

Publications Mathématiques d'Orsay

SOUS-ESPACES INVARIANTS

Henry HELSON

ANNEE 1966/1967

Mathématique
(Service des Publications)
Faculté des Sciences
91-ORSAY (France)

Publications Mathématiques d'Orsay

SOUS-ESPACES INVARIANTS

Henry HELSON

ANNEE 1966/1967

Mathématique
(Service des Publications)
Faculté des Sciences
91-ORSAY (France)

PREMIERE SEANCE

FONCTIONS VECTORIELLES

Dans tout ce qui suit, $\mathcal{H}$ désigne un espace de Hilbert séparable dont une base orthonormale complète dénombrable est désignée par $\{e_i\}_{i=1}^{\infty}$.

Définition. - On dit que $F(e^{ix})$ définie p.p. sur le cercle à valeurs dans $\mathcal{H}$ est mesurable si $(F(e^{ix}), \varphi)$ l'est pour $\forall \varphi \in \mathcal{H}$.

Remarque. -

1) Si $F(e^{ix})$ est mesurable alors la fonction $\|F(e^{ix})\|$ est mesurable.

En effet

$$\|F(e^{ix})\| = \sup_{\varphi_n} |(F(e^{ix}), \varphi_n)|$$

où φ_n parcourt un ensemble dénombrable de la boule unité.

Lemme. - Si F et G sont mesurables alors $(F, G)_{\mathcal{H}}$ est mesurable.

Preuve. - on a :

$$(F + G, F + G) = \|F\|^2 + \|G\|^2 + 2\operatorname{Re}(F, G)$$

d'après la remarque 2) précédente $\|F + G\|$, $\|F\|$, $\|G\|$ sont mesurables donc $\operatorname{Re}(F, G)$ l'est aussi.

En prenant iG au lieu de G on démontre - même raisonnement - que $\operatorname{Im}(F, G)$ est mesurable donc (F, G) l'est aussi.

C.Q.F.D.

Définition. - L'intégrale d'une fonction vectorielle.

on dit que

$$\int F(e^{ix}) d\sigma(x) = \varphi \in \mathcal{H} \quad \text{si :}$$

$$\langle \varphi, \psi \rangle = \int \langle F(e^{ix}), \psi \rangle d\sigma(x) \quad \text{pour } \forall \psi \in \mathcal{H}.$$

Polynômes trigonométriques. - Ce sont des fonctions de la forme :

$$\sum_{\text{finie}} \varphi_k x^k \quad \text{où} \quad \varphi_k \in \mathcal{H}$$

Norme sur l'ensemble des polynômes trigonométriques. -

on pose

$$\langle P, Q \rangle_{L^2_{\mathcal{H}}} = \int (P(e^{ix}), Q(e^{ix})) d\sigma(x)$$

Il est clair que si

$$P = \sum \varphi_n x^n$$

$$Q = \sum \psi_n x^n$$

$$\text{alors} \quad (P, Q)_{L^2_{\mathcal{H}}} = \sum (\varphi_n, \psi_n)_{\mathcal{H}}$$

et que :

$$\|P\|_{L^2_{\mathcal{H}}} = \left(\sum \|\varphi_n\|_{\mathcal{H}}^2 \right)^{1/2} \quad \text{est une norme sur l'ensemble des}$$

polynômes trigonométriques.

Définition de $L^2_{\mathcal{H}}$. - $L^2_{\mathcal{H}}$ est le complété de l'ensemble des polynômes trigonométriques muni de la norme précédente.

Donc les éléments de $L^2_{\mathcal{H}}$ sont en correspondance biunivoque avec toutes les suites $(\varphi_n)_{n=-\infty}^{\infty}$ tq $\sum \|\varphi_n\|^2 < \infty$

$$F \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} \varphi_n \chi^n$$

Par définition de $L^2_{\mathcal{H}}$ on a :

$$\|F\|_{L^2_{\mathcal{H}}}^2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \|\varphi_n\|^2$$

nous allons définir tout élément $F \in L^2_{\mathcal{H}}$ d'une façon ponctuelle.

Soit $P = \sum \varphi_n \chi^n$ un P.T.

on pose

$$f_j(e^{ix}) = (P(e^{ix}), e_j)_{\mathcal{H}} = \sum (\varphi_n, e_j) \chi^n$$

qui est un P.T.

on a d'après la formule de Parseval :

$$P(e^{ix}) = \sum f_j(e^{ix}) e_j$$

et

$$\|P(e^{ix})\|_{\mathcal{H}}^2 = \sum |f_j(e^{ix})|^2 \quad \text{p.p. (1)}$$

En intégrant (1) on obtient :

$$\|P\|_{L^2}^2 = \sum_j \|f_j\|_{L^2}^2$$

Soit donnée une suite de P.T.

$(P^{(k)})$ qui converge vers F dans la norme $L^2_{\mathcal{H}}$ (1) démontre que chaque composante $f_j^{(k)}$ converge dans L^2 vers $f_j \in L^2$

$$(P^{(k)})(e^{ix}) = \sum (P^{(k)}, e_j) e_j = \sum f_j^{(k)}(e^{ix}) e_j \quad \text{p.p.})$$

et que

$$\sum \|f_j\|_{L^2}^2 < \infty$$

On pose :

$$F(e^{ix}) = \sum_{j \geq 1} f_j(e^{ix}) e_j \quad \text{p.p. (2)}$$

Cette somme existe pour presque tout x , car

$$\sum_j \|f_j\|_{L^2}^2 < +\infty \implies \sum_j |f_j(e^{ix})|^2 < +\infty \quad \text{p.p.}$$

donc

$$\sum_{j \geq 1} f_j(e^{ix}) e_j \quad \text{existe dans } \mathcal{H} \quad \text{p.p.}$$

$F(e^{ix})$ ainsi définie est mesurable car c'est la somme d'une série de fonctions mesurables et :

$$\|F(e^{ix})\|_{\mathcal{H}}^2 = \sum_j |f_j(e^{ix})|^2 \quad \text{p.p.}$$

par conséquent :

$$\|F\|_{L^2_{\mathcal{H}}}^2 = \sum_j \|f_j\|_{L^2}^2 = \int \|F(e^{ix})\|^2 d\sigma(x)$$

De plus $P^{(k)}$ converge vers F ainsi définie dans le sens que

$$\int \|F - P^{(k)}\|^2 d\sigma \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} 0$$

en effet :

$$\int \|F - P^{(k)}\|_{\mathcal{H}}^2 d\sigma = \sum_{j \geq 1} \int |f_j - f_j^{(k)}|^2 d\sigma \leq \liminf_{m_1} \left(\sum_j \int |f_j^{(m_1)} - f_j^{(k)}|^2 d\sigma \right)$$

en conséquence du lemme de Fatou, si (m_i) est une sous suite telle que $f_j^{(m_i)}$ converge vers f_j p.p. pour chaque j . Or le dernier membre est petit dès que k est assez grand d'où le résultat.

Ce procédé permet d'identifier L^2 à l'ensemble des F mesurables telles que la norme

$$\|F\|_{L^2_{\mathcal{H}}}^2 = \left(\int \|F(e^{ix})\|_{\mathcal{H}}^2 d\sigma \right)^{1/2}$$

est finie.

Il reste à démontrer que toutes les fonctions ayant cette propriété peuvent être approchées par des P.T. et correspondent à des éléments de $L^2_{\mathcal{H}}$.

En effet, comme $\mathcal{H}$ est séparable on peut écrire p.p.

$$F(e^{ix}) = \sum f_j(e^{ix}) e_j$$

$$\text{où } f_j(e^{ix}) = (F(e^{ix}), e_j)_{\mathcal{H}}$$

on peut approcher f_j par un P.T. scalaire $p_j(e^{ix})$ tel que:

$$\|f_j - p_j\|_{L^2} < \sqrt{\frac{\epsilon}{n}} \quad j=1, 2, \dots, n$$

poser

$$P^{(n)} = \sum_{j=1}^n p_j e_j$$

alors :

$$\int \|F - P^{(n)}\|_{\mathcal{H}}^2 d\sigma = \sum_{j=1}^n \int |f_j - p_j|^2 d\sigma + \sum_{n+1}^{\infty} \int |f_j|^2 d\sigma$$

$$< \frac{\epsilon}{n} n + \sum_{n+1}^{\infty} \int |f_j|^2 d\sigma$$

comme :

$$\sum_1^{\infty} \int |f_j|^2 d\sigma < \infty \quad \text{on peut choisir } n \text{ de telle façon}$$

$$\text{que } \sum_{n+1}^{\infty} \int |f_j|^2 d\sigma < \epsilon$$

ce qui démontre que F est dans l'adhérence des P.T.

Définition de $L^p_{\mathcal{H}}$. - $1 \leq p \leq \infty$.

$1 \leq p < \infty$: $L^p_{\mathcal{H}}$ = complété de l'ensemble des P.T. pour la norme

$$\|F\|_{L^p_{\mathcal{H}}}^p = \int \|F\|_{\mathcal{H}}^p d\sigma$$

$p = \infty$: $L^{\infty}_{\mathcal{H}}$ = l'ensemble des fonctions mesurables bornées pour la norme :

$$\|F\|_{L^{\infty}_{\mathcal{H}}} = \sup_x \text{ess } F(e^{ix})$$

Comme dans le cas de $p=2$ on va identifier les F de $L^p_{\mathcal{H}}$ aux fonctions mesurables $F(e^{ix})$ t.q. :

$$\|F\|_{L^p_{\mathcal{H}}}^p = \int \|F(e^{ix})\|_{\mathcal{H}}^p d\sigma(x) < \infty$$

Pour cela on écrit

$$F(e^{ix}) = \sum f_j(e^{ix}) e_j \quad \text{où}$$

$$f_j(e^{ix}) = (F(e^{ix}), e_j)$$

la décomposition est bien définie pour chaque $F(e^{ix})$ mesurable.

Dans ce cas $|f_j| \leq \|F\|$ p.p. donc $f_j \in L^p$.

En modifiant un peu le raisonnement du cas $p=2$ on démontre qu'il existe une suite de P.T. $P^{(n)}$ telle que

$$\int \|F - P^{(n)}\|_{\mathcal{H}}^p d\sigma \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$$

et que chaque suite de Cauchy $P^{(n)}$ converge dans ce sens vers une fonction F .

Proposition. - Soit $F \in L^p_{\mathcal{H}}$

alors $\varphi_n = \int F \chi_n^{-n} d\sigma$ existe pour chaque n et on écrit :

$$F(e^{ix}) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} \varphi_n e^{inx} .$$

Preuve. - Pour cela, il nous suffit de démontrer que l'application :

$$P \longrightarrow \varphi_n(P) \quad \text{où } P = \sum \varphi_n \chi^n : \text{P.T.}$$

est continue pour les normes $L_{\mathcal{H}}^p$ et que

$$\varphi_n = \int P \chi^{-n} d\sigma .$$

car par passage à la limite, cette application sera définie dans $L_{\mathcal{H}}^p$ tout entier.

Soit $\psi \in \mathcal{H} = \|\psi\| = 1$

On a :

$$(\varphi_0, \psi) = \int (P, \psi) d\sigma \quad \text{et}$$

$$\left| \int (P, \psi) d\sigma \right| \leq \int \|P\| d\sigma$$

Donc

$$\|\varphi_0\| \leq \|P\|_{L_{\mathcal{H}}^1} \leq \|P\|_{L_{\mathcal{H}}^p} \quad \forall p : 1 \leq p < \infty$$

le cas de $n \neq 0$ est démontré de la même façon et la conclusion est encore valable pour $p = \infty$.

C.Q.F.D.

Définition de l'espace $H_{\mathcal{H}}^p$. - $1 \leq p \leq \infty$

$$H_{\mathcal{H}}^p = \left\{ F \in L_{\mathcal{H}}^p \quad \text{ou bien 1) } F = \sum_{j=1}^{\infty} f_j e_j \quad \text{ou } f_j(e^{ix}) \in H^p \quad \forall j \right\}$$

$$\text{ou bien 2) } F(e^{ix}) \sim \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n e^{inx} \quad \text{où } \varphi_n \in \mathcal{H}$$

Démontrons l'équivalence de 1) et de 2) :

1) $\Rightarrow$ 2)

En effet

$$\begin{aligned} (\varphi_n(F), e_j) &= \int (F, e_j) \chi^{-n} d\sigma \\ &= \int f_j \chi^{-n} d\sigma = a_n(f_j) \end{aligned}$$

comme $f_j \in H^p \quad \forall j$ alors $a_n(f_j) = 0 \quad \forall n < 0$

$$\Rightarrow \varphi_n(F) = 0 \quad \forall n < 0$$

C.Q.F.D.

2) $\Rightarrow$ 1)

En effet,

pour $\forall j$, on a par l'hypothèse $\varphi_n = 0 \quad n < 0$

$$(\varphi_n(F), e_j) = 0 = \int (F, e_j) \chi^{-n} d\sigma = a_n(f_j)$$

donc $f_j \in H^p \quad \forall j = 1, 2, \dots$

C.Q.F.D.

Il est aisé de vérifier que $H_{\mathcal{H}}^p$ est un sous-espace vectoriel fermé de $L_{\mathcal{H}}^p$ pour $\forall p : 1 \leq p \leq \infty$

$$\text{Soit } F \in L_{\mathcal{H}}^p ; G \in L_{\mathcal{H}}^q : \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

$$1 \leq p, q \leq \infty$$

on a :

$$\int |(F, G)| d\sigma \leq \|F\|_{L_{\mathcal{H}}^p} \|G\|_{L_{\mathcal{H}}^q}$$

en effet

$$\int |(F, G)| d\sigma \leq \int \|F\|_{\mathcal{H}} \|G\|_{\mathcal{H}} d\sigma \leq \|F\|_{L_{\mathcal{H}}^p} \|G\|_{L_{\mathcal{H}}^q}$$

si $p=2$

$(F, G)_2 = \int (F, G)_{\mathcal{H}} d\sigma$ définit un produit scalaire, $L_{\mathcal{H}}^2$ est donc un espace de Hilbert.

Lemme. - $(F \text{ est orthogonale à } G \text{ p.p. dans } \mathcal{H}) \iff (F \perp \chi^n G \text{ dans } L_{\mathcal{H}}^2 \text{ pour } \forall n) .$

Preuve. -

$(\implies)$ est bien évident.

$(\impliedby)$ en effet, par hypothèse

on a : (3) $\int (F, G)_{\mathcal{H}} \chi^{-n} d\sigma = 0 \quad \forall n$

comme $(F, G) \in L^1$ d'après l'inégalité de Hölder (3) donne :

$$a_n \langle F, G \rangle = 0 \quad \text{pour } \forall n \text{ donc}$$

$$(F, G) = 0 \quad \text{p.p.}$$

C.Q.F.D.

Définition d'une fonction directionnelle (f.d.) (range fonction).-

Une fonction directionnelle est une fonction $\mathcal{U}(e^{ix})$ définie p.p. sur le cercle dont les valeurs sont des sous-espaces fermés de $\mathcal{H}$. On dira que $\mathcal{U}(e^{ix})$ est mesurable si le projecteur $P(e^{ix})$ de $\mathcal{H}$ sur $\mathcal{U}(e^{ix})$ est mesurable c.a.d. $(P(e^{ix})\varphi, \psi)$ est mesurable pour $\forall \varphi, \psi \in \mathcal{H}$.

Lemme. - Si $\mathcal{U}(e^{ix})$ est mesurable alors $P(e^{ix}) F(e^{ix})$ est mesurable pour toute fonction $F(e^{ix})$ mesurable.

Preuve. - Comme

$$(P(e^{ix}) F(e^{ix}), \varphi)_{\mathcal{H}} = (F, P\varphi)_{\mathcal{H}}$$

remarquer que P est un projecteur autoadjoint en presque chaque point, $P\varphi$ est mesurable donc $(F, P\varphi)_{\mathcal{H}}$ est mesurable donc $P(e^{ix}) F(e^{ix})$ est mesurable pour $\forall F(e^{ix})$ mesurable

C.Q.F.D.

Définition de l'espace $\mathcal{M}_J$. -

$\mathcal{M}_J$ désigne l'ensemble des fonctions $F \in L^2_{\mathcal{H}}$ tq :
 $F(e^{ix}) \in J(e^{ix})$ p.p.

On a le théorème suivant :

Théorème. - $\mathcal{M}_J$ est un sous-espace fermé de $L^2_{\mathcal{H}}$ dont le complémentaire dans $L^2_{\mathcal{H}}$ est $\mathcal{M}_{J^\perp}$

$$(\mathcal{J}^\perp(e^{ix}) = \text{complémentaire de } \mathcal{J}(e^{ix}))$$

Le projecteur auto-adjoint sur $\mathcal{M}_J$ est P
 où $(PF)(e^{ix}) = P(e^{ix}) F(e^{ix})$.

Preuve. - Soit $F_n \in \mathcal{M}_J$ si F_n converge dans $L^2_{\mathcal{H}}$ vers F on peut extraire une sous-suite $F_{n_j}(e^{ix})$ qui converge vers $F(e^{ix})$ p.p. or $F_{n_j}(e^{ix}) \in \mathcal{J}(e^{ix})^j$ p.p. donc $F \in \mathcal{M}_J$ ce qui démontre que $\mathcal{M}_J$ est fermé dans $L^2_{\mathcal{H}}$. Le projecteur $\mathcal{J}^\perp(e^{ix})$ est mesurable en même temps que $\mathcal{J}(e^{ix})$ car

$$P_{J^\perp}(e^{ix}) = (I - P_J)(e^{ix})$$

Il est évident que

$$\mathcal{M}_J \perp \mathcal{M}_{J^\perp} \text{ dans } L^2_{\mathcal{H}}$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{car } F(e^{ix}) \in \mathcal{M}_J \\ G \in \mathcal{M}_{J^\perp} \end{array} \right\} \Rightarrow (F(e^{ix}), G(e^{ix})) = 0 \text{ p.p.}$$

$$\text{donc } (F, G)_{L^2_{\mathcal{H}}} = \int (F, G) d\sigma = 0$$

On peut alors écrire :

$$L^2_{\mathcal{H}} = \mathcal{M}_J \oplus \mathcal{M}_{J^\perp} \oplus Z$$

Démontrons que $Z = \{0\}$

En effet, soit $F \in Z$

$P(e^{ix})$ le projecteur sur $\mathcal{J}(e^{ix})$

On a :

$P(e^{ix}) F(e^{ix})$ est mesurable et $\in \mathcal{M}_J$

donc

$$(I - P)F \in \mathcal{M}_{J^\perp}$$

$$\Rightarrow F = PF + (I - P)F \in \mathcal{M}_J \oplus \mathcal{M}_{J^\perp}$$

ce qui démontre que $Z = \{0\}$

$$\Rightarrow L^2_{\mathcal{H}} = \mathcal{M}_J \oplus \mathcal{M}_{J^\perp}$$

$$\text{c.a.d. } \mathcal{M}_J^\perp = \mathcal{M}_{J^\perp}$$

Il nous reste à démontrer que :

$(PF)(e^{ix}) = P(e^{ix}) F(e^{ix})$ est le projecteur auto-adjoint sur $\mathcal{M}_J$.

En effet, il est aisé de vérifier que P ainsi défini est un projecteur car

$$P^2 = P \text{ et } P \text{ est borné dans } L^2_{\mathcal{H}}$$

de plus P est auto-adjoint car :

$$(PF, G)_{L^2_{\mathcal{H}}} = \int (PF, G)_{\mathcal{H}} d\sigma = \int (F, PG)_{\mathcal{H}} d\sigma = (F, PG)_{L^2_{\mathcal{H}}}$$

dont P est un projecteur auto-adjoint dans $L^2_{\mathcal{H}}$ et son image est contenu dans $\mathcal{M}_J$.

Nous allons démontrer que :

$$P_J(L^2_{\mathcal{H}}) = \mathcal{M}_J$$

En effet considérons l'opérateur $P_{J^\perp}$ défini par :

$$(P_{J^\perp} F)(e^{ix}) = P_{J^\perp}(e^{ix}) F(e^{ix})$$

on a :

$$F(e^{ix}) = (P_J F)(e^{ix}) + (P_{J^\perp} F)(e^{ix}) \quad \text{pour } \forall F$$

c.a.d.

$$F = P_J F + P_{J^\perp} F \quad .$$

$$\text{or } L_{\mathcal{H}}^2 = \mathfrak{M}_J \oplus \mathfrak{M}_{J^\perp}$$

$$P_J L_{\mathcal{H}}^2 \subset \mathfrak{M}_J$$

$$P_{J^\perp} L_{\mathcal{H}}^2 \subset \mathfrak{M}_{J^\perp}$$

$$\text{donc : } \mathfrak{M}_J = P_J L_{\mathcal{H}}^2$$

$$\mathfrak{M}_{J^\perp} = P_{J^\perp} L_{\mathcal{H}}^2$$

C.Q.F.D.

DEUXIEME SEANCE

Définition. - Soit $\mathcal{M}$ un sous-espace fermé dans $L^2_{\mathcal{H}}$ $\mathcal{M}$ est dit simplement invariant (s.i.) si

$$\lambda \mathcal{M} \subsetneq \mathcal{M} \quad \forall \lambda$$

est dit complètement invariant (c.i.) si

$$\lambda \mathcal{M} = \mathcal{M} \quad \forall \lambda$$

Il s'agit de déterminer les sous-espaces $\mathcal{M}$ complètement invariants de $L^2_{\mathcal{H}}$, on a le théorème suivant :

Théorème. - Les sous-espaces $\mathcal{M}$ c.i. sont exactement les $\mathcal{M}_f$ pour une fonction directionnelle f mesurable.

Démonstration. - Il est clair que $\mathcal{M}_f$ est un sous-espace fermé c.i. et comme L^2 et $\mathcal{H}$ sont séparables l'espace $L^2_{\mathcal{H}}$ l'est aussi.

$\mathcal{M}$ et $\mathcal{M}^\perp$ étant fermés dans $L^2_{\mathcal{H}}$ donc sont séparables;

Soient $(F_1, F_2, \dots)$ une base de $\mathcal{M}$

$(G_1, G_2, \dots)$ celle de $\mathcal{M}^\perp$

Il est clair que

$$(1) \quad \left. \begin{array}{l} \forall F \in \mathcal{M} \\ \forall G \in \mathcal{M}^\perp \end{array} \right\} \Rightarrow (F, G)_{\mathcal{H}} = 0 \quad \text{p.p.}$$

car

$$\lambda^n F \in \mathcal{M} \quad \forall n \quad (\mathcal{M} \text{ est c.i.})$$

et

$$\lambda^n F \perp G \quad \text{dans } L^2_{\mathcal{H}} \quad \forall n$$

cela dit, considérons f la fonction directionnelle engendrée par les $\{F_j\}$ on a :

$$\mathcal{M} \subset \mathcal{M}_f$$

Car $\forall F \in \mathcal{M} \Rightarrow F(e^{ix}) \in \mathcal{J}(e^{ix})$ p.p.

de même, soit $\mathcal{J}'$ la fonction directionnelle engendrée par les $\{G_j\}$ on a

$$\mathcal{M}^\perp \subset \mathcal{M}_{\mathcal{J}'}$$

et $\mathcal{J}' \perp \mathcal{J}$ p.p. d'après (1)

donc $\mathcal{M}_{\mathcal{J}} = \mathcal{M}$

$$\mathcal{M}_{\mathcal{J}'} = \mathcal{M}^\perp$$

car $L_{\mathcal{H}}^2 = \mathcal{M} \oplus \mathcal{M}^\perp$

$$\mathcal{M} \subset \mathcal{M}_{\mathcal{J}}$$

$$\mathcal{M}^\perp \subset \mathcal{M}_{\mathcal{J}'}$$

$$\mathcal{M}_{\mathcal{J}} \perp \mathcal{M}_{\mathcal{J}'}$$

Il nous reste à démontrer que $\mathcal{J}$ est mesurable en effet soit P le projecteur global de $L_{\mathcal{H}}^2$ sur $\mathcal{M}_{\mathcal{J}}$ et $P(e^{ix})$ le projecteur de $\mathcal{H}$ sur $\mathcal{J}(e^{ix})$ on a :

$$(PF(e^{ix})) = P(e^{ix}) F(e^{ix}) \quad \text{p.p.} \quad \forall F \in L_{\mathcal{H}}^2$$

donc

$P\varphi$ est une fonction mesurable pour $\forall \varphi \in \mathcal{H}$

car $P\varphi(e^{ix}) = P(e^{ix})\varphi$ et $P\varphi \in \mathcal{M}$

C.Q.F.D.

Soit $\mathcal{M}$ un sous-espace fermé simplement invariant

on pose

$$\mathcal{M}_n = \lambda^n \mathcal{M}$$

on a

$$\mathcal{M}_{n+1} \subsetneq \mathcal{M}_n \quad \forall n$$

poser

$$\mathcal{M}_{\infty} = \bigcup_{n \uparrow \infty} \mathcal{M}_n$$

$$\mathcal{M}_{-\infty} = \bigcup_{n \downarrow -\infty} \mathcal{M}_n \subset L^2_{\mathcal{H}}$$

Il est clair que $\mathcal{M}_{\infty}$ et $\mathcal{M}_{-\infty}$ sont c.i. donc il existe deux fonctions directionnelles $\mathcal{J}_1, \mathcal{J}_2$ t q

$$\mathcal{M}_{\infty} = \mathcal{M}_{\mathcal{J}_2}$$

$$\mathcal{M}_{-\infty} = \mathcal{M}_{\mathcal{J}_1}$$

comme $\mathcal{M}_{\infty} \not\subset \mathcal{M}_{-\infty}$ alors $\mathcal{J}_2(e^{ix}) \in \mathcal{J}_1(e^{ix})$ p.p. et soit $\mathcal{J}$ la fonction directionnelle définie par

$$\mathcal{J}(e^{ix}) = \mathcal{J}_1(e^{ix}) \ominus \mathcal{J}_2(e^{ix}) \quad \text{p.p.}$$

et soit $\mathcal{M} = \mathcal{M}_{\infty} \oplus \mathcal{M}$ on a le lemme suivant

Lemme. -

- 1) $\mathcal{M}$ est s.i.
- 2) $\mathcal{M}_{\infty} = \{0\}$
- 3) $\mathcal{M}_{-\infty} = \mathcal{M}_J$
- 4) $\mathcal{M} = (\mathcal{M} \ominus \mathcal{M}_1) \oplus (\mathcal{M}_1 \ominus \mathcal{M}_2) \oplus \dots \oplus (\mathcal{M}_k \ominus \mathcal{M}_{k+1}) \oplus \dots$
- 5) $\mathcal{M} = (\mathcal{M} \ominus \mathcal{M}_1) \oplus (\mathcal{M}_1 \ominus \mathcal{M}_2) \oplus \dots \oplus (\mathcal{M}_k \ominus \mathcal{M}_{k+1}) \oplus \mathcal{M}_{\infty}$
 $= \mathcal{M} \oplus \mathcal{M}_{\infty}$

Démonstration. -

- 1) $\mathcal{M}$ est s.i. car

$$\mathcal{M} = \mathcal{M}_{\infty} \oplus \mathcal{M}$$

et $\mathcal{M}$ est s.i., $\mathcal{M}_{\infty}$ est c.i.

- 2) * comme :

$$\mathcal{M}_n = \mathcal{M}_{\infty} \oplus \mathcal{M}_n \quad \text{pour } \forall n \text{ entier positif ou nul}$$

on a : $\mathcal{M}_{\infty} = \{0\}$.

4) η étant s.i. on a :

$$\eta_{n+1} \subsetneq \eta_n \quad \forall n$$

on peut écrire

$$\eta = [\eta \ominus \lambda \eta] \oplus [\lambda \eta \ominus \lambda^2 \eta] \oplus \dots$$

car si non, on aura :

$$\eta = [\eta \ominus \lambda \eta] \oplus [\lambda \eta \ominus \lambda^2 \eta] \oplus \dots \oplus Z$$

et

$$\text{soit } H \in Z \Rightarrow H \perp \eta \ominus \lambda \eta \Rightarrow H \in \lambda \eta$$

$$\text{de même } H \perp \lambda^n \eta - \lambda^{n+1} \eta \Rightarrow H \in \lambda^{n+1} \eta$$

ce qui démontre que

$$H \in Z$$

$$H \in \lambda^n \eta \quad \text{pour } \forall n \text{ positif}$$

cela implique que : $H \in \eta_\infty = \{0\}$ d'après (2)

C.Q.F.D.

Définition. - η est dit pur si $\eta_\infty = \{0\}$

Remarquer que si η est s.i. pur on peut écrire :

$$\eta = (\eta \ominus \lambda \eta) \oplus (\lambda \eta \ominus \lambda^2 \eta) \oplus \dots$$

d'après le raisonnement précédent.

Théorème. - Soit η un sous-espace fermé s.i. pur ; $(E_1, E_2, \dots)$ une base orthonormale complète de $\eta \ominus \lambda \eta$; alors chaque $F \in \eta$ se laisse représenter d'une façon unique :

$$F = \sum_j h_j E_j \quad (\text{au sens de la norme dans } L^2_{\mathcal{H}})$$

où $h_j \in H^2$ et

$$\|F\|_{L^2_{\mathcal{H}}}^2 = \sum \|h_j\|_{L^2}^2$$

et

$$F(e^{ix}) = \sum_j h_j E_j(e^{ix}) \quad \text{p.p. dans } \mathcal{H}$$

Démonstration. - Soit $(E_1, E_2, \dots)$ une base orthonormale complète de $\eta \ominus \lambda \eta$ alors :

$$\|E_j(e^{ix})\|_{\mathcal{H}} = 1 \quad \text{pour } \forall j \text{ et } \{E_j(e^{ix})\}_{j=1}^{\infty}$$

est un système orthonormal dans $\mathcal{H}$ pour presque chaque x car pour $\forall j \neq k$, $\forall n$ on a :

$$\lambda^n E_j \in (\lambda^n \eta \ominus \lambda^{n+1} \eta)$$

donc $\lambda^n E_j \perp \eta \ominus \lambda \eta$

ce qui implique que

$$\lambda^n E_j \perp E_k \quad \text{pour } \forall n \in \mathbb{Z} \quad \text{si } j \neq k$$

donc $E_j \perp E_k$ p.p. si $j \neq k$

pour $j = k$ le même argument s'applique pour $\forall n$ entier différent de 0

donc $\|E_j\|_{\mathcal{H}} = \text{cste} = 1$ car $\|E_j\|_{L^2_{\mathcal{H}}} = 1$

cela étant,

soit $F \in \eta = [\eta \ominus \lambda \eta] \oplus [\lambda \eta \ominus \lambda^2 \eta] \oplus \dots$

on peut écrire $F = F_0 + F_1 + \dots$

comme $\{E_j\}$ est une base orthonormale de $\eta \ominus \lambda \eta$

$$\{\lambda^n E_j\}_j \text{ est une base orthonormale de } \lambda^n \eta \ominus \lambda^{n+1} \eta$$

donc :

$$F_n = \sum_j a_j^{(n)} \lambda^n E_j \quad (\text{au sens de la norme } L^2_{\mathcal{H}})$$

où

$$\|F_n\|_{L^2_{\mathcal{H}}}^2 = \sum_j |a_j^n|^2 \quad (\text{th. de Parseval})$$

et on peut écrire

$$F = \sum_{n=0}^{\infty} F_n \quad \text{au sens de la norme } L^2_{\mathcal{H}}.$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_j a_j^{(n)} \chi^n E_j$$

avec

$$(1) \quad \|F\|_{L^2_{\mathcal{H}}}^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \|F_n\|_{L^2_{\mathcal{H}}}^2 = \sum_n \sum_j |a_j^{(n)}|^2 < \infty$$

Fixons x ; $\{E_j(e^{ix})\}$ sont orthogonaux 2 à 2 d'après ce qui précède.

pour $\forall j$; on pose

$$h_j = \sum_{n=0}^{\infty} a_j^{(n)} \chi^n$$

il est clair que

$$h_j \in H^2,$$

$$\|h_j\|_{L^2}^2 = \sum_{n=0}^{\infty} |a_j^{(n)}|^2 \quad (2)$$

et

$$a_n(h_j) = a_j^{(n)} \quad (3)$$

à l'aide de (1) + (2), il est légitime d'écrire :

$$\tilde{F}(e^{ix}) = \sum_j h_j(e^{ix}) E_j(e^{ix})$$

qui existe dans $\mathcal{H}$ p.p.x et $\|\tilde{F}\|_{L^2_{\mathcal{H}}}^2 = \sum_j \|h_j\|_{L^2}^2$

il nous reste à démontrer que $\tilde{F} = F$ p.p.

pour cela, il nous suffit de démontrer que les projections de F et de $\tilde{F}$ sur chaque $\chi^n \eta \ominus \chi^{n+1} \eta$ $n=0,1,2,\dots$ sont les mêmes.

En effet

$$(3) \quad (\tilde{F}, E_k)_{L^2_{\mathcal{H}}} = \int (\sum_j h_j E_j, E_k)_{\mathcal{H}} d\sigma = \int h_k(e^{ix}) d\sigma = a_k^{(0)}$$

d'après (2)

et

$$(4) \quad (F, E_k)_{L^2_{\mathcal{H}}} = \int (\sum_j a_j^{(0)} E_j, E_k)_{\mathcal{H}} d\sigma = a_k^{(0)}$$

car $E_j \perp \pi^n E_k \quad \forall n > 0$, donc les termes $a_j^{(n)}$ pour $n \neq 0$ n'interviennent pas dans $(F, E_k)_{L^2_{\mathcal{H}}}$.

(3) et (4) donnent :

$$(\tilde{F}, E_k)_{L^2_{\mathcal{H}}} = (F, E_k)_{L^2_{\mathcal{H}}} \quad \forall k,$$

de même

$$(\tilde{F}, \pi^n E_k)_{L^2_{\mathcal{H}}} = (F, \pi^n E_k)_{L^2_{\mathcal{H}}} \quad \forall n > 0, \quad \forall k,$$

C.Q.F.D.

nous allons dans ce qui suit caractériser les sous-espaces $\mathcal{U}$ s.i. de $L^2_{\mathcal{H}}$.

Considérons $\mathcal{H}_1$ un espace de Hilbert dont la dimension (finie ou infinie) est égale à celle de $\mathcal{U} \ominus \pi \mathcal{U}$ qui est appelé rang de $\mathcal{U}$. Il est clair que le rang de $\mathcal{U} \ominus \pi \mathcal{U}$ est 0 si et seulement si $\mathcal{U}$ est c.i.

Soit $(\varphi_1, \varphi_2, \dots)$ une base de $\mathcal{H}_1$, $(E_j)_{j \geq 1}$ une base de $\mathcal{U} \ominus \pi \mathcal{U}$, définissons l'opérateur $\mathcal{U}$ par :

$$\begin{cases} \mathcal{U} \varphi_j = E_j & \forall j \\ \mathcal{U}(\pi^n \varphi_j) = \pi^n E_j \end{cases}.$$

L'opérateur $\mathcal{U}$ ainsi défini est :

- 1) une isométrie de $\mathcal{H}_1$ sur $\mathcal{U} \ominus \pi \mathcal{U}$
- 2) une isométrie de $L^2_{\mathcal{H}_1}$ sur $\mathcal{U}_{-\infty}$.

En effet, comme $\mathcal{U}$ transforme une base de $\mathcal{H}_1$ en une base de $\mathcal{H} \ominus \pi\mathcal{H}$ donc 1) est démontré.

Pour démontrer 2) il nous suffit de remarquer que l'ensemble

$$\mathcal{G} = \left\{ \sum h_j E_j / \begin{array}{l} h_j \in L^2 \\ \sum_{L^2} \|h_j\|^2 < +\infty \end{array} \right\}$$

est identique à

$$\mathcal{H}_{-\infty} = \overline{\bigcup_{n>-\infty} \pi^n \mathcal{H}}$$

$\mathcal{U}$ -transforme donc un ensemble total de $L^2_{\mathcal{H}_1}$ en un ensemble dense de $\mathcal{H}_{-\infty}$ donc $\mathcal{U}$ est une isométrie de $L^2_{\mathcal{H}_1}$ sur $\mathcal{G} = \mathcal{H}_{-\infty}$.

Cela étant, définissons l'opérateur $\mathcal{U}(e^{ix})$ pour presque chaque x par :

$$\mathcal{U}(e^{ix}) \varphi_j = E_j(e^{ix}) \quad \forall j.$$

Par sa définition même, $\mathcal{U}(e^{ix})$ est une fonction mesurable et isométrique p.p. de $\mathcal{H}_1$ dans $\mathcal{H}$.

Soit $\mathcal{J}$ la fonction directionnelle définie par :

$$\mathcal{J}(e^{ix}) = \text{sp} \{ E_j(e^{ix}) \} \subset \mathcal{H} \quad \text{p.p.}$$

c.a.d. le sous-espace vectoriel fermé engendré par $\{ E_j(e^{ix}) \}_{j=1}^{\infty}$.
D'après ce qui précède $\mathcal{U}(e^{ix})$ est une isométrie de $\mathcal{H}_1$ sur $\mathcal{J}(e^{ix})$ p.p.

Soit maintenant l'opérateur global $\mathcal{U}$ défini par

$$(\mathcal{U} F)(e^{ix}) = \mathcal{U}(e^{ix}) F(e^{ix}) \quad \text{p.p.} \quad \forall F \in L^2_{\mathcal{H}_1}.$$

Il est clair que $\mathcal{U} H^2_{\mathcal{H}_1}$ est simplement invariant et pur.
D'après ce qui précède et d'après le théorème précédent on a :

$$\mathcal{U} H^2_{\mathcal{H}_1} = \eta.$$

donc on a le théorème suivant :

Théorème de Beurling-Lax.

Soit η un sous espace s.i. pur $CL^2_{\mathcal{H}}$
alors :

$$\eta = \mathcal{U} H^2_{\mathcal{H}_1}$$

pour un espace de Hilbert $\mathcal{H}_1$ convenablement choisi et $\mathcal{U}$ tq
 $\mathcal{U}(e^{ix})$ est une isométrie pour presque chaque x de $\mathcal{H}_1$ dans $\mathcal{H}$.

Soit $\mathfrak{m}$ un sous-espace s.i. $CL^2_{\mathcal{H}}$
alors : $\mathfrak{m} = \mathfrak{m}_{\infty} \oplus \eta$

où η est s.i. et pur, $\mathfrak{m}_{\infty}$ est c.i.

donc $\mathfrak{m}_{\infty} = \mathfrak{m}_{\mathcal{K}}$ avec $\mathcal{K}$: f.d. mesurable.

d'après le théorème précédent on a :

$$\eta = \mathcal{U} H^2_{\mathcal{H}_1}$$

et

$$\mathfrak{m}_{-\infty} = \mathfrak{m}_{\mathcal{J}}$$

où $\mathcal{J}(e^{ix})$ est l'image de $\mathcal{U}(e^{ix})$ pour presque chaque e^{ix}
et

$$\mathcal{J}(e^{ix}) \perp \mathcal{K}(e^{ix}) \text{ p.p.}$$

car $\mathfrak{m}_{\infty}$ est c.i.

donc le théorème précédent peut s'énoncer sous une autre forme.

Théorème. - Tout sous-espace $\mathfrak{m}$ s.i. de $L^2_{\mathcal{H}}$ est de la forme

$$\mathfrak{m} = \mathcal{U} H^2_{\mathcal{H}_1} \oplus \mathfrak{m}_{\mathcal{K}}$$

où $\mathcal{H}_1$ est un espace de Hilbert convenablement choisi, $\mathcal{U}(e^{ix})$
est une isométrie de $\mathcal{H}_1$ dans $\mathcal{H}$ p.p. dont les valeurs sont
 $\mathcal{J}(e^{ix})$ et $\mathcal{J}(e^{ix})$ est orthogonal à $\mathcal{K}(e^{ix})$ p.p.

Dans ce qui suit nous allons étudier l'opérateur $\mathcal{U}$ précédent et
on a le théorème suivant

Théorème. -

$$\begin{aligned} u^*u &= \text{Id} \quad \text{p.p. dans } \mathcal{H}_1 \\ uu^* &= \text{projecteur de } \mathcal{H} \text{ sur } \mathcal{J}(e^{ix}) \text{ p.p.} \end{aligned}$$

Démonstration. - comme

$$(u^*u \varphi_j, \varphi)_{\mathcal{H}_1} = (u \varphi_j, u \varphi)_{\mathcal{H}} = (\varphi_j, \varphi)_{\mathcal{H}_1}, \quad \forall \varphi \in \mathcal{H}_1$$

donc

$$u^*u \varphi_j = \varphi_j \quad \text{pour chaque } j$$

autrement dit

$$u^*u = \text{Identité sur } \mathcal{H}_1 \quad \text{p.p.}$$

Cela implique que $uu^* = \text{identité sur } \mathcal{J}$.

Il nous reste donc à démontrer que $uu^* = 0$ sur $\mathcal{J}^\perp$. En effet, soit $F \in L^2_{\mathcal{H}}$ tq $F \perp \mathcal{J}$ p.p.

alors

$$(u^*F, \varphi)_{\mathcal{H}_1} = (F, u \varphi)_{\mathcal{H}} = 0 \quad \text{p.p.}$$

donc

$$u^*F = 0 \quad \text{p.p.}$$

C.Q.F.D.

TROISIEME SEANCE

Définition. - Soit $\mathcal{M}$ un sous-espace vectoriel fermé de $L^2_{\mathcal{H}}$,
 $\mathcal{M}$ est dit complet si $\mathcal{M} \subset \mathcal{M}_J \Rightarrow J(e^{ix}) = \mathcal{H}$ p.p.

Soit $\mathcal{M}$ un sous-espace s.i. d'après le théorème de Beurling-Lax

$$\mathcal{M} = \mathcal{M}_K \oplus \mathcal{U} H^2_{\mathcal{H}_1}$$

et soit

$$J(e^{ix}) = \mathcal{U}(e^{ix}) \mathcal{H}_1$$

on a

$$\mathcal{M}_J = (\mathcal{U} H^2_{\mathcal{H}_1})_{-\infty}$$

donc si $\mathcal{M}$ est complet alors

$$\mathcal{H} = J(e^{ix}) \oplus \mathcal{K}(e^{ix}) \quad \text{p.p.}$$

$\mathcal{M}$ est dit pur si $\mathcal{M}_{\mathcal{K}} = \{0\}$

$$\text{ou } \mathcal{U} H^2_{\mathcal{H}_1} = \{0\}$$

Proposition. - Soit $\mathcal{M}$ s.i. $\subset H^2_{\mathcal{H}}$ alors $\mathcal{M}$ est pur.

Démonstration. - c'est évident !

Définition. - $\mathcal{U}$ est dite analytique si

$$\mathcal{U}\varphi \in H^2_{\mathcal{H}} \quad \forall \varphi \in \mathcal{H}_1.$$

Lemme. - Soit $\mathcal{U}$ isométrique p.p. de $\mathcal{H}_1$ dans $\mathcal{H}$ alors
 $(\mathcal{U} \text{ est analytique}) \Leftrightarrow (\mathcal{U} H^2_{\mathcal{H}_1} \subset H^2_{\mathcal{H}})$.

Preuve. - ($\Rightarrow$) Soit $\{\varphi_j\}_{j=1}^{\infty}$ une base orthonormale de $\mathcal{H}_1$

$$\forall \varphi_j \in \mathcal{H}_1, \quad u\varphi_j \in H_{\mathcal{H}}^2 \Rightarrow \chi^k u\varphi_j = u\chi^k \varphi_j \in H_{\mathcal{H}}^2 \quad \forall k \geq 0$$

or l'ensemble

$$\left\{ \chi^n \varphi_j ; \begin{array}{l} n = 0, 1, 2, \dots \\ j = 1, 2, \dots \end{array} \right\} \quad \text{engendre } H_{\mathcal{H}_1}^2$$

donc :

$$uH_{\mathcal{H}_1}^2 \subset H_{\mathcal{H}}^2$$

($\Leftarrow$) c'est trivial

C.Q.F.D.

Définition. - J est dite analytique s'il existe un ensemble dénombrable $\{F_j\}$ dans $H_{\mathcal{H}}^2$ t.q. :

$$J(e^{ix}) = \text{sp}\{F_j(e^{ix})\} \quad \text{p.p.}$$

notation : $\text{sp}\{F_j(e^{ix})\}$ le sous-espace fermé engendré par $\{F_j(e^{ix})\}$ dans $\mathcal{H}$

Théorème. - A chaque J fonction directionnelle analytique on peut choisir des F_j soit E_j dans $H_{\mathcal{H}}^2$ t.q. les $\{E_j(e^{ix})\}_{j=1}^{\infty}$ forment p.p. une base orthonormale de $J(e^{ix})$.

Preuve. - Soit $\mathcal{G}_J = \mathcal{M}_J \cap H_{\mathcal{H}}^2$

Il est clair que $\mathcal{G}_J$ est un sous-espace s.i. et pur donc d'après le théorème de Beurling-Lax on a :

$$\mathcal{G}_J = uH_{\mathcal{H}_1}^2$$

où $u(e^{ix})$ est une isométrie de $\mathcal{H}_1$ sur $J(e^{ix})$ p.p. et u est analytique car :

$$\mathcal{G}_J = uH_{\mathcal{H}_1}^2 \subset H_{\mathcal{H}}^2$$

Soit $E_j = U \tilde{e}_j$ où $(\tilde{e}_j)$ est une base orthonormale de $\mathcal{H}_1$
on a déjà remarqué que les $\{E_j\}$ sont orthonormales p.p.
[$U(e^{ix})$ étant isométrique p.p.]

$$\text{or} \quad \text{Sp}(E_j(e^{ix})) = J(e^{ix}) \quad \text{p.p.}$$

donc les $\{E_j\}$ ont les propriétés demandées (puisque U
analytique $U(e_j) = E_j \in H_{\mathcal{H}}^2 \quad \forall j$)

C.Q.F.D.

Corollaire. - Si J est une fonction directionnelle analytique alors sa dimension est constante dans le sens que

$$\dim J(e^{ix}) = \begin{cases} N & \text{p.p.} \\ \text{ou bien} \\ \infty & \text{p.p.} \end{cases}$$

Preuve. - En effet

$$\text{Sp} \{E_j(e^{ix})\} = J(e^{ix}) \quad \text{p.p.}$$

donc

$$\text{Card} \{(E_j)\} = \text{Card} (\tilde{e}_j) \quad \text{p.p.}$$

et le dernier est constant

C.Q.F.D.

Définition. - U est dite fonction unitaire si elle opère dans un même espace de Hilbert $\mathcal{H}$ et ses valeurs sont unitaires et $U(e^{ix})$ est mesurable.

Il est aisé de vérifier que si U est une fonction unitaire alors :

$$U H_{\mathcal{H}}^2 = \mathcal{M} \text{ est un sous-espace :}$$

- 1) s.i.
- 2) pur
- 3) complet

Si de plus $\eta = u H_{\mathcal{H}}^2 \subset H_{\mathcal{H}}^2$ alors u est dite intérieure.

Lemme. - Si u est unitaire

on a : $(u H_{\mathcal{H}}^2 = H_{\mathcal{H}}^2) \iff (u \text{ opérateur constant})$.

Preuve. - Condition suffisante :

Si u est constante unitaire alors

$(u(e^{ix}) e_j)_{j=1}^{\infty}$ forment p.p. une autre base de $\mathcal{H}$.

Condition nécessaire :

Si $u H_{\mathcal{H}}^2 = H_{\mathcal{H}}^2$ alors u est analytique

et

$u^* u H_{\mathcal{H}}^2 = H_{\mathcal{H}}^2 = u^* H_{\mathcal{H}}^2$ car $u^* u = \text{Id}$ p.p.

donc u^* est analytique

donc $\forall \psi, \varphi \in \mathcal{H}$ on a :

$(u^* \psi, \varphi) = (\psi, u \varphi)$ est analytique

or $(u \varphi, \varphi)$ est analytique

donc :

$(u \varphi, \psi) = \overline{(\psi, u \varphi)}$ est analytique

$\Rightarrow (u \varphi, \psi)$ est constante $\Rightarrow U$ est un opérateur constant unitaire.

C.Q.F.D.

Théorème. - Soient u et v deux isométries de $\mathcal{H}_1$ dans $\mathcal{H}$ p.p. alors :

$$1) \quad u H_{\mathcal{H}_1}^2 = v H_{\mathcal{H}_1}^2$$

si et seulement si $u = v A$

où A est unitaire constant dans $\mathcal{H}_1$

$$2) \quad u H_{\mathcal{H}_1}^2 \subset v H_{\mathcal{H}_1}^2$$

si et seulement si $u = v^* Q$

où Q est analytique et isométrique dans $\mathcal{H}_1$.

Preuve. -

Remarquer que 1) résulte de 2)

Donc il nous reste à démontrer 2).

2) Si $u \mathcal{H}_1^2 \subset v \mathcal{H}_1^2$ on aura :

$$v^* u \mathcal{H}_1^2 \subset \mathcal{H}_1^2$$

poser $Q = v^* u$:

alors $Q \mathcal{H}_1^2 \subset \mathcal{H}_1^2$

donc Q est analytique.

Q est isométrique car :

$$Q = v^* u$$

u étant isométrique, et v^* conserve les normes pour les éléments de $v \mathcal{H}_1 = u \mathcal{H}_1$.

enfin

$$u = v Q$$

C.Q.F.D.

Soit J une fonction directionnelle analytique on peut choisir un nombre dénombrable (E_j) d'éléments de $\mathcal{H}_1^2$ t.q. $\{E_j(e^{ix})\}_{j \geq 1}$ forment p.p. une base orthonormale de $J(e^{ix})$ et de plus chaque $F \in \mathcal{H}_1^2$ à valeurs dans J s'écrit comme $\sum h_j E_j$ avec $h_j \in \mathcal{H}_1^2$ une telle famille (E_j) est appelée base analytique extérieure de J .

Théorème. - Soit $\{E'_j\}_{j \geq 1}$ une autre base analytique extérieure de J alors E'_j peut s'écrire :

$$E_j'(e^{ix}) = \sum_{k \geq 1}^{\infty} a_{jk} E_k(e^{ix})$$

où $A = (a_{j,k})_{j,k \geq 1}$ est une matrice unitaire constante

Il y a d'autres bases analytiques non extérieures en voici une .

Soit $\mathcal{V}$ intérieur non constant dans $\mathcal{H}_1$ alors

$\{E_j\} = \{u \mathcal{V} \tilde{e}_j\}$ est une telle base de $\mathcal{J}$

pour presque chaque point $\{E_j(e^{ix})\}$ est une base orthonormale de $\mathcal{J}(e^{ix})$ mais $u \mathcal{V} H_{\mathcal{H}_1}^2$ ne remplit pas $\mathcal{G}_J$ tout entier parce que $\mathcal{V} H_{\mathcal{H}_1}^2 \subsetneq H_{\mathcal{H}_1}^2$

Soit $\mathcal{M}$ un sous-espace s.i. pur $\subset H_{\mathcal{H}}^2$

alors $\mathcal{M} = u H_{\mathcal{H}_1}^2$, soit $\mathcal{J}$ la f.d. engendré par $\mathcal{M}$

$\mathcal{M} \subset \mathcal{G}_J = \mathcal{V} H_{\mathcal{H}_1}^2 = \mathcal{M}_J \cap H_{\mathcal{H}}^2$; $\mathcal{V}$ est isométrique extérieure,

d'après le théorème précédent

$$u = \mathcal{V} Q$$

où Q est intérieure.

Donc l'étude de $\mathcal{M}$ est réduite :

1°) à l'étude de $QH_{\mathcal{H}_1}^2$ ou à l'étude de Q intérieure dans $\mathcal{H}_1$ et

2°) à l'étude de $\mathcal{V} H_{\mathcal{H}_1}^2$ ou à l'étude de $\mathcal{J} = \mathcal{V} \mathcal{H}_1$ f.d. analytique.

Théorème. - u et $\mathcal{V}$ étant intérieures :

alors :

$$(u H_{\mathcal{H}}^2 \subset \mathcal{V} H_{\mathcal{H}}^2) \iff (u = \mathcal{V} W \text{ où } W \text{ est intérieure}).$$

Démonstration. - c'est évident.

QUATRIEME et CINQUIEME SEANCES

Rappel : Soit M un opérateur Auto-adjoint de $\mathcal{H}$ dans lui-même alors il existe une famille spectrale (P_λ) t.q. :

- 1) P_λ est croissante en c.a.d. $P P_t = P$ si
 - 2) $\lim_{\lambda \rightarrow -\infty} P_\lambda = 0$
 - 3) $\lim_{\lambda \rightarrow -\infty} P_\lambda = I$
- } au sens de la topologie forte

et

$$M = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda dP_\lambda \quad \text{si } M \text{ est non borné}$$

$$M = \int_{-\|M\|}^{\|M\|} \lambda dP_\lambda \quad \text{si } M \text{ est borné.}$$

Remarques : 2) et 3) sont équivalentes à

$$a) \bigcap_{\lambda \rightarrow -\infty} P_\lambda \mathcal{H} = 0$$

$$\overline{\bigcup_{\lambda \rightarrow \infty} P_\lambda \mathcal{H}} = \mathcal{H}$$

b) Si M est non borné, le domaine de définition de $M : (\mathcal{D}(M))$ consiste en tous les éléments $x \in \mathcal{H}$ t.q. :

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\lambda|^2 d\|P_\lambda x\|^2 < +\infty.$$

c) Soit f une fonction réelle continue et bornée.

l'intégrale vectorielle $f(M) = \int f(\lambda) dP_\lambda$ est bien définie comme un opérateur auto-adjoint borné, en particulier si $f(\lambda) = e^{i\lambda}$:

$$e^{iM} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda} dP_\lambda$$

et on a le théorème suivant :

Théorème de Stone. - Chaque groupe à un paramètre V_t unitaire et continu est de la forme

$$V_t = e^{itM}$$

où M est auto-adjoint de $\mathcal{H}$ dans lui-même, non nécessairement borné, et M parfaitement déterminé par $\{V_t\}$.

De plus étant donnés les V_t

$$iMx = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{V_t x - x}{t}, \quad \forall x \in \mathcal{D} M$$

pour la norme de $\mathcal{H}$,

et cette limite n'existe pas si $x \notin \mathcal{D} M$.

Cela étant, soit u unitaire dans $\mathcal{H}$ p.p. et mesurable il est

clair que $\mathcal{M} = u H_{\mathcal{H}}^2$ est s.i. pur et complet, donc si

P_n est le projecteur sur $\mathcal{M}_n = \chi^n \mathcal{M}$

alors la suite (P_n) est décroissante et

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P_n = 0$$

$$\lim_{n \rightarrow -\infty} P_n = I$$

$$\text{poser } P_\lambda = P_n \text{ si } n-1 < \lambda \leq n$$

$$I - P_\lambda = Q_\lambda \text{ on a :}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} Q_n = I$$

$$\lim_{n \rightarrow -\infty} Q_n = 0$$

d'après la théorie de la décomposition spectrale on peut écrire

$$V_t = \int e^{it\lambda} dQ_\lambda = - \int e^{it\lambda} dP_\lambda$$

Comme $\mathcal{M}$ est pur alors on a :

$$\mathfrak{m} = (\mathfrak{m} \ominus \lambda \mathfrak{m}) \oplus (\lambda \mathfrak{m} \ominus \lambda^2 \mathfrak{m}) \oplus \dots$$

ou

$$\mathfrak{m} = \bigoplus_{n=0}^{\infty} R_n$$

où

$$R_n = \lambda^n \mathfrak{m} \ominus \lambda^{n+1} \mathfrak{m}$$

1er cas. - si $\mathfrak{m} = H_{\mathcal{H}}^2$

alors

$$R_n = \lambda^n \mathcal{H}$$

sur R_n , V_t est la multiplication scalaire par e^{itn}

$$V_t(e^{inx} \varphi) = e^{in(x+t)} \varphi$$

$$\text{poser } T_t F(e^{ix}) = F(e^{i(x+t)})$$

on a

$$T_t F = V_t F \quad \text{pour } F \in R_n$$

nous allons déterminer B où

$$V_t = e^{itB}$$

on sait que B est auto-adjoint et que :

$$B = - \int_{-\infty}^{\infty} \lambda dP_{\lambda}$$

$$iB(\lambda^n \varphi) = in \lambda^n \varphi$$

$$\frac{d}{dx}(e^{inx} \varphi) = in \lambda^n \varphi$$

donc $iBF = \frac{d}{dx} F$ pour $F \in R_n$

Il est aisé de vérifier que

$$\mathcal{D}(B) = \left\{ F \in L^2_{\mathcal{H}} / F(e^{ix}) \sim \sum \lambda^n \varphi_n \right. \\ \left. \sum n^2 \|\varphi_n\|^2 < \infty \right\}$$

et ce domaine est identique à l'ensemble des F t.q.

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{V_t F - F}{t} = iBF$$

$$V_t F = T_t F \quad \forall F \in \mathcal{D}(B)$$

donc

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{T_t F - F}{t} = F' = iBF \quad \forall F \in \mathcal{D}(B)$$

De plus tout $F \in \mathcal{D}(B)$ est continu :

car

$$F \sim \sum_n \varphi_n \lambda^n$$

alors

$$\sum n^2 \|\varphi_n\|^2 < +\infty \Rightarrow \sum \|\varphi_n\| < +\infty \quad \text{d'après}$$

l'inégalité de Hölder.

Ce qui implique que

$$F = \sum \varphi_n \lambda^n \quad \text{est continu.}$$

2ème cas. - $m = u H^2_{\mathcal{H}} \subset H^2_{\mathcal{H}}$ où u est unitaire

$$B = - \int_{-\infty}^{\infty} \lambda dP_{\lambda}$$

comme m est pur on peut écrire :

$$\begin{aligned} m &= (m \ominus \lambda m) \oplus (\lambda m \ominus \lambda^2 m) \oplus \dots \\ &= u \mathfrak{X} \oplus (u \lambda \mathfrak{X}) \oplus (u \lambda^2 \mathfrak{X}) \oplus \dots \\ &= R_0 \oplus R_1 \oplus R_2 \dots \end{aligned}$$

il est clair que :

$$iB(u \lambda^n \varphi) = i\eta(u \lambda^n \varphi) = uD(\lambda^n \varphi)$$

c.a.d.

$$iBu = uD \quad \text{sur } R_n, \quad \forall n$$

et on a le théorème suivant :

Théorème. -

$$[F \in \mathcal{D}(D)] \iff \left\{ \begin{array}{l} uF \in \mathcal{D}(B) \\ \text{et} \\ iBuF = uDF \quad \forall F \in \mathcal{D}(D) \end{array} \right\}$$

Preuve. - c'est évident, la démonstration découle immédiatement de la définition de $\mathcal{D}(B)$.

Définition. - u est dit dérivable si

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{u(e^{i(x+t)}) - u(e^{ix})}{t} \quad \text{existe dans le sens}$$

qu'il existe un opérateur $u'(e^{ix})$ t.q :

$$(1) \quad \left\| \frac{T_t u - u}{t} - u' \right\|_{L_{\mathfrak{H}}}^2 \xrightarrow[t \rightarrow 0]{} 0$$

Proposition. - u^* est dérivable en même temps que u et

$$u'^* = u^{*'}.$$

Preuve. - (1) donne

$$\left\| \frac{T_t u^* - u^*}{t} - u'^* \right\|_{L_{\mathfrak{H}}}^2 \xrightarrow[t \rightarrow 0]{} 0$$

C.Q.F.D.

on sait que $I = uu^*$

donc

$$0 = uu^* + uu^* \quad (2)$$

et on pose

$$-iM = uu^*$$

(2) implique que $M = M^*$

Lemme. - Soit Q un opérateur borné dans $L^2_{\mathcal{H}}$ qui commute avec toutes les multiplications par des fonctions scalaires bornées (c.a.d. pour toute fonction scalaire bornée $q(e^{ix})$ on a :

$$q(e^{ix})QF = Q(qF) \quad \forall F \in L^2_{\mathcal{H}})$$

alors il existe une fonction $\tilde{Q}(e^{ix})$ dont les valeurs sont des opérateurs dans $\mathcal{H}$ t.q. :

$$(QF)(e^{ix}) = \tilde{Q}(e^{ix}) F(e^{ix}) \quad \text{p.p. pour } \forall F \in L^2_{\mathcal{H}}$$

De plus :

$$\text{ess-sup}_{\mathcal{H}} \|\tilde{Q}(e^{ix})\| = \|Q\|_{L^2_{\mathcal{H}}}$$

Preuve. - Il nous suffit de démontrer le lemme pour le cas de dimension finie car dans le cas infini,

Soit $\{e_n\}$ une base de $\mathcal{H}$,

P_n le projecteur de $\mathcal{H}$ sur $\text{Sp}\{e_1, \dots, e_n\}$

il est clair que P_n commute avec toutes les multiplications scalaires donc $P_n Q P_n$ aussi, $\forall n$, le lemme étant démontré pour le cas de dimension finie donc il existe un opé-

rateur $\tilde{Q}_n(e^{ix})$ t.q. :

$$(P_n Q P_n) \text{ est défini par } \tilde{Q}_n(e^{ix})$$

et le lemme sera démontré en faisant tendre n vers l'infini. Cela étant, nous supposons $\mathcal{H}$ de dimension finie.

Soit $e_1, \dots, e_n$ une base de $\mathcal{H}$, on pose :

$$\tilde{Q}(e^{ix}) e_j = (Q e_j)(e^{ix})$$

nous allons démontrer que

$$(QF)(e^{ix}) = \tilde{Q}(e^{ix}) F(e^{ix}) \quad \text{p.p. pour } \forall F \in L^2_{\mathcal{H}}.$$

En effet c'est évident pour $\forall \varphi \in \mathcal{H}$ et pour tout polynôme trigonométrique car Q est supposé commuter avec toutes les multiplications scalaires.

Soit $F \in L^2_{\mathcal{H}}$, il existe une suite de polynômes P_n qui tend vers F dans $L^2_{\mathcal{H}}$, on peut en extraire une sous suite F_{n_j} qui tend vers F p.p.

donc

$$\tilde{Q}(e^{ix}) F_{n_j}(e^{ix}) \longrightarrow \tilde{Q}(e^{ix}) F(e^{ix}) \quad \text{p.p.}$$

et

$$QF_{n_j} \longrightarrow QF \quad \text{dans } L^2_{\mathcal{H}}$$

autrement dit

$$(QF)(e^{ix}) = \tilde{Q}(e^{ix}) F(e^{ix}) \quad \text{p.p.}$$

Il nous reste à démontrer que :

$$\sup_x \text{ess} \|\tilde{Q}(e^{ix})\|_{\mathcal{H}} = \|Q\|_{L^2_{\mathcal{H}}}$$

Il est clair que :

$$\sup_x \text{ess} \|\tilde{Q}(e^{ix})\|_{\mathcal{H}} \geq \|Q\|_{L^2_{\mathcal{H}}},$$

si

$$\sup_x \|\tilde{Q}(e^{ix})\|_{\mathcal{H}} > \|Q\|_{L^2_{\mathcal{H}}}$$

alors il existe ε , un ensemble ξ de mesure non nulle ($\sigma(\xi) > 0$) et un $\varphi \in \mathcal{H}$ de norme 1 t.q. :

$$\|\tilde{Q}(e^{ix})\varphi\|_{\mathcal{H}} \geq \|Q\|_{L^2_{\mathcal{H}}} + \varepsilon \quad \text{sur } \xi$$

Soit F la fonction définie par :

$$F(e^{ix}) = \begin{cases} \varphi & x \in \xi \\ 0 & x \notin \xi \end{cases}$$

$$F \in L^2_{\mathcal{H}} \quad \text{et} \quad \|F\|_{L^2_{\mathcal{H}}}^2 = \int_{\xi} \|\varphi\|_{\mathcal{H}}^2 d\sigma = \sigma(\xi)$$

et

$$\|QF\|_{L^2_{\mathcal{H}}}^2 = \int \|\tilde{Q}(e^{ix}) F(e^{ix})\|_{\mathcal{H}}^2 d\sigma \geq (\|Q\| + \varepsilon)^2 \sigma(\xi)$$

donc

$$\|QF\|^2 \geq (\|Q\| + \varepsilon)^2 \sigma(\xi) = (\|Q\| + \varepsilon)^2 \|F\|^2$$

ce qui est impossible.

C.Q.F.D.

donc si Q satisfait le lemme précédent on écrit $Q(e^{ix})$ au lieu de $\tilde{Q}(e^{ix})$.

Théorème. - Si $\mathcal{U}$ est dérivable alors

$$\mathcal{D}(B) = \mathcal{D}(iD) \quad \text{et}$$

$$B = -iD - M$$

où M est auto-adjoint borné et commute avec toutes les multiplications scalaires, donc d'après le lemme précédent

$$\|M(e^{ix})\|_{\mathcal{H}} \leq \|M\|_{L^2_{\mathcal{H}}}$$

Preuve. - Le théorème résulte de ce qui précède

C.Q.F.D.

Par définition

$$M = + iU U'^* \Rightarrow U' = iMU \Rightarrow U'\varphi = iM(U\varphi) \quad \forall \varphi \in \mathcal{H}$$

Il est aisé de vérifier que :

$$(F \in \mathcal{D}_B^{\subset B}, \quad BF = 0) \Leftrightarrow (F \in R_0 = \{U\varphi / \varphi \in \mathcal{H}\})$$

donc si $F \in R_0$ alors F est une solution de l'équation différentielle $F' = iMF$ inversement on a le théorème suivant :

Théorème. - Si F est une solution dans le sens ordinaire de l'équation différentielle

$$F' = iMF \quad (3)$$

alors $F \in R_0$

Preuve. - Nous savons que $U\varphi$ est une fonction continue pour $\forall \varphi \in \mathcal{H}$ donc $U(1)$ est un opérateur bien défini poser :

$$U_1 = U \cdot U^{-1}(1)$$

$$U_1(1) = I \quad \text{dans } \mathcal{H}$$

et U_1 vérifie l'équation :

$$U_1' = iM U_1$$

donc on peut supposer que $U(1) = I$ dans $\mathcal{H}$ et pour chaque $\varphi \in \mathcal{H}$, $U\varphi$ est une solution F de (3) avec $F(1) = \varphi$.

Cela étant, soit G une solution de (3) t.q. $G(1) = \varphi$ d'après ce qui précède, il existe un $F \in R_0$ qui est une solution de (3) avec la condition initiale $F(1) = \varphi$

or $F-G$ est une solution de (3) et

$(F-G)(1) = 0$ donc la théorie classique des équations différentielles affirme que $F = G$

autrement dit $G \in R_0$

C.Q.F.D.

Dans ce qui suit nous avons besoin du lemme suivant :
(sans démonstration).

Lemme. - Soit M un opérateur de $L^2_{\mathcal{H}}$ tel que :

$$a) \|M(e^{ix})\|_{\mathcal{H}} \leq K < +\infty$$

$$b) M(e^{ix}) \text{ est a.a. presque partout}$$

alors $-iD - M$ est un opérateur a.a. dans $L^2_{\mathcal{H}}$ dont le domaine est $\mathcal{D}(D)$.

D'après ce qui précède, à tout sous-espace $\mathcal{M}$ s.i. pur et complet de $L^2_{\mathcal{H}}$ correspond un opérateur unitaire u et si u est dérivable, à $\mathcal{M}$ correspond un opérateur M :

$$M = + iuu^*$$

Inversement, si seulement $M(e^{ix})$ est borné a.a. en posant :

$B = -iD - M$ qui est un opérateur a.a. dans $L^2_{\mathcal{H}}$ à domaine $\mathcal{D}(D)$, on retrouve

$$B = \int \lambda dP_{\lambda}$$

$$\mathcal{M} = P_{-0} L^2_{\mathcal{H}} = \mathcal{U} H^2_{\mathcal{H}}$$

et les éléments de $\mathcal{M} \ominus \lambda \mathcal{M}$ sont exactement les solutions de l'équation différentielle $F' = iMF$.

D'après ce qui précède on a vu que si $F \in L^2_{\mathcal{H}}$ étant une solution de l'équation différentielle :

$$F' = iMF$$

est une solution de $BF = 0$ alors F est périodique donc pour que le problème soit possible il faut que toute solution de l'équation $F' = iMF$ soit périodique et on a le lemme suivant :

Lemme. - F étant une solution classique de $F' = iMF$

(F solution de $BF = 0$) $\Leftrightarrow$ (F est périodique) .

Preuve. - En effet, il nous suffit de démontrer que

$$F \in \mathcal{D}_{iD}$$

$$F \sim \sum \lambda^n \psi_n \quad \text{comme} \quad F' = iMF \Rightarrow F' \in L^2_{\mathcal{H}}$$

$$F' \sim i \sum n^2 \lambda^n \psi_n \Rightarrow \sum n^2 \|\psi_n\|^2 < +\infty \Rightarrow F \in \mathcal{D}_{iD}$$

C.Q.F.D.

Théorème. - Si $B + iD$ est un opérateur borné dans $L^2_{\mathcal{H}}$
avec B a.a. sur $\mathcal{D}(iD)$

$$\text{et} \quad P_{\lambda+n} = \lambda^n P_n \lambda^{-n} \quad (\text{avec} \quad B = - \int_{-\infty}^{\infty} \lambda dP_{\lambda})$$

alors $B = -iD - M$ avec un opérateur borné M auto-adjoint.

Inversement si $B = -iD - M$ avec M opérateur borné a.a. M alors

$$P_{\lambda+n} = \lambda^n P_n \lambda^{-n}$$

Preuve. -

($\Rightarrow$)

$$\text{poser} \quad Q_{\lambda} = \lambda^n P_{\lambda} \lambda^{-n}$$

Il est aisé de vérifier que (Q_{λ}) est un projecteur dans $L^2_{\mathcal{H}}$ et que (Q_{λ}) est décroissant,

$$\text{et} \quad \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} Q_{\lambda} = 0 \quad ; \quad \lim_{\lambda \rightarrow -\infty} Q_{\lambda} = I$$

et $\{Q_{\lambda}\}$ est la famille spectrale de $\lambda^n B \lambda^{-n}$

donc on peut écrire :

$$\chi^n B \chi^{-n} = - \int_{-\infty}^{\infty} \lambda d[\chi^n P_{\lambda} \chi^{-n}] \text{ ce qui a un sens ;}$$

$$\text{d'après l'hypothèse : } P_{\lambda+n} = \chi^n P_{\lambda} \chi^{-n}$$

on a :

$$\chi^n B \chi^{-n} = - \int_{-\infty}^{\infty} (\lambda - n) dP_{\lambda} = - \int_{-\infty}^{\infty} \lambda dP_{\lambda} - nI \quad (4)$$

Le même raisonnement appliqué à $-iD$ donne :

$$-iD - nI = \chi^n (-iD) \chi^{-n}$$

cela implique :

$$\chi^n [B - (-iD)] \chi^{-n} = B + iD$$

c.a.d. $B + iD$ commute avec toutes les multiplications scalaires
donc d'après le lemme (page 34) $B + iD$ est a.a. et $B + iD$
est défini par $M(e^{ix})$ t.q. M est a.a. et borné

$$\text{autrement dit } B = -iD - M$$

C.Q.F.D.

SIXIEME SEANCE

D'après ce qui précède, à chaque sous-espace s.i. pur et complet $\mathfrak{M} \subset H^2_{\mathfrak{H}}$ correspond un opérateur M a.a. borné dans $L^2_{\mathfrak{H}}$ (à condition que $\mathfrak{U}$ soit dérivable avec $\mathfrak{U}H^2_{\mathfrak{H}} = \mathfrak{M}$) et que toute solution de l'équation différentielle

$$F' = iMF \text{ appartient à } P_0 = \mathfrak{U} \mathfrak{H}$$

$$\text{et } B = - \int_{-\infty}^{\infty} \lambda dP_{\lambda}$$

$$\text{avec } P_{n+\lambda} = \chi^n P_{\lambda} \chi^{-n} .$$

Problème : Est ce qu'on peut faire correspondre à tout opérateur M a.a. borné dans $L^2_{\mathfrak{H}}$ un sous-espace s.i. pur et complet $\mathfrak{M}$?

D'après le raisonnement précédent, on trouve une condition nécessaire c'est que la famille spectrale (P_{λ}) est une fonction de saits aux entiers $\{n\}$.

comme $-iD - M$ est un opérateur a.a. dans $L^2_{\mathfrak{H}}$ on peut écrire :

$$-iD - M = - \int_{-\infty}^{\infty} \lambda dP_{\lambda}$$

si de plus $(P_{\lambda})_{\lambda=-\infty}$ satisfait à :

$$P_{\lambda+n} = \chi^n P_{\lambda} \chi^{-n} \quad \forall \lambda, \quad \forall n \text{ entier}$$

on peut démontrer en posant :

$$\mathfrak{M} = P_{-0} L^2_{\mathfrak{H}}$$

que $\mathfrak{M}$ est le sous-espace s.i. pur et complet correspondant à M .

En effet, comme

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P_n = 0$$

$$\lim_{n \rightarrow -\infty} P_n = I$$

et

$$P_{\lambda+\eta} = \chi^\eta P_\lambda \chi^{-\eta}$$

alors $\mathfrak{M} = P_{=0} L_{\mathfrak{H}}^2$ est s.i. , pur et complet.

2ème problème : Etant donné M un opérateur a.a. dans $L_{\mathfrak{H}}^2$ t.q.

$\|M(e^{ix})\|_{\mathfrak{H}} \leq K < \infty$. Est ce que toute solution de l'équation différentielle $F' = iMF$ est à la fois périodique et de classe $H_{\mathfrak{H}}^2$.

Remarquer que d'après la théorie classique des équations différentielles si M est analytique toute solution de l'équation différentielle $F' = iMF$ est analytique.

Or dans le cas que nous étudions, on peut trouver des opérateurs M dans $L_{\mathfrak{H}}^2$ non analytique tandis que toute solution de l'équation différentielle

$$F' = iMF \text{ est de classe } H_{\mathfrak{H}}^2 .$$

par exemple si u est dérivable, $M = iuu^*$ n'est pas analytique car $M = M^*$.

Etant donnés 2 opérateurs M et N a.a. dans $L_{\mathfrak{H}}^2$ t.q.

$$\|M(e^{ix})\|_{\mathfrak{H}} \leq K < +\infty \quad ; \quad \|N(e^{ix})\|_{\mathfrak{H}} \leq K < \infty$$

et à M et N correspondent 2 opérateurs u et v et on a le théorème suivant :

Théorème. - Pour que $uH_{\mathfrak{H}}^2 \subset vH_{\mathfrak{H}}^2$ il faut et il suffit que

$f(-iD-M) \leq f(-iD-N)$ pour toute fonction f réelle continue bornée et croissante.

Preuve. - Comme f est supposée réelle continue et bornée

donc $f(-iD-M) = - \int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda) dP_{\lambda}$ est un opérateur borné dans $L^2_{\mathcal{H}}$

de même pour l'opérateur :

$$f(-iD-N) = - \int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda) dQ_{\lambda}$$

La relation d'ordre :

$$f(-iD-M) \leq f(-iD-N)$$

peut s'interpréter par :

$$(f(-iD-M)F, F) \leq (f(-iD-N)F, F) \quad , \quad \forall F \in L^2_{\mathcal{H}}$$

c. a. d.

$$(1) \quad - \int f(\lambda) d(P_{\lambda}F, F) \leq - \int f(\lambda) d(Q_{\lambda}F, F) \quad , \quad \forall F \in L^2_{\mathcal{H}}$$

poser

$$d\mu_1(\lambda) = -d(P_{\lambda}F, F)$$

$$d\mu_2(\lambda) = -d(Q_{\lambda}F, F)$$

qui sont des mesures positives

poser :

$$\mu_1(\lambda) = \int_{-\infty}^{\lambda} d\mu_1(t)$$

$$\mu_2(\lambda) = \int_{-\infty}^{\lambda} d\mu_2(t) \quad \text{qui sont des fonctions croissantes.}$$

En intégrant par parties, (1) peut s'écrire :

$$- \int_{-\infty}^{\infty} \mu_1(\lambda) df(\lambda) \leq - \int_{-\infty}^{\infty} \mu_2(\lambda) df(\lambda) \quad (2)$$

pour toute f réelle, continue bornée et croissante
donc

$$\mu_1(\lambda) \geq \mu_2(\lambda) \quad , \quad \forall \lambda$$

or
$$\mu_2(\lambda) = \int_{-\infty}^{\lambda} d(Q_{\lambda} F, F)$$

$$\mu_2(\lambda) = \| (I - Q_{\lambda}) F \|^2$$

de même

$$\mu_1(\lambda) = \| (I - P_{\lambda}) F \|^2$$

$$(\mu_1(\lambda) \geq \mu_2(\lambda)) \iff (\|P_{\lambda} F\|^2 \leq \|Q_{\lambda} F\|^2) \quad , \quad \forall \lambda, \quad \forall F \in L^2_{\mathcal{H}} \quad (3))$$

Il nous reste à démontrer que :

$$(3) \iff (u_{\mathcal{H}}^2 \subset v_{\mathcal{H}}^2)$$

En effet

$\|P_{\lambda} F\|$ et $\|Q_{\lambda} F\|$ désignent les normes des projections de $F \in L^2_{\mathcal{H}}$ sur $u_{\mathcal{H}}^2$ et sur $v_{\mathcal{H}}^2$ respectivement donc

$$(3) \iff (u_{\mathcal{H}}^2 \subset v_{\mathcal{H}}^2)$$

C.Q.F.D.

Corollaire. - Si u est intérieur alors M est ≥ 0 p.p.

Démonstration :

En effet, u étant intérieur $\Rightarrow u_{\mathcal{H}}^2 \subset v_{\mathcal{H}}^2$
on pose $\mathcal{V} = I$ le théorème précédent démontre que :

$f(-iD-M) \leq f(-iD)$ pour toute fonction f réelle continue bornée et croissante car $N=0$
en particulier on prend $f(\lambda) = \lambda$

et posons

$$f_n(\lambda) = \lambda \quad |\lambda| \leq n$$

$$f_n(\lambda) = n \quad \lambda \geq n$$

$$f_n(\lambda) = -n \quad \lambda \leq -n$$

$f_n(\lambda)$ est réelle, continue, bornée et croissante donc :

$$f_n(-iD-M) \leq f_n(-iD)$$

c.a.d. pour $\forall F \in \mathcal{D}_{(iD)}$ on a :

$$(f_n(-iD-M)F, F)_{L^2_{\mathcal{H}}} \leq (f_n(-iD)F, F)_{L^2_{\mathcal{H}}}$$

or

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (f_n(-iD-M)F, F)_{L^2_{\mathcal{H}}} = ((-iD-M)F, F)_{L^2_{\mathcal{H}}}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (f_n(-iD)F, F)_{L^2_{\mathcal{H}}} = (-iD.F, F)$$

$$\text{donc } ((-iD-M)F, F) \leq (-iD.F, F), \quad \forall F \in \mathcal{D}_{iD}$$

ce qui démontre que

$$-iD-M \leq -iD$$

autrement dit :

$$M \geq 0 \quad \text{dans } L^2_{\mathcal{H}}$$

donc

$$M(e^{ix}) \geq 0 \quad \text{p.p.}$$

C.Q.F.D.

Comme M vérifie

$$M^2 = u'u'^* \quad (4)$$

donc si u correspondant est intérieur d'après le corollaire précédent $M \geq 0$ et M est bien déterminé par (4).

SEPTIEME SEANCE

Définition. - Soient T un opérateur borné dans $\mathcal{H}$, S un opérateur borné défini sur $\mathcal{H}'$ et à valeurs dans $\mathcal{H}$, Q un isomorphisme de $\mathcal{H}$ sur $\mathcal{H}'$.

T est dit semblable à S ($T \sim S$) si $SQ = QT$.

De plus si $\mathcal{H} = \mathcal{H}'$ et Q est unitaire, T et S sont dits unitairement semblables.

Problème : Est ce vrai que tout opérateur borné T défini sur $\mathcal{H}$ à valeurs dans $\mathcal{H}$ ($\dim \mathcal{H} > 1$) possède un sous-espace fermé $\mathcal{H}_0$ non vide $\mathcal{H}_0 \subsetneq \mathcal{H}$ t.q. :

$$T\mathcal{H}_0 \subset \mathcal{H}_0 \quad ?$$

La réponse est positive quand $\mathcal{H}$ est de dimension finie. Même si $\mathcal{H}$ n'est pas séparable, la réponse est affirmative en effet

Soit $\varphi \in \mathcal{H}$ un élément quelconque non nul de $\mathcal{H}$ $\mathcal{H}_0 = \text{Sp}\{T^n \varphi\}_{n=0}^{\infty}$: l'espace fermé engendré par $\{T^n \varphi\}_{n=0}^{\infty}$.

Il est clair que $\{0\} \neq \mathcal{H}_0 \subsetneq \mathcal{H}$ (car $\mathcal{H}$ n'est pas séparable) et que $T\mathcal{H}_0 \subset \mathcal{H}_0$.

Dans ce qui suit, $\mathcal{H}$ désigne un espace de Hilbert séparable. Soit T un opérateur borné sur $\mathcal{H}$ de norme $\|T\| < 1$. Considérons l'application :

$$\begin{aligned} A : \mathcal{H} &\longrightarrow H_{\mathcal{H}}^2 \\ \varphi &\longrightarrow F_{\varphi} = \sum_{n=0}^{\infty} (T^n \varphi) \lambda^n = (I - \lambda T)^{-1} \varphi \end{aligned}$$

l'expression a un sens car $\|T\| < 1$.

Soit $\mathcal{K} = A\mathcal{H}$, il est aisé de vérifier que A est un isomorphisme de $\mathcal{H}$ sur $\mathcal{K}$.

Considérons l'opérateur S^* défini par :

$$S^*: H_{\mathcal{H}}^2 \longrightarrow H_{\mathcal{H}}^2$$

$$\sum_{n \geq 0} \psi_n \chi^n \longrightarrow \sum_{n \geq 0} \psi_{n+1} \chi^n$$

on a :

$$F_{T\varphi} = \sum_{n=0}^{+\infty} (T^n \varphi) \chi^n = S^* F_{\varphi}.$$

c.a.d. :

$$AT = S^*A$$

S^* et T sont semblables.

Ce qui implique que l'hypothèse sur les sous-espaces invariants en général est donc équivalente à cette même hypothèse sur les sous-espaces $\mathcal{K} \subset H_{\mathcal{H}}^2$ obtenus précédemment.

$$\text{Soit } \mathcal{M} = H_{\mathcal{H}}^2 \ominus \mathcal{K}$$

et S l'opérateur défini par :

$$S\left(\sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n \chi^n\right) = \sum_{n \geq 1} \varphi_{n-1} \chi^n = \chi \left(\sum_{n \geq 0} \varphi_n \chi^n\right)$$

Il est aisé de vérifier que S^* est l'opérateur adjoint de S dans $H_{\mathcal{H}}^2$ et que

$$(S^* \mathcal{K} \subset \mathcal{K}) \iff (S \mathcal{M} \subset \mathcal{M})$$

donc trouver des sous-espaces fermés invariants pour S^* compris entre $\{0\}$ et $\mathcal{K}$ équivaut à trouver des sur-espaces fermés $\mathcal{M}_0$ invariants pour S compris entre $\mathcal{M}$ et $H_{\mathcal{H}}^2$.

Lemme. - Si

$$\mathcal{K} = \left\{ F_{\varphi} / F_{\varphi} = \sum_{n=0}^{\infty} (T^n \varphi) \chi^n \right\} \quad \text{alors}$$

$$\varphi \in \mathcal{H}$$

$$\mathcal{M} = H^2 \ominus \mathcal{K} \text{ est complet.}$$

Preuve. - Il est aisé de vérifier que le vecteur

$$G = T^* \varphi - \varphi \lambda \text{ est orthogonal à } \mathcal{K} \text{ pour } \forall \varphi \in \mathcal{H}$$

Soit $\mathcal{J}$ une f.d. t.q. :

$$\mathcal{M} \subset \mathcal{M}_{\mathcal{J}}$$

nous allons démontrer que $\mathcal{J}(e^{ix}) = \mathcal{H}$ p.p.

En effet on a :

$$T^* \varphi - \varphi \lambda \in \mathcal{J}(e^{ix}) \text{ p.p.}$$

or $\|T^*\| < 1$ donc $T^* - \lambda(e^{ix})$ est inversible dans $\mathcal{H}$ p.p.
ce qui démontre que

$$\varphi \in (T^* - \lambda)^{-1}(\mathcal{J}(e^{ix})) \text{ p.p. (1)}$$

si $\mathcal{J}(e^{ix}) \subsetneq \mathcal{H}$ p.p.

on a :

$$(T^* - \lambda)^{-1} \mathcal{J}(e^{ix}) \subsetneq \mathcal{H} \text{ p.p.}$$

ce qui est en contradiction avec (1) car φ est choisi arbitrairement dans $\mathcal{H}$ donc $\mathcal{J}(e^{ix}) = \mathcal{H}$ p.p.

C.Q.F.D.

$\mathcal{M}$ étant complet et contenu dans $H_{\mathcal{H}}^2$ donc

$$\mathcal{M} = u H_{\mathcal{H}}^2 \text{ où } u \text{ est intérieur.}$$

Proposition. - Les sur espaces de $\mathcal{M} \subset H_{\mathcal{H}}^2$ sont en correspondance biunivoque à des facteurs unitaires constants près avec les factorisations $u = v w$ où v et w sont intérieurs. Si v et w ne sont pas constants

$$\text{alors } u H_{\mathcal{H}}^2 \subsetneq v H_{\mathcal{H}}^2 \subsetneq H_{\mathcal{H}}^2$$

Preuve. - La démonstration découle du fait suivant :

Soit u et v deux fonctions unitaires alors

$$(u H_{\mathcal{H}}^2 \subsetneq v H_{\mathcal{H}}^2) \iff (u = v w \text{ où } w \text{ est intérieur})$$

C.Q.F.D.

Conclusion : D'après ce qui précède on se demande si tout opérateur u intérieur se laisse représenter comme $v\mathcal{W}$ où v et $\mathcal{W}$ sont des opérateurs intérieurs non constants sauf dans le cas où la codimension de $uH_{\mathcal{H}}^2$ dans $H_{\mathcal{H}}^2$ est égale à 1 .
On va trouver la forme de $\mathfrak{M} = uH_{\mathcal{H}}^2 \subset H_{\mathcal{H}}^2$ si $\mathfrak{M}$ est de codimension 1 dans $H_{\mathcal{H}}^2$:

$$\mathfrak{M} = H_{\mathcal{H}}^2 \ominus \mathcal{K} \quad , \quad \text{cod } \mathfrak{M} = 1 \iff \dim \mathcal{K} = 1$$

Soit $G \in \mathcal{K}$, $G \neq 0$

$$G(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n \lambda^n$$

$S^*G \in \mathcal{K}$ car $\mathcal{K}$ est invariant pour S^* et

$$S^*G(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n \varphi_{n+1} = \lambda \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n \lambda^n \quad \text{car } \dim \mathcal{K} = 1$$

$$\text{donc } \varphi_{n+1} = \lambda \varphi_n \quad \forall n$$

cela implique que :

$$\varphi_n = \lambda^n \varphi_0 \quad \forall n$$

$$\text{et } \varphi_0 \neq 0$$

donc

$$G(x) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n \lambda^n \right) \varphi_0 \in H_{\mathcal{H}}^2$$

$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} |\lambda|^{2n} < +\infty \Rightarrow |\lambda| < 1$$

on peut écrire alors :

$$G(x) = \frac{1}{1 - \lambda x} \varphi_0$$

Réciproquement, tout couple (λ, φ) où $|\lambda| < 1$; $\varphi \in \mathcal{H}$ donne lieu à G et à $\mathcal{K} = \{\lambda G\}$ invariant pour S^* ($\mathcal{K}$ est de dim.1)
on va étudier l'espace $\mathfrak{M} = H_{\mathcal{H}}^2 \ominus \mathcal{K}$

$\forall F \in \mathfrak{M}$ on a :

$$0 = (G, F)_{H^2_{\mathcal{H}}} = \int \frac{1}{1-\lambda \bar{\lambda}} (\varphi, F)_{\mathcal{H}} d\sigma = (\varphi, \int (1+\bar{\lambda} \bar{\lambda}^{-1} + \dots + \bar{\lambda}^n \bar{\lambda}^{-n} + \dots) F d\sigma)_{\mathcal{H}}$$

$$\text{or } F = \sum_{n \geq 0} \psi_n \lambda^n$$

donc

$$0 = (G, F)_{H^2_{\mathcal{H}}} = (\varphi, \sum_{n=0}^{+\infty} \bar{\lambda}^n \psi_n)_{\mathcal{H}} = (\varphi, F(\bar{\lambda}))_{\mathcal{H}}$$

autrement dit :

$$(F \in \mathfrak{M}) \iff (F(\bar{\lambda}) \perp \varphi \text{ dans } \mathcal{H}).$$

ce qui nous donne le théorème suivant :

Théorème. -

$$\begin{aligned} (\text{cod } \mathfrak{M} = 1) &\iff (\mathfrak{M} \text{ consiste en toutes les fonctions } F \text{ t.q. :} \\ &\quad F(\bar{\lambda}) \perp \varphi \text{ où } \bar{\lambda} \text{ et } \varphi \text{ sont fixés}) \\ &\quad |\lambda| < 1 \\ &\quad \varphi \neq 0, \varphi \in \mathcal{H} \end{aligned}$$

Dans ce qui suit nous allons étudier la forme de $\mathcal{U}$ associé à $\mathfrak{M}(\bar{\lambda}, \varphi)$. Il est aisé de vérifier que $\mathcal{U}$ est défini par

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{U}(e^{ix})\varphi &= \varphi \text{ si } \varphi \perp \varphi \\ \mathcal{U}(z)\varphi &= \frac{z - \bar{\lambda}}{1 - \bar{\lambda} z} \varphi \end{aligned} \right\} (2)$$

car :

$$\mathcal{U}(\bar{\lambda})F(\bar{\lambda}) \perp \varphi \quad \forall F \in H^2_{\mathcal{H}}$$

en effet

$$F = \sum_{j=0}^{+\infty} f_j e_j \quad \text{où } f_j \in H^2$$

$(e_j)_{j \geq 1}^\infty$ est une base de $\mathcal{H}$ t.q. $e_1 = \varphi$

pour $j=1 \Rightarrow u(\bar{\lambda})\varphi = 0$ d'après (2)
et $j \neq 1 \quad (e_j, \varphi) = 0$

donc $\mathcal{H}_{\mathcal{H}}^2 \subset \mathcal{M}(\bar{\lambda}, \varphi)$

et Inversement chaque fonction appartenant à $\mathcal{M}(\bar{\lambda}, \varphi)$ peut se mettre sous la forme uF pour une fonction F analytique ce qui donne :

$$\mathcal{H}_{\mathcal{H}}^2 = \mathcal{M}(\bar{\lambda}, \varphi)$$

or

$$iM = u' u^{-1}$$

où M est l'opérateur correspondant à $(\varphi, \bar{\lambda})$

Comme

$$u(e^{ix})\psi = \psi \quad \text{si} \quad \psi \perp \varphi$$

$$u'(e^{ix})\psi = 0 \quad \text{si} \quad \psi \perp \varphi$$

$$\begin{aligned} \text{et} \quad u'(e^{ix})\varphi &= \frac{\partial}{\partial x} \frac{e^{ix}}{1 - \lambda e^{ix}} \varphi \quad (\text{par définition de } u(e^{ix})) \\ &= i\lambda \frac{1 - |\lambda|^2}{(1 - \lambda\bar{\lambda})^2} \varphi \end{aligned}$$

$$iM\varphi = u'u^{-1}$$

$$= i \frac{1 - |\lambda|^2}{|1 - \lambda\bar{\lambda}|^2} \varphi$$

$$\text{et} \quad iM\psi = u'u^{-1}\psi = 0 \quad \text{si} \quad \psi \perp \varphi$$

$$\text{pour } \lambda = 0 \Rightarrow iM\varphi = i\varphi$$

$$M(e^{ix}) = \text{projection de } \mathcal{H} \text{ sur } \{\varphi\}$$

c'est le cas où u est trivialement non factorisable. Est ce que l'on peut trouver d'autres u non factorisables en étudiant

les M qui sont des projecteurs p.p. ?

La réponse est négative, en effet on a le théorème suivant :

Théorème. - Si $M(e^{ix})$ est un projecteur dans $\mathcal{H}$ pour presque chaque x et si $\mathcal{U}' = iM\mathcal{U}$ où $\mathcal{U}$ est intérieur alors $\mathcal{U}$ est factorisable, sauf dans le cas où M est constant et son image est de dimension 1 .

Démonstration. - La démonstration se divise en plusieurs étapes supposer que M n'est pas constant et que $\mathcal{U}$ n'est pas factorisable (cas où M est constant est trivial)

1ère étape : $\mathcal{U}$ étant supposé intérieur pour $\forall F \in \mathcal{U}H_{\mathcal{H}}^2 = \mathcal{M}$ on va démontrer que $MF \in H_{\mathcal{H}}^2$ (remarquer que M n'est pas analytique car M est auto-adjoint) en effet soit $G \in H_{\mathcal{H}}^2$ t.q. $F = \mathcal{U}G$

on a $\mathcal{U}'G = iMF$

($\mathcal{U}$ étant analytique) $\Rightarrow \mathcal{U}'G$ l'est aussi donc MF l'est.

2ème étape : Poser $\tilde{\mathcal{M}} = \{ F \in H_{\mathcal{H}}^2 / MF \in H_{\mathcal{H}}^2 \}$

Il est aisé de vérifier que $\tilde{\mathcal{M}}$ est un s.e.v. invariant fermé propre de $H_{\mathcal{H}}^2$ et que

$$\mathcal{M} \subset \tilde{\mathcal{M}} \subsetneq H_{\mathcal{H}}^2$$

Par l'hypothèse provisoire : " $\mathcal{U}$ est non factorisable" nous avons $\mathcal{M} = \tilde{\mathcal{M}}$

Soit $\mathcal{J}(e^{ix})$ l'image de $M(e^{ix})$ alors $\mathcal{J}(e^{ix})$ est le plus petit sous-espace fermé contenant l'image de $\mathcal{U}'$ p.p. donc $\mathcal{J}$ est une f.d. analytique soit V l'opérateur isométrique analytique extérieur qui applique $\mathcal{H}_1$ sur $\mathcal{J}$, remarquons que V est définis par :

$$VH_{\mathcal{H}_1}^2 = \mathcal{G}_{\mathcal{J}} = \mathcal{M}_{\mathcal{J}} \cap H_{\mathcal{H}}^2$$

Il est aisé de vérifier que

$$VV^* = M$$

3ème étape : Soit $\mathcal{H}_1$ l'espace engendré par $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots\}$

on pose

$$F_j = V\alpha_j$$

on va démontrer que

$$V^*\mathcal{M} \subset H_{\mathcal{H}_1}^2$$

En effet, puisque V est extérieure, il nous suffit de prouver que $VV^*\mathcal{M} \subset H_{\mathcal{H}}^2$.

Or dans la 2ème étape on sait que $M = VV^*$

donc

$$VV^*\mathcal{M} = M\mathcal{M} \subset H_{\mathcal{H}}^2 \quad \text{d'après la 1ère étape}$$

autrement dit :

$$V^*\mathcal{M} \subset H_{\mathcal{H}_1}^2$$

de plus $S^*F_j \perp \mathcal{M}$ car pour $VG \in \mathcal{M}$

$$\begin{aligned} (S^*F_j, G)_{\mathcal{H}} &= (F_j, SG)_{\mathcal{H}} = (V\alpha_j, SG)_{\mathcal{H}} \\ &= (\alpha_j, V^*SG)_{\mathcal{H}_1} = (\alpha_j, V^*\lambda G)_{\mathcal{H}_1} \\ &= (\alpha_j, \lambda V^*G)_{\mathcal{H}_1} \end{aligned}$$

or $V^*\mathcal{M} \subset H_{\mathcal{H}_1}^2 \Rightarrow V^*G$ est analytique $\Rightarrow \lambda V^*G$ l'est aussi et sa valeur moyenne est nulle donc

$$\int (\alpha_j, \lambda V^*G)_{\mathcal{H}_1} d\sigma = 0$$

$$S^*F_j \perp \mathcal{M} \Rightarrow S^*F_j \in \mathcal{K}$$

En d'autres termes

$$F_j \in \mathfrak{M} \ominus \lambda \mathfrak{M}$$

$$F_j \in \mathfrak{M} \Rightarrow F_j = U G_j \quad \text{où} \quad G_j \in H^2_{\mathfrak{H}}$$

on va démontrer que $G_j = \text{cste.}$

$$S^* F_j \perp \mathfrak{M} \quad \text{dans} \quad L^2_{\mathfrak{H}} \Rightarrow \lambda^{-1} F_j \quad \text{dans} \quad L^2_{\mathfrak{H}}$$

$$\Rightarrow U \lambda^{-1} G_j \perp \mathfrak{M} \quad \text{dans} \quad L^2_{\mathfrak{H}}$$

ou

$$\lambda^{-1} G_j \perp U^* \mathfrak{M}$$

$$\text{or} \quad U^* \mathfrak{M} = H^2_{\mathfrak{H}} \quad \text{car} \quad \mathfrak{M} = U H^2_{\mathfrak{H}}$$

ce qui revient à dire que

($\lambda^{-1} G_j$ est conjugué analytique et à valeur moyenne nulle)

autrement dit G_j est constante.

4ème étape :

poser

$$F_j = V \alpha_j = U G_j \quad \text{où} \quad \alpha_j \in \mathfrak{H}_1$$

$$G_j \in H^2_{\mathfrak{H}} \quad \text{d'après la 3ème étape}$$

$$\text{or} \quad (F'_j = i M F_j) \Leftrightarrow (F_j \in \mathfrak{M} \ominus \lambda \mathfrak{M})$$

$$\text{mais} \quad M F_j = F_j$$

$$\text{donc} \quad F'_j = i F_j \quad :$$

ou :

$$F'_j = \sum_{n \geq 0} i n \psi_n \lambda^n$$

$$\text{avec} \quad F_j = \sum_{n \geq 0} \psi_n \lambda^n$$

Ce qui donne

$$\sum_{n=0}^{\infty} \ln \psi_n \lambda^n = \sum_{n=0}^{\infty} \psi_n \lambda^n$$

$$\Rightarrow F_j = \psi_1 \lambda$$

on est arrivé ainsi à une contradiction pour 2 raisons :

1ère raison : V est supposé extérieur

or les $\{F_j\}$ se laissent diviser par λ

c.a.d. $VH_{\mathcal{H}_1}^2 \subset \lambda H_{\mathcal{H}}^2$ ce qui est impossible

2ème raison :

$$J(e^{ix}) = \{F_j(e^{ix})\} \text{ chaque fonction } (F_j) \text{ a}$$

une direction constante donc $J = \text{cste} \Rightarrow M = \text{cste}$ ce qui est en contradiction avec l'hypothèse sur M . Le théorème est donc démontré par l'absurde.

C.Q.F.D.

Théorème. - Si $\mathcal{H}$ est de dimension finie chaque $\mathcal{U}$ intérieur peut être factorisé sauf dans le cas trivial.

Voir la démonstration dans "Lectures on invariants subspaces" HELSON