PUBLICATIONS

MATHEMATIQUES

D'ORSAY

79 - 03

INTRODUCTION A LA NOTION DE MATROÏDE

(GEOMETRIE COMBINATOIRE)

J.C. FOURNIER

Université de Paris-Sud

Département de Mathématique

Bât. 425

91405 ORSAY France
91405 ORSAY France

PUBLICATIONS

MATHEMATIQUES

D'ORSAY

79 - 03

INTRODUCTION A LA NOTION DE MATROÏDE

(GEOMETRIE COMBINATOIRE)

J.C. FOURNIER

Université de Paris-Sud

Département de Mathématique

Bât. 425

91405 ORSAY France

INTRODUCTION A LA NOTION DE MATROÏDE
(GEOMETRIE COMBINATOIRE)*

J.C. FOURNIER

La notion de matroïde, appelée aussi géométrie combinatoire, consiste en une généralisation de la dépendance linéaire et de la dépendance algébrique. La théorie qui en résulte a connu ces dix dernières années un substantiel développement. Dans les pages qui suivent il n'est guère question que d'introduire à cette notion. Un premier chapitre donne les bases de la théorie à partir des trois aspects présents dès son origine : théorie générale de la dépendance, aspect latticiel et géométrique, matroïdes de graphes. La structure de matroïde présente l'originalité d'admettre de très nombreuses et très différentes axiomatiques ; dans un deuxième chapitre les principales d'entre elles, les plus couramment utilisées, sont données, avec les passages de l'une à l'autre. Enfin un troisième chapitre présente des exemples généraux, complétés d'exercices, qui sont l'occasion d'un premier panorama de la théorie.

1. ORIGINES DE LA NOTION DE MATROÏDE ET THEOREMES DE BASE DE LA THEORIE.

La toute première origine de la notion de matroïde se trouve dans Van der Waerden [8] avec la donnée sous forme axiomatique d'une relation de dépendance abstraite, axiomatisant à la fois la dépendance linéaire et la dépendance algébrique. Cet embryon d'une théorie générale de la dépendance se trouve ensuite bien développé dans Zariski-Samuel [10] ; on trouve cette théorie également dans Cohn [3] et,

---
* Partie du cours de l'A.E.A. de Combinatoire donné à Orsay en 1976/1977.

sommairement présentée, dans Bourbaki [2].

1.1. Théorie générale de la dépendance.

Définition 1. Une fermeture de dépendance sur un ensemble E est une application $X \to \bar{X}$ de $\mathcal{P}(E)$ dans lui-même vérifiant les axiomes suivants :

(D_1) Pour tout $X \subset E$, $X \subset \bar{X}$.

(D_2) Quels que soient $X \subset E$ et $Y \subset E$ tels que $X \subset Y$, on a $\bar{X} \subset \bar{Y}$.

(D_3) Pour tout $X \subset E$, $\bar{\bar{X}} = \bar{X}$.

(D_4) Quels que soient $X \subset E$, $x \in E$ et $y \in E$, si $y \in \overline{X \cup \{x\}}$ et $y \notin \bar{X}$ alors $x \in \overline{X \cup \{y\}}$.

(D_5) Quel que soit $X \subset E$, pour tout $x \in \bar{X}$ il existe une partie finie Z de X telle $x \in \bar{Z}$.

Les trois premiers axiomes (D_1), (D_2) et (D_3) (extensivité, croissance et idempotence) définissent ce qu'on appelle classiquement une application de fermeture (de Moore). Par exemple l'adhérence topologique est une application de fermeture, d'ailleurs caractérisée par l'axiome supplémentaire (lequel rend superflu l'axiome (D_2)) : quels que soient $X \subset E$ et $Y \subset E$, $\overline{X \cup Y} = \bar{X} \cup \bar{Y}$. Les deux derniers axiomes sont de nature proprement algébrique : (D_4) est l'axiome d'échange classique de l'algèbre linéaire et (D_5) exprime une condition de finitude de la dépendance, évidemment inutile lorsque l'ensemble E est fini.

L'axiomatique que donnait Van der Waerden portait sur une relation, notée $\sim$ et dite de dépendance, entre éléments de E et familles finies d'éléments de E : $x \sim \{y_1,\dots,y_n\}$ où $x \in E$ et $y_1,\dots,y_n \in E$. Elle consistait en les trois axiomes suivants où $x, y_1,\dots, y_n, z_1,\dots,z_m \in E$ sont quelconques :

Axiome 1. $y_i \sim \{y_1,\dots,y_n\}$ pour $i = 1,\dots,n$.

Axiome 2. si $x \sim \{y_1,\dots,y_n\}$ et $y_i \sim \{z_1,\dots,z_m\}$ alors $x \sim \{z_1,\dots,z_m\}$.

Axiome 3. si $x \sim \{y_1,\dots,y_n\}$ et $x \not\sim \{y_1,\dots,y_{n-1}\}$ alors $y_n \sim \{y_1,\dots,y_{n-1},x\}$.

Cela permet de définir une fermeture de dépendance sur E, d'abord pour les parties finies en posant pour $X \subset E$ tel que $X = \{x_1, \dots, x_n\}$, $\overline{X} = \{y \mid y \in E$ et $y \sim X\}$, puis pour toutes les parties de E en posant $\overline{X} = \bigcup_{Z \text{ fini} \subset X} \overline{Z}$. (L'axiome 2 exprime la transitivité de la dépendance ; pour les parties finies, il est équivalent, aux deux axiomes (D_2) et (D_3), comme on le voit en l'écrivant en termes de parties : si $X \subset \overline{Y}$ et $Y \subset \overline{Z}$ alors $X \subset \overline{Z}$.

Définition 2. Etant donnée une fermeture de dépendance $X \to \overline{X}$ sur un ensemble E, une partie X de E est

- génératrice si $\overline{X} = E$ (X est appelé encore ensemble de générateurs de E).
- libre (ou indépendante) si pour tout $x \in X$, $x \notin \overline{X - \{x\}}$ (dépendante ou liée sinon).
- une base de E si X est à la fois partie génératrice et partie libre.

On observe de suite que toute partie libre est également libre, en particulier la partie vide est toujours libre, et que la propriété d'être libre est de caractère fini : $X \subset E$ est libre si et seulement si toute partie finie de X est libre.

Théorème 1. Dans tout ensemble muni d'une fermeture de dépendance il existe une base.

Ce premier résultat découle du suivant (en faisant $L = \emptyset$ et $G = E$).

Théorème 2 (dit de la base incomplète). Quelles que soient, dans un ensemble E muni d'une fermeture de dépendance, une partie libre L et une partie génératrice G, il existe une partie G' de G telle que $L \cap G' = \emptyset$ et $L \cup G'$ est une base.

Lemme 1. Soient une partie libre L de E et un élément quelconque x de E. Une condition nécessaire et suffisante pour que $L \cup \{x\}$ soit libre est que $x \notin \overline{L}$.

Démonstration. Condition nécessaire par définition de L. Condition suffisante : soit $y \in L \cup \{x\}$, si on avait $y \in \overline{(L \cup \{x\}) - \{y\}}$, ce qui par hypothèse n'est possible que si $y \neq x$, alors, comme $y \notin \overline{L-\{y\}}$, on aurait d'après (D_4) $x \in \overline{(L-\{y\}) \cup \{y\}} = \overline{L}$, ce qui contredit l'hypothèse.

Démonstration du théorème 2. Il s'agit de démontrer l'existence d'une base B telle que $L \subset B \subset G$. L'ensemble des parties libres X de E telles que $L \subset X \subset G$ est $\cup$-inductif (car de caractère fini) ; soit B un élément maximal de cet ensemble (par application du lemme de Zorn). Montrons que B convient en montrant que c'est une partie génératrice : pour tout $x \in G$, $B \cup \{x\}$ n'est pas libre, d'après le choix de B, et par conséquent, d'après le lemme 1, $x \in \overline{B}$; ainsi $G \subset \overline{B}$, d'où $E = \overline{G} \subset \overline{\overline{B}} = \overline{B}$ et $E = \overline{B}$.

Comme conséquence immédiate du théorème de la base incomplète on voit que toute partie libre est incluse dans une base et toute partie génératrice contient une base. Remarque qui conduit à la proposition suivante :

Corollaire. Soit une partie X quelconque d'un ensemble E muni d'une fermeture de dépendance. Les trois conditions suivantes sont équivalentes :

(i) X est une base.

(ii) X est une partie libre maximale.

(iii) X est une partie génératrice minimale.

Equicardinalité des bases.

Lemme 2. (propriété d'échange des bases). Soient deux bases B et B'. Pour tout $x \in B-B'$ il existe $y \in B'-B$ tel que $(B-\{x\}) \cup \{y\}$ soit également une base.

Démonstration. On a $\overline{B-\{x\}} \neq E$ d'après la condition (iii) du corollaire du théorème 2, et donc $\overline{B-\{x\}} \not\supset B'$ car sinon on aurait $\overline{B-\{x\}} \supset \overline{B'} = E$ et $\overline{B-\{x\}} = E$. Soit $y \in B' - (\overline{B-\{x\}})$; comme $y \notin \overline{B-\{x\}}$, $(B-\{x\}) \cup \{y\}$ est libre ; comme par ailleurs $y \in \overline{B}$ on a, d'après (D_4), $x \in \overline{(B-\{x\}) \cup \{y\}}$, donc $B \subset \overline{(B-\{x\}) \cup \{y\}}$ et d'où

$E = \overline{B} \subset \overline{(B-\{x\}) \cup \{y\}}$ et $E = \overline{(B-\{x\}) \cup \{y\}}$. Ainsi $(B-\{x\}) \cup \{y\}$ est une base.

Théorème 3. Deux bases d'un ensemble muni d'une fermeture de dépendance ont même cardinal.

Démonstration. Soient B et B' deux bases quelconques.

1er cas : Une des deux bases est finie, soit B. Si $B \subset B'$ on a de suite $B = B'$ et $|B| = |B'|$. Supposons maintenant $B \not\subset B'$ et soit $x \in B - B'$; d'après la propriété d'échange il existe $y \in B' - B$ tel que $B_1 = (B-\{x\}) \cup \{y\}$ soit une base. On a $|B_1| = |B|$ et $|B_1 - B'| < |B - B'|$; si $B_1 \not\subset B'$ on recommence, avec B_1 à la place de B et ainsi de suite ; on arrive, au bout d'un nombre fini d'échanges, à une base B'' telle que : $|B''| = |B|$ et $B'' \subset B'$; d'où $|B'| = |B''| = |B|$, c'est-à-dire l'équicardinalité de B et B'.

2ème cas : Les deux bases sont infinies. A chaque $x \in B'$ associons une partie finie F_x de B telle que $x \in \overline{F}_x$, qui existe d'après (D_5). (Il est à noter qu'on fait usage là de l'axiome du choix, voir à ce sujet la remarque ci-après). On a $\bigcup_{x \in B'} F_x \subset B$ et en fait l'égalité car, d'une part $\overline{\bigcup_{x\in B'} F_x} \supset \bigcup_{x\in B'} \overline{F}_x \supset B'$, d'où $\overline{\bigcup_{x\in B'} F_x} \supset \overline{B'} = E$, et d'autre part B est minimale comme partie génératrice. Donc $B = \bigcup_{x\in B'} F_x$, ce qui entraîne $\mathrm{card}(B) = \mathrm{card}(\bigcup_{x\in B'} F_x) \leq \mathrm{card}(B')$; on a l'inégalité inverse par symétrie entre B et B' et ainsi l'équicardinalité de B et B'.

Remarque. Il est possible de se passer de l'axiome du choix dans la démonstration précédente en définissant de manière unique une partie F_x à partir de x. Etant donnés une base B et un élément $x \notin B$, il existe une partie finie F_x de B unique telle que $x \in \overline{F}_x$ et pour toute partie Z de B telle que $x \in \overline{Z}$ on ait $F_x \subset Z$ (F_x est la plus petite partie de B engendrant x). Il suffit de considérer un élément F_x minimal pour l'inclusion de l'ensemble $\{F \mid F \subset B \text{ fini et } x \in \overline{F}\}$ (cet ensemble n'est pas vide d'après (D_5)). En effet, soit $Z \subset B$ telle que $x \in \overline{Z}$; si $F_x \not\subset Z$, soit $y \in F_x - Z$; on a $y \in \overline{(F_x - \{y\}) \cup \{x\}}$ car $x \in \overline{F}_x$ et $x \notin \overline{F_x - \{y\}}$ (axiome d'échange) d'où, (en particulier parce que $x \in \overline{Z}$), $\overline{B-\{y\}} \supset \overline{(F_x - \{y\}) \cup Z} \supset \overline{(F_x - \{y\}) \cup \{x\}} \ni y$

soit $y \in \overline{B-\{y\}}$, contradiction. (Cette plus petite partie F_x ainsi définie détermine l'ensemble dépendant minimal $F_x \cup \{x\}$ associé à l'élément x relativement à la base B. On reviendra plus loin sur ces ensembles qui jouent un rôle important). Ce cardinal commun à toutes les bases d'un ensemble E muni d'une fermeture de dépendance s'appelle la <u>dimension</u>, ou le <u>rang</u> plutôt quand il est fini, de cet ensemble.

Application à la dépendance linéaire.

Soit E un espace vectoriel. L'application qui a toute partie de E associe le sous-espace vectoriel qu'elle engendre est une fermeture de dépendance. On retrouve avec les résultats précédents les théorèmes élémentaires de l'algèbre linéaire et les notions classiques, base, dimension etc.. La terminologie est empruntée à ce modèle.

Plus généralement, et dans une perspective plus large que celle des espaces vectoriels, étant donnée une partie <u>quelconque</u> F de E, l'application qui à toute partie X de F associe l'intersection avec F du sous-espace de E engendré par X est encore une fermeture de dépendance sur F, laquelle n'est pas strictement comme précédemment, celle d'un espace vectoriel lorsque F n'est pas sous-espace vectoriel de E.

Application à la dépendance algébrique.

Soient deux corps commutatifs K et L tels que $K \subset L$. Etant donnée une partie quelconque X de L, notons $K(X)$ le plus petit sous-corps de L contenant K et X (c'est le corps obtenu par adjonction à K des éléments de X, il est constitué des fractions rationnelles en les éléments de X à coefficients dans K). L'application qui à X associe l'ensemble $\overline{X}$ des éléments de L qui sont <u>algébriques</u> sur $K(X)$, c'est-à-dire la clôture algébrique de $K(X)$ dans L, est une fermeture de dépendance sur L.

En effet, on a $X \subset K(X) \subset \overline{X}$ d'où (D_1) ; pour $X \subset Y \subset E$, on a $K(X) \subset K(Y)$ et

donc $\bar{X} \subset \bar{Y}$ d'où (D_2) ; $\bar{X}$ étant un corps contenant K et X, on a $K(\bar{X}) = \bar{X}$ et, par la transitivité de la propriété d'algébricité, $\bar{\bar{X}} \subset \bar{X}$ d'où (D_3). Ensuite soient $y \in \overline{X \cup \{x\}}$ et $y \notin \bar{X}$, alors y est algébrique sur $K(X \cup \{x\})$ c'est-à-dire racine d'un polynôme non nul à coefficients dans ce corps, d'où, en chassant un dénominateur commun à ces coefficients, on voit que y est racine d'un polynôme non nul à coefficients qui sont des expressions polynomiales à coefficients dans K en x et un nombre fini d'éléments de X, soient $x_1, \ldots, x_r$; c'est-à-dire ce polynôme est de la forme $P(x_1, \ldots, x_n, u, v)$ avec : 1) $P(x_1, \ldots, x_n, x, v)$ non nul (en tant que polynôme en l'indéterminé v), 2) $P(x_1, \ldots, x_n, x, y) = 0$. On peut écrire :
$P(x_1, \ldots, x_n, u, v) = \sum_{i \geq 0} q_i(x_1, \ldots, x_n, v) u^i$ où les q_i sont des polynômes à coefficients dans K et l'un d'eux au moins n'est pas nul, soit $q_{i_0}(x_1, \ldots, x_n, v) \neq 0$; alors $q_{i_0}(x_1, \ldots, x_n, y) \neq 0$ car $y \notin \bar{X}$, et donc $P(x_1, \ldots, x_n, u, y)$ n'est pas nul (en tant que polynôme en l'indéterminé u), x étant racine de ce polynôme x est algébrique sur $K(X \cup \{y\})$, c'est-à-dire qu'on a $x \in \overline{X \cup \{y\}}$, d'où (D_4). Enfin, soit $x \in \bar{X}$; x est par définition algébrique sur $K(X)$ c'est-à-dire racine d'un polynôme dont les coefficients sont des éléments de $K(X)$ c'est-à-dire des expressions rationnelles à coefficients dans K d'un nombre fini d'éléments de X ; soit Z l'ensemble des éléments de X apparaissant dans ces expressions : Z est une partie finie de X et le polynôme est en fait à coefficients dans $K(Z)$, ainsi $x \in \bar{Z}$, et d'où (D_5).

Les parties libres selon cette fermeture sont les ensembles X de L <u>transcendants</u> sur K c'est-à-dire les $X \subset L$ tels que pour toute partie finie $\{x_1, \ldots, x_n\}$ et tout polynôme non nul $P(u_1, \ldots, u_n)$ à coefficients dans K et n indéterminés, on a $P(x_1, \ldots, x_n) \neq 0$.

Une base, appelée ici <u>base de transcendance</u>, est un ensemble B d'éléments du corps L tel que L soit extension algébrique de $K(B)$ et $K(B)$ extension <u>purement</u> transcendante de K. Le rang est le degré de transcendance du corps L par rapport à son sous-corps K ; il est nul si et seulement si L est extension algébrique de K.

Le couple constitué d'un ensemble E et d'une fermeture de dépendance, parfois appelé espace de dépendance, définit ce qu'on appelle ici un matroïde (sur E), suivant une expression de Whitney [9] qui considérait la dépendance linéaire entre colonnes d'une matrice, et qu'on appelle encore géométrie combinatoire, terminologie que le paragraphe suivant justifiera. On parlera des parties génératrices, parties libres, bases, etc. d'un matroïde, telles que sont définies plus haut ces notions.

1.2. Aspects latticiels et géométriques de la dépendance.

Les aspects latticiel et géométrique de la dépendance se trouvent aussi à l'origine, dans les années 30, de la théorie des matroïdes (voir particulièrement Birkhoff [1] pour les treillis, Mac Lane [6] pour les géométries).

Ici les notions de fermé et de rang jouent un rôle essentiel.

Définition 3. On appelle fermé d'un matroïde défini sur un ensemble E par une fermeture de dépendance $X \to \bar{X}$, toute partie X de E telle que $\bar{X} = X$.

Lemme 3. Les parties libres maximales incluses dans une partie donnée quelconque d'un matroïde sont équicardinales.

Démonstration. Soient un matroïde sur l'ensemble E défini par une fermeture de dépendance $X \to \bar{X}$ et une partie A de E. L'application qui à $X \subset A$ associe la partie $\bar{X} \cap A$ de A est une fermeture de dépendance sur A (qui définit ce qu'on appelle le sous-matroïde du matroïde considéré sur A), comme on le vérifie simplement ; le lemme se démontre alors en observant qu'une partie libre maximale de A est une base de ce matroïde et en appliquant le théorème 3.

Définition 4. Soit un matroïde sur un ensemble E, la fonction rang (ou plus simplement, le rang) du matroïde est l'application $X \to r(X)$ qui à toute partie X de E associe le cardinal commun aux parties libres maximales incluses dans X (appelées elles-même bases de X).

On a immédiatement les propriétés suivantes de la fonction rang : $r(\emptyset) = 0$, $r(\{x\}) \leq 1$ pour tout $x \in E$, $r(X) \leq r(Y)$ quels que soient $X \subset E$ et $Y \subset E$ tels que $X \subset Y$; on verra plus loin encore une propriété moins évidente et fondamentale qui est la semi-modularité. Lorsque le matroïde est de rang fini, sa fonction rang est une application de $\mathcal{P}(E)$ dans l'ensemble d'entiers $\{0, 1, \ldots, r(E)\}$.

Treillis des fermés d'un matroïde.

L'ensemble des fermés d'un matroïde ordonné par l'inclusion est un treillis dont on va donner des propriétés caractéristiques. Dans ce qui suit étant donnés deux fermés X et Y, on écrit $X \succ Y$ lorsque X couvre Y ce qui signifie :

1) $X \supset Y$,

2) il n'existe pas de fermé Z tel que $X \underset{\neq}{\supset} Z \underset{\neq}{\supset} Y$;

on vérifie facilement que si $X \succ Y$ alors $r(X) = r(Y) + 1$ (une base de Y se prolonge en une base de X par l'adjonction d'un élément), la réciproque étant vraie lorsque $X \supset Y$. On appelle point d'un matroïde tout fermé de rang 1 ; rappelons qu'en langage de treillis un point, ou atome, est un élément couvrant le plus petit élément, ici $\bar{\emptyset}$.

Théorème 4. L'ensemble des fermés d'un matroïde de rang fini ordonné par l'inclusion forme un treillis complet compactement atomique et semi-modulaire supérieurement.

Démonstration. Soit un matroïde défini sur un ensemble E par une fermeture de dépendance $X \to \bar{X}$, de rang fini.

1) Il est facile de vérifier qu'on a un treillis complet avec pour "sup" et pour "inf" respectivement

$$X \vee Y = \overline{X \cup Y}, \quad X \wedge Y = X \cap Y,$$

le plus petit élément est $\bar{\emptyset}$ et le plus grand élément E.

2) Ce treillis est atomique : tout élément est le sup des points qui lui sont

inférieurs ou égaux. En effet tout fermé X du matroïde est le sup, au sens qui vient d'être défini, des fermés de la forme $\overline{\{x\}}$, où $x \in X$, lesquels, pris sans répétitions, constituent l'ensemble des points inclus dans X.

3) Compactement atomique signifie que tout point inférieur ou égal à un sup de points est inférieur ou égal à un nombre fini d'entre eux. Cette propriété résulte directement de l'axiome (D_5). Soit en effet un point q et un ensemble P quelconque de points tels que $q \subset \overline{\bigcup_{p \in P} p}$; posons $X = \bigcup_{p \in P} p$ et soit $x \in q$, on a $x \in \bar{X}$ donc il existe une partie finie Z de X telle que $x \in \bar{Z}$. Soit alors P_o l'ensemble des points de P ayant une intersection non vide avec Z ; P_o est fini et comme $Z \subset \bigcup_{p \in P_o} p$ d'où $x \in \overline{\bigcup_{p \in P_o} p}$, on a $\overline{\{x\}} = q \subset \overline{\bigcup_{p \in P_o} p} = \vee P_o$.

4) La semi-modularité peut s'exprimer comme propriété de la hauteur du treillis (voir plus loin). Rappelons que celle-ci est définie pour chaque élément par les chaînes maximales allant du plus petit élément du treillis à l'élément considéré, lorsque celles-ci ont même longueur, laquelle sera précisément la hauteur de l'élément. Le treillis considéré ici possède bien une hauteur, qui est égale à la fonction rang : quel que soit le fermé X les chaînes maximales de fermés emboîtés commençant à $\bar{\emptyset}$ et finissant à X sont de même longueur, égale à $r(X)$ (il est à noter d'abord que les chaînes quelconques entre $\bar{\emptyset}$ et X sont de longueurs finies inférieures ou égales à $r(X)$; rappelons que $r(X) \leq r(E)$ est fini, car le matroïde est supposé de rang fini). En effet, soit une telle chaîne maximale, dont alors chaque élément couvre le précédent, et de longueur p :

$$\bar{\emptyset} = X_o \prec X_1 \prec \ldots \prec X_{p-1} \prec X_p = X.$$

Comme d'une part $r(X_{i+1}) = r(X_i) + 1$ pour $i = 0, 1, \ldots, p-1$ et d'autre part $r(\emptyset) = 0$, on a $r(X) = r(X_o) + p = p$.

La semi-modularité supérieure du treillis est ici celle de la fonction rang : quels que soient les fermés X et Y on a $r(X \vee Y) + r(X \wedge Y) \leq r(X) + r(X)$. En effet, soient B_1 une base de $X \cap Y = X \wedge Y$, complétée en une base $B_1 \cup B_2$ de X, puis en une base $B_1 \cup B_3$ de Y (théorème 2). Alors $B_1 \cup B_2 \cup B_3$ est une partie génératrice de $X \cup Y$, donc de $X \vee Y$, et donc contient une base de $X \vee Y$ (corollaire du théorème 2) ; il en résulte qu'on peut écrire :

$$r(X \vee Y) \leq |B_1 \cup B_2 \cup B_3| = |B_1 \cup B_2| + |B_1 \cup B_3| - |B_1| = r(X) + r(Y) - r(X \wedge Y).$$

Cela achève la démonstration du théorème.

Remarque. La semi-modularité du rang, qui vient d'être montrée sur les fermés du matroïde, s'étend aux parties quelconques de la manière suivante : quels que soient $X \subset E$ et $Y \subset E$ on a

$$r(X \cup Y) + r(X \cap Y) \leq r(X) + r(Y).$$

Le treillis des fermés d'un espace vectoriel (c'est-à-dire le treillis des sous-espaces vectoriels) est modulaire. Précisons ici les relations entre modularité, semi-modularités et hauteur dans un treillis (en particulier selon Birkhoff). Soit T un treillis et soient $x \in T$, $y \in T$, $z \in T$ des éléments quelconques.

Modularité de T : $x \leq z \Rightarrow x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge z$.

Semi-modularité supérieure de T : $x \succ x \wedge y$ et $y \succ x \wedge y \Rightarrow x \vee y \succ x$ et $x \vee y \succ y$.

Semi-modularité inférieure de T : $x \vee y \succ x$ et $x \vee y \succ y \Rightarrow x \succ x \wedge y$ et $y \succ x \wedge y$.

La modularité est équivalente à l'ensemble des deux semi-modularités et chacune de celles-ci entraîne la condition de chaîne de Jordan-Dedekind dans le treillis (les chaînes maximales entre deux éléments quelconques sont de mêmes longueurs) et l'existence d'une hauteur $x \to h(x)$. Les modularités et semi-modularités suivantes de la hauteur sont respectivement équivalentes aux précédentes.

Modularité de h : Quels que soient $x \in T$ et $y \in T$,

$$h(x \vee y) + h(x \wedge y) = h(x) + h(y).$$

Semi-modularité supérieure de h : Quels que soient $x \in T$ et $y \in T$,

$$h(x \vee y) + h(x \wedge y) \leq h(x) + h(y).$$

Semi-modularité inférieure de h : Quels que soient $x \in T$ et $y \in T$,

$$h(x \vee y) + h(x \wedge y) \geq h(x) + h(y).$$

Théorème 5. Le treillis des fermés d'un matroïde vérifie la propriété suivante :

Quels que soient un élément X et un point p tel que $p \not\leq X$, $X \vee p$ couvre X.

Cette propriété s'appelle l'axiome de couverture de Mac Lane.

Démonstration. On peut écrire en particulier grâce à la semi-modularité du rang et au fait que $r(X \wedge p) = r(\emptyset) = 0$, $r(X) < r(X \vee p) \leq r(X) + r(p) - r(X \wedge p) = r(X) + 1$. Il en résulte $r(X \vee p) = r(X) + 1$ qui entraîne $X \vee p \succ X$.

Théorème 6. Soit un treillis complet compactement atomique et vérifiant l'axiome de couverture, et soit E l'ensemble de ses points. Pour toute partie X de E posons

$$\bar{X} = \{p \mid p \in E \text{ et } p \leq \bigvee_{q \in X} q\}.$$

L'application $X \to \bar{X}$ est une fermeture de dépendance sur E qui définit un matroïde dont le treillis des fermés s'identifie par l'application $X \to \bigvee_{q \in X} q$ au treillis considéré.

Démonstration. Vérifions simplement l'axiome d'échange (D_4), le reste se faisant sans difficultés. Pour simplifier, écrivons $\vee X$ à la place de $\bigvee_{q \in X} q$. Il s'agit de montrer que si $q \leq (\vee X) \vee p$ et $q \not\leq \vee X$ alors $p \leq (\vee X) \vee q$, où $X \subset E$, $p \in E$ et $q \in E$. Supposons $p \not\leq (\vee X) \vee q$; alors les trois relations de couverture suivantes données par l'axiome de couverture sont contradictoires. Comme $p \not\leq (\vee X) \vee q$, $p \not\leq \vee X$ et donc $(\vee X) \vee p$ couvre $\vee X$. Comme encore $p \not\leq (\vee X) \vee q$, $(\vee X) \vee q \vee p$, égal à $(\vee X) \vee p$ car $q \leq (\vee X) \vee p$, couvre $(\vee X) \vee q$. Comme $q \not\leq \vee X$, $(\vee X) \vee q$ couvre $\vee X$.

Matroïdes géométriques et treillis géométriques.

Définition 5. Un matroïde sur un ensemble E défini par une fermeture de dépendance $X \to \bar{X}$, est géométrique si on a $\bar{\emptyset} = \emptyset$ et, pour tout $x \in E$, $\overline{\{x\}} = \{x\}$ (c'est-à-dire tout élément de E est un point).

Il est surtout intéressant de noter que pour tout matroïde il existe un matroïde géométrique canoniquement associé. En effet, observons que les points et le fermé $\bar{\emptyset}$ d'un matroïde quelconque sur un ensemble E forment une partition de E, et en outre la fermeture d'une partie quelconque de E est partitionnée par $\bar{\emptyset}$ et les points que cette fermeture contient. Autrement dit, la fermeture de dépendance se fait en adjoignant des éléments par points, et il y a donc une fermeture naturelle définie sur l'ensemble des points du matroïde (en ne conservant pas $\bar{\emptyset}$) ; cette fermeture est encore une fermeture de dépendance et le matroïde qu'elle définit est géométrique par construction.

Exemple. Soit K un corps commutatif et considérons le matroïde défini par l'espace vectoriel $E = K^{n+1}$. Ce matroïde n'est pas géométrique, par exemple on a $\bar{\emptyset} = \{0\}$ qui n'est pas vide, ou encore les points sont les droites passant par l'origine, moins cette origine. Le matroïde géométrique associé est celui que définit la dépendance projective dans l'espace projectif de dimension n sur K, c'est-à-dire $P_n(K)$.

Les treillis considérés précédemment complets, compactement atomiques et vérifiant l'axiome de couverture, cette dernière propriété étant équivalente à la semi-modularité supérieure, sont les treillis géométriques. D'après les théorèmes précédents à un matroïde M est associé le treillis géométrique de ses fermés, soit $T(M)$, et inversement à un treillis géométrique T est associé un matroïde sur l'ensemble des points de T, soit $M(T)$, et ce matroïde est géométrique ; en outre on a $T(M(T)) \approx T$ (théorème 6).

On a encore, lorsque le matroïde M est géométrique, $M(T(M)) \sim M$ (par l'application $x \rightarrow \{x\}$). Ainsi la structure de treillis géométrique est équivalente à celle de matroïde géométrique.

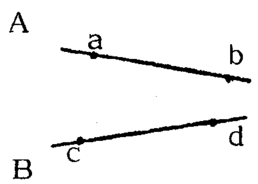
Citons simplement une autre propriété importante du treillis des fermés d'un matroïde, équivalente pour les treillis géométriques à la propriété d'atomicité, qui est d'être relativement complémenté , à savoir : quels que soient les fermés X, Y et Z tels que $X \subset Z \subset Y$ il existe un fermé V tel que $V \wedge Z = X$ et $V \vee Z = Y$. Propriété qui se démontre aisément à l'aide du théorème de la base incomplète.

Pour situer les treillis géométriques, signalons le remarquable théorème suivant de Dilworth : Tout treillis fini est isomorphe à un sous-treillis d'un treillis géométrique fini (où un sous-treillis est une partie du treillis stable pour le sup et l'inf, et un isomorphisme est une bijection préservant le sup et l'inf).

Exemples géométriques de matroïdes.

Les matroïdes géométriques se présentent comme des géométries plus générales que les géométries projectives. C'est dans cette perspective qu'on adopte pour les matroïdes le langage géométrique : point pour un fermé de rang 1, droite pour le rang 2, plan pour le rang 3 etc., et hyperdroite pour un fermé de rang n-2, hyperplan pour le rang n-1, où n est le rang du matroïde. Très fréquemment des exemples de matroïdes sont donnés par un ensemble de points du plan projectif $P_2(\mathbb{R})$ ou de l'espace $P_3(\mathbb{R})$, pratiquement plutôt d'ailleurs le plan affine $A_2(\mathbb{R})$ et l'espace affine $A_3(\mathbb{R})$. La dépendance projective, ou affine, définit le matroïde sur cet ensemble de points.

Exemple 1. Soient 4 points a, b, c, d en position générale dans le plan comme ci-contre. Les droites $A = \{a,b\}$ et $B = \{c,d\}$ ne s'intersectent pas, et si r est la fonction rang du matroïde on a



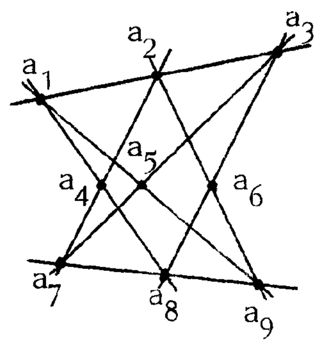
$r(A \cup B) + r(A \cap B) < r(A) + r(B)$,

car $r(A) = 2$, $r(B) = 2$, $r(A \cup B) = 3$, $r(A \cap B) = 0$.

On voit sur cet exemple comment le treillis des fermés d'un matroïde peut ne pas être modulaire. (Les matroïdes dont le treillis des fermés est modulaire correspondent aux géométries projectives et aux matroïdes libres).

Il faut voir qu'il y a encore un degré plus grand de généralisation dans la structure de matroïde, par rapport à celle de géométrie, réalisée par des modifications de la dépendance comme dans l'exemple suivant.

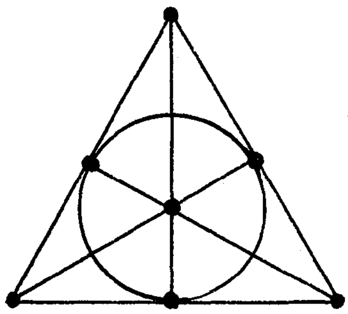
Exemple 2. Matroïde défini par la configuration de Pappus moins une droite, représentée ci-contre. Ce matroïde sur les 9 points $a_1, \ldots, a_9$ est celui induit par la dépendance engendrée par les alignements, comme précédemment, sauf pour les 3 points a_4, a_5, a_6 qui dans



le plan sont alignés et qui dans le matroïde ne formeront pas une droite par définition, c'est-à-dire par exemple a_4 n'appartiendra pas à la fermeture de $\{a_5, a_6\}$; bien entendu il y a à vérifier que cette structure est bien celle d'un matroïde (cela se fait plus commodément par l'axiomatique des fermés - voir chapitre suivant -). Les droites de ce matroïde de rang 3 sont les droites indiquées sur la figure plus celles n'ayant que deux points telles que $\{a_1, a_7\}$).

Avant de clore cet aspect géométrique de la structure de matroïde il faut citer la configuration de Desargues que nous rencontrerons d'une façon inattendue dans le paragraphe suivant, et surtout donner l'exemple suivant qui joue un rôle important dans la théorie.

Exemple 3. Configuration de Fano, représentée ci-dessous, et qui n'est autre que le plan projectif à 7 points, $P_2(\frac{Z}{2Z})$. C'est un matroïde de rang 3 dont les droites ayant plus de deux points sont indiquées ici par des segments de droites du plan et un cercle, car cette configuration ne peut pas être représentée dans le plan ordinaire avec tous ses alignements.



1.3. Stigmes, dualité et matroïdes de graphes.

Ce troisième aspect des matroïdes, qui vient de l'application de la théorie de la dépendance aux graphes, se trouve dès l'origine de la théorie, et cela de manière fondamentale à partir de l'article de base de Whitney [9]. La notion de stigme, attachée à un matroïde, est originale par rapport aux développements algébriques et géométriques précédents.

Stigmes d'un matroïde.

Définition 6. *On appelle stigme (ou circuit) d'un matroïde sur un ensemble* E *toute partie* S *de* E *dépendante minimale, c'est-à-dire telle que*

1) *il existe* $x \in S - \{x\}$

2) *pour tout* $x \in S$, $S - \{x\}$ *est une partie indépendante.*

Il résulte facilement de la définition et de l'axiome d'échange que pour tout $x \in S$ on a $x \in \overline{S - \{x\}}$.

Théorème 7. *Les stigmes d'un matroïde sont des parties finies non vides deux à deux non comparables pour l'inclusion et vérifiant la propriété suivante* :

(i) *Quels que soient deux stigmes distincts* S_1 *et* S_2 *et un élément* $x \in S_1 \cap S_2$ *il existe un stigme* S_3 *tel que* $S_3 \subset (S_1 \cup S_2) - \{x\}$.

La propriété (i) est appelée l'*axiome d'élimination* (cette propriété correspond en algèbre linéaire à l'élimination d'une variable entre deux relations linéaires).

Démonstration. Soit un stigme S. La partie vide étant libre, on a $S \neq \emptyset$. Etant donné $x \in S$, comme $x \in \overline{S - \{x\}}$, il existe d'après (D_5) une partie finie F de $S - \{x\}$ telle que $x \in \overline{F}$, ainsi $F \cup \{x\}$ est une partie dépendante et finie ; on a $S = F \cup \{x\}$ par définition du stigme S. Montrons la propriété (i). Pour montrer l'existence de S_3 il suffit de montrer que $S_1 \cup S_2 - \{x\}$ n'est pas libre. Soit $y \in S_1 - S_2$ (quelconque) ; on a $y \in \overline{S_1 - \{y\}} = \overline{(S_1 - \{x,y\}) \cup \{x\}}$, et, comme $x \in \overline{S_2 - \{x\}}$,

$$y \in \overline{\overline{(S_1 - \{x,y\})} \cup \overline{(S_2 - \{x\})}} = \overline{(S_1 - \{x,y\}) \cup (S_2 - \{x\})} = \overline{(S_1 \cup S_2 - \{x\}) - \{y\}}.$$

Remarque. La propriété (i) entraîne immédiatement l'importante propriété suivante : étant donné une partie libre L, en particulier une base, et un élément x tel que $x \in \overline{L}$ et $x \notin L$, il existe un stigme S unique tel que $x \in S \subset L \cup \{x\}$. Dans le cas où L est une base B, $S - \{x\}$ est égal à l'ensemble $F_x \subset B$ défini dans la remarque faisant suite au théorème 3 : en effet, $S-\{x\}\supset F_x$ car $x\in\overline{S-\{x\}}$ et $S-\{x\}=F_x$ car l'ensemble $F_x\cup\{x\}$ est lui-même dépendant puisque $x\in\bar{F}_x$. S est *le stigme associé à l'élément* x *relativement à la base* B.

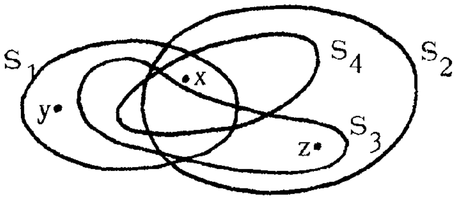
En fait, les stigmes vérifient une propriété d'élimination plus forte que la propriété (i) (comme on peut d'ailleurs le voir dans la démonstration de (i) où l'élément y est quelconque). Cette propriété, (ii) dans le lemme suivant, est appelée *axiome d'élimination fort* et est équivalente à (i).

Lemme 4. Soient un ensemble E *et un ensemble* $\mathcal{S}$ *de partie de* E *deux à deux non comparables pour l'inclusion. Les deux propriétés suivantes de* $\mathcal{S}$ *sont équivalentes* :

(i) *Quels que soient* $S_1\in\mathcal{S}$ *et* $S_2\in\mathcal{S}$ *distincts et un élément* $x\in S_1\cap S_2$, *il existe* $S_3\in\mathcal{S}$ *tel que* $S_3\subset(S_1\cup S_2)-\{x\}$.

(ii) *Quels que soient* $S_1\in\mathcal{S}$ *et* $S_2\in\mathcal{S}$ *distincts et deux éléments* $x\in S_1\cap S_2$ *et* $y\in S_1-S_2$, *il existe* $S_3\in\mathcal{S}$ *tel que* $y\in S_3\subset(S_1\cup S_2)-\{x\}$.

Démonstration. Montrons que (i) entraîne (ii). Soient $S_1\in\mathcal{S}$, $S_2\in\mathcal{S}$, $x\in S_1\cap S_2$ et $y\in S_1-S_2$ un contre-exemple à la propriété (ii), tel que le nombre d'éléments $|S_1\cup S_2|$ de $S_1\cup S_2$ soit minimal. D'après (i) il existe $S_3\in\mathcal{S}$ tel que $S_3\subset S_1\cup S_2-\{x\}$, et on a $y\notin S_3$. On a encore $S_3\neq S_2$ (car $x\in S_2$ et $x\notin S_3$) et, par hypothèse, $S_3\not\subset S_1$. Soit $z\in S_3-S_1$; comme $|S_2\cup S_3|<|S_1\cup S_2|$, par hypothèse de récurrence (ii) s'applique à S_2 et S_3 avec $z\in S_2\cap S_3$ et $x\in S_2-S_3$, ce qui donne $S_4\in\mathcal{S}$ tel que $x\in S_4\subset(S_2\cup S_3)-\{z\}$. On a $S_4\neq S_1$ (car $y\notin S_4$ et $y\in S_1$) et $|S_1\cup S_4|<|S_1\cup S_2|$ (car $z\notin S_1\cup S_4$). On peut de nouveau appliquer (ii) à S_1 et S_4 avec $x\in S_1\cap S_4$ et $y\in S_1-S_4$ et obtenir $S_5\in\mathcal{S}$, tel que $y\in S_5\subset(S_1\cup S_4)-\{x\}$, qui contredit le choix de S_1, S_2, x et y.



Les propriétés des stigmes énoncées dans le théorème 7 suffisent pour retrouver la fermeture de dépendance du matroïde (et conduisent ainsi à une définition axiomatique des matroïdes par l'ensemble des stigmes).

Théorème 8. Soient E un ensemble et $\mathcal{S}$ un ensemble de parties finies de E deux à deux non comparables et vérifiant l'axiome d'élimination. Pour toute partie X de E, posons

$$\bar{X} = X \cup \{x \mid x \in E - X, \text{ il existe } S \in \mathcal{S} \text{ tel que } x \in S \subset X \cup \{x\}\}.$$

L'application $X \to \bar{X}$ est une fermeture de dépendance qui définit un matroïde dont l'ensemble des stigmes est $\mathcal{S}$.

Démonstration. On vérifie facilement les axiomes requis, sauf l'axiome d'idempotence (D_3) pour lequel est à utiliser l'axiome d'élimination fort. Soit $X \subset E$ quelconque, il suffit de montrer que $\bar{\bar{X}} \subset \bar{X}$. Soient $x \in \bar{\bar{X}}$ et $S \in \mathcal{S}$ tels que $x \in \bar{S} \subset X \cup \{x\}$. Supposons qu'il existe $y \in S \cap (\bar{X} - X)$, il existe alors aussi $S_1 \in \mathcal{S}$ tel que $y \in S_1 \subset X \cup \{y\}$; appliquons l'axiome d'élimination fort à S et S_1 avec $y \in S \cap S_1$ et $x \in S - S_1$, ce qui donne $S' \in \mathcal{S}$ tel que $x \in S' \subset S \cup S_1 - \{y\}$. On a $x \in S' \subset \bar{X} \cup \{x\}$ et l'ensemble $S' \cap (\bar{X} - X)$ a au moins un élément de moins, à savoir y, que l'ensemble $S \cap (\bar{X} - X)$. Recommençant, un nombre fini de fois, car ces ensembles sont finis, on obtient enfin $S_o \in \mathcal{S}$ tel que $S_o \cap (\bar{X} - X) = \emptyset$ et $x \in S_o \subset X \cup \{x\}$, dont l'existence montre que $x \in \bar{X}$. Il est facile de voir enfin par ailleurs que $\mathcal{S}$ est l'ensemble des parties dépendantes minimales pour cette fermeture.

Il reste à ajouter que la fermeture de dépendance associée à l'ensemble des stigmes d'un matroïde suivant le théorème 8 est la fermeture de dépendance du matroïde considéré. Ainsi de nouveau, comme avec les treillis géométriques et plus simplement ici car les deux structures sont sur le même ensemble, on a une équivalence de structures. La notion de matroïde présente ainsi de multiples facettes équivalentes que sont les différentes axiomatiques (nous verrons au chapitre suivant les principales d'entre elles avec leurs équivalences).

Exercice 1. Soit un ensemble E et soit une partie A de E. Montrer que l'application $X \to A \cup X$ est une fermeture de dépendance sur E. Trouver les parties libres, les bases, le rang, les fermés, les stigmes du matroïde qu'elle définit.

Matroïde des cycles d'un graphe.

Il est utile de rappeler ou préciser d'abord certaines définitions sur les graphes. On appelle ici graphe un couple $G = (S,A)$ de deux ensembles, S d'éléments appelés sommets et A d'éléments appelés arêtes, avec une application e de A dans l'ensemble des parties $\mathcal{P}(S)$ associant à chaque arête une partie à un ou deux éléments de S appelés extrémités de l'arête considérée ; lorsque cette partie a un seul élément l'arête est appelée boucle. Le nombre d'arêtes admettant pour extrémité un sommet, en comptant deux fois les boucles, est le degré de ce sommet.

On appelle sous-graphe d'un graphe $G = (S,A)$ tout couple (S',A') de parties S' de S et A' de A qui avec la restriction de e à A' est un graphe. Le sous-graphe (S',A') est dit plein ou engendré par S' si A' est égal à l'ensemble des arêtes de G dont les extrémités appartiennent à S'. Le sous-graphe (S',A') est dit engendré par A' si S' est l'ensemble des extrémités des arêtes appartenant à A'.

On appelle cycle d'un graphe $G = (S,A)$ tout sous-graphe (S',A') de G pour lequel il existe des paramétrages $(s_1,\ldots,s_p)$ de S' et $(a_1,\ldots,a_p)$ de A' tels que s_i et s_{i+1} sont les extrémités de l'arête a_i pour $i = 1,\ldots,p-1$ et s_p et s_1 les extrémités de a_p. Le cycle considéré est élémentaire s'il existe de tels paramétrages dans lesquels les s_i ainsi que les a_i sont deux à deux distincts.

Nous ne rappelons pas la définition des graphes connexes ni celle des composantes connexes d'un graphe, qui sont bien connues.

Par commodité, nous confondrons ici un cycle et l'ensemble de ses arêtes ; ainsi un cycle d'un graphe $G = (S,A)$ sera considéré comme une partie de A. Les graphes considérés sont finis c'est-à-dire leurs ensembles de sommets et d'arêtes sont finis.

Proposition 1. Les cycles élémentaires d'un graphe fini sont les stigmes d'un matroïde sur l'ensemble des arêtes de ce graphe.

Démonstration. Soit $G = (S, A)$ un graphe fini. Il y a à vérifier pour les cycles élémentaires de G les propriétés énoncées au théorème 8. Les cycles élémentaires de G sont des parties finies de A qui dans l'ensemble des cycles de G sont les éléments minimaux pour l'inclusion dans A : ce sont donc des parties deux à deux non comparables. Soient $C_1 \subset A$ et $C_2 \subset A$ deux cycles élémentaires de G ; leur différence symétrique $C_1 \Delta C_2$ est un ensemble d'arêtes qui engendre un sous-graphe dont les degrés des sommets sont pairs (en fait égaux à 0, 2 ou 4) ; il est facile, et classique, d'en déduire que $C_1 \Delta C_2$ se décompose en une union disjointe de cycles élémentaires. L'axiome d'élimination est alors trivial à vérifier.

Remarque. Dans ce matroïde donc, la différence symétrique de deux stigmes est une union disjointe de stigmes. Cette propriété est beaucoup plus forte que l'axiome d'élimination.

Les matroïdes vérifiant cette propriété plus forte sont les matroïdes binaires, à savoir les matroïdes définis par la dépendance linéaire sur le corps à 2 éléments (ils constituent une classe plus étendue que celle des matroïdes de cycles, ou de cocycles voir plus loin, d'un graphe). Dans un tel matroïde l'ensemble des unions disjointes de stigmes forment avec la différence symétrique comme loi de composition un groupe commutatif. Inversement, étant donné un ensemble de parties d'un ensemble formant avec la différence symétrique un groupe, les éléments minimaux pour l'inclusion de cet ensemble sont les stigmes d'un matroïde binaire. De tels groupes, notamment développés par Ghouila-Houri [5] sous la dénomination de groupes de parties, représentent donc en fait une structure équivalente à celle de matroïde binaire.

Ce matroïde sur l'ensemble des arêtes d'un graphe $G = (S, A)$ défini par la proposition 1 est appelé le matroïde des cycles de G. Précisons-en les éléments suivants.

<u>Fermeture</u> : Soit $X \subset A$. On déduit de l'expression donnée au théorème 8 que $\bar{X}$ est l'ensemble des arêtes de G dont les extrémités appartiennent à une même composante connexe du sous-graphe (S,X). Ainsi $\bar{\emptyset}$ est l'ensemble des boucles de G (noter qu'une boucle est un cycle élémentaire de G donc un stigme du matroïde). En particulier $\overline{\{a\}}$, où $a \in A$ quelconque, est l'ensemble des arêtes de G ayant même ensemble d'extrémités que l'arête a (cet ensemble constitue ce qu'on appelle une arête multiple, lorsqu'il a plus d'un élément). Le matroïde est géométrique si et seulement si le graphe G est sans boucles ni arêtes multiples (graphe simple).

<u>Parties libres</u> : Ce sont les ensembles d'arêtes engendrant un sous-graphe sans cycles ; un tel sous-graphe est appelé une forêt, un arbre s'il est connexe.

<u>Bases</u> : Ce sont les forêts maximales, c'est-à-dire celles qui engendrent le graphe ; si G est connexe, une base correspond à un arbre maximal. On vérifie bien ici la propriété d'unicité du stigme associé à un élément relativement à une base, signalée plus haut (une arête n'appartenant pas à un arbre maximal ferme avec celui-ci un unique cycle élémentaire).

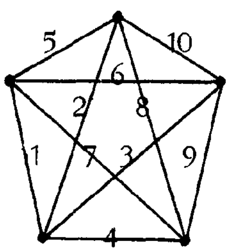
<u>Rang</u> : Le rang est égal à $n-p$ où n est le nombre de sommets et p le nombre de composantes connexes de G. On a de même le rang de tout ensemble d'arêtes.

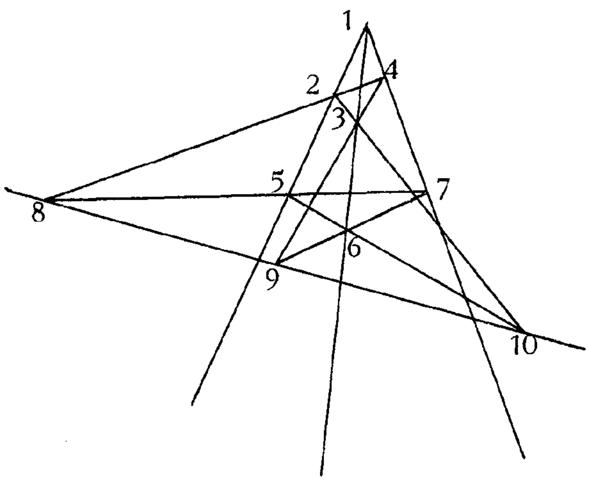
L'étude du matroïde des cycles d'un graphe est poursuivie dans les exercices suivants.

<u>Exercice 2</u>. Soit $G = (S,A)$ un graphe connexe. Montrer que les hyperplans du matroïde des cycles de G sont les complémentaires dans A des ensembles d'arêtes pour lesquels il existe une partition de S en deux parties S_1 et S_2 telles que les sous-graphes engendrés par S_1 et S_2 sont connexes et que chaque arête possède une extrémité dans S_1 et une extrémité dans S_2. (Observer qu'un hyperplan est un fermé propre, c'est-à-dire différent de A, maximal pour l'inclusion, c'est-à-dire dès qu'on y ajoute une arête la fermeture est l'ensemble A tout entier).

Exercice 3. Montrer que les treillis des fermés des matroïdes des cycles des deux graphes ci-dessous sont isomorphes et que l'un des deux matroïdes est le matroïde géométrique associé à l'autre.

Exercice 4. Soit K_5 le graphe complet à 5 sommets : par définition le graphe ayant 5 sommets et 10 arêtes dont les ensembles d'extrémités sont toutes les paires de sommets. Vérifier que le matroïde des cycles de K_5 s'identifie à la configuration de Desargues dans l'espace (suivant la bijection $i \to i$ dans les figures ci-dessous).





Dualité.

Théorème 9. Soit un matroïde M sur un ensemble fini E. Les complémentaires dans E des hyperplans de M sont les stigmes d'un matroïde.

Démonstration. Soient deux hyperplans distincts H_1 et H_2 et un élément $x \notin H_1 \cup H_2$. Il est facile de voir qu'il existe un hyperplan H_3 tel que $(H_1 \cap H_2) \cup \{x\} \subset H_3$; en effet on a $r(H_1 \cap H_2) < r(E)-1$, donc $r((H_1 \cap H_2) \cup \{x\}) \leq r(E) - 1$, et en adjoignant à $(H_1 \cap H_2) \cup \{x\}$ successivement des éléments, le premier $a \in E$ tel que

$a \notin \overline{(H_1 \cap H_2) \cup \{x\}}$, on arrive à un ensemble contenant $(H_1 \cap H_2) \cup \{x\}$ et de rang égal à $r(E)-1$, sa fermeture est un hyperplan cherché. Cette propriété démontrée exprime, pour les ensembles complémentaires, l'axiome d'élimination.

Ce nouveau matroïde ainsi associé à M est le matroïde dual de M, noté M^*.

Les stigmes de M^* ne sont pas aisés à définir directement à partir des stigmes de M : ce sont les parties S' de E telles que $|S \cap S'| \neq 1$ pour tout stigme S de M et minimales pour l'inclusion avec cette propriété. Par contre, on voit facilement que les bases de M^* sont les complémentaires dans E des bases de M, et donc que le rang de M^* est égal à $|E|-r(E)$.

La dualité est une relation symétrique : $(M^*)^* = M$. Les stigmes de M^* s'appellent les costigmes de M, les bases s'appelent les cobases etc.

Application : Matroïde des cocycles d'un graphe.

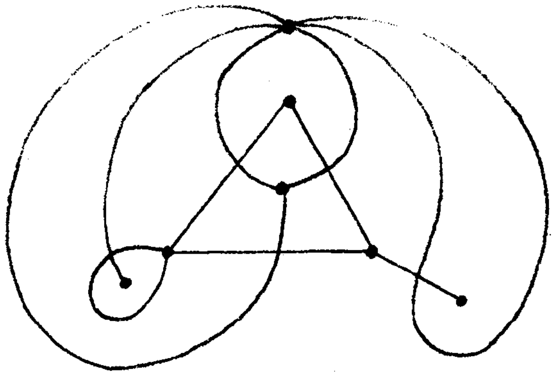
Soit un graphe $G=(S,A)$.Le dual du matroïde des cycles de G est le matroïde des cocyles de G. Ses stigmes sont ce qu'on appelle les cocyles élémentaires de G ; d'après ce qui précède (exercice 2 et théorème 9) ce sont les ensembles définis par une partition (S_1,S_2) de S telle que les sous-graphes engendrés par S_1 et S_2 soient connexes, comme étant l'ensemble des arêtes ayant une extrémité dans S_1 et une extrémité dans S_2. Ce matroïde est de rang $m-n+p$ où m est le nombre d'arêtes de G (nombre cyclomatique de G).

La relation entre stigmes et costigmes d'un matroïde, $|S \cap S'| \neq 1$, est plus forte dans le cas des cycles et cocycles d'un graphe où elle devient : $|S \cap S'|$ pair.

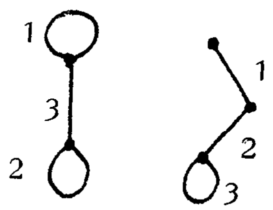
Cas des graphes planaires.

La dualité des matroïdes associés aux graphes planaires est remarquable en ce sens qu'elle correspond à la dualité des représentations dans le plan de ceux-ci.

Soient deux graphes connexes G et G' dualement représentés dans le plan, comme par exemple les deux graphes ci-contre ; cette dualité comprend une correspondance bijective entre les arêtes des deux graphes. Par identification des ensembles d'arêtes de G et G' suivant celle-ci, les matroïdes des cycles de G et G' sont duaux. En particulier, et autrement dit, le dual du matroïde des cycles de G est isomorphe au matroïde des cycles de G'. Le fait essentiel est que le dual du matroïde des cycles de G est isomorphe lui-même au matroïde des cycles d'un graphe, en l'occurence G' ; on dit que ce matroïde est graphique. Car réciproquement, si un graphe G est tel que son matroïde des cycles est graphique alors ce graphe est planaire ; plus précisément, si le dual de son matroïde des cycles est isomorphe au matroïde des cycles d'un graphe G', alors G et G' admettent des représentations planaires duales (suivant la bijection entre les arêtes définissant l'isomorphisme des matroïdes).



Précisons qu'on doit supposer le graphe G inarticulé, c'est-à-dire sans sommets d'articulation. Un contre-exemple sinon est fourni par les deux graphes ci-contre (avec la bijection $i \to i$). Ce résultat remarquable constitue le théorème de Whitney.; son intérêt, souligné déjà par Whitney, et à l'origine de cette notion de matroïdes associé à un graphe, est que si un graphe n'a pas toujours de dual (planaire), son matroïde a par contre lui toujours un dual, ce qui permet de caractériser la planarité simplement par une propriété de ce dual.



Remarque. La relation d'Euler pour les graphes planaires n'est que l'expression de l'égalité des rangs des deux matroïdes isomorphes : le matroïde des cycles de G et le dual du matroïde des cycles de G'. En effet, en notant respectivement n et n' les nombres de sommets de G et G', m et m' les nombres d'arêtes de G et G', comme le rang du matroïde des cycles de G est $n-1$ (G est connexe) et celui du dual du matroïde des cycles de G' est $m-(n'-1)$, on a :

$$n-1 = m-(n'-1)$$

soit

$$n-m+n' = 2.$$

Or n' est égal au nombre f de faces de la représentation de G (duale de celle de G'), d'où finalement, il vient la <u>relation d'Euler</u> :

$$n-m+f = 2.$$

Comme nous venons de le voir, la dualité se définit bien pour les matroïdes <u>finis</u> (sur un ensemble fini). D'une manière générale dans la théorie on se restreint le plus souvent aux matroïdes finis, ou, sinon, au moins aux matroïdes de rang fini.

<u>Exercice 5</u>. Soit B une base d'un matroïde M sur un ensemble E. Pour chaque $x \in E-B$ soit C_x le stigme associé à x relativement à B : $x \in C_x \subset B \cup \{x\}$, et posons $T_x = C_x - \{x\}$. De même pour chaque $y \in E-B$ soit C'_y le stigme associé à y relativement à la base $E-B$ de M^*, et posons $T'_y = C'_y - \{y\}$. Montrer qu'étant donné $y \in B$ (<u>resp.</u> $x \in E-B$) l'ensemble des $x \in E-B$ (<u>resp.</u> $y \in B$) tels que $T_x \ni y$ (<u>resp.</u> $T'_y \ni x$) est égal à T'_y (<u>resp.</u> T_x).

2. AXIOMATIQUES DES MATROÏDES.

Dans ce qui suit sont présentées les principales axiomatiques des matroïdes, avec les passages de l'une à l'autre. Cela reprend et complète de façon systématique ce qui a été développé pour la définition des matroïdes dans le chapitre précédent. Les démonstrations d'équivalence de ces axiomatiques ne seront pas faites (les passages les plus délicats se trouvant en fait déjà traités dans les théorèmes précédents). Ces axiomatiques, qui ont chacune leur utilité dans la théorie, définissent des structures équivalentes dont c'est l'ensemble qui pratiquement constitue la notion de matroïde.

Equivalence de structures.

Considérons par exemple sur un ensemble E une application de fermeture, c'est-à-dire une application $\varphi : X \to \bar{X}$ de $\mathfrak{P}(E)$ dans lui-même vérifiant les trois axiomes (D_1), (D_2) et (D_3) de (1.1). Alors l'ensemble, noté $\mathfrak{F}(\varphi)$, des "fermés" pour cette application, c'est-à-dire les parties $X \subset E$ telles que $\bar{X} = X$, est stable pour l'intersection. Inversement, soit un ensemble $\mathfrak{F}$ de parties de E vérifiant l'unique axiome suivant, et appelé alors ensemble de Moore de parties de E :

(A) Pour tout $\mathfrak{H} \subset \mathfrak{F}$, $\bigcap_{X \in \mathfrak{H}} X \in \mathfrak{F}$.

Alors l'application de $\mathfrak{P}(E)$ dans lui-même, notée $\varphi(\mathfrak{F})$, et qui à $X \subset E$ associe $\bar{X}$ défini par

$$\bar{X} = \bigcap \{Y \mid Y \in \mathfrak{H},\ Y \supset X\}$$

est une application de fermeture, dont de surcroît l'ensemble des fermés est $\mathfrak{F}$, c'est-à-dire qu'on a :

$$\mathfrak{F}(\varphi(\mathfrak{F})) = \mathfrak{F}.$$

On a également par ailleurs :

$$\varphi(\mathfrak{F}(\varphi)) = \varphi.$$

On dit que l'espèce de structures "application de fermeture" est équivalente à l'espèce de structure "ensemble de Moore" sur l'ensemble E. D'une manière générale on dit que deux espèces de structures sont équivalentes s'il existe un procédé de déduction donnant dans la structure générique de chacune des deux espèces une structure de l'autre espèce, les deux correspondances ainsi définies étant réciproques. La démonstration de l'équivalence se fait donc en quatre points. Ainsi dans l'exemple précédent, ce sont : 1) $\varphi(\mathfrak{F})$ est une application de fermeture sur E, 2) $\mathfrak{F}(\varphi)$ est un ensemble de Moore de parties de E, 3) $\mathfrak{F}(\varphi(\mathfrak{F})) = \mathfrak{F}$, 4) $\varphi(\mathfrak{F}(\varphi)) = \varphi$ (les deux premiers points établissent les passages d'une axiomatique à l'autre).

Des espèces de structures équivalentes sont différentes facettes d'un même objet et ont au fond la même théorie : les axiomes d'une structure deviennent des théorèmes dans les autres.

Quatre principales axiomatiques des matroïdes.

Un matroïde sur un ensemble E est un ensemble de structures équivalentes, dont celles définies par les axiomatiques suivantes portant sur : la fermeture de dépendance, les bases, la fonction rang et les stigmes. Chacune d'entre elles définit un matroïde sur E dans lequel les autres éléments, permettant les passages de l'axiomatique considérée aux autres axiomatiques, sont donnés à la suite. Chacun de ces éléments vérifie, comme théorèmes, les propriétés énoncées dans l'axiomatique le concernant. Ainsi est donné l'ensemble, soit $\mathfrak{B}(\varphi)$, des bases du matroïde défini par une fermeture de dépendance φ : $\mathfrak{B}(\varphi)$ vérifie (B_1),(B_2) et (B_3) qui se déduisent des axiomes $(D_1),\dots,(D_5)$; si $\varphi(\mathfrak{B})$ est la fermeture du matroïde défini par un ensemble de bases $\mathfrak{B}$, on a, rappelons-le, $\mathfrak{B}(\varphi(\mathfrak{B})) = \mathfrak{B}$ et $\varphi(\mathfrak{B}(\varphi)) = \varphi$.

Dans les axiomatiques suivantes le dernier axiome est, quand il y a lieu, un axiome de finitude, lequel devient inutile lorsque E est fini. Pour simplifier, nous écrivons désormais, lorsque $x \notin X$, $X+x$ à la place de $X \cup \{x\}$, lorsque $x \in X$, $X-x$ à la place de $X-\{x\}$ etc.

Axiomatique de la fermeture de dépendance.

Une application $\varphi : X \to \bar{X}$ de $\mathcal{P}(E)$ dans lui-même est la fermeture de dépendance d'un matroïde M sur E si elle vérifie les axiomes suivants.

(D_1) Pour tout $X \subset E$, $X \subset \bar{X}$.

(D_2) Quels que soient $X \subset E$ et $Y \subset E$ tels que $X \subset Y$, on a $\bar{X} \subset \bar{Y}$

(D_3) Pour tout $X \subset E$, $\bar{\bar{X}} = \bar{X}$.

(D_4) Quels que soient $X \subset E$, $x \in E$ et $y \in E$, si $y \in \overline{X+x}$ et $y \notin \bar{X}$ alors $x \in \overline{X+y}$.

(D_5) Quel que soit $X \subset E$, pour tout $x \in \bar{X}$ il existe une partie finie Z de X telle que $x \in \bar{Z}$.

Les autres éléments du matroïde M sont définis comme suit :

Bases. Les parties libres sont les $X \subset E$ tels que pour tout $x \in E$, $x \notin \overline{X-x}$, et les bases sont alors les parties libres maximales pour l'inclusion.

Rang. Les parties libres incluses dans une partie finie X de E et maximales sont équicardinales, le nombre commun (fini) d'éléments est le rang de X.

Stigmes. Ce sont les ensembles dépendants minimaux c'est-à-dire les $X \subset E$ tels que

1) il existe $x \in X$ tel que $x \in \overline{X-x}$,

2) quels que soient $x \in X$ et $y \in X$ distincts, $y \notin \overline{X-x-y}$.

Axiomatique des bases.

Une partie $\mathcal{B}$ de $\mathcal{P}(E)$ est l'ensemble des bases d'un matroïde M sur E si on a :

(B_1) $\mathcal{B} \neq \emptyset$

(B_2) Quels que soient $X \in \mathcal{B}$, $Y \in \mathcal{B}$ et $x \in X - Y$ il existe $y \in Y-X$ tel que $X-x+y \in \mathcal{B}$ (axiome d'échange).

(B_3) L'ensemble $\bigcup_{X \in \mathcal{B}} \mathcal{P}(X)$ est le caractère fini.*

---

* Rappelons qu'un ensemble $\mathcal{S} \subset \mathcal{P}(E)$ est de caractère fini si une condition nécessaire et suffisante pour qu'une partie quelconque X de E appartienne à $\mathcal{S}$ est que toute partie finie de X appartienne à $\mathcal{S}$.

Fermeture de M. Posons $\mathcal{L} = \bigcup_{X \in \mathcal{B}} \mathcal{P}(X)$, l'ensemble des parties libres de M ; on a pour tout $X \subset E$, $\bar{X} = X \cup \{x \mid x \in E - X$ et il existe $Y \in \mathcal{L}$ tel que $Y + x \notin \mathcal{L}\}$.

Fonction rang de M. Pour toute partie X de E, $r(X) = \sup_{Y \in \mathcal{B}} |X \cap Y|$.

Stigmes de M. Parties X de E n'appartenant pas à $\mathcal{L}$ et minimales avec cette propriété.

Axiomatique du rang.

Une application r de l'ensemble des parties finies de E dans $\mathbb{N}$ est la fonction rang d'un matroïde M sur E si on a :

(R_1) $r(\emptyset) = 0$.

(R_2) Pour tout $x \in E$, $r(\{x\}) \leq 1$.

(R_3) Quels que soient les parties finies X et Y de E telles que $X \subset Y$, $r(X) \leq r(Y)$.

(R_4) Quels que soient les parties finies X et Y de E, on a $r(X \cup Y) + r(X \cap Y) \leq r(X) + r(Y)$ (semi-modularité supérieure).

(Il n'y a pas d'axiome de finitude car la fonction rang n'est définie ici que sur les parties finies ; on peut d'ailleurs l'étendre à $\mathcal{P}(E)$ en posant $r(X) = \sup_{Y \text{ fini } \subset X} r(Y)$).

Fermeture de M. $\bar{X} = X \cup \{x \mid x \in E - X$ et il existe $Y \subset E$ fini tel que $r(Y+x) = r(Y)\}$.

Bases de M. Parties X de E telles que pour toute partie finie Y de X on a $r(Y) = |Y|$ et maximales avec cette propriété.

Stigmes de M. Parties finies X de E telles que :

1) $r(X) = |X| - 1$,

2) $r(X-x) = |X| - 1$ quel que soit $x \in X$.

Axiomatique des stigmes.

Une partie $\mathcal{S}$ de $\mathcal{P}(E)$ est l'ensemble des stigmes d'un matroïde M sur E si on a :

(S_1) $\emptyset \notin \mathcal{S}$.

(S_2) Quels que soient $X \in \mathcal{S}$ et $Y \in \mathcal{S}$, $X \not\subset Y$.

(S_3) Quels que soient $X \in \mathcal{S}$ et $Y \in \mathcal{S}$ distincts et $x \in X \cap Y$, il existe $Z \in \mathcal{S}$ tel que $Z \subset (X \cup Y) - x$ (axiome d'élimination).

(S_4) Toute partie de E appartenant à $\mathcal{S}$ est finie.

L'axiome (S_3) peut-être remplacé par le suivant :

(S_3') Quels que soient $X \in \mathcal{S}$ et $Y \in \mathcal{S}$ distincts, $x \in X \cap Y$, et $y \in X - Y$, il existe $Z \in \mathcal{S}$ tel que $Z \subset (X \cup Y) - x$ et $y \in Z$ (axiome d'élimination fort).

Fermeture de M. $\bar{X} = X \cup \{x \mid x \in E - X$ et il existe $Y \in \mathcal{S}$ tel que $x \in Y \subset X + x\}$.

Bases de M. Les parties libres sont les parties de E ne contenant aucun élément de $\mathcal{S}$; les bases sont les parties libres maximales, c'est-à-dire les $X \subset E$ tels que :

1) pour tout $Y \subset X$, $Y \notin \mathcal{S}$,

2) pour tout $x \notin X$, il existe $Y \in \mathcal{S}$ tel que $Y \subset X + x$.

Rang : à définir à partir des éléments précédents.

Bien d'autres axiomatiques existent encore que les précédentes (qui sont, avec celles données plus loin, les plus couramment utilisées), par exemple avec les ensembles : $\mathcal{L}$ des parties libres, $\mathcal{F}$ des fermés (voir plus loin pour le cas des matroïdes de rang fini), $\mathcal{H}$ des hyperplans etc. Ce qui suppose de nouveaux passages, par exemple : un fermé est une partie maximale pour le rang, une partie libre est au contraire une partie minimale pour le rang etc. De manière tout à fait générale un matroïde sur l'ensemble E sera noté $M = (E\ ; \varphi, \mathcal{L}, \mathcal{B}, r, \mathcal{F}, \mathcal{H}, \mathcal{S} \ldots)$ suivant les éléments précédents introduits ou considérés, ou simplement par exemple $M = (E, \mathcal{S})$ s'il est défini par ses stigmes, les autres éléments attachés à M étant alors implicitement présents avec les propriétés correspondantes, entre autres les axiomes des autres axiomatiques.

Autre axiomatique du rang.

Une même notion peut être l'objet d'axiomatiques différentes, par exemple la fonction rang qui admet encore l'axiomatique suivante (dite de Whitney) qui est en quelque sorte la "localisée" de celle donnée précédemment (suivant une technique fréquente dans la théorie).

(R'_1) $r(\emptyset) = 0$.

(R'_2) <u>Quels que soient la partie finie</u> X <u>et l'élément</u> x <u>de</u> E <u>on a</u> $r(X+x) = r(X)$ <u>ou</u> $r(X+x) = r(X)+1$.

(R'_3) <u>Quels que soient la partie finie</u> X <u>et les éléments</u> x <u>et</u> y <u>de</u> E <u>si</u> $r(X) = r(X+x) = r(X+y)$ <u>alors</u> $r(X+x+y) = r(X)$.

(Cette axiomatique se déduit facilement de la précédente ; pour montrer la réciproque, et donc l'équivalence des deux axiomatiques, le seul point non trivial est de déduire l'axiome (R_4). Raisonnons par récurrence sur le cardinal de la différence symétrique $|X_\Delta Y|$ des deux parties considérées dans cet axiome. Si $|X_\Delta Y| = 0$, l'inégalité à démontrer est triviale. Supposons $|X_\Delta Y| > 0$ et par exemple $X-Y \neq \emptyset$, et soit alors $x \in X-Y$. Par hypothèse de récurrence appliquée aux parties finies X et $Y+x$ on a $r(X \cup Y) + r(X \cap Y+x) \leq r(X)+r(Y+x)$. Par application de l'axiome (R'_2) à Y et x d'une part et $X \cap Y$ et x d'autre part on en déduit l'inégalité cherchée sauf dans le seul cas où on a à la fois $r(Y+x) = r(Y)+1$ et $r(X \cap Y+x) = r(X \cap Y)$. Mais on voit que ce cas ne se présente pas à l'aide du résultat auxiliaire suivant, écrit avec des notations indépendantes des précédentes : Soient $X \subset Y \subset E$ et $x \in E-Y$, si $r(X+x) = r(X)$ alors $r(Y+x) = r(Y)$. Il suffit de montrer ce résultat lorsque $|Y| = |X|+1$; supposons donc $Y = X+z$. Si on avait $r(X+x) = r(X)$ en même temps que $r(Y+x) > r(Y)$ on aurait encore, en particulier par application de (R'_2), $r(X+z) < r(X+x+z) \leq r(X+x)+1 = r(X)+1$ ce qui entraînerait $r(X+z) = r(X)$, et alors enfin, par application de l'axiome (R'_3), $r(X+x+z) = r(X)$, contradiction qui achève la démonstration).

<u>Axiomatique des matroïdes géométriques</u>.

Dans les quatre axiomatiques principales données plus haut, définissant un matroïde $M = (E ; \varphi, \mathcal{B}, r, \mathcal{S})$, en ajoutant respectivement les quatre axiomes suivants, on définit un matroïde <u>géométrique</u>.

(D_o) $\varphi(\emptyset) = 0$ <u>et pour tout</u> $x \in E$, $\varphi(\{x\}) = \{x\}$ ($\emptyset$ et tout singleton est fermé).

(B_o) <u>Pour toute partie</u> X <u>de</u> E <u>telle que</u> $|X| \leq 2$ <u>il existe une base</u> $B \in \mathcal{B}$ <u>telle que</u> $X \subset B$.

(R_o) <u>Pour toute partie</u> X <u>de</u> E <u>telle que</u> $|X| \leq 2$, <u>on a</u> $r(X) = |X|$.

(S_o) <u>Pour tout</u> $X \in \mathcal{S}$, <u>on a</u> $|X| \geq 3$.

A tout matroïde $M = (E ; \varphi)$ est associé un matroïde géométrique soit $\hat{M} = (\hat{E} ; \hat{\varphi})$, où $\hat{E}$ est l'ensemble des points (fermés de rang 1) de M et $\hat{\varphi}$ l'application de $\mathcal{P}(\hat{E})$ dans lui-même définie par $\hat{\varphi}(\hat{X}) = \{p \mid p$ point de M, $p \subset \varphi(\bigcup_{q \in \hat{X}} q)\}$ (on observera que, dans M, si un point p est tel que $p \cap \varphi(X) \neq \emptyset$ alors on a $p \subset \varphi(X)$).

<u>Axiomatique des treillis géométriques</u>.

Un ensemble T muni d'une relation binaire, notée $\leq$ ("inférieur ou égal"), est un treillis géométrique si on a :

(T_1) <u>La relation</u> $\leq$ <u>est une relation d'ordre de treillis complet</u>.

(T_2) <u>Tout élément de</u> T <u>est sup des points qui lui sont inférieurs ou égaux</u>.

(T_3) <u>Tout point inférieur ou égal à un sup de points est inférieur ou égal au sup d'un nombre fini d'entre eux</u>.

(T_4) <u>Pour tout élément</u> X <u>et tout point</u> p <u>de</u> T <u>si</u> p <u>n'est pas inférieur ou égal à</u> X <u>alors le sup de</u> X <u>et de</u> p <u>couvre</u> X. (axiome de couverture).

Le matroïde géométrique canoniquement associé au treillis géométrique T est défini par exemple par sa fermeture de dépendance de la manière suivante : $M = (E, \varphi)$ où E est l'ensemble des points de T et φ l'application sur $\mathcal{P}(E)$ définie par $\varphi(X) = \{p \mid p$ point de T tel que $p \leq \sup X\}$.

Son rang correspond à la hauteur dans T, laquelle existe grâce à la condition de chaîne de Jordan-Dedekind que vérifie ce treillis.

Rappelons qu'inversement, le treillis des fermés d'un matroïde géométrique est un treillis géométrique. Si $M(T)$ est le matroïde associé à un treillis géométrique

T et $T(M)$ le treillis géométrique associé à un matroïde géométrique M, l'équivalence des deux structures se traduit, en termes un peu plus généraux ici que pour les axiomatiques précédentes, par les deux isomorphismes : $M(T(M)) \approx M$, $T(M(T)) \approx T$ (avec l'application sur $T : x \to \{x\}$ pour le premier, et l'application sur T : $X \to \{p \mid p$ point et $p \leq X\}$ pour le second).

Matroïdes de rang fini.

Proposition 2. Etant donné un matroïde $M = (E ; \varphi, \mathcal{B}, r, \mathcal{S})$, les propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) Pour toute partie X de E il existe une partie finie Y de E telle que $\varphi(Y) = \varphi(X)$.

(ii) Tout $X \in \mathcal{B}$ est une partie finie de E.

(iii) La fonction r est bornée.

(iv) Il existe un entier p tel que pour toute partie X de E telle que $|X| \geqq p$ il existe $Y \in \mathcal{S}$ tel que $Y \subset X$.

(v) Le treillis des fermés de M est de dimension finie.

Un matroïde satisfaisant l'une de ces conditions est dite de rang fini. L'entier $r(E)$ est appelé le rang du matroïde ; on a pour toute partie X de E, $r(X) \leq r(E)$. Ces conditions correspondent aux axiomatiques données, pour d'autres axiomatiques associées à d'autres notions il existe des conditions équivalentes, par exemple pour les parties libres celle d'être finies.

N.B. On appelle quelquefois "treillis géométrique" seulement les treillis géométriques de dimension finie, réservant le nom de "treillis de matroïdes aux autres".

Axiomatique des fermés pour les matroïdes de rang fini.

Une partie $\mathfrak{F}$ de $\mathcal{P}(E)$ est l'ensemble des fermés d'un matroïde sur E de rang fini si on a :

(F_1) $\mathfrak{F}$ stable pour l'intersection.

(F_2) Les traces sur E-X des éléments de $\mathfrak{F}$ couvrant un élément X de $\mathfrak{F}$ forment une partition de E-X.

(F_3) $\mathfrak{F}$ n'a pas de chaîne infinie.

(Les termes "couvrant","chaîne" sont pris au sens de la relation d'ordre d'inclusion dans E).

Dans le matroïde ainsi défini, la fermeture de dépendance φ est définie par $\varphi(X) = \bigcap \{F \mid F \in \mathfrak{F} \text{ et } F \supset X\}$. Cela permet de montrer l'équivalence avec l'axiomatique constituée des axiomes $(D_1),\ldots,(D_5)$ et de la condition (i) de la proposition 2.

Dualité des matroïdes finis.

Encore plus particuliers que les matroïdes de rang fini, les matroïdes finis sont les matroïdes sur un ensemble fini. Ce sont surtout ces matroïdes qui sont considérés dans la théorie (et les résultats ne s'étendent pas toujours tels quels au cas infini, ce qui est le cas par exemple de la dualité).

Proposition 3. Soit un ensemble fini E et un matroïde $M = (E\ ;\ \varphi, \mathcal{B}, r, \mathcal{S})$.

Posons :

1) pour tout $X \subset E$, $\varphi^*(X) = X \cup \{x \mid x \in E-Y$ tel que $x \notin \varphi(E-X-x)\}$.

2) $\mathcal{B}^* = \{E-B \mid B \in \mathcal{B}\}$

3) pour tout $X \subset E$, $r^*(X) = |X| + r(E-X) - r(E)$.

4) $\mathcal{S}^* = \mathrm{Min}\{X \mid X \subset E$ et pour tout $S \in \mathcal{S}$, $|X \cap S| \neq 1\}$

Alors $(E\ ;\ \varphi^*, \mathcal{B}^*, r^*, \mathcal{S}^*)$ est un matroïde.

Ce matroïde, noté M^*, est le dual de M (appelé aussi orthogonal et noté alors $M^{\perp}$).

(Pour la démonstration de cette proposition la seule difficulté est de montrer que $\mathcal{S}^*$ est un ensemble de stigmes. Pour le rang, étant donné une partie X de E on observe qu'une base de X dans M^* est obtenue en prenant une base de E-X dans M, en complètant ensuite celle-ci en une base de E et en prenant enfin dans X le complément de

ce qu'on a ajouté à la base de $E-X$; on a ainsi : $|X| - r^*(X) + r(E-X) = r(E)$).
D'autres notions se correspondent par dualité, parfois des notions différentes, on a déjà vu la dualité stigmes-hyperplans, on a encore celle entre parties libres et parties génératrices, qui d'ailleurs éclaire la complémentarité des bases de M et M^*.

Tout théorème dans M se traduit en un théorème dans le dual M^*. Il existe ainsi deux versions duales de la théorie des matroïdes finis (comparer par exemple Tutte [7] et Crapo-Rota [4]).

Remarque. La propriété pour un matroïde d'être géométrique ne se conserve pas au dual. En effet, par exemple $\varphi^*(\emptyset) = \{x \mid x \in E,\ x \notin \varphi(E-x)\}$ peut ne pas être vide ; les éléments de $\varphi^*(\emptyset)$ qui ont la propriété d'appartenir à toutes les bases, sont appelés les isthmes. Dualement on a les éléments de $\varphi(\emptyset)$ qui n'appartiennent à aucune base et sont les boucles (on retrouve la dualité des boucles et des isthmes des graphes planaires vue au chapitre précédent, d'où vient la terminologie).

Axiomatique des hyperplans pour les matroïdes finis.

La traduction duale de l'axiomatique des stigmes donne d'après les considérations précédentes une axiomatique des hyperplans qui s'énonce comme suit :

L'ensemble E étant supposé fini, une partie $\mathcal{H}$ de $\mathcal{P}(E)$ est l'ensemble des hyperplans d'un matroïde sur E si on a :

(H_1) $E \notin \mathcal{H}$

(H_2) Quels que soient $H_1 \in \mathcal{H}$ et $H_2 \in \mathcal{H}$, $H_1 \not\subset H_2$.

(H_3) Quels que soient $H_1 \in \mathcal{H}$ et $H_2 \in \mathcal{H}$ distincts et $x \in E-(H_1 \cup H_2)$, il existe $H_3 \in \mathcal{H}$ tel que $(H_1 \cap H_2) + x \subset H_3$.

Les fermés de ce matroïde sont toutes les intersections d'éléments de $\mathcal{H}$.

3. EXEMPLES GENERAUX DE MATROÏDES.

1. Matroïdes définis par la dépendance linéaire sur un anneau, un corps.

Soit N un module sur un anneau A qu'on suppose intègre et commutatif. Etant donné $E \subset N$, l'application φ de $\mathcal{P}(E)$ dans lui-même définie de la manière suivante est une fermeture de dépendance :

$$\varphi(X) = \{x \mid x \in E, \text{ il existe } \alpha \in A,\ \alpha \neq 0 \text{ et } \lambda_1, \ldots, \lambda_p \in A,\ x_1, \ldots, x_p \in X \text{ tels que } \alpha x = \lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_p x_p\}.$$

(La vérification de l'axiome (D_3) utilise l'intégrité et la commutativité de A : si on a $y \in \varphi^2(X)$ soit $\beta y = \mu_1 y_1 + \ldots + \mu_n y_n$ où $\beta \in A$, $\beta \neq 0$ et $y_i \in \varphi(X)$ pour $i = 1, \ldots, n$ c.à.d. α_i A-combinaison linéaire d'éléments de X, où $\alpha_i \in A$, $\alpha_i \neq 0$, on a alors $(\prod_i \alpha_i)\beta y = (\prod_{i \neq 1} \alpha_i)\mu_1 \alpha_1 y_1 + \ldots + (\prod_{i \neq n} \alpha_i)\mu_n \alpha_n y_n$ par commutativité, avec $(\prod_i \alpha_i)\beta \neq 0$ par intégrité, d'où on déduit $y \in \varphi(X)$).

Le cas le plus couramment considéré de tel matroïde est celui où l'anneau A est un corps, soit K, et le module N alors un espace vectoriel, soit V. La fermeture φ est alors définie par

$$\varphi(X) = \{x \mid x \in E,\ x \text{ combinaison linéaire de } X\} = E \cap V(X)$$

où V(X) désigne le sous-espace vectoriel engendré dans V par la partie X. Ce cas conduit à la notion, fondamentale dans la théorie, de matroïde représentable sur un corps. Un matroïde $M = (E\ ;\ \varphi)$ est dit <u>représentable</u>, ou <u>coordonnable</u>, sur un corps K s'il existe une application α de l'ensemble E dans un espace vectoriel V sur K telle que quels que soient $x \in E$ et $X \subset E$ on a l'équivalence suivante

$$x \in \varphi(X) \iff \alpha(x) \in V(\alpha(X)).$$

(Il pourrait sembler plus naturel, si on s'en tient à l'exemple qui précède, de supposer l'application α injective, mais cela est de peu d'intérêt car certains matroïdes ne sont pas alors représentables du simple fait d'avoir trop d'éléments dans un point. Il est intéressant par contre de noter qu'un matroïde $M = (E\ ;\ \varphi)$ de rang n est représentable sur K si et seulement si son matroïde géométrique associé est "plongeable" dans l'espace projectif $P_{n-1}(K)$, c'est-à-dire s'il existe une application <u>injective</u> α de E dans $P_{n-1}(K)$ permettant d'interpréter la dépendance dans le matroïde par la dépendance projective).

Cette définition peut encore s'exprimer par exemple avec les parties libres : $X \subset E$ est libre si et seulement si la restriction de α à X est injective et $\alpha(X)$ est une partie indépendante de V, ou encore avec le rang ; l'application α préserve le rang, etc.

Les matroïdes binaires, qui jouent un rôle important dans la théorie, sont les matroïdes représentables sur le corps $\frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}}$.

Soit une matrice de type $n \times m$ à éléments dans un corps K. L'indépendance linéaire entre ses colonnes définit sur l'ensemble de celles-ci un matroïde (de cet exemple provient le nom même de matroïde). Par l'application α qui a chaque colonne de la matrice associe le vecteur de K^n dont les composantes sur la base canonique sont les éléments successifs de cette colonne, ce matroïde est représentable sur le corps K (on voit en particulier ici l'intérêt de ne pas exiger de l'application α qu'elle soit injective, puisque des colonnes de la matrice peuvent être identiques).

Exercice 6. Prenant, dans la définition générale d'un matroïde de module donné plus haut, $N = G$ où G est un groupe commutatif, vérifier que dans le matroïde alors défini sur G les fermés sont les sous-groupes de G tels que le groupe quotient $\frac{G}{H}$ n'a pas d'éléments d'ordre fini.

2. Matroïdes de groupe de chaînes.

Soient E un ensemble fini et W un A-module d'applications de E dans A, où A est un anneau intègre et commutatif (les éléments de W sont appelés les chaînes). Les supports minimaux des éléments de W non nuls sont les stigmes d'un matroïde : $M = (E, \mathcal{S})$ où $\mathcal{S} = \mathrm{Min}\{\mathrm{supp}\, f \mid f \in W,\ f \neq 0\}$ et $\mathrm{supp}\, f = \{x \mid x \in E,\ f(x) \neq 0\}$. (Vérifions par exemple l'axiome (S_3) : soient $S_1 = \mathrm{supp}\, f$, $S_2 = \mathrm{supp}\, g$ $(S_1 \neq S_2)$, $x \in S_1 \cap S_2$, et considérons $h = g(x)f - f(x)g \in W$, on a $h \neq 0$, $\mathrm{supp}\, h \subset \mathrm{supp}\, f \cup \mathrm{supp}\, g$ et $h(x) = 0$, ainsi $\mathrm{supp}\, h$ est, ou contient si non minimal, un stigme du matroïde inclus dans $S_1 \cup S_2$ et ne contenant pas x). Ce matroïde est défini par le "groupe de chaînes" W. Une chaîne $f \in W$ telle que $\mathrm{supp}\, f$ est un stigme est dite élémentaire.

Une classe remarquable de tels matroïdes est celle des matroïdes réguliers pour lesquels $A = \mathbb{Z}$ et tout chaîne élémentaire est multiple d'une chaîne primitive, c'est-à-dire à valeurs dans $\{-1,0,1\}$. Ces matroïdes, appelés encore matroïdes totalement unimodulaires, sont les matroïdes représentables sur tout corps commutatif (Tutte [7]).

3. Matroïdes définis par un espace d'applications.

Soient E un ensemble, qu'on ne suppose pas fini, K un corps commutatif et W un K-espace vectoriel d'applications de E dans K, de dimension finie.

Etant donné $X \subset E$ et $U \subset W$, posons

$$h(X) = \{f \in W \mid f|X = 0\}$$

$$k(U) = \{x \in E \mid f(x) = 0 \text{ pour tout } f \in U\} = \bigcap_{f \in U} f^{-1}(0)\}.$$

On a

1) Si $X \subset Y \subset E$ alors $h(X) \supset h(Y)$ et si $U \subset V \subset W$ alors $k(U) \supset k(V)$.

2) Quel que soit $X \subset E$, $k(h(X)) \supset X$, et quel que soit $U \subset W$, $h(k(U)) \supset U$.

Ainsi les deux applications h et k constituent une correspondance de Galois :

$$\mathcal{P}(E) \underset{h}{\overset{k}{\rightleftarrows}} \mathcal{P}(W).$$

On sait alors (entre autres) que $\psi = k \circ h$ et $\varphi = h \circ k$ sont des applications de fermeture et que les restrictions $\bar{h}$ et $\bar{k}$ de h et k respectivement aux fermés de E ($X \subset E$ tels que $X = \psi(X)$) et aux fermés de W ($U \subset W$ tels que $U = \varphi(U)$) sont deux bijections réciproques l'une de l'autre. Notons que les fermés de W sont des sous-espaces vectoriels de X et que les fermés de E sont exactement les $k(U)$ où U est un sous-espace quelconque de W.

En outre l'application ψ est une fermeture de dépendance sur E. Vérifions l'axiome d'échange : on peut expliciter pour $X \subset E$, $\psi(X) = \{x \mid x \in E,\ f \in W$ et $f|X = 0 \Rightarrow f(x) = 0\}$, et soit $y \in \psi(X+x)$, $y \notin \psi(X)$ et supposons que $x \notin \psi(X+y)$, alors il existe $g \in W$ tel que $g|X = 0$ et $g(y) \neq 0$, d'où $g(x) \neq 0$, et il existe $h \in W$ tel que $h|X+y = 0$ et $h(x) \neq 0$, on peut supposer $h(x) = g(x)$, quitte à multiplier h et g par des scalaires convenables, alors la restriction de $g-h$ à $X+x$ est nulle et

$(g-h)(y) = g(y) \neq 0$, ce qui contredit $y \notin \psi(X+x)$. Pour montrer l'axiome (D_5) on peut observer que le treillis (complet) des fermés de E est en correspondance bijective (inversant l'ordre) par l'application $\bar{h}$ avec le treillis des fermés de W qui comme treillis de sous-espaces vectoriels de W est de dimension finie ; le treillis des fermés de E étant de dimension finie on en déduit facilement l'axiome (D_5).

Ainsi est défini par l'espace d'applications W un matroïde $M = (E\ ;\ \psi)$ dont le rang, égal à la hauteur du treillis des fermés, est inférieur ou égal à $\dim W$. En fait on a $\operatorname{rg} M = \dim W$, en effet soit B une base de M, à tout $x \in B$ associons une application $f_x \in W$ telle que $f_x(x) = 1$ et la restriction de f_x à $B-x$ est nulle; alors les f_x, pour x décrivant B, forment une base de W ainsi qu'on le vérifie aisément ; donc $|B| = \dim W$. Les hyperplans de M sont les $k(\{f\}) = f^{-1}(0)$ où $f \in W$, $f \neq 0$, maximaux pour l'inclusion dans E. Ce matroïde est géométrique si et seulement si l'espace W sépare les éléments de E c'est-à-dire si quels que soient $x \in E$ et $y \in E$ distincts, il existe $f \in W$ tel que $f(x) = 0$ et $f(y) \neq 0$ (lorsque $|E| > 1$).

Relations entre les exemples précédents.

Les trois exemples précédents ne sont pas fondamentalement différents, du moins lorsqu'il s'agit d'un ensemble fini E et d'un corps commutatif K.

Soit W un espace vectoriel d'applications de E dans K de dimension finie. Soient M_1 et M_2 les matroïdes sur E respectivement définis par W suivant les exemples 2 et 3 précédents. Les hyperplans de M_3 sont les complémentaires dans E des stigmes de M_2, si bien que les matroïdes M_2 et M_3 sont duaux.

Ainsi dans les conditions des hypothèses faites, les exemples 2 et 3 sont duaux.

Les exemples 1 et 3 sont eux équivalents comme on peut le voir de la manière suivante. Soit M_1 le matroïde défini sur E par un K-espace vectoriel V dont E est une partie, suivant l'exemple 1 (où on prend donc $A = K$ et $N = V$). Montrons que M_1 peut aussi être défini suivant l'exemple 3. Soit W l'ensemble des restrictions à E des formes linéaires sur V : $W = \{f : E \to K \mid \exists\, g \in V^*,\ g|E = f\}$, et soit M_3 le matroïde défini par W suivant l'exemple 3. Montrons que M_1 et M_3 sont identiques en montrant l'égalité de leurs fermetures, $\varphi_1 = \varphi_3$. On a pour $x \in E$ et $X \subset E$ quelconques ($V(X)$ désigne le sous-espace vectoriel de V engendré par X),

$$x \in \varphi_1(X) \Leftrightarrow x \in V(X) \Leftrightarrow \{g \in V^* \text{ et } g|X=0 \Rightarrow g(x)=0\}$$

$$\Leftrightarrow \{f \in W \text{ et } f|X=0 \Rightarrow f(x)=0\} \Leftrightarrow x \in \varphi_3(X).$$

Inversement soit M_3 le matroïde défini sur E suivant l'exemple 3 par l'espace d'applications W de E dans K, dont on suppose qu'il sépare les éléments de E (ce qui revient à considérer maintenant des matroïdes géométriques). Alors M_3 peut aussi être défini suivant l'exemple 1 en prenant $V = W^*$ et identifiant $x \in E$ à l'élément x^* de V défini par $x^*(f) = f(x)$ pour tout $f \in W$, ce qui plonge l'ensemble E dans l'espace vectoriel V et définit sur E un matroïde M_1 (notons que l'application $x \to x^*$ est injective du fait que l'espace W sépare les éléments de E : si $x \neq x'$ il existe $f \in W$ tel que $x^*(f) \neq x'^*(f)$. On a pour $x \in E$ et $X \subset E$ quelconques

$$x \in \varphi_3(X) \Leftrightarrow \{f \in W \text{ et } f|X=0 \Rightarrow f(x)=0\}$$

$$\Leftrightarrow \{f \in W \text{ et } z(f)=0 \text{ pour tout } z \in X \Rightarrow x(f)=0\} \Leftrightarrow x \in V(X) \Leftrightarrow x \in \varphi_1(X).$$

Les exemples 1 et 2 se trouvent donc équivalents, de par ce qui précède et dans les conditions des hypothèses faites. Mais les passages de l'un à l'autre ne sont pas immédiats. Pour passer de l'exemple 1 à l'exemple 2, c'est-à-dire étant donné $E \subset V$ espace vectoriel sur K, on prend pour groupe de chaînes sur E l'espace $W = \{f : E \to K \mid \sum_{x \in E} f(x)x = 0\}$. Pour le passage inverse, c'est-à-dire étant donné un groupe de chaînes W, considérer $V = \frac{K^E}{W}$ et identifier chaque $x \in E$ à la fonction caractéristique de $\{x\}$ prise modulo W.

Les trois exemples précédents correspondent (à l'application α près) à trois définitions équivalentes des matroïdes représentables sur un corps (compte tenu de fait que la représentabilité sur un corps est une propriété qui se conserve par passage au dual) : par plongement dans un espace vectoriel, par groupe de chaînes, par espace d'applications.

Remarque. Fermeture de recouvrement d'un hypergraphe.

Définissons ici un hypergraphe comme un couple $H = (S, A)$ d'un ensemble

S d'éléments appelés sommets et d'un ensemble A de parties de S appelées arêtes. Considérons l'application de $\mathcal{P}(A)$ dans lui-même définie par $\varphi(X) = \{a \mid a \in A$ et $a \subset \bigcup_{e \in X} e\}$ pour $X \subset A$ quelconque. Cette application est une application de fermeture, appelée <u>fermeture de recouvrement</u> de l'hypergraphe H. Et <u>toute application de fermeture s'identifie à la fermeture de recouvrement d'un hypergraphe</u> (J.C. Fournier), en particulier toute fermeture de dépendance (ainsi que l'avait déjà établi T. Helgason). Ce dernier résultat est facile à établir. Soit φ une fermeture de dépendance sur un ensemble E et soit C^* l'ensemble des costigmes du matroïde $(E\ ;\ \varphi)$. Considérons l'hypergraphe $H = (C^*, E^*)$ où E^* est l'ensemble des x^*, pour $x \in E$, x^* étant l'ensemble des costigmes contenant x (H est le dual au sens hypergraphique de l'hypergraphe des costigmes du matroïde considéré). Soit φ' la fermeture de recouvrement de H. On a pour $x^* \in E^*$ et $X^* \subset E^*$ quelconques l'équivalence des propositions suivantes

- $x^* \in \varphi'(X^*)$ c'est-à-dire $x^* \subset \bigcup_{e^* \in X^*} e^*$.
- tout costigme contenant x intersecte X
- tout hyperplan ne contenant pas x ne contient pas X
- l'intersection des hyperplans contenant X contient x
- $x \in \varphi(X)$.

Ainsi par la bijection $x \to x^*$ les fermetures φ et φ' s'identifient. Par ailleurs <u>toute fermeture de recouvrement d'un hypergraphe est représentable par un module d'applications dans un anneau</u> (au sens de l'exemple 2) de la manière suivante : Soit $H = (S, A)$ l'hypergraphe dont on considère la fermeture de recouvrement, soit R l'anneau booléen des parties de S, et posons $W = \{f : A \to R \mid \exists\ T \subset S$ tel que $\forall\ a \in A,\ f(a) = a \cap T\}$, W est un R-module d'applications de A dans R (si f_i, $i = 1,2$, est associé à $T_i \subset S$ suivant la définition précédente, $f_1 + f_2$ est par définition associé à la différence symétrique $T_1 \Delta T_2$). On a quels que soient $x \in A$ et $X \subset A$ l'équivalence des deux propositions suivantes, qui montre l'identité de la fermeture de recouvrement de H et de la fermeture associée à l'espace W :

- pour tout $T \subset S$ tel que pour tout $a \in X$ $a \cap T = \emptyset$, on a $x \cap T = \emptyset$

- pour tout $f \in W$ tel que $f|X = 0$, on a $f(x) = 0$.

Il résulte de ce qui précède que tout matroïde s'identifie à un matroïde défini par un module d'applications (T. Helgason).

Evidemment l'anneau A n'étant pas un corps, surtout n'étant pas intègre, on ne peut en déduire une identification à un matroïde défini dans un module comme dans l'exemple 1 (il n'y a pas équivalence des exemples 1 et 3 pour un anneau).

4. Géométries combinatoires de variétés algébriques.

Les exemples qui suivent [extraits de "A combinatorial perspective on algebraic geometry", H. Crapo, Théorie Combinatoire, Rome 1973, t. II (1976) 343-357] ne sont jamais que des cas particuliers de l'exemple 3 précédent , mais ils se prêtent à d'intéressantes remarques.

Soit $E = \mathbb{R}^2$ le plan euclidien réel et, dans ce qui suit, V est un espace de fonctions de E dans $\mathbb{R}$ qui permettra de définir chaque fois un matroïde sur E, dont nous donnons en un tableau les fermés suivant leurs rangs.

Plan affine A_1^2 : matroïde obtenu en prenant pour V l'espace des fonctions polynômes de degré ≤ 1 en deux variables, c'est-à-dire de la forme $(x,y) \rightsquigarrow ax + by + c$

rang	0	1	2	3
fermés	$\emptyset$	.	/	E

Plan quadratique A_2^2 : prendre pour V l'espace des fonctions polynômes de degré ≤ 2, c'est-à-dire de la forme $(x,y) \rightsquigarrow ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f$

rang	0	1	2	3	4	5	6
fermés	$\emptyset$	.	. ˙	.˙.	:˙.	O conique	E
				/	·/	X	

Plan de Möbius M : prendre pour V l'espace des fonctions polynômes de degré ≤ 2

de la forme $(x,y) \rightsquigarrow a(x^2+y^2)+bx+cy+d$

rang	0	1	2	3	4
fermés	$\emptyset$	.	. ·	/ ○ cercle	E

Il est commode de vérifier que dans ces trois exemples les fermés sont bien ceux d'un matroïde en vérifiant l'axiomatique des fermés d'un matroïde de rang fini donnée au chapitre précédent.

Comme on le sait déjà, ces matroïdes sont représentables sur $\mathbb{R}$. Effectivement le plan de Möbius par exemple se plonge dans $\mathbb{R}^3$ par l'application $(x,y) \rightsquigarrow (x,y,x^2+y^2)$. Ainsi ce matroïde s'identifie à celui défini par la dépendance affine dans $\mathbb{R}^3$ sur le paraboloïde de révolution dont l'équation en axes orthonormés s'écrit $z = x^2+y^2$. On vérifie en effet que les intersections des fermés affines de $\mathbb{R}^3$, c'est-à-dire les plans, avec cette surface sont les "relevés" des fermés du matroïde dans le plan xOy (par exemple le plan $ux+vy+wz+h=0$ coupe le paraboloïde suivant une conique dont la projection sur le plan xOy est un cercle d'équation $w(x^2+y^2)+ux+vy+h=0$). Ainsi la dépendance dans le plan de Möbius s'interprète comme de la simple dépendance affine. C'est également vrai pour le plan quadratique.

La comparaison des tableaux des fermés des matroïdes précédents fait apparaître que A_2^2 a plus de fermés que M qui lui-même a plus de fermés que A_1^2, ce qu'on écrit :

$$A_2^2 \longrightarrow M \longrightarrow A_1^2 .$$

D'une manière générale pour deux matroïdes définis sur un même ensemble, M et M', on écrit $M \rightarrow M'$ lorsque leurs ensembles de fermés vérifient $\mathfrak{F}' \subset \mathfrak{F}$. Cette relation est équivalente à la propriété que tout stigme de M est union de stigmes de M', et d'autres propriétés encore caractérisent cette importante relation entre matroïdes qui relève des <u>morphismes</u> de matroïdes.

5. Matroïdes algébriques.

Citons pour mémoire cette classe de matroïdes déjà définie dans le chapitre précédent : matroïdes définis sur un corps commutatif L, ou une partie de L, par la dépendance algébrique sur un sous-corps K de L.

Il est à noter que cette classe contient, d'ailleurs strictement, celle des matroïdes représentables sur un corps commutatif, suivant la proposition de Piff :
un matroïde fini M représentable sur un corps commutatif K est algébrique sur K, qui se démontre facilement en associant à une base $\{b_1,\dots,b_n\}$ de M une base $\{t_1,\dots,t_n\}$ de l'extension purement transcendante de K, $K(t_1,\dots,t_n)$, et en étendant l'application $b_i \to t_i$ à tous les autres éléments du matroïde.

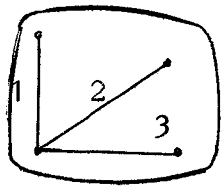
6. Matroïdes graphiques.

Un matroïde graphique (resp. cographique) est par définition un matroïde qui peut être identifié au matroïde des cycles (resp. cocycles) d'un graphe (voir chap. 1). Ces matroïdes sont représentables sur tout corps ; en particulier un matroïde de graphe est représenté, au sens de l'exemple 3, par l'espace des tensions du graphe comme espace d'applications.

Les matroïdes graphiques, et cographiques, ont été caractérisés par configurations exclues par Tutte [7], et également par Ghouila-Houri [5].

Matroïdes "hypergraphiques" de Lorea.

Ils correspondent aux matroïdes associés à un hypergraphe, introduits pour généraliser les matroïdes précédents de la manière suivante. Soit un hypergraphe $H = (S,A)$; une partie X de A est libre par définition s'il est possible d'associer à chaque $a \in A$ une partie b_a à deux éléments de a de telle sorte que le graphe ayant S pour ensemble de sommets et les b_a pour arêtes soit sans cycles ; les parties libres ainsi définies sont celles d'un matroïde sur A. On donnera plus loin le rang de ce matroïde (exemple 10).



Exemple . Dans l'hypergraphe ci-contre les ensembles d'arêtes $\{1,2,3\}$ et $\{1,2,4\}$ sont des bases du matroïde associé.

7. Matroïdes $P_k(n)$.

Etant donné deux entiers $k \leq n$ et un ensemble fini E ayant n éléments, l'ensemble $\mathcal{B}$ des parties à k éléments de E sont les bases d'un matroïde, noté $P_k(n)$, sur E. On a pour $X \subset E$ la fermeture et le rang

$$\varphi(X) = \begin{cases} X & \text{si} \quad |X| < k \\ E & \text{si} \quad |X| \geq k \end{cases}$$

$$r(X) = \begin{cases} |X| & \text{si} \quad |X| < k \\ k & \text{si} \quad |X| \geq k . \end{cases}$$

Ce matroïde est donc de rang k.

Les stigmes de $P_k(n)$ sont les parties à $k+1$ éléments de E.

Enfin $P_n(n)$ est le matroïde libre sur E.

8. Matroïdes définis par une n-partition.

Etant donné un ensemble fini E et un entier $n > 0$, on appelle n-partition de E un recouvrement Π de E tel que :

(1) $|\Pi| \geq 2$.

(2) Quel que soit $X \in \Pi$ on a $|X| \geq n$.

(3) Quel que soit $X \subset E$ tel que $|X| = n$, il existe $Y \in \Pi$ unique tel que $X \subset Y$.

\- Les éléments de Π sont les hyperplans d'un matroïde.

Montrons cela en vérifiant l'axiomatique des hyperplans d'un matroïde de rang fini (chap. 1). Si on avait $E \in \Pi$, Π se réduirait à E, à cause de la condition (3) ci-dessus, et cela contredit la condition (1), on a donc ainsi l'axiome (H_1). Pour l'axiome (H_2), considérons $P_1 \in \Pi$ et $P_2 \in \Pi$ tels que $P_1 \subset P_2$; prenant $X \subset E$ tel que $X \subset P_1$ et

$|X| = n$, ce qui est possible d'après (2), on a alors aussi $X \subset P_2$ ce qui contredit (3). Pour l'axiome (H_3), soient $P_1 \in \Pi$, $P_2 \in \Pi$ et $x \notin P_1 \cup P_2$, on a $|P_1 \cap P_2| < n$, à cause de (3), donc $|(P_1 \cap P_2)+x| \leq n$ et il existe $X \subset E$ tel que $(P_1 \cap P_2)+x \subset X \subset E$ et $|X| = n$, l'application de la condition (3) fournit l'hyperplan cherché.

La fermeture du matroïde ainsi défini sur E par la n-partition Π s'écrit

$$\varphi(X) = \begin{cases} X & \text{si} \quad |X| < n \\ P & \text{si} \quad |X| \geq n \quad \text{et existe } P \in \Pi \text{ tel que } X \subset P \\ E & \text{sinon.} \end{cases}$$

Les fermés sont : E, les éléments de Π, toutes les parties de E de cardinal $\leq n$. Le rang du matroïde est $n+1$.

Une propriété fondamentale de ce matroïde est la suivante :

- <u>Toute partie de</u> E <u>de cardinal</u> $\leq n$ <u>est libre</u>.

En effet, cela se voit immédiatement à l'aide de l'expression de la fermeture φ donnée plus haut et que nous n'avons pas justifiée, c'est pourquoi nous allons montrer cette propriété directement à partir de la définition du matroïde. Il suffit de montrer que pour $X \subset E$ tel que $|X| = n-1$ et $x \notin X$ quelconques il existe un hyperplan, c'est-à-dire un élément Y de Π, tel que $X \subset Y$ et $x \notin Y$. Il existe $Z \in \Pi$, d'ailleurs unique, tel que $X+x \subset Z$, et on a $Z \neq E$. Soient $y \in E-Z$ et $Y \in \Pi$ tel que $X+y \subset Y$, alors $x \notin X$ d'après l'unicité de Z.

<u>Définition</u>. <u>On dit pavable un matroïde qui s'identifie à un matroïde de n-partition</u>.

<u>Caractérisation</u>.

- <u>Un matroïde</u> M <u>sur</u> E <u>de rang</u> $r > 1$ <u>est pavable si et seulement si toute partie de</u> E <u>ayant au plus</u> $r-1$ <u>éléments est libre</u>.

La condition nécessaire vient d'être montrée. Pour la condition suffisante, il suffit de montrer que les hyperplans de M forment une n-partition de E, où $n = r-1$ (en effet le matroïde associé à cette n-partition ne peut être que le matroïde M considéré puisqu'un matroïde est complètement déterminé par l'ensemble de ses hyperplans). La condition (1) est trivialement vérifiée car un matroïde ayant moins de 2 hyperplans est nécessairement de rang ≤ 1. On a $|H| \geq r(H) = r-1 = n$, d'où (2). Enfin, pour vérifier (3), considérons $X \subset E$ tel que $|X| = n$; par hypothèse X est une partie libre, donc $r(X) = |X| = n$ et $H = \varphi(X)$ est un hyperplan, unique, contenant X.

Remarque. 1) Les matroïdes pavables semblent jouer un rôle déterminant dans le dénombrement des matroïdes géométriques.

2) Le matroïde de n-partition peut aussi être défini sur un ensemble infini.

3) Les matroïdes pavables de rang 3 sont les matroïdes géométriques de rang 3. On a donc en fait là une définition axiomatique de tous les matroïdes géométriques de rang 3, qu'on pourrait appeler "plans matroïdes" : Un ensemble E de "points" et un ensemble de parties appelées "droites" tels que

- Il y a au moins deux droites.
- Toute droite a au moins deux points.
- Deux points appartiennent à une droite et une seule.

Avec cette nouvelle axiomatique il devient immédiat par exemple que la configuration de Pappus moins une droite ou celle de Desargues dans le plan moins une droite, ou encore la configuration de Fano (cf. chapitre 1) sont des matroïdes (la suppression d'une droite consiste à remplacer une droite à 3 points par 3 droites à 2 points).

9. Matroïdes définis par une fonction semi-modulaire.

Soient un ensemble E (fini) et une application $f : \mathcal{P}(E) \to \mathbb{Z}$ non-décroissante, c'est-à-dire si $X \subset Y \subset E$ alors $f(X) \leq f(Y)$, et semi-modulaire (supérieurement), c'est-à-dire quels que soient $X \subset E$ et $Y \subset E$ on a $f(X)+f(Y) \geq f(X \cup Y)+f(X \cap Y)$.

- Les $X \subset E$ tels que pour tout Z tel que $\emptyset \neq Z \subset X$ on a $f(Z) \geq |Z|$ sont les parties libres d'un matroïde sur E.

En effet, notons $\mathcal{S}$ l'ensemble des parties non vides X de E telles que $|X| > f(X)$ et minimales avec cette propriété, et montrons que $\mathcal{S}$ est l'ensemble des stigmes d'un matroïde, qui alors aura pour parties libres celles qu'on vient d'indiquer. Notons d'abord qu'étant donné $S \in \mathcal{S}$ et $x \in S$ on a $|S|-1 = |S-x| \leq f(S-x) \leq f(S) < |S|$ d'où $f(S) = |S|-1$. Soient $S_1 \in \mathcal{S}$ et $S_2 \in \mathcal{S}$, puis $x \in S_1 \cap S_2$, on a $f((S_1 \cup S_2)-x) \leq f(S_1 \cup S_2) \leq f(S_1)+f(S_2)-f(S_1 \cap S_2) = |S_1|+|S_2|-2-f(S_1 \cap S_2) \leq$ $|S_1|+|S_2|-|S_1 \cap S_2|-2 < |(S_1 \cup S_2)-x|$, en particulier car $f(S_1 \cap S_2) \geq |S_1 \cap S_2|$; ainsi $S_1 \cup S_2 - x$ contient un élément de $\mathcal{S}$, ce qui démontre l'axiome d'élimination.

Si l'application f est nulle sur la partie vide, $f(\emptyset) = 0$, on a le rang du matroïde avec l'expression suivante, pour tout $X \subset E$:

$$r(X) = \inf_{Z \subset X} \{f(Z) + |X-Z|\}.$$

Application. Soit $H = (S, A)$ un hypergraphe (fini). Posons pour tout $X \subset A$, $f(X) = |\bigcup_{e \in X} e|$. L'application f vérifie toutes les hypothèses précédentes, ce qui définit un matroïde sur l'ensemble A des arêtes de l'hypergraphe et dont on a en particulier le rang. Lorsque H est un graphe, le matroïde trouvé est différent de ceux déjà associés à un graphe, à savoir celui des cycles et celui des cocycles (c'est le matroïde bicirculaire de Pereira qu'on retrouvera dans l'exemple qui suit).

Exercice 7. Etant donné un hypergraphe $H = (S, A)$ et une partie X de l'ensemble d'arêtes A, notons n_X et p_X respectivement le nombre de sommets et le nombre de composantes connexes du sous-hypergraphe de H engendré par X, $H_X = (\bigcup_{e \in X} e, X)$. Etudier l'exemple précédent avec la fonction $f : \mathcal{P}(E) \to \mathbb{Z}$ définie par $f(X) = n_X - p_X$.

10. Matroïdes transversaux et extensions.

Soit un ensemble E fini. Etant donné $\mathcal{A} = \{A_i \mid i \in I\}$ une famille finie de parties de E, on appelle ensemble de représentants distincts partiel de $\mathcal{A}$, qu'on abrègera en "e.r.d.p.", toute partie X de E telle qu'il existe une injection π de X dans I telle que pour tout $x \in X$ on ait $x \in A_{\pi(x)}$.

<u>Les e.r.d.p. de $\mathcal{A}$ sont les parties libres d'un matroïde sur</u> E .

En effet, posons $\Gamma(x) = \{i \mid i \in I \text{ et } x \in A_i\}$ pour tout $x \in E$, $\Gamma(X) = \bigcup_{x \in X} \Gamma(x)$ pour tout $X \subset E$, et $f(X) = |\Gamma(X)|$. L'application f est non-décroissante, semi-modulaire, nulle sur $\emptyset$, et donc, d'après l'exemple 9, définit un matroïde sur E dont les parties libres sont les $X \subset E$ tels que pour tout $Z \subset X$ on a $|Z| \leq |\Gamma(Z)|$. Cette dernière propriété s'interprète de manière équivalente par le théorème de König-Hall : X peut être couplé dans I suivant Γ , ce qui revient à dire que X est un e.r.d.p. de $\mathcal{A}$.

Ce matroïde est un matroïde <u>transversal</u>.

<u>Remarque</u>. Etant donné la famille de parties $\mathcal{A}$ de E, on a aussi la famille (duale) de parties de I constituée des $\Gamma(x) = \{i \mid i \in I \text{ et } x \in A_i\}$ où $x \in E$ (les ensembles E et I jouent des rôles symétriques), qui permet de définir également un matroïde transversal sur I cette fois. Cette remarque s'applique en particulier lorsque la famille $\mathcal{A}$ est l'ensemble des arêtes d'un hypergraphe. Le matroïde transversal alors défini sur l'ensemble des arêtes de cet hypergraphe est celui déjà rencontré dans l'exemple 8. On a ici en plus une expression du rang : si $H = (S,A)$, ce matroïde est défini sur A par la fonction semi-modulaire $f(X) = |\bigcup_{e \in X} e|$ pour tout $X \subset A$, son rang est

$$r(X) = \inf_{Z \subset X} \{f(Z) + |X-Z|\}.$$

Comme cas particulier, lorsque l'hypergraphe est un graphe, on retrouve le matroïde bicirculaire (cf. exemple 9) qui apparaît ainsi simplement comme <u>transversal de la famille des arêtes de l'hypergraphe dual</u> (dual au sens hypergraphique) <u>du graphe considéré</u> (résultat déjà noté par Matthews dans Problèmes Combinatoires et Théorie des Graphes, Colloque international du C.N.R.S., Orsay 1976, éd. C.N.R.S. 1978).

<u>Extension</u>.

Soient S et T deux ensembles (finis) et Γ une application multivoque de S dans T. Soient encore M un matroïde sur S, r sa fonction rang. Pour tout $Y \subset T$, on pose $f(Y) = r(\Gamma^{-1}(Y))$. L'application f est non-décroissante, semi-modulaire et nulle sur $\emptyset$, ce qui définit un matroïde M' sur T, qui est dit <u>transporté</u> de M sur T suivant Γ.

On retrouve dans ce cadre plus général le cas précédent du matroïde transversal en prenant pour M le matroïde libre sur S (toute partie est libre) : M' est le matroïde transversal de la famille des parties $\{\Gamma(x) \mid x \in S\}$ de T.

<u>Application</u> : Soit $H = (S, A)$ un hypergraphe. On appelle 2-section (*) de l'hypergraphe H, et on note $H_{(2)}$, le graphe dont l'ensemble des sommets est S, les arêtes toutes les parties à deux éléments de S incluses dans au moins une arête de H. On va appliquer ce qui précède en prenant : pour S l'ensemble des arêtes de $H_{(2)}$, pour T l'ensemble des arêtes de H (c'est-à-dire $T = A$), pour Γ l'application qui à toute arête $H_{(2)}$ associe l'ensemble des arêtes de H la contenant, pour M le matroïde des cycles du graphe $H_{(2)}$. Est obtenu ainsi un matroïde M' sur A. On vérifie, grâce à ce qu'on a vu, que le rang de ce matroïde est donné par l'expression

$$r'(Y) = \inf_{Z \subset Y} \{n_Y - p_Y + |Y - Z|\}$$

où n_Y et p_Y sont respectivement le nombre de sommets et le nombre de composantes connexes du sous-hypergraphe de H engendré par l'ensemble d'arêtes $Y \subset A$. Ce matroïde, transporté de celui de la 2-section de l'hypergraphe, est le matroïde associé à un hypergraphe de Lorea (déjà cité à la fin de l'exemple 6).

11. <u>Matroïdes simpliciaux</u> (sur $\frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}}$).

Soient E un ensemble fini tel que $|E| = n$ et k un entier tel que $1 < k \leq n$.

- <u>Les ensembles</u> $\mathcal{H}$ <u>de</u> k-<u>parties de</u> E <u>tels que</u> : 1) <u>toute</u> (k-1)-<u>partie de</u> E <u>appartient à un nombre pair d'éléments de</u> $\mathcal{H}$, 2) $\mathcal{H}$ <u>est minimal pour l'inclusion dans</u> $\mathcal{P}_k(E)$ <u>avec cette propriété</u>, <u>sont les stigmes d'un matroïde</u>, <u>noté</u> $S_k(n)$ (à un

(*) suivant C. Berge, Graphes et hypergraphes, Dunod.

isomorphisme près). En effet, identifions chaque k-partie de E à l'ensemble de ses (k-1)-parties. Par cette identification le matroïde considéré n'est autre que celui défini sur $\mathcal{P}_{k-1}(E)$ par la structure de $\frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}}$-espace vectoriel de $\mathcal{P}(E)$ (suivant l'exemple 1 ; dans $\mathcal{P}(E)$ l'addition est la différence symétrique et le produit par un scalaire est trivial).

De ce point de vue il devient évident en outre que ce matroïde est binaire, puisque défini dans un espace vectoriel sur $\frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}}$.

Les sous-matroïdes de ce matroïde, définis sur une partie de $\mathcal{P}_k(E)$ sont appelés les <u>matroïdes</u> k-<u>simpliciaux d'ordre</u> n (sur $\frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}}$), le matroïde $S_k(n)$ lui-même étant dit en outre <u>complet</u>.

<u>Cas</u> $k = 2$. Le matroïde 2-simplicial complet d'ordre n, $S_k(2)$, est le matroïde des cycles du graphe complet à n sommets K_n (graphe ayant n sommets et $\binom{n}{2}$ arêtes chacune ayant pour extrémité une paire de sommets). Les matroïdes 2-simpliciaux sont donc exactement les matroïdes graphiques.

<u>Propriétés de</u> $S_k(n)$.

- $\operatorname{rg} S_k(n) = \binom{n-1}{k-1}$
- $S_k^*(n) \simeq S_{n-k}(n)$
- Tout stigme de $S_k(n)$ est de cardinal $> k$.

<u>Remarques</u>. 1) Les matroïdes binaires ne sont pas simpliciaux en général, et même il existe des matroïdes cographiques (donc réguliers et en particulier binaires) non simpliciaux : par exemple les matroïdes des cocycles d'un graphe non planaire ayant un sommet de degré 3 (lequel donne un stigme de cardinal ≤ 3, il faudrait donc pour que ce matroïde soit simplicial, d'après la propriété donnée plus haut des stigmes, que k=2, or ce matroïde n'est pas graphique car le graphe n'est pas planaire, cf. chapitre 1).

2) Les matroïdes simpliciaux ne sont pas réguliers en général. Plus précisément <u>les seuls matroïdes simpliciaux complets réguliers non triviaux sont les matroïdes gra-</u>

phiques et cographiques complètes (R. Cordovil et M. Las Vergnas).

Exercice 8. Montrer que le treillis des fermés de $S_2(n)$ s'identifie au treillis des partitions d'un ensemble à n éléments.

12. Matroïdes de Dowling.

Soient E un ensemble fini tel que $|E| = n$ et H un groupe fini.

On appelle "H-fonction partielle" α sur E une famille d'applications $a_i : A_i \to H$, $i = 1, \dots, r$, où les A_i sont des parties de E disjointes deux à deux. Etant donné deux H-fonctions partielles α et β, où α est constitué comme précédemment et β est constitué des applications $b_j : B_j \to H$, $j = 1, \dots, p$, on écrit $\alpha \leq \beta$ lorsque pour tout j B_j est union de A_i et il existe pour chaque tel A_i un élément $h_i \in H$ tel que $b_j(x) = h_i a_i(x)$ pour tout $x \in A_i$, c'est-à-dire $b_j = h_i a_i$. Cette relation est un préordre et on note $Q_n'(H)$ l'ensemble des H-fonctions partielles sur E, ainsi préordonné.
Soit R la relation d'équivalence : $\alpha R \alpha'$ si et seulement si $\alpha \leq \alpha'$ et $\alpha' \leq \alpha$. Alors $Q_n(H) = \dfrac{Q_n'(H)}{R}$ est un treillis géométrique, ce qui définit donc un matroïde géométrique.

Notons qu'on a $Q_n(H) \not\simeq Q_n(H')$ si $H \not\simeq H'$, dès que $n \geq 3$.

Cas $H = \{1\}$: $Q_n(\{1\})$ s'identifie au treillis des partitions de E.

Le matroïde ainsi défini par le treillis de ses fermés possède de très remarquables propriétés de représentation sur un corps issues du résultat suivant :

– Pour $n \geq 3$, $Q_n(H)$ est représentable sur un corps K si et seulement si H est isomorphe à un sous-groupe du groupe multplicatif de K privé de 0.

Exercices avec solutions.

1. Soient $M = (E\ ;\ \varphi)$ un matroïde défini sur un ensemble fini E et soit K un corps commutatif. Supposons qu'à tout hyperplan H de M il soit associé une application f_H de E dans K telle que $H = f_H^{-1}(0)$, de telle sorte que l'on ait la condition suivante : si H_1, H_2 et H_3 sont trois hyperplans de M contenant une même hyperdroite alors les applications associées f_{H_1}, f_{H_2} et f_{H_3} sont linéairement dépendantes dans l'espace vectoriel K^E. On note V le sous-espace vectoriel de K^E engendré par les applications f_H, où H décrit l'ensemble des hyperplans de M.

a) Etant donné une base $B = \{b_1, \ldots, b_n\}$ de M, montrer que les applications f_{H_i} où $H_i = \varphi(B-b_i)$, pour $i = 1, \ldots, n$, forment une base de V.

b) Soit M' le matroïde défini sur E par l'espace d'applications V. Montrer que tout hyperplan de M' est un fermé de M et en déduire que les matroïdes M et M' sont égaux.

Solution. a) Du fait que $f_{H_i}(b_j) = \delta_{ij}$ (symbole de Kronecker) il est facile de voir que les applications f_{H_i} sont indépendantes. Pour montrer que les f_{H_i} engendrent V, considérons un hyperplan H quelconque de M et montrons que f_H est combinaison linéaire des f_{H_i} en raisonnant par récurrence descendante sur l'entier $k = |H \cap B|$. Si $k = n-1$, cela est trivialement vrai puisqu'alors l'hyperplan H est un des H_i. Supposons $k \leq n-2$; on peut supposer que $H \cap B = \{b_1, \ldots, b_k\}$ et compléter $H \cap B$ en une base $\{b_1, \ldots, b_k, a_{k+1}, \ldots, a_{n-1}\}$ de H. Soient alors H' et H'' les hyperplans de M engendrés respectivement par $\{b_1, \ldots, b_k, a_{k+1}, \ldots, a_{n-2}, b_{k+1}\}$ et $\{b_1, \ldots, b_k, a_{k+1}, \ldots, a_{n-2}, b_{k+2}\}$: les trois hyperplans H, H' et H'' contiennent l'hyperdroite engendrée par $\{b_1, \ldots, b_k, a_{k+1}, \ldots, a_{n-2}\}$ et donc f_H est combinaison linéaire de $f_{H'}$ et $f_{H''}$. Par hypothèse de récurrence $f_{H'}$ et $f_{H''}$ sont combinaisons linéaires des f_{H_i}, car $|H' \cap B| = |H'' \cap B| = k+1$. Ainsi l'application f_H est bien combinaison linéaire des f_{H_i}.

b) Soit H' un hyperplan quelconque de M'_i on a $H' = f^{-1}(0)$ pour une application $f \in V$. Considérons une base $\{b_1, \ldots, b_k\}$ de H' et complètons celle-ci en une base $\{b_1, \ldots, b_k, b_{k+1}, \ldots, b_n\}$ de M. Soit H_i l'hyperplan de M engendré par

$B-b_i$, pour $i = 1,\dots,n$. D'après le résu... démontré à la question précédente l'application f est combinaison linéaire des f_{H_i} : $f = \alpha_1 f_{H_1} + \dots + \alpha_n f_{H_n}$. Considérant cette égalité successivement en $b_1,\dots, b_k$, on en tire $\alpha_1 = \dots = \alpha_k = 0$; ainsi on a

$f = \alpha_{k+1} f_{H_{k+1}} + \dots + \alpha_n f_{H_n}$. Il en résulte que $H' \supset \bigcap_{i=k+1}^{n} H_i$, et comme par ailleurs on a $H' \subset H_i$ pour $i = k+1,\dots,n$ (par définition des b_i et des H_i), on a l'égalité, laquelle montre bien que H' est un fermé de M.

Ainsi tout hyperplan de M' est un fermé de M, et par ailleurs il est immédiat (par hypothèse et par définition de M') que tout hyperplan de M est un fermé de M'. Il en résulte que les matroïdes M et M' ont mêmes fermés et sont donc égaux. [Ce résultat constitue le théorème de représentation de Tutte. Le résultat de la question a) est un lemme donné par N.L. White -dans Proc. Conf. North Carolina (1976) - pour une démonstration plus simple du théorème de Tutte. La démonstration de la question b) que nous donnons ici permet de terminer encore plus simplement la démonstration de White].

2. Soit M un matroïde fini possèdant la propriété que toute hyperdroite soit contenue dans au plus trois hyperplans. Montrer que M peut être défini par un espace d'applications dans le corps $\frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}}$. Réciproque.

Solution. Soit E l'ensemble sur lequel est défini le matroïde M. A chaque hyperplan H de M associons l'application $f_H = 1-\chi_H$ de E dans $\frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}}$, où χ_H est la fonction caractéristique de H dans E. Etant donné trois hyperplans, H_1, H_2 et H_3 contenant une même hyperdroite D, comme, en particulier par hypothèse, H_1-D, H_2-D et H_3-D partitionnent alors $E-D$, on a $f_{H_1}+f_{H_2}+f_{H_3} = 0$, ce qui permet d'appliquer le théorème de représentation de Tutte (cf. exercice précédent). Ainsi M s'identifie au matroïde défini sur E par l'espace d'applications engendré dans $(\frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}})^E$ par les f_H, où H décrit l'ensemble des hyperplans de M.

Réciproquement, il est facile de vérifier que dans un matroïde défini par un espace d'applications dans $\frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}}$ il ne passe par une hyperdroite qu'au plus trois hyperplans. [Cette propriété est une des nombreuses caractérisations des matroïdes binaires].

3. Soit M un matroïde fini dont les stigmes vérifient "l'axiome de double élimination" : quels que soient deux stigmes distincts S_1 et S_2 et deux éléments $x_1 \in S_1 \cap S_2$ et $x_2 \in S_1 \cap S_2$ il existe un stigme S_3 tel que $S_3 \subset (S_1 \cup S_2) - \{x_1, x_2\}$. Montrer que le matroïde dual M^* de M vérifie la condition de l'exercice précédent.

Solution. L'hypothèse interprétée dans le matroïde M^* en termes d'hyperplans (qui sont, rappelons-le, les complémentaires des stigmes de M) s'exprime : quels que soient deux hyperplans distincts H_1 et H_2 et deux éléments $x_1 \notin H_1 \cup H_2$ et $x_2 \notin H_1 \cup H_2$, il existe un hyperplan H_3 tel que $H_3 \supset (H_1 \cap H_2) \cup \{x_1, x_2\}$. Supposons qu'il existe quatre hyperplans H_1, H_2, H_3, H_4 de M^* contenant une même hyperdroite D, et soient $x_3 \in H_3 - D$ et $x_4 \in H_4 - D$; il ne peut alors exister d'hyperplan H de M^* tel que $H \supset (H_1 \cap H_2) \cup \{x_3, x_4\}$ car on devrait avoir $H \supset H_3$ et $H \supset H_4$, du fait que $H \supset D + x_3$ et $H \supset D + x_4$ et que $D = H_1 \cap H_2$ est une hyperdroite ce qui entraîne que $D + x_3$ engendre H_3 et $D + x_4$ engendre H_4.

[Cet axiome de double élimination, introduit ici par l'auteur, est en fait caractéristique des matroïdes binaires ; ce qu'on vient de voir est la condition suffisante, compte tenu du fait que M est binaire si et seulement si son dual M^* l'est].

REFERENCES

[1] G. BIRKHOFF, Lattice Theory, AMS Colloq. Publ. 25,1940, 1948, 1967.

[2] N. BOURBAKI, Algèbre, Chap. V §5 exercice 14 (p. 107 dans 2^{e} éd. 1959).

[3] P.M. COHN, Universal Algebra, Harper & Row 1965.

[4] H.H. CRAPO & G.C. ROTA, Combinatorial Geometries, preliminary ed. M.I.T. Press 1970.

[5] A. GHOUILA-HOURI, Flots et tensions dans un graphe, Thèse Paris 1963, Ann. Scient. Ec. Norm. Sup. 81 (1964) 267-339.

[6] S. MAC LANE, Some interpretations of abstract linear dependence in terms of projective geometry, Ann. J. Math. 58 (1936) 236-240.

[7] W.T. TUTTE, Lectures on matroids, J.Res. Nat. Bur. Stand. 69 B (1965) 1-47.

[8] B.L. VAN DER WAERDEN, Modern Algebra I, Leipzig 1937.

[9] H. WHITNEY, On the abstract properties of linear dependence, Ann. J. Math. 57 (1935) 509-533.

[10] O. ZARISKI & P. SAMUEL, Commutative Algebra, Princeton 1958.

N.B. On trouvera des exposés généraux sur les matroïdes dans les références [4] et [7] ainsi que dans l'ouvrage plus récent de D.J.A. WELSH, Matroid Theory, Ac. Press 1976, qui contient en outre des notes historiques et une importante bibliographie à laquelle nous renvoyons.