Faqīh, Abu-Bakr b. Muḥammad b. Ishāq al-Hamadhānī, né à Hamadhān (Iran) peut-être dans la seconde moitié du IX^e siècle. n.1.
- Ibn Ghāzī, Abū-^cAbdallah Muḥammad b. Aḥmad b. Muḥammad b. ^cAli al-^cUthmānī al-Maknāsī, né en 1437 à Meknès (Maroc), mort en 1513. p.11,54,88; n.46,63,116,121.
- Ibn al-Hā'im, Šihāb ad-Dīn Abū-l-^cAbbās Aḥmad b. Muḥammad b. ^cImād ad-Dīn b. ^cAli, né en 1355 (ou 52) au Caire, mort en 1412 à Jérusalem. p.37; n.87.
- Ibn Haydūr, Abū-l-Ḥasan ^cAli b. ^cAbdallah b. Muḥammad at-Tādilī, né dans le Tadla (Maroc), mort en 1413. p.7,11,34,72,73,88,99,100,105; n.61,96,123,145,154,155,164,178,184,203,213,214,224,242.
- Ibn al-Haytham, Abū ^cAli al-Ḥasan, né en 965 à Basra (Irak), mort en 1041 au Caire. p.44,55,89; n.100,133,149,209.
- Ibn Ḥayyān, Jābir (seconde moitié du VIII^e siècle). n.128.
- Ibn Jinnī, Abū-l-Faṭḥ ^cUthmān al-Mawṣilī, né vers 932 à Mossoul (Irak), mort en 1005 à Bagdad. n.184.
- Ibn Khaldūn, ^cAbdarrahmān b. Muḥammad al-Khaḍramī, né en 1332 à Tunis, mort en 1406 au Caire. p.3,7,41,73,107; n.1743,156,158,184,213.
- Ibn Khaldūn, Yaḥya b. Muḥammad al-Khaḍramī, né 1333 à Tunis, mort, assassiné, en 1378 à Tlemcen. p.37; n.88.
- Ibn Khurdādhbih, Abū-l-Qāsim ^cUbaydallah b. ^cAbdallah, né vers 825, mort vers 912. n.1.
- Ibn al-Majdī, Šihāb ad-Dīn Abū-l-^cAbbās Aḥmad b. Rajab b. Ṭibughā, né en 1365, mort en 1447 au Caire. p.34,37,44,73,97,102,108,111; n.5099,114,164,189,190,194,203,214,224239.
- Ibn Mun^cim, aurait vécu entre le XII^e et le XIII^e siècle. p.44,41,68,73.
- Ibn an-Nadīm, Abū-l-Faraj Muḥammad b. Abī Ya^cqūb Ishāq al-Warrāq, mort vers 995 à Bagdad. n.127.
- Ibn al-Qāḍī, Abū-l-^cAbbās Aḥmad b. Muḥammad al-Miknāsī, né en 1553, mort en 1616 à Fès (Maroc). n.43.

- Ibn Qunfūdh, Abū-l-^cAbbās Aḥmad b. al-Ḥasan b. ^cAli b. al-Ḥasan, al-Khaṭīb, né en 1330 à Constantine (Algérie), y meurt en 1407. p.42,73,99; n.95,96,164.
- Ibn Qurra, Abū-l-Ḥasan Thābit b. Marwān al-Ḥarrānī, né à Ḥarrān (Irak) vers 826, mort à Bagdad en 901. p.56,57,58,74, 88,89; n.166.
- Ibn Rustah, Abū ^cAli Aḥmad b. ^cUmar, a vécu à Ispahan autour de 903. n.1.
- Ibn Sīnā, Abū ^cAli al-Ḥusayn b. ^cAbdallah, né en 980 près de Boukhārā (Ouzbekistan), mort à Hamadhān en 1037. p.83; n. 129.
- Ibn Tibbon, Moses ben Samuel, né à Marseille (France) dans la première moitié du XIII^e siècle, mort après 1283. n.187.
- Ibn al-Yāsāmīn, Abū Muḥammad ^cAbdallah b. Muḥammad b. Ḥajjāj al-Adrīnī, mort assassiné au Maroc en 1204. p.10; n.23,87,98.
- Ikhwān aṣ-Ṣafā, groupe de savants de Basra ayant vécu au X^e siècle et comptant parmi eux : Abū Sulaymān al-Bustī al-Muqaddasī, abū-l-Ḥasan az-Zanjānī, Muḥammad an-Nahrajūrī, al-^cAwfī et Zayd b. Rifā^ca. p.55; n.130.
- Isfahānī (al-), Abū ^cAli Ḥamza b. al-Ḥasan, né en 893 à Ispahan, mort en 970. n.184.
- Janḥānī (al-), n.2.
- Jaouiche, K. n.12.
- Jayyānī (al-), Abū ^cAbdallah b. Mu^cādh, né en 989 à Cordoue, mort en 1079. p.66; n.154.
- Julien, Ch.A. n.13.
- Juschkewitsch, A.P. p.6; n.12,210.
- Karajī (al-), (ou al-Karkhī), Abū Bakr Muḥammad b. al-Ḥasan, a vécu à Bagdad, mort entre 1019 et 1029. p.6,7,9,17, 20,44,62,107; n.25,26,46,147,155,169,193.
- Karpinski, L.C. p.6; n.28.
- Kāšī (al-), Jamšīd b. Mas^cūd Ghiyāth ad-Dīn, mort vers 1436 probablement à Samarqand (Ouzbekistan). p.10,43.
- Kennedy, E.S. n.129.
- Khalīl (al-), Ibn Aḥmad, né vers 717 à Oman, mort en 791. p.73; n. 125,184.

- Khawārizmī (al-), Abū ^CAbdallah Muḥammad b. Mūsā, né vers 780, mort vers 850. p.6,7,9,10,11,13,17; n.24,39,40, 113.
- Khayyām (al-), Ghiyāth ad-Dīn Abū-l-Fatḥ ^CUmar b. Ibrāhīm, né vers 1038 près de Nishapour (Iran), y meurt vers 1123. p.6,9,36,44; n.25,36,48.
- Kraus, P. n.128.
- Kubesov, A.K. n.129.
- Kūhī (al-), Abu Sahl Wayjān b. Rustam, né à Kūh (Tabaristan), a vécu dans la seconde moitié du X^e siècle, à Bagdad. p.44; n.100.
- Lange, G. n.186.
- Landberg, C. n.45.
- Laroui, A. n.2,16.
- Laoust, H. n.3.
- Le Tourneau, R. n.13.
- Levey, M. n.33,65,66.
- Levi, Ben Gerson, né en 1288 à Bagnols (France), mort en 1344. p. 74,75,94,95; n.186,187,216.
- Lotfi, A. n.198.
- Lull, Ramon, né en 1232 à Palma de Majorque, y meurt en 1316. p. 96; n.222.
- Majdoub (al-), A. n.3.
- Marrākušī (al-), Abū ^CAli al-Ḥasan b. ^CAli b. ^CUmar, a vécu autour de 1262. p.2; n.11.
- Marre, A. p.2; n.15.
- Mashrafa, A.M. n.24,47,64.
- Maurolico, Francesco, né en 1494 à Messine (Italie), y meurt en 1575. p.95.
- Mawāḥidī, Ya^Cqūb b. Ayyūb b. ^CAbd-al-Wahīd, a vécu au XIV^e siècle dans le Sud marocain. p.42; n.95.
- Mehiri, A. n.184.
- Mersenne, Marin, né en 1588 dans le Maine (France), mort en 1648 à Paris. p. 75,95; n.163,177,217,220,221.

- Miṣṣīṣī (al-), Abū Yūsuf Ya^cqūb b. Muḥammad al-Ḥasib, mort dans la première moitié du X^e siècle. p.9; n.127.
- Monteil, V. n.17.
- Montucla, J.F. p.1;n.4.
- Muqaddasī, Šams ad-Dīn Abu ^cAbdallah Muḥammad b. Aḥmad b. Abī Bakr al-Bannā al-Basarī, né vers 947 à Jérusalem, mort vers 990. n.1.
- Murdoch, J.E. n.30.
- Mursi, M. n.24,47,64.
- Mu'tamin (al-), Yūsuf b. Aḥmad al Muqtadir-billah, a régné à Saragosse (Espagne) de 1081 à 1085. p.107.
- Neugebauer, O. p.2; n.7.
- Nicomaque, de Gérase, a vécu en Palestine jusque vers 196 ap. J.C. p. 70,83; n.166,196.
- Pacha, Carathéodory, n.143.
- Papy, n.122.
- Pascal, Blaise, né en 1623 à Clermont-Ferrand (France), mort en 1662 à Paris. p.70,71,95; n.170,171,218,219.
- Pellat, Ch. n.1.
- Peyrard, F. n.38,111.
- Pisano, Leonardo (voir Fibonacci).
- Qalṣādī (al-), Abū-l-Ḥasan ^cAli b. Muḥammad b. Muḥammad b. ^cAli al-Qurayšī al-Bastī, né en 1412 à Baza (Espagne), mort à Béja (Tunisie) en 1486. p.2,11,41,42,49, 112; n.9,62,98,104,116.
- Qurašī (al-) Abū-l-Qāsim, né en Espagne, a vécu et enseigné à Bougie (Algérie) dans la seconde moitié du XIII^e siècle. p.8,10; n.43,44.
- Rashed, A. n.222.
- Rashed, R. p.6,70; n.5,30,35,36,37,49,59,125,133,146,156,169.
- Raymond, P. n.171.
- Renaud, H.P-J. n.157.
- Rosen, F. p.6; n.24.
- Rosenthal, F. n.184,213.
- Sabtī (as-), Abū-l-^cAbbās, a vécu à Marrakech dans la seconde moitié du XII^e siècle.

- Samaw'al (as-), b. Rabi Yahūda b. Abūn al-Maghribī, surnommé également (probablement après sa conversion à l'Islam), b. Yahya b. ^cAbbās al-Maghribī, originaire de Fès, mort en 1175 à Maragha (Iran). p.6,9,10, 20,24,25,34,43,62,63,64,66,84,89; n.35,149,169,193.
- Sanchez-Perez, J.A. n.40,56.
- Sarton, n.95.
- Sédillot, J.J. n.11.
- Sédillot, L.A. p.2; n.11.
- Sezgin, F. n.100,131,132,166.
- Shawky, J. n.55.
- Sībawayh, Abū Bišr ^cAmr b. ^cUthmān b. Qanbar, né vers 755 en Iran, mort en 795 près de Shiraz (Iran). n.125.
- Sibt al-Māradīnī, Badr ad-Dīn Muḥammad b. Muḥammad b. Aḥmad, né vers 1422, mort en 1506. n.57.
- Souissi, M. p.2; n.15,161,245.
- Stifel, Michael, né en 1487 à Esslingen (Allemagne), mort en 1567 à Iena (Allemagne). p.95.
- Suter, H. p.2,6; n.10,27,66,93,121,204.
- Suyūṭī (as-), Abū-l-Faḍl ^cAbd-ar-Raḥmān b. Abi Bakr b. Muḥammad Jalāl ad-Dīn al-Khuḍayrī, né en 1445 au Caire, mort en 1505. n.184.
- Sylla, E.D. n.30.
- Tambuktī (at-), Abū-l-^cAbbās Aḥmad b. Aḥmad b. Aḥmad Bābā at-Takrūrī as-Sanhajī as-Sūdānī, né en 1556 à Tambouctou (Mali), mort en 1627. n.157.
- Tannery, P. p.1; n.4.
- Ṭfayyaš (at-), Muḥammad b. al-Ḥāj Yūsuf, né en 1818 à Béni-Izguen (Algérie), y meurt en 1914. p.112.
- Ṭūsī (at-), Abū Ja^cfar Muḥammad b. Muḥammad b. al-Ḥasan, né en 1201 à Ṭūs (Iran), mort en 1274 à Bagdad. p.60.
- Ṭūsī (at-), Šaraf ad-Dīn al-Muḍaffar b. Muḥammad b. al-Muḍaffar, a enseigné à Damas et à Bagdad, mort vers 1213. p.6, 7,9,10,11,36,44; n.37.
- Usquf (al-), Rabī^c b. Yahya, évêque d'Elvira (Espagne) vers 960. n.166.

Ver-Eecke, P. n.192.

Viète, François, né en 1540 à Fontenay-le-Comte (France), mort à Paris en 1603. n.37.

Woepcke, F. p.2,6,41; n.9,25,89,92.

Zubaydī (az-), Abū Bakr Muḥammad b. al-Ḥasan al-Iṣbīlī, originaire de Séville (Espagne), mort en 989. n.184.

* * * * *

E R R A T A

Page 6, ligne 7 : al-Khwārizmī (ainsi que : p.7,lg.18,29; p.9,lg.2,14; p.10,lg.18; p.11,lg.26; p.13,lg.8; p.17,lg.10; et note : 39,40,113).

p.3,lg.5 : échange.

p.4,lg.9 : différenciation.

p.13,lg.10 :
$$\left[(b/2) \pm \sqrt{(b/2)^2 - c} \right]^2$$

p.16,lg.2 :

$$LF = \sqrt{[(b^2)/2]^2 - cb^2}$$

p.16,lg.8 :

$$AB = (b^2/2) - c - \sqrt{(b^2/2)^2 - cb^2}$$

p.19,lg.19 :

$$x^2 = (b^2/2) \pm \sqrt{(b^2/2)^2 - b^2c - c}$$

p.32,lg.23 : d'ailleurs (ainsi que : p.44,lg.5; p.49,lg.2; p.65,lg.24).

p.43,lg.2 : des XIII^e-XIV^e siècles.

p.55,lg.16 : champ (ainsi que : p.67,lg.13; p.72,lg.24).

p.62,lg.10 : d'Ibn Qurra.

p.67,lg.21 : mathématique.

p.68,lg.13 : maîtriser.

p.70,lg.5 : maîtrise.

p.73,lg.22 : polynômiale.

p.73,lg.34 : le paragraphe.

p.79,lg.11 : Talkhīs.

p.80,lg.22 : on a.

p.88,lg.19 : al-Mukāfi'.

p.94,lg.5 : double indice.

p.101,lg.22 : conclut

p.103,lg.26 :

$$f_3 \text{ of }_3(P) \neq P.$$



* * * * *

