

UNIVERSITÉ PARIS XI

U.E.R. MATHÉMATIQUE

91405 ORSAY FRANCE

n° 82

24152

Propriétés asymptotiques
des vibrations des tores

Marc Frisch



Analyse Harmonique d'Orsay
1974

3.4
3.3

n° 82

24152

Propriétés asymptotiques
des vibrations des tores

Marc Frisch



Analyse Harmonique d'Orsay
1974

Introduction. On considère une solution $f(x, t) : \mathbb{T}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ de l'équation des ondes $\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}$ sur le tore \mathbb{T}^n à n dimensions. On verra que même si ses conditions initiales sont de classe C^2 , une telle fonction n'est pas nécessairement bornée (du moins pour $n \geq 5$). On se pose alors le problème suivant : Est-il possible de contrôler la croissance asymptotique d'une solution (quand $t \rightarrow +\infty$), à l'aide d'une hypothèse de régularité, portant soit sur ses conditions initiales, soit, plus généralement, sur sa restriction à un intervalle fini de temps ?

Ainsi, étant donné un entier k , on cherche s'il existe un $\ell > 0$ et une fonction $\omega(t)$, tels que pour toute solution f , tout réel t et tout x de \mathbb{T}^n on ait :

$$|f(x, t)| \leq |\omega(t)| \|f\|_{C^k(\mathbb{T}^n \times [-\ell, \ell])}$$

On met en évidence un indice critique qui est $\frac{n-1}{2}$, tel que si $k > \frac{n-1}{2}$ une telle majoration est possible et si $k < \frac{n-1}{2}$, elle ne l'est pas. Les espaces de Lipschitz $\Lambda_\alpha^n(\mathbb{T}^n \times [-\ell, \ell])$, définis pour tout réel positif $\alpha > 0$, permettent de cerner l'indice critique et interviendront naturellement dans l'étude d'opérateurs de dérivation fractionnaire.

1. DEFINITIONS ET RAPPELS.

a) Laplacien sur \mathbb{T}^n .

Soit \mathfrak{h} un réseau maximal de \mathbb{R}^n , soit $\mathbb{T}^n = \mathbb{R}^n / \mathfrak{h}$ le tore à n dimensions.

A une fonction $f : \mathbb{T}^n \rightarrow \mathbb{C}$ correspond une fonction $\tilde{f} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ périodique par rapport au réseau \mathfrak{L} , et réciproquement. Choisissons sur \mathbb{R}^n une forme quadratique définie positive de matrice (a_{ij}) dans la base canonique de \mathbb{R}^n . Notons $\|x\|$ et (x, y) la norme et le produit scalaire associés. On prend pour Laplacien sur \mathbb{R}^n l'opérateur différentiel $\Delta = \sum_{i,j} a_{ij} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}$. Le laplacien correspondant $\tilde{\Delta}$ sur \mathbb{T}^n est défini par $(\tilde{\Delta}f)^\sim = \Delta \tilde{f}$. Dans la suite on ne distinguera pas Δ et $\tilde{\Delta}$, f et \tilde{f} . Soit enfin \mathfrak{L}^* le réseau dual, formé des points $m \in \mathbb{R}^n$, tels que pour tout $m' \in \mathfrak{L}$, $(m, m') \equiv 0 \pmod{2\pi}$.

b) Espaces de Lipschitz.

Si $0 < \alpha \leq 1$, on appelle $\Lambda_\alpha(\mathbb{T}^n \times [-\ell, \ell])$ l'espace des fonctions f à valeurs complexes vérifiant l'inégalité $|f(y) - f(x)| \leq C(d(y, x))^\alpha$ pour une certaine constante C ne dépendant que de f , où $d(x, y)$ est la distance canonique sur $\mathbb{T}^n \times [-\ell, \ell]$ identifié localement à \mathbb{R}^{n+1} .

Si $\alpha > 1$ et si on pose $\alpha = k + \beta$ où k est un entier et $0 < \beta \leq 1$, on a $f \in \Lambda_\alpha(\mathbb{T}^n \times [-\ell, \ell])$ si et seulement si toutes ses dérivées d'ordre k appartiennent à $\Lambda_\beta(\mathbb{T}^n \times [-\ell, \ell])$.

On note $\|f\|_{\Lambda_\alpha(\mathbb{T}^n \times [-\ell, \ell])}$ la norme usuelle sur cet espace.

c) Solutions de l'équation des ondes.

Toute fonction continue solution au sens des distributions de l'équation des ondes

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} \quad \text{sur } \mathbb{T}^n \quad \text{admet une série de Fourier du type :}$$

$$f(x, t) \sim c + dt + \sum a_m e^{i(m, x)} e^{i\|m\|t} + \sum b_m e^{i(m, x)} e^{-i\|m\|t}$$

la somme \sum étant étendue à \mathfrak{L}^* privé de l'origine.

Il est bien connu que si $f \in C^\infty(\mathbb{T}^n \times \mathbb{R})$, les suites a_m et b_m sont à décroissance rapide sur \mathbb{Z}^* et que la série converge absolument vers f .

DEFINITION. Nous appellerons vibration une solution continue dont la série de Fourier vérifie $c = d = 0$.



2. RESULTATS.

THEOREME 1. Soit $n \geq 2$. Quelle que soit la fonction $\omega : \mathbb{R} \rightarrow [1, \infty[$, et quel que soit α avec $0 < \alpha < \frac{n-1}{2}$, il existe une vibration f telle que pour tout $\ell > 0$ $f \in \Lambda_{\frac{n-1}{2} - \alpha}(\mathbb{T}^n \times [-\ell, \ell])$, mais qui n'est pas $O(w(t))$ ($t \rightarrow +\infty$).

Ceci constitue le résultat "négatif" par rapport aux résultats "positifs" que nous allons maintenant énoncer :

THEOREME 2. Soient ℓ et α deux réels positifs, $\alpha \neq \frac{1}{2}$. Il existe alors une constante C telle que pour toute vibration f sur \mathbb{T}^2 on ait :

$$(1) \quad \forall x \in \mathbb{T}^2 \quad \forall t \in \mathbb{R} \quad |f(x, t)| \leq C(1 + |t|)^{\frac{1-\alpha}{2}} \|f\|_{\Lambda_{\frac{1}{2} + \alpha}(\mathbb{T}^2 \times [-\ell, \ell])}$$

Si $\alpha = \frac{1}{2}$, l'inégalité (1) est remplacée par :

$$\forall x \in \mathbb{T}^2 \quad \forall t \in \mathbb{R} \quad |f(x, t)| \leq C \log(2 + |t|) (\|u_0\|_{\Lambda_1(\mathbb{T}^2)} + \sup_{\mathbb{T}^2} |u_1|)$$

où l'on a posé :

$$\begin{cases} u_0(x) = f(x, 0) \\ u_1(x) = \frac{\partial f}{\partial t}(x, 0). \end{cases}$$

Dans le cas des tores \mathbb{T}^n avec $n \geq 3$, l'indice critique $\frac{n-1}{2}$ est au moins égal à 1 et on peut, comme dans le cas précédent, obtenir une inégalité qui n'utilise

plus que la régularité des conditions initiales :

THEOREME 3. Soit un entier $n \geq 3$, soit $\alpha > 0$, $\alpha \neq \frac{1}{2}$. Il existe alors une constante C telle que pour toute vibration f sur T^n on ait :

$$(2) \quad \forall x \in T^n \quad |f(x,t)| \leq C(1+|t|)^{(n-1)(\frac{1}{2}-\alpha)} (\|u_0\|_{\Lambda_{\frac{n-1}{2}+\alpha}(T^n)} + \|u_1\|_{\Lambda_{\frac{n-3}{2}+\alpha}(T^n)})$$

Si $\alpha = \frac{1}{2}$, l'inégalité (2) est remplacée par

$$\forall x \in T^n \quad |f(x,t)| \leq C \text{Log}(2+|t|) (\|u_0\|_{\Lambda_{\frac{n}{2}}(T^n)} + \|u_1\|_{\Lambda_{\frac{n-2}{2}}(T^n)}).$$

REMARQUE. Dans le cas $\alpha > \frac{1}{2}$, les théorèmes 2 et 3 signifient que les vibrations sont bornées. D'ailleurs on a $\frac{n-1}{2} + \alpha > \frac{n}{2}$ et c'est un cas bien connu où la série converge absolument. Pour le cas $\alpha = 0$, précisons qu'il est facile d'obtenir la majoration suivante :

PROPOSITION 1. Soit un entier impair $n \geq 3$. Il existe alors une constante C telle que pour toute vibration f sur T^n on ait :

$$\forall x \in T^n \quad |f(x,t)| \leq C(1+|t|)^{\frac{n-1}{2}} (\|u_0\|_{C^{\frac{n-1}{2}}(T^n)} + \|u_1\|_{C^{\frac{n-3}{2}}(T^n)}).$$

De plus le poids $(1+|t|)^{\frac{n-1}{2}}$ est le meilleur possible en ce sens qu'il n'est pas possible de le remplacer par une fonction $\omega(t) = o(1+|t|)^{\frac{n-1}{2}}$

Par contre si n est pair, aucune majoration n'est possible :

PROPOSITION 2. Soit n un entier pair. Il n'existe aucune fonction $\omega(t)$ telle que pour toute vibration f sur T^n on ait :

$$\forall x \in T^n \quad \forall t \in R \quad |f(x,t)| \leq |\omega(t)| \left(\|u_0\|_{\Lambda_{\frac{n-1}{2}}(T^n)} + \|u_1\|_{\Lambda_{\frac{n-3}{2}}(T^n)} \right).$$

Les démonstrations des théorèmes 2 et 3 s'appuient sur le lemme suivant :

LEMME [1]. Soit K le compact de R^n défini par $1 \leq \|x\| \leq 2$. Désignons par $\|e^{it\|x\|}\|_{A(K)}$ la borne inférieure des normes des mesures de radon bornées μ telles que pour tout x de K $\hat{\mu}(x) = e^{it\|x\|}$. Alors il existe deux constantes C_1 et C_2 telles que :

$$C_1(1 + |t|)^{\frac{n-1}{2}} \leq \|e^{it\|x\|}\|_{A(K)} \leq C_2(1 + |t|)^{\frac{n-1}{2}}$$

La démonstration du théorème 2 utilise en outre l'étude locale par rapport au temps de la transformation de Hilbert et des opérateurs de dérivation fractionnaire appliqués à des vibrations sur T^n (voir [2]).

Signalons que nous ignorons si les "poids" figurant dans les inégalités des théorèmes 2 et 3 sont les meilleurs.

On pourra enfin rapprocher ces résultats de ceux de [3], [4] et [5] concernant les vibrations des sphères et des membranes carrées.

Résumé d'un texte qui sera conservé cinq ans par les Archives de l'Académie et dont copie peut être obtenue de l'Académie.

- [1] DOMAR, Y. Communication orale et estimates of $\|e^{it\|x\|}\|_{A(\Gamma)}$. Israël J. Math. 12 (1972).
- [2] FRISCH, M. Propriétés asymptotiques des vibrations des tores. Sém. Goulaouic-Schwartz, exposé XVII, 1974.
- [3] MEYER, Y. Trois problèmes sur les sommes trigonométriques. 1) Etude asymptotique des vibrations des sphères. Astérisque 1, SMF, 1973.
- [4] MEYER, Y. Théorie L^p des sommes trigonométriques a périodiques (exemple : vibrations des sphères). C. R. Acad. Sc. Paris 277 (1973).

- [5] MEYER, Y. Nombres premiers et vibrations. Sém. Delange-Pisot-Poitou, exposé XV, 1972.



Université Paris 13
Département de Mathématiques
Place du 8 mai 1945
93-ST DENIS

